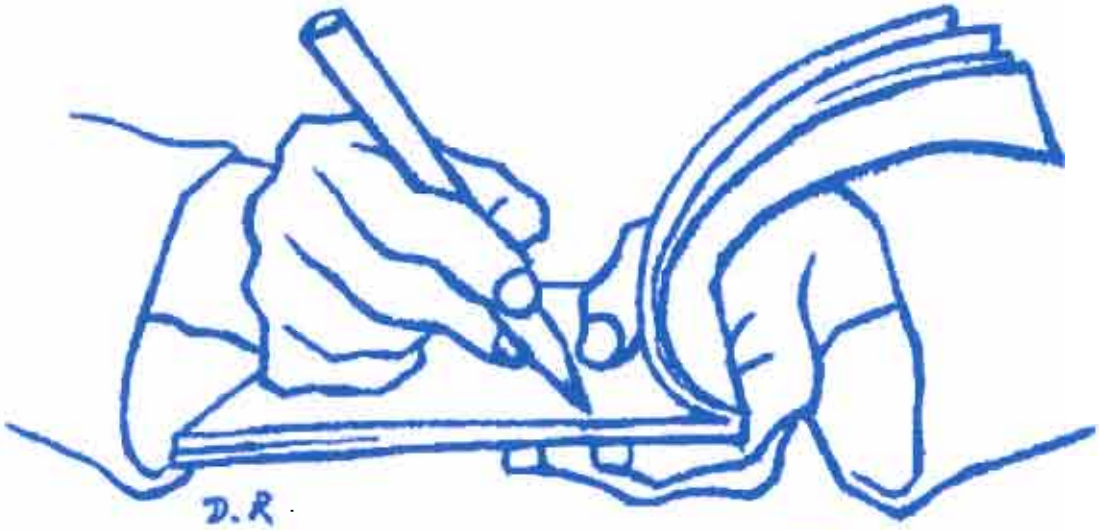
Educación



para todos

Educación para todos no es un proyecto lucrativo, sino un esfuerzo colectivo de estudiantes y profesores de la UNAM para facilitar el acceso a los materiales necesarios para la educación de la mayor cantidad de gente posible. Pensamos editar en formato digital libros que por su alto costo, o bien porque ya no se consiguen en bibliotecas y librerías, no son accesibles para todos.

Invitamos a todos los interesados en participar en este proyecto a sugerir títulos, a prestarnos los textos para su digitalización y a ayudarnos en toda la labor técnica que implica su reproducción. El nuestro, es un proyecto colectivo abierto a la participación de cualquier persona y todas las colaboraciones son bienvenidas.

Nos encuentras en los Talleres Estudiantiles de la Facultad de Ciencias y puedes ponerte en contacto con nosotros a la siguiente dirección de correo electrónico:

eduktodos@gmail.com http://eduktodos.dyndns.org

FÍSICA Vol. 2

VERSIÓN AMPLIADA

Cuarta edición

TRADUCCIÓN

Francisco Andión Uz
Ingeniero Mecánico Electricista
Facultad de Ingeniería
UNAM

REVISIÓN TÉCNICA

Eduardo Ramírez Grycuk
Profesor del Departamento de Materiales
UAM Azcapotzalco

FÍSICA Vol. 2

VERSIÓN AMPLIADA

Cuarta edición en inglés

Tercera edición en español

DAVID HALLIDAY

Professor of Physics, Emeritus

University of Pittsburgh

ROBERT RESNICK

Professor of Physics

Rensselaer Polytechnic Institute

KENNETH S. KRANE

Professor of Physics

Oregon State University

SEXTA REIMPRESIÓN

MÉXICO, 1999

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A. DE C. V.

MÉXICO

Título original de la obra:
PHYSICS, Vol. 2. Extended version, 4th ed.
ISBN 0-471-54804-9

Traducción autorizada por:
Copyright © 1992, by John Wiley & Sons, Inc.

Física Vol. 2. Versión ampliada
Derechos reservados respecto a la tercera edición en español:
© 1994, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. de C.V.
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial.
Registro núm. 43

ISBN 968-26-1255-1 (tercera edición)
(ISBN 968-26-0324-2 segunda edición)
(ISBN 968-26-0663-2 obra completa)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

Tercera edición: 1994
Quinta reimpresión: 1998
Sexta reimpresión: 1999

PRÓLOGO A LA CUARTA EDICIÓN DEL VOLUMEN 2 VERSIÓN AMPLIADA

La primera edición de *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería* apareció en 1960; la edición más reciente (la tercera), llamada simplemente *Física*, fue publicada en 1977. La cuarta edición actual (1992) marca la adición de un nuevo coautor para el texto.

El texto se ha actualizado para incluir los nuevos desarrollos en física y en su pedagogía. Basado en parte en nuestra lectura de la literatura sobre estos temas, en parte sobre los comentarios de numerosos usuarios de las ediciones anteriores, y en parte en el consejo de un grupo dedicado de revisores del manuscrito de esta edición, hemos hecho un número de cambios.

1. Este volumen sigue el tratamiento coherente de la energía que comenzó en los capítulos 7 y 8 y continúa a través del tratamiento de la termodinámica en el Volumen 1. Las convenciones del signo para el trabajo y el manejo de la energía (por ejemplo, la eliminación de los términos pobremente definidos, como la "energía térmica") son consistentes en todo el texto.

2. A lo largo del texto se integra la relatividad especial, que fue tratada como un tema complementario en la edición anterior. Se dedican dos capítulos a la relatividad especial: uno de ellos (en el Volumen 1) trata de las ondas mecánicas y el otro (en el Volumen 2) trata de las ondas electromagnéticas. Los temas relacionados con la relatividad especial (por ejemplo, el movimiento relativo, los marcos de referencia, el ímpetu y la energía) se tratan en los capítulos sobre cinemática, mecánica y electromagnetismo. Esta manera refleja nuestro punto de vista de que la relatividad especial debería tratarse como parte de la física clásica. Sin embargo, para los instructores que deseen postergar la relatividad especial hasta el final del curso, el material se incluye en secciones separadas que pueden fácilmente omitirse durante la primera lectura.

3. Entre los cambios en el orden de los temas respecto de la tercera edición se encuentran el introducir el concepto de la energía potencial eléctrica antes que el de la energía potencial, el de los materiales magnéticos antes que el de la inductancia, y la ley de Biot-Savart antes de la ley de Ampère. El ímpetu lineal de la radiación electromagnética se cambió del capítulo sobre la luz (42) a aquél sobre las ondas electromagnéticas (41), y la reflexión por espejos planos se trata ahora en el capítulo que aborda la reflexión y refracción sobre superficies planas (43). El capítulo previo sobre las oscilaciones electromagnéticas ha sido incorporado dentro del capítulo sobre la inductancia (38).

4. Se han eliminado diversos temas, incluyendo los rectificadores, los filtros, las guías de onda, las líneas de transmisión y la inductancia mutua. También hemos suprimido el uso del vector de desplazamiento eléctrico **D** y la intensidad del campo magnético **H**.

5. Esta versión ampliada del Volumen 2 incluye ocho capítulos (49 al 56) en los que se estudia la física cuántica y algunas de sus aplicaciones. Se agregó un nuevo capítulo (56), que introduce la física de partículas y la cosmología, a aquéllos en la versión ampliada previa, y ha ocurrido una cierta diversificación de temas en los capítulos de física atómica (49 a 51). Se han "salpicado" otras aplicaciones modernas a lo largo del texto: por ejemplo, el efecto Hall cuantificado, los campos magnéticos de los planetas, pruebas recientes de la conservación de la carga, la superconductividad, los monopolos magnéticos y holografía.

6. Hemos aumentado sustancialmente el número de problemas al final de cada capítulo respecto a la edición previa del Volumen 2 ampliado: existen ahora 1486 problemas en comparación de 1222 anteriormente, un aumento del 22%. Similarmente, el número de preguntas al final de los capítulos se aumentó de 811 a 1027 (27%). Hemos procurado mantener la calidad y diversidad de los problemas que ha sido la característica principal de las anteriores ediciones de este texto.

7. El número de ejemplos resueltos en el Volumen 2 promedia entre seis y siete por capítulo, aproximadamente igual al de la edición anterior. Sin embargo, la edición anterior empleaba los ejemplos resueltos para presentar material nuevo (como las combinaciones en paralelo y en serie de resistores o de capacitores), los cuales se presentan en esta edición como subsecciones principales del texto en lugar de ejemplos resueltos. A causa de que ahora empleamos los ejemplos resueltos (llamados aquí problemas muestra) únicamente para ilustrar aplicaciones de material desarrollado en el texto, esta edición ofrece realmente a los estudiantes mucho más de tales ejemplos.

8. En varios de los ejemplos resueltos se presentan técnicas de computación, así como una variedad de proyectos para la computadora al final del capítulo. Se ofrecen ciertos listados de programas en un apéndice para animar a los estudiantes a adaptar esos métodos a otras aplicaciones.

9. Hemos aumentado y actualizado las referencias a artículos en la literatura que aparecen como notas al pie de la página en todo el texto. Ciertas referencias (a menudo a artículos en revistas populares como *Scientific American*) intentan ampliar los conocimientos del estudiante por medio de aplicaciones interesantes de un tema. En otros casos, incluyendo a menudo puntos de importancia pedagógica a los cuales deseamos llamar la atención tanto de los estudiantes como de los instructores, hacemos referencia a artículos en publicaciones tales como *American Journal of Physics* o *The Physics Teacher*.

10. Todas las ilustraciones se rehicieron y su número en el Volumen 2 ampliado aumentó en un 26%, de 664 a 835. Hemos añadido intensidades a muchos de los dibujos donde éstas resaltan la claridad o la pedagogía.

11. Muchas de las deducciones, pruebas y argumentos de la edición previa se han formalizado, y cualquier suposición o aproximación ha sido clarificada. Asimismo hemos mejorado el rigor del texto sin elevar necesariamente su nivel. Nos ha preocupado indicar a los estudiantes el límite de validez de un argumento en particular y animarlos a considerar cuestiones como: ¿Un resultado en particular se aplica siempre o sólo algunas veces? ¿Qué sucede conforme vamos hacia el cuanto o el límite relativista?

Si bien hemos hecho algunos esfuerzos para eliminar material de la edición anterior, las adiciones antes mencionadas contribuyen a un texto de longitud creciente. *Debe destacarse que pocos (si alguno) instructores desearán seguir todo el texto desde el principio hasta el final.* Hemos laborado para desarrollar un texto que ofrece una introducción a la física estricta y completa, pero el instructor es capaz de seguir muchos caminos alternos a lo largo del texto. El instructor que desee tratar pocos tópicos con mayor profundidad (un enfoque comúnmente denominado como "lo menos por lo más") será capaz de seleccionar esos caminos. Ciertas secciones están explícitamente marcadas como "opcional" (y están impresas en un tipo de letra más pequeño), indicando que pueden omitirse sin que se pierda la continuidad. Dependiendo del diseño del curso, pueden pasarse por alto o tratarse superficialmente otras secciones o incluso capítulos enteros. En tales circunstancias, el estudiante curioso que desee un estudio mayor puede animarse independientemente a abordar los temas omitidos, ganando por ello una visión más amplia del tema. El instructor está, pues, provisto con una elección amplia de qué grupo reducido de temas en particular ha de cubrir en un curso de cualquier longitud dada. Para los instructores que deseen una cobertura más plena, como en cursos para mayores en física o estudiantes o en cursos de longitud mayor de un año, este texto proporciona el material adicional necesario para una experiencia retadora y amplia. Esperamos que el texto se considere como si fuese un mapa a través de la física; pueden tomarse muchos caminos, escénicos o directos, y no todos necesitan ser recorridos en una primera jornada. El viajero avanzado puede animarse a retornar al mapa para explorar áreas dejadas de lado en jornadas anteriores.

El texto está disponible como volúmenes por separado: el Volumen 1 (capítulos 1 al 26) cubre la cinemática, la mecánica y la termodinámica, y el Volumen 2 (capítulos 27 al 48) cubre el electromagnetismo y la óptica. Está también disponible una versión ampliada del Volumen 2 (capítulos 27 al 56) con ocho capítulos adicionales que presentan una introducción a la física del cuanto y algunas de sus aplicaciones.

Un libro de texto contiene muchas más contribuciones a la dilucidación de un sujeto que las hechas por los autores solamente. Hemos tenido la fortuna de contar con la ayuda de Edward Derringh (Wentworth Institute of Technology) para preparar los juegos de problemas y de J. Richard Christman (U. S. Coast Guard Academy) para la preparación de la Guía del Instructor y de los proyectos de computación. Nos hemos beneficiado con los comentarios a cada capítulo y la crítica de un grupo dedicado de revisores:

Robert P. Bauman (Universidad de Alabama)
Truman D. Black (Universidad de Texas, Arlington)
Edmond Brown (Instituto Politécnico Rensselaer)

J. Richard Christman (U. S. Coast Guard Academy)
Sumner Davis (Universidad de California, Berkeley)
Roger Freedman (Universidad de California, Santa Bárbara)
James B. Gerhart (Universidad de Washington)
Richard Thompson (Universidad del Sur de California)
David Wallach (Universidad del Estado de Pennsylvania)
Roald K. Wangsness (Universidad de Arizona)

Estamos profundamente obligados con estas personas por sus sustanciales contribuciones a este proyecto.

Estamos agradecidos al personal de John Wiley & Sons por su notable cooperación y apoyo, incluyendo al editor de física Cliff Mills, a la asistente del programa editorial Cathy Donovan, a la gerente de mercadeo Cathy Faduska, al ilustrador John Balbalis, a la supervisora editorial Deborah Herbert, a la diseñadora Karin Kincheloe, a la supervisora de producción Lucille Bounocore, a la investigadora de fotografías Jennifer Atkins y a la editora de copias Christina Della Bartolomea. El procesamiento de palabras del manuscrito para esta edición fue llevado a cabo estupendamente por Christina Godfrey.

Mayo 1992

DAVID HALLIDAY
Seattle, Washington

ROBERT RESNICK
Rensselaer Polytechnic Institute
Troy, New York 12180-3590

KENNETH S. KRANE
Oregon State University
Corvallis, Oregon 97331

CONTENIDO

CAPÍTULO 27
LA CARGA ELÉCTRICA Y LA LEY DE COULOMB 1

27-1 Electromagnetismo. Un estudio preliminar 1
27-2 La carga eléctrica 2
27-3 Conductores y aislantes 3
27-4 La ley de Coulomb 4
27-5 La carga está cuantizada 7
27-6 La carga se conserva 9
Preguntas y problemas 10

CAPÍTULO 28
EL CAMPO ELÉCTRICO 15

28-1 Campos 15
28-2 El campo eléctrico **E** 16
28-3 El campo eléctrico de las cargas puntuales 17
28-4 Líneas de fuerza 20
28-5 El campo eléctrico de las distribuciones de carga continua 22
28-6 Una carga puntual en un campo eléctrico 26
28-7 Un dipolo en un campo eléctrico 29
Preguntas y problemas 32

CAPÍTULO 29
LA LEY DE GAUSS 41

29-1 El flujo de un campo vectorial 41
29-2 El flujo del campo eléctrico 43
29-3 La ley de Gauss 45
29-4 Un conductor cargado aislado 47
29-5 Aplicaciones de la ley de Gauss 50
29-6 Ensayos experimentales de la ley de Gauss y de la ley de Coulomb 54
29-7 El modelo nuclear del átomo (*Opcional*) 56
Preguntas y problemas 58

CAPÍTULO 30
EL POTENCIAL ELÉCTRICO 67

30-1 La electrostática y las fuerzas gravitatorias 67
30-2 Energía potencial eléctrica 68
30-3 Potencial eléctrico 70
30-4 Cálculo del potencial a partir del campo 72
30-5 El potencial debido a una carga puntual 73
30-6 Potencial debido a un conjunto de cargas puntuales 75
30-7 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua 77
30-8 Superficies equipotenciales 79
30-9 Cálculo del campo a partir del potencial 80
30-10 Un conductor aislado 82
30-11 El acelerador electrostático (*Opcional*) 84
Preguntas y problemas 85

CAPÍTULO 31
CAPACITORES Y DIELÉCTRICOS 95

31-1 Capacitancia 95
31-2 Cálculo de la capacitancia 96
31-3 Capacitores en serie y en paralelo 99
31-4 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico 101
31-5 Capacitor con dieléctrico 103
31-6 Dieléctricos: un examen atómico 105

31-7 Los dieléctricos y la ley de Gauss 107
Preguntas y problemas 109

CAPÍTULO 32
CORRIENTE Y RESISTENCIA 117

32-1 Corriente eléctrica 117
32-2 Densidad de corriente 119
32-3 Resistencia, resistividad y conductividad 121
32-4 La ley de Ohm 123
32-5 La ley de Ohm: una visión microscópica 124
32-6 Transferencias de energía en un circuito eléctrico 126
32-7 Semiconductores (*Opcional*) 127
32-8 Superconductividad (*Opcional*) 129
Preguntas y problemas 130

CAPÍTULO 33
CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA 137

33-1 Fuerza electromotriz 137
33-2 Cálculo de la corriente en un circuito cerrado simple 139
33-3 Diferencias de potencial 140
33-4 Resistores en serie y en paralelo 142
33-5 Circuitos de mallas múltiples 144
33-6 Instrumentos de medición 147
33-7 Circuitos *RC* 148
Preguntas y problemas 151

CAPÍTULO 34
EL CAMPO MAGNÉTICO 159

34-1 El campo magnético **B** 159
34-2 La fuerza magnética sobre una carga en movimiento 160
34-3 Cargas circulantes 164
34-4 El efecto Hall 169
34-5 La fuerza magnética sobre una corriente 172
34-6 Momento de torsión en una espira de corriente 174
34-7 El dipolo magnético 176
Preguntas y problemas 177

CAPÍTULO 35
LA LEY DE AMPÈRE 187

35-1 La ley de Biot-Savart 187
35-2 Aplicaciones de la ley de Biot y Savart 189
35-3 Las líneas de **B** 193
35-4 Dos conductores paralelos 193
35-5 La ley de Ampère 195
35-6 Solenoides y toroides 197
35-7 El electromagnetismo y los marcos de referencia (*Opcional*) 200
Preguntas y problemas 201

CAPÍTULO 36
LA LEY DE LA INDUCCIÓN DE FARADAY 211

36-1 Los experimentos de Faraday 211
36-2 La ley de inducción de Faraday 212
36-3 La ley de Lenz 214
36-4 Fem de movimiento o cinética 215
36-5 Campos eléctricos inducidos 218
36-6 El betatrón 221
36-7 La inducción y el movimiento relativo (*Opcional*) 222
Preguntas y problemas 225

CAPÍTULO 37
PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA 237

37-1 La ley de Gauss para el magnetismo 237
37-2 Magnetismo atómico y nuclear 239
37-3 Magnetización 242
37-4 Materiales magnéticos 244
37-5 El magnetismo de los planetas (*Opcional*) 247
Preguntas y problemas 250

CAPÍTULO 38
LA INDUCTANCIA 255

38-1 Inductancia 255
38-2 Cálculo de la inductancia 256
38-3 Circuitos *LR* 258
38-4 Almacenamiento de energía en un campo magnético 261
38-5 Oscilaciones electromagnéticas: análisis cualitativo 264
38-6 Oscilaciones electromagnéticas: análisis cuantitativo 266
38-7 Oscilaciones amortiguadas y forzadas 268
Preguntas y problemas 270

CAPÍTULO 39 CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA 279

39-1 Corrientes alternas 279
39-2 Tres elementos por separado 280
39-3 Circuito *RLC* de una sola malla 283
39-4 Potencia en los circuitos de CA 286
39-5 El transformador (*Opcional*) 288
Preguntas y problemas 289

CAPÍTULO 40 ECUACIONES DE MAXWELL 297

40-1 Ecuaciones básicas del electromagnetismo 297
40-2 Campos magnéticos inducidos y la corriente de desplazamiento 298
40-3 Ecuaciones de Maxwell 301
40-4 Ecuaciones de Maxwell y oscilaciones en cavidades (*Opcional*) 303
Preguntas y problemas 306

CAPÍTULO 41 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 311

41-1 El espectro electromagnético 311
41-2 Generación de una onda electromagnética 315
41-3 Ondas viajeras y las ecuaciones de Maxwell 317
41-4 Transporte de energía y el vector de Poynting 320
41-5 Ímpetu y presión de la radiación (*Opcional*) 322
Preguntas y problemas 324

CAPÍTULO 42 LA NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ 331

42-1 La luz visible 331
42-2 La velocidad de la luz 332
42-3 El efecto Doppler en la luz 336
42-4 Deducción del efecto Doppler relativista (*Opcional*) 338
42-5 Consecuencias del efecto Doppler relativista (*Opcional*) 340
Preguntas y problemas 341

CAPÍTULO 43 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN EN SUPERFICIES PLANAS 347

43-1 Óptica geométrica y óptica ondulatoria 347
43-2 Reflexión y refracción 348
43-3 Deducción de la ley de la reflexión 352
43-4 Formación de imágenes en espejos planos 354
43-5 Deducción de la ley de la refracción 356
43-6 Reflexión interna total 359
Preguntas y problemas 361

CAPÍTULO 44 ESPEJOS Y LENTES ESFÉRICOS 369

44-1 Espejos esféricos 369
44-2 Superficies esféricas refringentes 375
44-3 Lentes delgadas 377
44-4 Sistemas ópticos compuestos 383
44-5 Instrumentos ópticos 384
Preguntas y problemas 387

CAPÍTULO 45 INTERFERENCIA 395

45-1 Interferencia por una rendija doble 395
45-2 Coherencia 399
45-3 Intensidad de la interferencia por una rendija doble 401
45-4 Interferencia en películas delgadas 404
45-5 Reversibilidad óptica y cambios de fase en la reflexión (*Opcional*) 407
45-6 El interferómetro de Michelson 408
45-7 El interferómetro de Michelson y la propagación de la luz (*Opcional*) 409
Preguntas y problemas 411

CAPÍTULO 46 DIFRACCIÓN 417

46-1 Difracción y teoría ondulatoria de la luz 417
46-2 Difracción por una sola rendija 419
46-3 Intensidad de la difracción por una sola rendija 422
46-4 Difracción por una abertura circular 426
46-5 Interferencia por una rendija doble y difracción combinadas 428
Preguntas y problemas 432

CAPÍTULO 47 REJILLAS Y ESPECTROS 437

47-1 Rendijas múltiples 437
47-2 Rejillas de difracción 441
47-3 Dispersión y poder de resolución 443
47-4 Difracción de los rayos X 446
47-5 Holografía (*Opcional*) 449
Preguntas y problemas 451

CAPÍTULO 48 POLARIZACIÓN 457

48-1 Polarización 457
48-2 Láminas polarizadoras 458
48-3 Polarización por reflexión 461
48-4 Doble refracción 463
48-5 Polarización circular 467
48-6 Dispersión de la luz 469
48-7 Hacia el límite del cuanto 471
Preguntas y problemas 473

CAPÍTULO 49 LA LUZ Y LA FÍSICA CUÁNTICA 477

49-1 Radiación térmica 477
49-2 Ley de la radiación de Planck 480
49-3 Cuantificación de la energía 481
49-4 Capacidad calorífica de los sólidos 483
49-5 Efecto fotoeléctrico 486
49-6 Teoría del fotón de Einstein 487
49-7 El efecto Compton 489
49-8 Espectros de líneas 492
Preguntas y problemas 494

CAPÍTULO 50 NATURALEZA ONDULATORIA DE LA MATERIA 501

50-1 Comportamiento ondulatorio de las partículas 501
50-2 Longitud de onda de de Broglie 503
50-3 Prueba de la hipótesis de de Broglie 504
50-4 Ondas, paquetes de ondas y partículas 507
50-5 Relaciones de incertidumbre de Heisenberg 509
50-6 Función de onda 512
50-7 Partículas atrapadas y densidades de probabilidad 513
50-8 Tunelización por una barrera 518
50-9 Principio de correspondencia 521
50-10 Ondas y partículas 522
Preguntas y problemas 525

CAPÍTULO 51 ESTRUCTURA DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO 531

51-1 Teoría de Bohr 531
51-2 El átomo de hidrógeno y la ecuación de Schrödinger 536
51-3 Ímpetu o momento angular 538
51-4 Experimento de Stern-Gerlach 542
51-5 Espín del electrón 545
51-6 Conteo de los estados del átomo de hidrógeno 546
51-7 Estado base del hidrógeno 548
51-8 Estados excitados del hidrógeno 549
51-9 Detalles de la estructura atómica (*Opcional*) 551
Preguntas y problemas 553

CAPÍTULO 52 FÍSICA ATÓMICA 559

52-1 El espectro de rayos X 559
52-2 Los rayos X y la numeración de los elementos 561
52-3 Construir átomos 563
52-4 La tabla periódica 565
52-5 Los láseres y la luz láser 569
52-6 Einstein y el láser 570
52-7 Cómo funciona el láser 572
52-8 Estructura molecular 574
Preguntas y problemas 576

CAPÍTULO 53 CONDUCCIÓN ELÉCTRICA EN LOS SÓLIDOS 581

53-1 Electrones de conducción en un metal 581
53-2 Ocupación de los estados permitidos 583
53-3 Conducción eléctrica en metales 586
53-4 Bandas de energía permitidas y prohibidas 587
53-5 Conductores, aislantes y semiconductores 588
53-6 Semiconductores con impurezas 591
53-7 Unión *pn* 593
53-8 Electrónica óptica 597
53-9 El transistor 599
53-10 Superconductores 600
Preguntas y problemas 602

CAPÍTULO 54 FÍSICA NUCLEAR 609

54-1 Descubrimiento del núcleo 609
54-2 Algunas propiedades nucleares 611
54-3 Desintegración radiactiva 615
54-4 Desintegración alfa 617
54-5 Desintegración beta 618
54-6 Medición de la radiación ionizante 620
54-7 Radiactividad natural 621
54-8 Reacciones nucleares 623
54-9 Modelos nucleares (*Opcional*) 625
Preguntas y problemas 628

CAPÍTULO 55 ENERGÍA DEL NÚCLEO 637

55-1 El átomo y el núcleo 637
55-2 Fisión nuclear: el proceso básico 638
55-3 Teoría de la fisión nuclear 640
55-4 Reactores nucleares: principios básicos 641
55-5 Un reactor natural 644
55-6 Fusión termonuclear: proceso básico 646
55-7 Fusión termonuclear en las estrellas 648
55-8 Fusión termonuclear controlada 649
55-9 Confinamiento magnético 651
55-10 Confinamiento inercial 652
Preguntas y problemas 654

CAPÍTULO 56 FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA 661

56-1 Interacciones de la partícula 661
56-2 Familias de partículas 664
56-3 Leyes de la conservación 668
56-4 El modelo del quark 670
56-5 La cosmología del Big-Bang 675
56-6 Nucleosíntesis 680
56-7 La edad del Universo 684
Preguntas y problemas 688

APÉNDICES

A El sistema internacional de unidades (SI) A-1
B Algunas constantes fundamentales de la física A-3
C Algunos datos astronómicos A-4
D Propiedades de los elementos A-5
E Tabla periódica de los elementos A-7
F Partículas elementales A-8
G Factores de conversión A-10
H Fórmulas matemáticas A-14
I Programas de computadora A-16
J Premios Nobel de física A-20
K Tablas A-24

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS CON NUMERACIÓN IMPAR R-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS C-1
ÍNDICE I-1

CAPÍTULO 27

LA CARGA ELÉCTRICA Y LA LEY DE COULOMB

Iniciamos aquí un estudio detallado del electromagnetismo, *que extenderemos después a lo largo de casi todo el libro. Las fuerzas electromagnéticas son responsables de la estructura de los átomos y del enlace de los mismos en las moléculas y en los sólidos. Muchas propiedades de los materiales que hemos estudiado hasta ahora son de naturaleza electromagnética, como la elasticidad de los sólidos y la tensión superficial de los líquidos. La fuerza de un resorte, la fricción y la fuerza normal tienen su origen todas ellas en la fuerza electromagnética entre los átomos.*

Entre los ejemplos de electromagnetismo que estudiaremos están la fuerza entre cargas eléctricas, como la que existe entre el electrón y el núcleo, en un átomo; el movimiento de un cuerpo cargado sometido a una fuerza eléctrica externa, como un electrón en el haz de un osciloscopio; el flujo de las cargas eléctricas en los circuitos y el comportamiento de los elementos del circuito; la fuerza entre los imanes permanentes y las propiedades de los materiales magnéticos; y la radiación electromagnética, que finalmente conduce al estudio de la óptica, *esto es, la naturaleza y propagación de la luz.*

En este capítulo comenzamos con el estudio de la carga eléctrica, algunas propiedades de los cuerpos cargados, y la fuerza eléctrica fundamental entre dos cuerpos cargados.

27-1 ELECTROMAGNETISMO. UN ESTUDIO PRELIMINAR

Los filósofos griegos, hacia el año 600 a.C., sabían ya que al frotar un trozo de ámbar éste atraía trocitos de paja. Existe una línea de desarrollo directa desde esta antigua observación hasta la era electrónica en que vivimos. La fuerza de esta relación se expresa con el término "electrón" que nosotros usamos y que se deriva de la palabra con que los griegos denominaban al ámbar.

Los griegos sabían también que ciertas "piedras" que se encuentran en la naturaleza, y que conocemos hoy día como mineral de magnetita, atraían al hierro. A partir de estos modestos orígenes medraron las ciencias de la electricidad y el magnetismo, las cuales se desarrollaron en forma separada durante siglos, de hecho hasta 1820, cuando Hans Christian Oersted halló una relación entre ellas: una corriente *eléctrica* que pasara por un alambre desviaba la aguja *magnética* de una brújula. Oersted hizo este descubrimiento cuando preparaba una plática de demostración para sus estudiantes de física.

La nueva ciencia del electromagnetismo la desarrolló más ampliamente Michael Faraday* (1791-1867), un experimentador dotado con un talento natural para la intuición y la abstracción en la física y cuyas notas que recogía en el laboratorio no contienen una sola ecuación. James Clerk Maxwell† (1831-1879) puso las ideas de Faraday en forma matemática e introdujo muchas ideas nuevas propias, dotando al electromagnetismo con una base teórica sólida. Las cuatro ecuaciones de Maxwell (véase la Tabla 2 del capítulo 40) desempeñan el mismo papel en el electromagnetismo que las leyes de Newton en la mecánica clásica o las leyes de la termodinámica en el estudio del calor. Presentaremos y estudiaremos las ecuaciones de Maxwell cada una por separado en los capítulos que siguen.

---

* Véase "Michael Faraday", por Herbert Kondo, *Scientific American*, octubre de 1953, pág. 90. Para una biografía definitiva, véase L. Pearce Williams, *Michael Faraday* (Basic Books, 1964).

† Véase "James Clerk Maxwell", por James R. Newman, *Scientific American*, junio de 1955, pág. 58.

Maxwell llegó a la conclusión de que la luz es de naturaleza electromagnética y que su velocidad podía deducirse a partir de mediciones puramente eléctricas y magnéticas. Así pues, la óptica estaba íntimamente relacionada con la electricidad y el magnetismo. El alcance de las ecuaciones de Maxwell es notable, pues abarcan los principios fundamentales de todos los aparatos electromagnéticos y ópticos en gran escala, como los motores, la radio, la televisión, el radar de microondas, el microscopio y el telescopio.

El desarrollo del electromagnetismo clásico no concluyó con Maxwell. El físico inglés Oliver Heaviside (1850-1925) y en especial el físico danés H. A. Lorentz (1853-1928) contribuyeron sustancialmente al esclarecimiento de la teoría de Maxwell. Heinrich Hertz* (1857-1894) dio un gran paso hacia adelante cuando, más de 20 años después de que Maxwell expusiera su teoría, produjo en el laboratorio ondas electromagnéticas "maxwelianas" de una clase que podríamos llamar ahora radioondas. Pronto Marconi y otros desarrollaron aplicaciones prácticas de las ondas electromagnéticas de Maxwell y de Hertz. Albert Einstein basó su teoría de la relatividad en las ecuaciones de Maxwell; el trabajo de Einstein en 1905 en que presentaba la relatividad especial se tituló "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento."

El interés actual por el electromagnetismo adquiere dos formas. En el ámbito de las aplicaciones o en la práctica, las ecuaciones de Maxwell se emplean en el estudio de las propiedades eléctricas y magnéticas de nuevos materiales y en el diseño de aparatos electrónicos de una complejidad y perfección cada vez mayores. En el nivel más fundamental, se han realizado esfuerzos para combinar o unificar el electromagnetismo con las demás fuerzas básicas de la naturaleza (véase la sección 6-1), tal y como Oersted, Faraday y Maxwell demostraron que las distintas fuerzas de la electricidad y el magnetismo son parte de la fuerza unificada del electromagnetismo. En 1967 se logró un éxito parcial cuando Steven Weinberg y Abdus Salam propusieron, de manera independiente, una teoría, desarrollada en un principio por Sheldon Glashow, la cual unificaba la interacción magnética con la interacción débil, responsable de ciertos procesos de la desintegración radiactiva. Del mismo modo que la unificación del electromagnetismo de Maxwell podía predecir fenómenos (a saber, la existencia de las ondas electromagnéticas) que podían probarse directamente para corroborar la teoría, la teoría de la interacción *electrodébil* de Glashow-Weinberg-Salam implicaba predicciones únicas que podían comprobarse experimentalmente. Estos ensayos se realizaron en aceleradores de partículas de alta energía, comprobando las predicciones de la teoría electrodébil. Glashow, Salam y Weinberg compartieron el premio Nobel de 1979 por el desarrollo de esta teoría. Están en camino esfuerzos teóricos persistentes por extender esta unificación e incluir la interacción fuerte, que enlaza a los núcleos entre sí, y existen esperanzas de que al final se incluya también en esta unificación a la fuerza gravitatoria, de modo que un mismo marco teórico abarcaría todas las interacciones fundamentales conocidas.

* Véase "Heinrich Hertz", por Philip y Emily Morrison, *Scientific American*, diciembre de 1957, pág. 98.

27-2 LA CARGA ELÉCTRICA

Si usted camina sobre una alfombra en tiempo seco, es muy probable que se produzca una chispa al tocar la perilla metálica de una puerta. En una escala más amplia, todos estamos familiarizados con el fenómeno del relámpago. Tales fenómenos ponen en evidencia la gran cantidad de *carga eléctrica* que se almacena en los objetos que nos rodean.

La neutralidad eléctrica de la mayoría de los objetos en nuestro mundo visible y tangible oculta el contenido de cantidades enormes de carga eléctrica positiva y negativa que, en su mayor parte, se cancelan entre sí en sus efectos externos. Sólo cuando este equilibrio eléctrico se perturba, la naturaleza nos revela los efectos de una carga positiva o negativa no compensada. Cuando decimos que un cuerpo está "cargado" queremos decir que tiene un desbalance de carga, aun cuando la carga neta represente generalmente tan sólo una pequeñísima fracción de la carga positiva o negativa total contenida en el cuerpo (véase problema muestra 2).

Los cuerpos cargados ejercen fuerzas entre sí. Para demostrarlo, carguemos una varilla de vidrio frotándola con seda. En el proceso de frotamiento se transfiere una pequeñísima cantidad de carga de un cuerpo a otro, alterando así ligeramente la neutralidad eléctrica de cada uno. Si suspendemos esta varilla cargada de un cordón, como se muestra en la figura 1*a*, y si colocamos cerca una segunda varilla de vidrio cargada, las dos varillas se repelen entre sí. Sin embargo, si frotamos un trozo de piel contra una varilla de plástico, ésta atrae al extremo de la varilla de vidrio suspendida; véase la figura 1*b*.

Para explicar esto decimos entonces que existen dos clases de carga, una de las cuales (la del vidrio frotado con la seda) llamamos *positiva* y la otra (la del plástico frotado con piel) llamamos *negativa*. Estos sencillos experimentos pueden resumirse en lo siguiente:

> *Las cargas del mismo signo se repelen, y las cargas de signo contrario se atraen.*

En la sección 27-4 exponemos esta regla en forma cuantitativa como la ley de la fuerza de Coulomb. Consideramos sólo cargas en reposo entre sí o bien que se mueven muy lentamente, restricción ésta que define al tema de la *electrostática*.

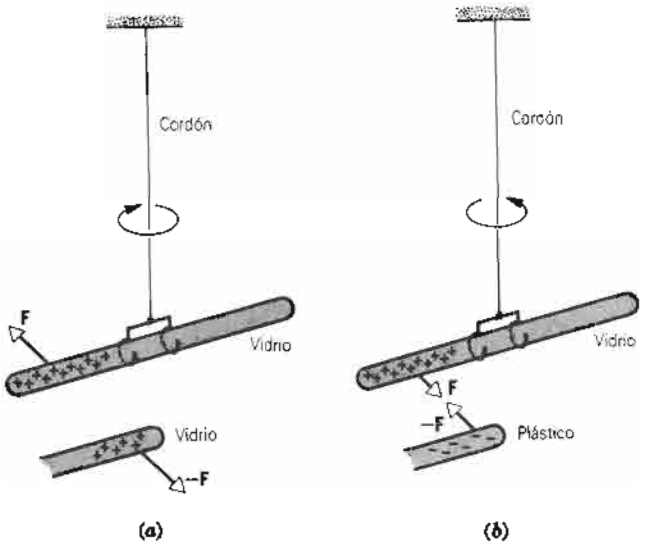


Figura 1 (*a*) Dos varillas con cargas iguales se repelen entre sí. (*b*) Dos varillas con cargas opuestas se atraen mutuamente.

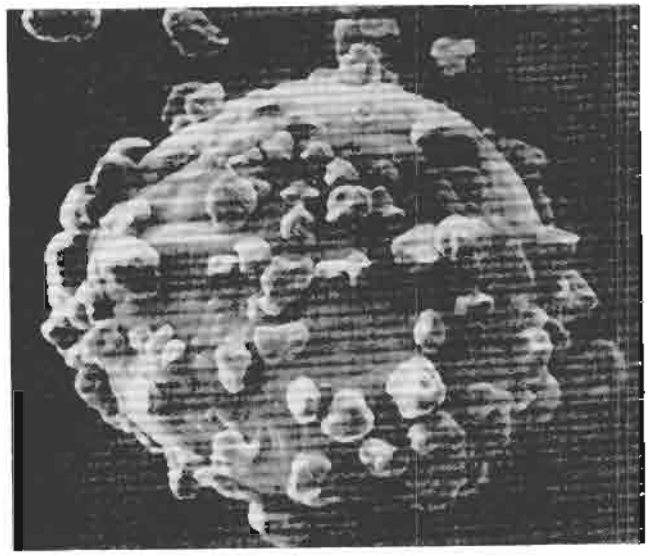


Figura 2 Esferita portadora en una fotocopiadora Xerox, cubierta de partículas de *toner* que se adhieren a ella debido a la atracción electrostática.

Los nombres de positivo y negativo referidos a la carga eléctrica se deben a Benjamin Franklin (1706-1790) quien, además de descollar en muchas y diferentes actividades, fue un científico de renombre internacional. Incluso se llegó a decir que los triunfos diplomáticos de Franklin en Francia durante la Guerra de la Independencia estadounidense pudieron haberse atribuido al hecho de que se le consideraba un hombre de ciencia de prestigio extraordinario.

Las fuerzas eléctricas entre cuerpos cargados tienen muchas aplicaciones industriales, estando entre ellas el rociado electrostático de pintura y el recubrimiento con polvos, la precipitación de cenizas volantes, la impresión sin impacto por chorro de tinta, y el fotocopiado. La figura 2, por ejemplo, muestra una minúscula esfera portadora en una máquina de fotocopiado, cubierta de partículas de un polvo negro llamado *toner*, que se adhieren a la esfera portadora por medio de fuerzas electrostáticas. Estas partículas de toner con carga negativa son atraídas de sus esferas portadoras a una imagen latente con carga positiva del documento que desea copiarse, la cual se forma sobre un tambor giratorio. Una hoja de papel cargada atrae entonces hacia sí las partículas de toner del tambor, después de lo cual se funden mediante calor para obtener la copia final.

27-3 CONDUCTORES Y AISLANTES

Si sujetamos una varilla de cobre, no podemos hacer que quede cargada, por mucho que la frotemos con material alguno. Sin embargo, si equipamos la varilla con un mango de plástico, seremos capaces de crear una carga. La explicación es que la carga puede fluir fácilmente por ciertos materiales, llamados *conductores*, de los cuales el cobre es un ejemplo. En otros materiales —llamados *aislantes*—, las cargas no fluyen en la mayoría de los casos; si colocamos cargas en un aislante, como la mayor parte de los plásticos, las cargas permanecen donde las pusimos. La varilla de cobre no puede ser cargada porque toda carga que coloquemos en ella fluirá fácilmente a lo largo de la varilla, a través de nuestro cuerpo (que es también un conductor), y a tierra. Sin embargo, el mango aislante bloquea el paso, permitiendo que se cree la carga en el cobre.

El vidrio, el agua químicamente pura y los plásticos son ejemplos comunes de aislantes. Si bien no existen aislantes perfectos, el cuarzo fundido es bastante bueno —su capacidad aislante es de alrededor de 10^{25} veces la del cobre.

El cobre, los metales en general, el agua de la llave, y el cuerpo humano son ejemplos comunes de conductores. En los metales, un experimento llamado *efecto Hall* (véase la sección 34-4) demuestra que las cargas negativas (electrones) son las que pueden moverse libremente. Cuando los átomos de cobre se unen para formar el cobre sólido, sus electrones exteriores no permanecen unidos a cada átomo, sino que quedan en libertad de moverse dentro de la estructura reticular rígida formada por los centros de los iones cargados positivamente. A estos electrones móviles se les llama *electrones de conducción*. Las cargas positivas en una varilla de cobre permanecen tan inmóviles como lo están en una varilla de vidrio.

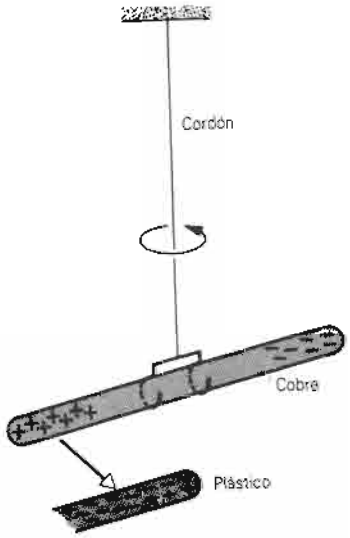


Figura 3 El extremo de una varilla de cobre no cargada y aislada es atraído por una varilla cargada de cualquier signo. En este caso, los electrones de conducción en la varilla de cobre son repelidos hacia el extremo más alejado de ésta, dejando al extremo cercano con una carga neta positiva.

El experimento de la figura 3 demuestra la movilidad de la carga en un conductor. Una varilla de plástico cargada negativamente atrae cualquier extremo de una varilla de cobre suspendida y no cargada. Los electrones (móviles) de conducción en la varilla de cobre son repelidos por la carga negativa en la varilla de plástico y se mueven hacia el extremo más alejado de la varilla de cobre, dejando al extremo cercano de ésta con una carga positiva neta. Una varilla de vidrio cargada positivamente atrae también a una varilla de cobre no cargada. En este caso, los electrones de conducción en el cobre son atraídos por la varilla de vidrio cargada positivamente hacia el extremo cercano de la varilla de cobre; el extremo más alejado de ésta queda entonces con una carga positiva neta.

Esta distinción entre conductores y aislantes resulta más cuantitativa cuando consideramos el número de electrones de conducción disponibles en una cantidad de material dada. En un conductor típico, cada átomo puede contribuir con un electrón de conducción y, por tanto, debería haber unos 10^{23} electrones de conducción por cm^3 en promedio. En cambio, en un aislante a la temperatura ambiente es en general poco probable encontrar siquiera 1 electrón de conducción por cm^3.

En un punto intermedio entre los conductores y los aislantes están los *semiconductores* como el silicio o el germanio; un semiconductor típico puede contener entre 10^{10} y 10^{12} electrones de conducción por cm^3. Una de las propiedades de los semiconductores que los hace tan útiles es que la densidad de los electrones de conducción puede cambiarse pronunciadamente mediante cambios pequeños en las condiciones del material, introduciendo, por ejemplo, pequeñas cantidades (menos de 1 parte en 10^9) de impurezas o variando el voltaje aplicado, la temperatura, o la intensidad de la luz que incide sobre el material.

En el capítulo 32 consideramos con más detalle la conducción eléctrica en diversos materiales, y en el capítulo 53 de la versión ampliada demostramos cómo la teoría cuántica nos lleva a una comprensión más completa del fenómeno de conducción eléctrica.

27-4 LA LEY DE COULOMB

Charles Augustin Coulomb (1736-1806) midió cuantitativamente la atracción y repulsión eléctricas y dedujo la ley que las gobierna. Su aparato, mostrado en la figura 4, se asemeja a la varilla colgante de la figura 1, excepto que las cargas en la figura 4 están confinadas a las pequeñas esferas a y b.

Si a y b se cargan, la fuerza eléctrica sobre a tiende a retorcer la fibra de suspensión. Coulomb canceló este efecto de torsión al girar la cabeza de la suspensión en un ángulo θ necesario para mantener a las dos cargas con determinada separación. El ángulo θ es entonces una medida relativa de la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga a. El aparato de la figura 4 es una *balanza de torsión*; Cavendish empleó posteriormente un arreglo similar para medir las atracciones gravitatorias (véase la sección 16-3).

Los experimentos realizados por Coulomb y sus contemporáneos demostraron que la fuerza eléctrica que un cuerpo cargado ejerce sobre otro depende directamente del producto de las magnitudes de las dos cargas e inversamente del cuadrado de su separación.* Esto es,

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Aquí F es la magnitud de la fuerza mutua que actúa sobre cada una de las dos cargas a y b; q_1 y q_2 son las medidas relativas de las cargas en las esferas a y b, y r es la distancia entre sus centros. La fuerza en cada carga debida a la otra actúa a lo largo de la línea que une a las cargas. Las dos fuerzas apuntan en sentidos opuestos pero tienen magnitudes iguales, aun cuando las cargas sean diferentes.

* En su análisis, Coulomb no tomó en cuenta el movimiento de las cargas en una esfera a causa de la presencia cercana de la otra esfera cargada, un efecto similar al ilustrado en la figura 3. Para un análisis de este punto, véase "Precise Calculation of the Electrostatic Force Between Charged Spheres Including Induction Effects", por Jack A. Soules, *American Journal of Physics*, diciembre de 1990, pág. 1195.

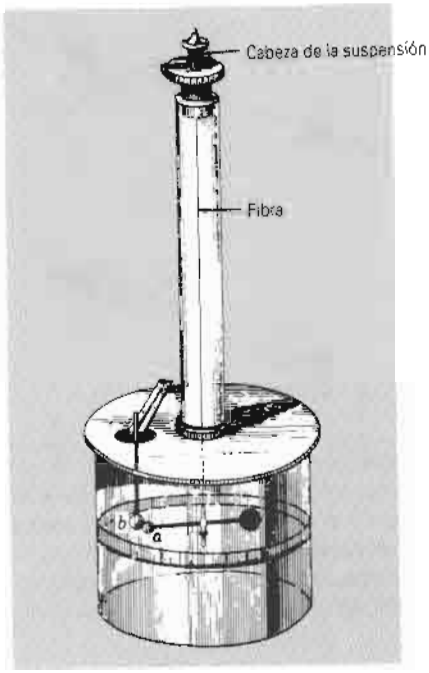


Figura 4 La balanza de torsión de Coulomb, tomada de su informe de 1785 a la Academia de Ciencias de París.

Para convertir la proporcionalidad anterior en una ecuación, introduzcamos una constante de proporcionalidad, la cual representaremos por ahora como k. Así, obtenemos, para la fuerza entre las cargas,

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (1)$$

La ecuación 1, que se llama *ley de Coulomb*, generalmente se cumple sólo para objetos cargados cuyas dimensiones sean mucho menores que la distancia entre ellos. A menudo decimos que se cumple sólo para *cargas puntuales*.*

Nuestra creencia en la ley de Coulomb no se base cuantitativamente en los experimentos de Coulomb. Las mediciones de la balanza de torsión son difíciles de llevar a cabo, de manera que la exactitud que se obtiene es aproximada. Tales mediciones no podrían, por ejemplo, convencernos de que el exponente de r en la ecuación 1 es exactamente 2 y no, digamos, 2.01. En la sección 29-6 demostraremos que la ley de Coulomb puede también obtenerse a partir de un experimento indirecto que demuestra que, si el exponente de la ecuación 1 no es exactamente 2, difiere de 2 a lo sumo en 1×10^{-16}.

* Estrictamente hablando, la ecuación 1 debería escribirse en términos de las magnitudes absolutas de q_1 y de q_2, y F entonces da la magnitud de la fuerza. El sentido de la fuerza queda determinado dependiendo de si las cargas son del mismo signo o de signo opuesto. Por ahora no tomaremos en cuenta este detalle, el cual será importante más adelante, en esta misma sección, cuando escribamos la ecuación 1 en forma vectorial.

La ley de Coulomb se asemeja a la ley de la variación inversa del cuadrado de la distancia enunciada por Newton para la gravitación, $F = Gm_1m_2/r^2$, la cual tenía ya más de 100 años al momento en que se realizaron los experimentos de Coulomb. Ambas son leyes del inverso de los cuadrados; la carga q desempeña el mismo papel en la ley de Coulomb que el que desempeña la masa m en la ley de la gravitación de Newton. Una diferencia entre las dos leyes es que las fuerzas gravitatorias, hasta donde sabemos, son siempre de atracción, mientras que las fuerzas electrostáticas pueden ser de repulsión o de atracción, dependiendo de si las dos cargas tienen el mismo signo o signos opuestos.

Existe otra diferencia importante entre las dos leyes. Al usar la ley de la gravitación, pudimos definir la masa a partir de la segunda ley de Newton, $F = ma$, y al aplicar luego la ley de la gravitación para masas conocidas pudimos determinar la constante G. Al usar la ley de Coulomb, adoptamos un enfoque distinto: *definimos* para la constante k un valor particular, y luego empleamos la ley de Coulomb para determinar la unidad básica de carga eléctrica como la cantidad de carga que produce una unidad de fuerza estándar.

Por ejemplo, consideremos la fuerza entre dos cargas iguales de magnitud q. Podemos ajustar q hasta que la fuerza tenga un valor particular, digamos 1 N para una separación de $r = 1$ m, y definir a la q resultante como la unidad de carga básica. Sin embargo, es más preciso medir la fuerza magnética entre dos conductores por los cuales fluyan corrientes iguales, y por lo tanto la unidad eléctrica fundamental del SI será la unidad de corriente, de la cual se deriva la unidad de carga. En la sección 35-4 se estudia el procedimiento operativo para definir a la unidad de corriente del SI, a la que denominamos el *ampere*.

La unidad de carga en el SI es el *coulomb* (abreviatura C), el cual se define como *la cantidad de carga que fluye en 1 segundo cuando existe una corriente constante de 1 ampere*. Esto es,

$$dq = i\,dt, \qquad (2)$$

en donde dq (en coulombs) es la carga transferida por una corriente i (en amperes) durante el intervalo dt (en segundos). Por ejemplo, un alambre por el cual fluye una corriente constante de 2 A entrega una carga de 2×10^{-6} C en un tiempo de 10^{-6} s.

En el sistema SI, la constante k se expresa en la forma siguiente:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \qquad (3)$$

Si bien la elección de esta forma para la constante k parece hacer innecesariamente compleja a la ley de Coulomb,

termina por ser una simplificación de las fórmulas del electromagnetismo, las cuales se usan más a menudo que la ley de Coulomb.

La constante ϵ_0, llamada *constante de permitividad*, tiene un valor que queda determinado por el valor adoptado de la velocidad de la luz, como se verá en el capítulo 41. Su valor es

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}.$$

La constante k tiene el valor correspondiente (con tres cifras significativas)

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}.$$

Con esta elección de la constante k, la ley de Coulomb puede escribirse como

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{4}$$

Cuando k tiene el valor de arriba, el expresar a q en coulombs y a r en metros la fuerza estará en newtons.

La ley de Coulomb: forma vectorial

Hasta ahora sólo hemos considerado la magnitud de la fuerza entre dos cargas obtenida conforme a la ley de Coulomb. La fuerza, por ser un vector, tiene también propiedades direccionales. En el caso de la ley de Coulomb, la dirección de la fuerza queda determinada dependiendo del signo relativo de las dos cargas eléctricas.

Como se ilustra en la figura 5, supongamos que tenemos dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas por una distancia r_{12}. Por el momento, supongamos que las dos cargas tienen el mismo signo, de modo que se repelen entre sí. Consideremos la fuerza *sobre* la partícula 1 ejercida *por* la partícula 2, lo que escribimos en nuestra forma usual como $\mathbf{F}_{12}$. El vector de posición que ubica a la partícula 1 en relación con la partícula 2 es $\mathbf{r}_{12}$; esto es, si definiéramos el origen de nuestro sistema de coordenadas en la ubicación de la partícula 2, entonces $\mathbf{r}_{12}$ sería el vector de posición de la partícula 1.

Si las dos cargas tienen el mismo signo, entonces la fuerza es de repulsión y, como se muestra en la figura 5*a*, $\mathbf{F}_{12}$ debe ser paralelo a $\mathbf{r}_{12}$. Si las cargas tienen signos opuestos, como en la figura 5*b*, entonces la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ es de atracción y antiparalela a $\mathbf{r}_{12}$. En cualquier caso, podemos representar a la fuerza como

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}. \tag{5}$$

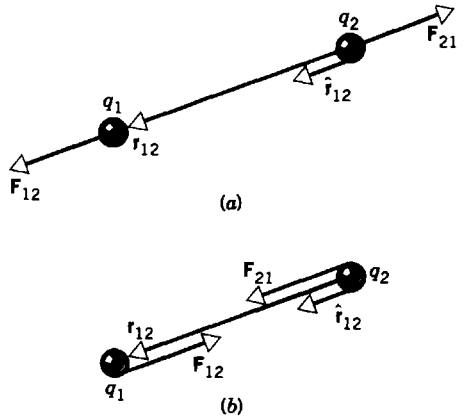


Figura 5 (*a*) Dos cargas puntuales q_1 y q_2 del mismo signo ejercen fuerzas de repulsión iguales y opuestas entre sí. El vector $\mathbf{r}_{12}$ ubica a q_1 en relación con q_2, y el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ apunta en la dirección de $\mathbf{r}_{12}$. Nótese que $\mathbf{F}_{12}$ es paralelo a $\mathbf{r}_{12}$. (*b*) Las dos cargas tienen ahora signos opuestos, y la fuerza es de atracción. Obsérvese que $\mathbf{F}_{12}$ es antiparalelo a $\mathbf{r}_{12}$.

Aquí r_{12} representa la magnitud del vector $\mathbf{r}_{12}$, y $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ indica al *vector unitario* en la dirección de $\mathbf{r}_{12}$. Es decir,

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{6}$$

Hemos empleado una forma semejante a la ecuación 5 para expresar la fuerza gravitatoria (véanse las Ecs. 2*a* y 2*b* del capítulo 16).

De la figura 5 se desprende otra característica. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida *sobre* la partícula 2 *por* la partícula 1, $\mathbf{F}_{21}$, es opuesta a $\mathbf{F}_{12}$. Esta fuerza puede entonces expresarse de la misma forma exactamente:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}. \tag{7}$$

Aquí $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ es un vector unitario que apunta de la partícula 1 a la partícula 2; es decir, sería el vector unitario en la dirección de la partícula 2 si el origen de las coordenadas estuviese en la ubicación de la partícula 1.

La forma vectorial de la ley de Coulomb es útil porque conlleva la información direccional acerca de $\mathbf{F}$ y de si la fuerza es de atracción o de repulsión. El uso de la forma vectorial es de importancia crítica cuando consideramos que las fuerzas actúan sobre un conjunto de más de dos cargas. En este caso, la ecuación 5 se cumpliría para cada par de cargas, y la fuerza total de cada carga se determinaría al sumar *vectorialmente* las fuerzas debidas a cada una de las otras cargas. Por ejemplo, la fuerza sobre la partícula 1 en un conjunto sería

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \cdots, \tag{8}$$

en donde $\mathbf{F}_{12}$ es la fuerza sobre la partícula 1 provocada por la partícula 2, $\mathbf{F}_{13}$ es la fuerza que ejerce sobre la partícula 1, la partícula 3, y así sucesivamente. La ecuación 8 es la representación matemática del *principio de superposición* aplicado a fuerzas eléctricas. Este principio nos permite calcular la fuerza debida a cualquier par de cargas como si las otras cargas no estuvieran presentes. Por ejemplo, la fuerza $\mathbf{F}_{13}$ que la partícula 3 ejerce sobre la partícula 1 no se ve afectada en absoluto por la presencia de la partícula 2. El principio de superposición no es de ninguna manera obvio y en muchas situaciones no se cumple, en particular en el caso de fuerzas eléctricas muy intensas. Su aplicabilidad sólo es posible verificarla por medio de la experimentación. Sin embargo, el principio de superposición es válido para todas las situaciones que consideraremos en este texto.

La trascendencia de la ley de Coulomb va mucho más allá de la descripción de las fuerzas que actúan entre esferas cargadas. Esta ley, cuando está incorporada dentro de la estructura de la física cuántica, describe correctamente (1) las fuerzas eléctricas de enlace de los electrones de un átomo con su núcleo, (2) las fuerzas que enlazan a los átomos entre sí para formar las moléculas, y (3) las fuerzas que ligan a los átomos y a las moléculas entre sí para formar a los sólidos y los líquidos. Así, la mayoría de las fuerzas de nuestra experiencia diaria que no son de naturaleza gravitatoria son eléctricas. Además, a diferencia de la ley de la gravitación de Newton, que puede considerarse como una aproximación cotidiana útil de la teoría general de la relatividad, más básica, la ley de Coulomb es un resultado exacto para cargas estacionarias y no una aproximación que parte de una ley superior. Ésta se cumple no sólo para objetos ordinarios, sino también para la mayoría de las partículas "puntuales" fundamentales como los electrones y los quarks. La ley de Coulomb permanece válida en el límite del cuanto (por ejemplo, al calcular la fuerza electrostática entre el protón y el electrón en un átomo de hidrógeno). Cuando las partículas cargadas se mueven con velocidades cercanas a la de la luz, como en un acelerador de alta energía, la ley de Coulomb no da una descripción completa de sus interacciones electromagnéticas, sino que debe realizarse un análisis más completo basado en las ecuaciones de Maxwell.

Problema muestra 1 La figura 6 muestra tres partículas cargadas, mantenidas en su lugar por fuerzas no mostradas. ¿Qué fuerza electrostática, debida a las otras dos cargas, actúa sobre q_1? Considere $q_1 = -1.2\mu C$, $q_2 = +3.7\mu C$, $q_3 = -2.3\mu C$, $r_{12} = 15$ cm, $r_{13} = 10$ cm, y $\theta = 32°$.

Solución Este problema exige el uso del principio de superposición. Comenzamos por calcular las magnitudes de las fuerzas que ejercen q_2 y q_3 sobre q_1. Sustituimos las magnitudes de las cargas en la ecuación 5, sin considerar sus signos por ahora. Entonces tenemos

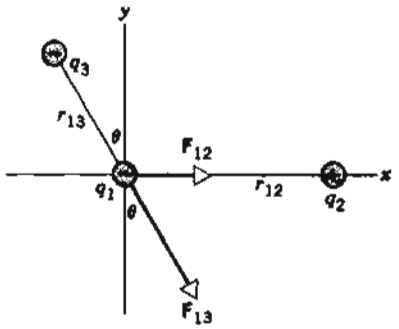


Figura 6 Problema muestra 1. Las tres cargas ejercen tres pares de fuerzas de acción-reacción entre sí. Aquí se muestran únicamente las dos fuerzas que actúan sobre q_1.

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$
$$= \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.2 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(3.7 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.15\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 1.77\ \mathrm{N}.$$

Las cargas q_1 y q_2 tienen signos opuestos de modo que la fuerza entre ellas es de atracción. De aquí que $\mathbf{F}_{12}$ apunte a la derecha en la figura 6.

También tenemos que

$$F_{13} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.2 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(2.3 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.10\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 2.48\ \mathrm{N}.$$

Estas dos cargas tienen el mismo signo (negativo) de modo que la fuerza entre ellas es de repulsión. Así, $\mathbf{F}_{13}$ apunta como se muestra en la figura 6.

Las componentes de la fuerza resultante $\mathbf{F}_1$ que actúan sobre q_1 se determinan por las componentes correspondientes de la ecuación 8, o sea

$$F_{1x} = F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$= 1.77\ \mathrm{N} + (2.48\ \mathrm{N})(\mathrm{sen}32°) = 3.08\ \mathrm{N}$$

y

$$F_{1y} = F_{12y} + F_{13y} = 0 - F_{13}\cos\theta$$
$$= -(2.48\ \mathrm{N})(\cos 32°) = -2.10\ \mathrm{N}.$$

A partir de estas componentes podemos demostrar que la magnitud de $\mathbf{F}_1$ es 3.73 N y que este vector forma un ángulo de -34° con el eje x.

27-5 LA CARGA ESTÁ CUANTIZADA

En la época de Franklin, se pensaba que la carga eléctrica era un fluido continuo, idea que fue útil para muchos propósitos. Sin embargo, ahora sabemos que los fluidos

mismos, como el aire o el agua, no son continuos sino que están formados de átomos y moléculas; la materia es discreta. La experimentación demuestra que el "fluido eléctrico" no es tampoco continuo sino que está formado de múltiplos de una cierta carga elemental. Es decir, cualquier carga q que pueda directamente observarse y medirse puede escribirse como

$$q = ne \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \qquad (9)$$

donde e, la unidad de *carga elemental*, tiene el valor determinado experimentalmente

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19}\ \text{C},$$

con una incertidumbre experimental de alrededor de 3 partes en 10^7. La carga elemental es una de las constantes fundamentales de la naturaleza.

Cuando una cantidad física como la carga existe únicamente en "paquetes" discretos más bien que en cantidades continuamente variables, decimos que la cantidad está *cuantizada*. Ya hemos visto que la materia, la energía, y el ímpetu angular están cuantizados; la carga se suma a la lista como otra cantidad física más de importancia. La ecuación 9 nos dice que es posible, por ejemplo, hallar una partícula que porte una carga de cero, $+10e$, o $-6e$, pero que no es posible hallar una partícula con una carga de, digamos, $3.57e$. La tabla 1 muestra las cargas y algunas otras propiedades de las tres partículas que podemos decir que constituyen el mundo material que nos rodea.

El cuanto de carga es pequeño. Por ejemplo, en un foco eléctrico ordinario de 100 W, 120 V entran alrededor de 10^{19} cargas elementales cada segundo, y un número igual sale de él. La granulosidad de la electricidad no se muestra en fenómenos a gran escala, del mismo modo que no podemos sentir cada una de las moléculas por separado del agua cuando sumergimos nuestra mano en ella.

Desde 1964, los físicos han empleado una teoría de las partículas elementales según la cual partículas tales como el protón y el neutrón se consideran partículas compuestas formadas de unidades más fundamentales llamadas *quarks*. Una característica excepcional de esta teoría es que a los quarks se les atribuyen cargas eléctricas fraccionarias de $+\frac{2}{3}e$ y $-\frac{1}{3}e$. Cada protón y cada neutrón está formado por tres quarks. El protón, con su carga de $+e$, debe estar compuesto de dos quarks, cada uno con una carga de $+\frac{2}{3}e$, y un quark con una carga $-\frac{1}{3}e$.

El neutrón, con su carga neta de 0, debe incluir a dos quarks cada uno de carga $-\frac{1}{3}$ y un quark de carga $+\frac{2}{3}e$. Aunque existe evidencia experimental firme de la existencia de quarks dentro del protón y del neutrón, las colisiones en las que intervienen protones o neutrones a las máximas energías disponibles de los aceleradores no han podido hasta ahora demostrar evidencia alguna de la liberación de un quark libre. Quizá los quarks están ligados tan fuertemente en los protones y en los neutrones que la energía disponible es incapaz de liberar a uno. Por otra parte, se ha sugerido que los quarks se hallan probablemente sujetos a leyes que gobiernan su comportamiento para existir únicamente en combinaciones que den cargas eléctricas en unidades de e. La explicación de la imposibilidad de observar quarks libres no está todavía clara.

Hasta ahora no se ha desarrollado una teoría que nos permita calcular la carga del electrón. Tampoco existe ninguna teoría definitiva que explique por qué la carga negativa fundamental (el electrón) es exactamente igual en magnitud a la carga positiva fundamental (el protón). Por el momento, debemos ver al "cuanto" fundamental de la carga eléctrica como una propiedad básica de la naturaleza suceptible de una medición precisa pero cuyo significado esencial está por ahora más allá de nuestro alcance.

TABLA 1 ALGUNAS PROPIEDADES DE TRES PARTÍCULAS

Partícula	*Símbolo*[a]	*Carga*[b]	*Masa*[c]	*Ímpetu angular*[d]
Electrón	e^-	−1	1	$\frac{1}{2}$
Protón	p	+1	1836.15	$\frac{1}{2}$
Neutrón	n	0	1838.68	$\frac{1}{2}$

[a] Cada una de las partículas tiene una *antipartícula* con la misma masa e ímpetu angular pero de carga opuesta. Las antipartículas se indican con los símbolos e^+ (electrón positivo o positrón), $\bar{p}$ (antiprotón), y $\bar{n}$ (antineutrón).
[b] En unidades de la carga elemental e.
[c] En unidades de la masa del electrón m_e.
[d] El ímpetu angular del espín intrínseco, en unidades de $h/2\pi$. Introdujimos este concepto en la sección 13-6, y damos ahora un tratamiento más completo en el capítulo 51 de la versión ampliada del texto.

Problema muestra 2 Una pequeña moneda, por ser eléctricamente neutra, contiene cantidades iguales de carga positiva y negativa. ¿Cuál es la magnitud de estas cargas iguales?

Solución La carga q está dada por NZe, en donde N es el número de átomos en la moneda y Ze es la magnitud de las cargas positiva y negativa de cada átomo.

El número N de átomos en la moneda, suponiendo para simplificar que esté hecha de cobre, es de $N_A m/M$, en donde N_A es la constante de Avogadro. La masa m de la moneda es de 3.11 g, y la masa M de 1 mol de cobre (llamado su *masa molar*) es de 63.5 g. Hallamos

$$N = \frac{N_A m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol})(3.11\ \text{g})}{63.5\ \text{g/mol}}$$
$$= 2.95 \times 10^{22}\ \text{átomos}$$

Cada átomo neutro tiene una carga negativa de magnitud Ze asociada a sus electrones y una carga positiva de la misma magnitud asociada su núcleo. Aquí e es la magnitud de la carga sobre el electrón, la cual es de 1.60×10^{-19} C, y Z es el número atómico del elemento en cuestión. Para el cobre, Z es 29. La magnitud de la carga total negativa o positiva en la moneda es entonces de

$$\begin{aligned} q &= NZe \\ &= (2.95 \times 10^{22})(29)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}) \\ &= 1.37 \times 10^{5}\ \text{C}. \end{aligned}$$

Ésta es una carga descomunal. Como comparación, la carga que podríamos obtener frotando una varilla de plástico es quizás de 10^{-9} C, valor menor en un factor de unos 10^{14}. Otra comparación: a una carga de 1.37×10^{5} C le tomaría unas 38 h fluir por el filamento de un foco eléctrico de 100 W, 120 V. Existe una gran cantidad de carga eléctrica en la materia ordinaria.

Problema muestra 3 En el problema muestra 2 vimos que una moneda pequeña de cobre contiene cargas tanto positivas como negativas, cada una de una magnitud de 1.37×10^{5} C. Supongamos que estas cargas pudieran concentrarse en dos "manojos" o grupos con 100 m de separación entre uno y otro. ¿Qué fuerza de atracción actuaría sobre cada manojo?

Solución A partir de la ecuación 4 tenemos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.37 \times 10^{5}\ \text{C})^2}{(100\ \text{m})^2} \\ &= 1.69 \times 10^{16}\ \text{N}. \end{aligned}$$

¡Esto significa alrededor de 2×10^{12} toneladas de fuerza! Aun si las cargas estuviesen separadas por un diámetro de la Tierra, la fuerza de atracción sería todavía de unas 120 toneladas. En todo esto hemos dejado a un lado el problema de formar con cada una de las cargas separadas un "manojo" o agrupamiento cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con su separación. Tales manojos, si pudiesen formarse alguna vez, explotarían separándose por las fuerzas mutuas de repulsión de Coulomb.

La lección que podemos obtener de este problema muestra es que no podemos perturbar mucho la neutralidad eléctrica de la materia ordinaria. Si tratamos de retirar cualquier fracción considerable de la carga contenida en un cuerpo, aparecerá automáticamente una gran fuerza de Coulomb, que tendería a regresarla.

Problema muestra 4 La distancia promedio r entre el electrón y el protón en el átomo de hidrógeno es de 5.3×10^{-11} m. (*a*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza electrostática promedio que actúa entre estas dos partículas? (*b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitatoria promedio que actúa entre estas partículas?

Solución (*a*) De la ecuación 4 tenemos, para la fuerza electrostática,

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(5.3 \times 10^{-11}\ \text{m})^2} \\ &= 8.2 \times 10^{-8}\ \text{N}. \end{aligned}$$

Mientras que esta fuerza puede parecer pequeña (es aproximadamente igual al peso de una motita de polvo), produce un efecto inmenso, es decir, la aceleración del electrón dentro del átomo.

(*b*) Para la fuerza gravitatoria, tenemos

$$\begin{aligned} F_g &= G\frac{m_e m_p}{r^2} \\ &= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{(5.3 \times 10^{-11}\ \text{m})^2} \\ &= 3.6 \times 10^{-47}\ \text{N}. \end{aligned}$$

Vemos que la fuerza gravitatoria es más débil que la fuerza electrostática en un factor enorme de alrededor de 10^{39}. Si bien la fuerza gravitatoria es débil, ésta siempre es de atracción. Por tanto, puede actuar para crear masas muy grandes, como en la formación de las estrellas y de los planetas, de modo que pueden generarse grandes fuerzas gravitatorias. En cambio, la fuerza electrostática es de repulsión para cargas del mismo signo, de manera que no es posible acumular grandes concentraciones sean éstas de carga positiva o negativa. Debemos tener siempre a las dos juntas, de modo que se compensen en gran medida entre sí. Las cargas a las que estamos habituados en nuestras experiencias diarias son pequeñas alteraciones de este equilibrio avasallador.

Problema muestra 5 El núcleo de un átomo de hierro tiene un radio de unos 4×10^{-15} m y contiene 26 protones. ¿Qué fuerza electrostática de repulsión actúa entre dos protones en tal núcleo si están separados por una distancia de un radio?

Solución De la ecuación 4 tenemos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_p q_p}{r^2} \\ &= \frac{(8.99 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(4 \times 10^{-15}\ \text{m})^2} \\ &= 14\ \text{N}. \end{aligned}$$

Esta enorme fuerza, de más de 3 lb y que actúa sobre un solo protón, debe ser más que equilibrada por la fuerza nuclear de atracción que une al núcleo entre sí. Esta fuerza, cuyo alcance es tan corto que sus efectos no pueden percibirse mucho más allá del núcleo, se conoce como "fuerza nuclear fuerte", nombre que resulta muy apropiado.

27-6 LA CARGA SE CONSERVA

Cuando se frota una varilla de vidrio con seda, aparece en aquélla una carga positiva. La medición nos muestra que en la seda aparece una consiguiente carga negativa. Esto indica que la acción de frotar no crea carga, sino que sólo la transfiere de un objeto al otro, alterando ligeramente la neutralidad eléctrica de cada uno. Esta hipótesis de la *conservación de la carga* ha soportado un estrecho escrutinio experimental tanto para acontecimientos de gran escala como al nivel atómico y nuclear: jamás se han encontrado excepciones.

Un ejemplo interesante de la conservación de la carga surge cuando un electrón (carga = $-e$) y un positrón (carga = $+e$) se acercan entre sí. Las dos partículas pueden simplemente desaparecer, convirtiendo toda su energía de reposo en energía radiante. La energía radiante puede aparecer en la forma de dos rayos gamma directamente opuestos con una energía total de $2m_ec^2$; entonces

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

La carga neta es cero tanto antes como después del acontecimiento, y la carga se conserva.

Ciertas partículas no cargadas, como el mesón π neutro, tienen capacidad de desintegrarse electromagnéticamente en dos rayos gamma:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Esta desintegración conserva la carga, siendo nuevamente de 0 la carga total antes y después de la desintegración. Otro ejemplo: un neutrón ($q = 0$) se desintegra en un protón ($q = +e$) y un electrón ($q = -e$) más otra partícula neutra, el neutrino ($q = 0$). La carga total es de cero, tanto antes como después de la desintegración, y la carga se conserva. Se han realizado experimentos para investigar desintegraciones del neutrón en un protón sin ningún electrón emitido, lo cual violaría la conservación de la carga. No se han hallado tales fenómenos, y el límite superior de su incidencia, respecto a las desintegraciones con conservación de la carga, es de 10^{-23}.

La desintegración de un electrón ($q = -e$) en partículas neutras, como los rayos gamma (γ) o los neutrinos (ν) no es posible; por ejemplo,

$$e^- \not\rightarrow \gamma + \nu,$$

a causa de que dicha desintegración violaría el principio de la conservación de la carga. Los intentos por observar esta desintegración no han tenido tampoco éxito, indicando que, si la desintegración ocurre, el electrón debe tener un tiempo de vida de cuando menos ¡10^{22}años!

Otro ejemplo de la conservación de la carga se encuentra en la fusión de dos núcleos de deuterio ^2H (llamado "hidrógeno pesado") para formar helio. Entre las reacciones posibles están

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3H + p,$$

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3He + n.$$

El núcleo de deuterio contiene un protón y un neutrón y por lo tanto tiene una carga de $+e$. El núcleo del isótopo de hidrógeno con masa 3, cuyo símbolo es ^3H y al que se conoce como *tritio*, contiene un protón y dos neutrones, por lo que tiene también una carga de $+e$. La primera reacción tiene en consecuencia una carga neta de $+2e$ en cada lado y la carga se conserva. En la segunda reacción, el neutrón no está cargado, mientras que el núcleo del isótopo de helio con masa 3 contiene dos protones y un neutrón, y por tanto tiene una carga de $+2e$. En la segunda reacción también se conserva la carga. La conservación de la carga explica por qué nunca vemos a un protón emitido cuando está sucediendo la segunda reacción o a un neutrón cuando la primera ocurre.

PREGUNTAS

1. Se le dan a usted dos esferas de metal montadas sobre soportes aislantes portátiles. Halle una manera de darles cargas iguales y opuestas. Puede emplear una varilla de vidrio frotada con seda pero no puede tocar las esferas. ¿Han de ser las esferas de igual tamaño para que su método funcione?
2. En la pregunta 1, encuentre una forma de dar a las esferas cargas iguales del mismo signo. Nuevamente, ¿es necesario que las esferas sean de igual tamaño para que el método funcione?
3. Una varilla cargada atrae partículas de polvo de corcho seco, las cuales, después de tocar la varilla, a menudo se alejan de ella violentamente. Explique.
4. Los experimentos descritos en la sección 27-2 podrían explicarse postulando cuatro clases de carga, es decir, sobre vidrio, seda, plástico, y piel. ¿Cuál es el argumento contra esto?
5. Una carga positiva se aproxima a un conductor aislado sin carga. El conductor se pone a tierra mientras la carga se mantiene cerca. ¿Se carga el conductor positiva o negativamente, o no se carga en absoluto si (*a*) se retira la carga y luego la conexión a tierra se suprime, y (*b*) se suprime la conexión a tierra y luego se retira la carga?
6. Un aislante cargado puede descargarse pasándolo por encima de una llama. Explique por qué.
7. Si frota enérgicamente una moneda entre los dedos no logrará que resulte cargada por la fricción. ¿Por qué?
8. Si usted camina rápidamente sobre una alfombra, a menudo percibe una "chispa" al tocar la manija de una puerta. (*a*) ¿Por qué? (*b*) ¿Cómo puede evitarse?
9. ¿Por qué los experimentos de electrostática no funcionan bien en los días húmedos?
10. ¿Por qué se recomienda tocar el armazón metálico de una computadora personal antes de instalar algún accesorio interno?
11. Se dice que una varilla aislada lleva una carga eléctrica. ¿Cómo podría usted verificarlo y determinar el signo de la carga?

12. Si una varilla de vidrio cargada se sostiene cerca de un extremo de una barra de metal aislada no cargada como en la figura 7, los electrones se retiran hacia un extremo como se muestra. ¿Por qué cesa el flujo de electrones? Al fin y al cabo, en la barra de metal hay una fuente casi inagotable de ellos.

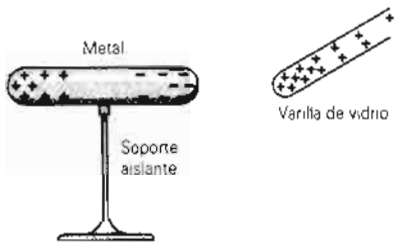


Figura 7 Preguntas 12 y 13.

13. En la figura 7, ¿actúa alguna fuerza eléctrica resultante sobre la barra de metal? Explique.
14. Una persona parada sobre un banquillo de metal aislante toca un conductor aislado cargado. ¿Se descarga el conductor completamente?
15. (*a*) Una barra de vidrio cargada positivamente atrae un objeto suspendido. ¿Puede concluirse que el objeto está cargado negativamente? (*b*) Una barra de vidrio cargada positivamente repele a un objeto suspendido. ¿Puede concluirse que el objeto está cargado positivamente?
16. Explique qué se quiere decir cuando se afirma que las fuerzas electrostáticas obedecen al principio de superposición.
17. ¿Cambia la fuerza eléctrica que una carga ejerce sobre otra si se les aproximan otras cargas?
18. Una solución de sulfato de cobre es conductora. ¿Qué partículas sirven como portadores de carga en este caso?
19. Si los electrones de un metal como el cobre pueden moverse libremente, deben dirigirse hacia la superficie de metal. ¿Por qué no continúan su movimiento y abandonan el metal?
20. ¿Habría habido alguna diferencia importante si Benjamin Franklin hubiese elegido, en realidad, llamar positivos a los electrones y negativos a los protones?
21. La ley de Coulomb predice que la fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra es proporcional al producto de las dos cargas. ¿Qué haría usted para verificar la validez de la ley en el laboratorio?
22. Explique cómo puede un núcleo atómico ser estable si está compuesto de partículas que no son neutras (neutrones) ni portan cargas iguales (protones).
23. Un electrón (carga = $-e$) gira alrededor de un núcleo de helio (carga = $+2e$) en un átomo de helio. ¿Qué partícula ejerce la fuerza mayor sobre la otra?
24. La carga de una partícula es una característica real de la partícula, la cual es independiente de su estado de movimiento. Explique cómo puede usted demostrar esta aseveración haciendo una comprobación experimental sólida de si el átomo de hidrógeno es en verdad eléctricamente neutro.
25. El teorema de Earnshaw afirma que ninguna partícula puede estar en un equilibrio estable bajo la acción de fuerzas electrostáticas únicamente. Sin embargo, considérese al punto P en el centro de un cuadrado formado por cuatro cargas positivas iguales, como en la figura 8. Si se introduce una carga positiva testigo (de prueba) podría parecer que está en equilibrio estable. Cada una de las cuatro cargas externas empujan hacia P. Sin embargo, el teorema de Earnshaw se cumple. ¿Puede usted explicar cómo?

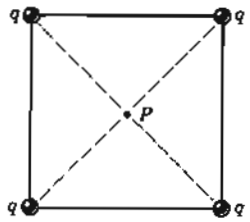


Figura 8 Pregunta 25.

26. El cuanto de carga es de 1.60×10^{-19} C. ¿Existe un correspondiente cuanto de masa?
27. ¿Qué queremos decir con que una cantidad física está (*a*) cuantizada o (*b*) se conserva? Dé algunos ejemplos.
28. En el problema muestra 4 demostramos que la fuerza eléctrica es de alrededor de 10^{39} veces más intensa que la fuerza gravitatoria. ¿Puede concluirse de ello que una galaxia, una estrella, o un planeta deben, en principio, ser eléctricamente neutros?
29. ¿Cómo sabemos que las fuerzas electrostáticas no son la causa de la atracción gravitatoria, por ejemplo entre la Tierra y la Luna?

PROBLEMAS

Sección 27-4 La ley de Coulomb

1. Una carga puntual de $+3.12 \times 10^{-6}$ C está a una distancia de 12.3 cm de una segunda carga puntual de -1.48×10^{-6} C. Calcule la magnitud de la fuerza para cada carga.
2. ¿Cuál debe ser la distancia entre la carga puntual $q_1 = 26.3\ \mu$C y la carga puntual $q_2 = -47.1\ \mu$C con objeto de que la fuerza eléctrica de atracción entre ellas tenga una magnitud de 5.66 N?

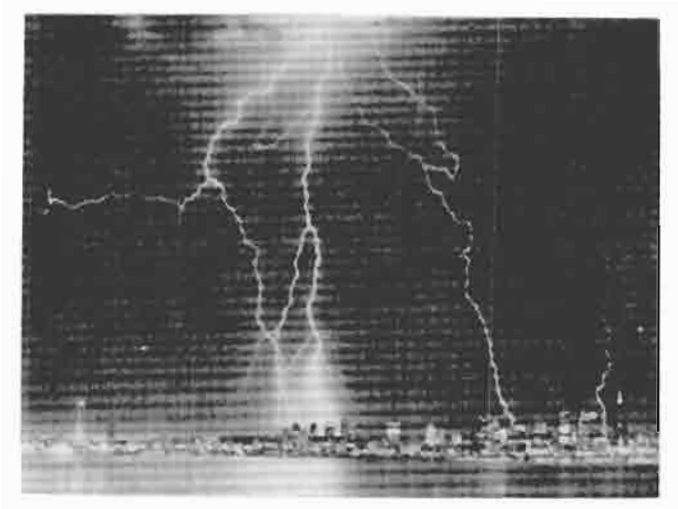


Figura 9 Problema 3.

3. En el trayecto de retorno de un rayo típico (véase la figura 9) fluye una corriente de 2.5×10^4 A durante 20 μs. ¿Cuánta carga se transfiere en este proceso?
4. Dos partículas igualmente cargadas, separadas por una distancia de 3.20 mm, se liberan del reposo. Se observa que la aceleración inicial de la primera partícula es de 7.22 m/s^2 y que la de la segunda es de 9.16 m/s^2. La masa de la primera partícula es de 6.31×10^{-7} kg. Determine (*a*) la masa de la segunda partícula y (*b*) la magnitud de la carga común.
5. La figura 10*a* muestra dos cargas, q_1 y q_2, separadas por una distancia fija d. (*a*) Encuentre el valor de la fuerza eléctrica que actúa sobre q_1. Suponga que $q_1 = q_2 = 21.3$ μC y $d = 1.52$ m. (*b*) Una tercera carga $q_3 = 21.3$ μC se introduce y se coloca como se muestra en la figura 10*b*. Calcule la intensidad de la fuerza eléctrica q_1 ahora.

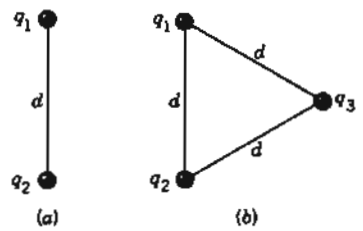


Figura 10 Problema 5.

6. Dos esferas conductoras idénticas, ① y ②, portan cantidades iguales de carga y están fijas a una distancia muy grande en comparación con sus diámetros. Se repelen entre sí con una fuerza eléctrica de 88 mN. Supóngase, ahora, que una tercera esfera idéntica ③, la cual tiene un mango aislante y que inicialmente no está cargada, se toca primero con la esfera ①, luego con la esfera ②, y finalmente se retira. Halle la fuerza entre las esferas ① y ② ahora. Véase la figura 11.

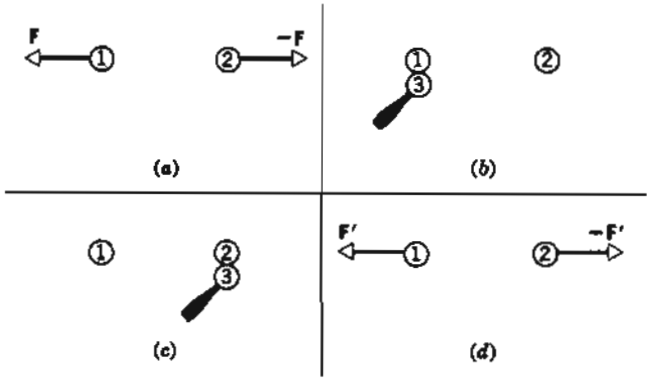


Figura 11 Problema 6.

7. Tres partículas cargadas se encuentran en una línea recta y están separadas por una distancia d como se muestra en la figura 12. Las cargas q_1 y q_2 se mantienen fijas. La carga q_3, la cual puede moverse libremente, está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas eléctricas. Halle q_1 en términos de q_2.

Figura 12 Problema 7.

8. En la figura 13, determine las componentes (*a*) horizontal y (*b*) vertical de la fuerza eléctrica resultante sobre la carga de la esquina inferior izquierda del cuadrado. Suponga que $q = 1.13$ μC y $a = 15.2$ cm. Las cargas están en reposo.

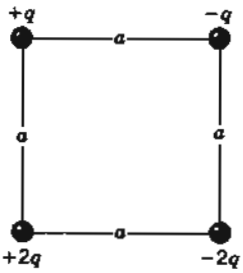


Figura 13 Problema 8.

9. Dos cargas positivas de 4.18 μC cada una, y una carga negativa, de −6.36 μC, están fijas en los vértices de un triángulo equilátero de 13.0 cm de lado. Calcule la fuerza eléctrica sobre la carga negativa.
10. Cada una de dos pequeñas esferas está cargada positivamente, siendo la carga total de 52.6 μC. Cada esfera repele a la otra con una fuerza de 1.19 N cuando las esferas están separadas 1.94 m. Calcule la carga sobre cada esfera.

11. Dos esferas conductoras idénticas, que tienen cargas de signo opuesto, se atraen entre sí con una fuerza de 0.108 N cuando están separadas por 50.0 cm. Las esferas se conectan súbitamente con un alambre conductor delgado, que luego se retira, y después las esferas se repelen entre sí con una fuerza de 0.0360 N. ¿Cuáles eran las cargas iniciales de las esferas?

12. Dos cargas fijas, de +1.07 μC y -3.28 μC, tienen una separación de 61.8 cm. ¿Dónde puede estar una tercera carga de modo que no actúe sobre ella ninguna carga neta?

13. Dos cargas puntuales *libres* $+q$ y $+4q$ están separadas por una distancia L. Se coloca una tercera carga de modo que todo el sistema esté en equilibrio. (*a*) Halle el signo, la magnitud, y la ubicación de la tercera carga. (*b*) Demuestre que el equilibrio es inestable.

14. Una carga Q está fija en cada uno de dos vértices opuestos de un cuadrado. Otra carga q está situada en cada uno de los otros dos vértices. (*a*) Si la fuerza eléctrica resultante sobre Q es cero, ¿cómo se relacionan Q y q? (*b*) ¿Podría elegirse a q de modo que la fuerza eléctrica resultante sobre *cada* carga sea cero? Explique su respuesta.

15. Cierta carga Q va a dividirse en dos partes $(Q - q)$ y q. ¿Cuál es la relación de Q a q si las dos partes, separadas por una distancia dada, han de tener una repulsión Coulomb máxima?

16. Dos diminutas bolas semejantes de masa m están colgando de hilos de seda de longitud L y portan cargas iguales q como en la figura 14. Suponga que θ es tan pequeño que tan θ puede ser reemplazado por su igual aproximado, sen θ. (*a*) Para esta aproximación demuestre que, para el equilibrio,

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3},$$

en donde x es la separación entre las bolas. (*b*) Si L = 122 cm, m = 11.2 g, y x = 4.70 cm, ¿cuál es el valor de q?

17. Si las bolas de la figura 14 son conductoras, (*a*) ¿qué les sucede después de que una se ha descargado? Explique la respuesta. (*b*) Halle la nueva separación de equilibrio.

18. En el problema 16, suponga que cada bola está perdiendo carga a razón de 1.20 nC/s. ¿Con qué velocidad relativa instantánea (= dx/dt) se acercan entre sí las bolas inicialmente?

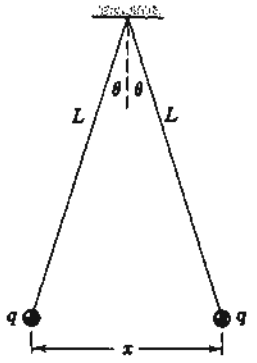


Figura 14 Problemas 16, 17 y 18.

19. Dos cargas puntuales positivas iguales q se mantienen separadas por una distancia fija $2a$. Una carga puntual de prueba se localiza en un plano que es normal a la línea que une a estas cargas y a la mitad entre ellas. Determine el radio R del círculo en este plano para el cual la fuerza sobre la partícula de prueba tiene un valor máximo. Véase la figura 15.

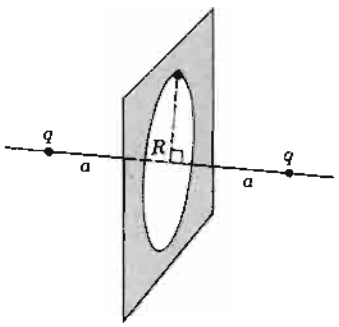


Figura 15 Problema 19.

20. Tres pequeñas bolas, cada una de 13.3 g de masa, están suspendidas separadamente a partir de un punto común por hilos de seda, cada uno de 1.17 m de longitud. Las bolas están cargadas idénticamente y penden de los vértices de un triángulo equilátero de 15.3 cm de lado. Encuentre la carga de cada bola.

21. Un cubo de arista a porta una carga puntual q en cada esquina. Demuestre que la fuerza eléctrica resultante sobre cualquiera de las cargas está dada por

$$F = \frac{0.262q^2}{\epsilon_0 a^2},$$

dirigida a lo largo de la diagonal del cubo hacia afuera del mismo.

22. Dos cargas positivas $+Q$ se mantienen fijas a una distancia d de separación. Una partícula de carga negativa $-q$ y masa m se sitúa en el centro entre ellas y luego, tras un pequeño desplazamiento perpendicular a la línea que las une, se deja en libertad. Demuestre que la partícula describe un movimiento armónico simple de periodo $(\epsilon_0 m\pi^3 d^3/qQ)^{1/2}$.

23. Calcule el periodo de oscilación de una partícula de carga positiva $+q$ desplazada del punto medio y a lo largo de la línea que une a las cargas en el problema 22.

Sección 27-5 La carga está cuantizada

24. Halle la carga total en coulombs de 75.0 kg de electrones.

25. En un cristal de sal, un átomo de sodio transfiere uno de sus electrones a un átomo vecino de cloro, formando un enlace *iónico*. El ion positivo de sodio y el ion negativo de cloro resultantes se atraen entre sí a causa de la fuerza

electrostática. Calcule la fuerza de atracción si los iones están separados por 282 pm.

26. La fuerza electrostática entre dos iones idénticos separados por una distancia de 5.0×10^{-10} m es de 3.7×10^{-9} N. (*a*) Halle la carga sobre cada ion. (*b*) ¿Cuántos electrones faltan en cada ion?

27. Se piensa que un neutrón está compuesto de un quark "arriba" de carga $+\frac{2}{3}e$ y dos quarks "abajo" cada uno de los cuales tiene una carga de $-\frac{1}{3}e$. Si los quarks abajo están con una separación de 2.6×10^{-15} m adentro del neutrón, ¿cuál es la fuerza eléctrica de repulsión entre ellos?

28. (*a*) ¿Cuántos electrones tendrían que ser retirados de una moneda de cobre para dejarla con una carga de $+1.15 \times 10^{-7}$ C? (*b*) ¿A qué fracción de los electrones en la moneda corresponde esto? Véase el problema muestra 2.

29. Un electrón está en el vacío cerca de la superficie de la Tierra. ¿En dónde estaría situado un segundo electrón de modo que la fuerza neta sobre el primer electrón, debida al otro electrón y a la gravedad, sea cero?

30. Los protones de los rayos cósmicos golpean a la atmósfera de la Tierra a razón de 1500 protones/$m^2 \cdot s$, promediados sobre la superficie de la Tierra. ¿Qué corriente total recibe la Tierra desde más allá de su atmósfera en forma de protones de rayo cósmico incidente?

31. Calcule el número de coulomb de carga positiva en un vaso de agua. Supóngase que el volumen del agua es de 250 cm^3.

32. En el compuesto CsCl (cloruro de cesio, los átomos de Cs están situados en las esquinas de un cubo con un átomo de Cl en el centro del cubo. La longitud de la arista del cubo es de 0.40 nm; véase la figura 16. A cada uno de los átomos de Cs le falta un electrón y el átomo de Cl porta un electrón en exceso. (*a*) ¿Cuál es la intensidad de la fuerza eléctrica neta sobre el átomo de Cl resultante de los ocho átomos de Cs mostrados? (*b*) Supóngase que el átomo de Cs marcado con una flecha está faltando (defecto cristalino). ¿Cuál es ahora la fuerza eléctrica neta sobre el átomo de Cl resultante de los siete átomos de Cs restantes?

33. (*a*) ¿Qué cantidades iguales de carga positiva tendrían que ponerse sobre la Tierra y sobre la Luna para neutralizar su atracción gravitatoria? ¿Necesita usted conocer la distancia a la Luna para resolver este problema? ¿Por qué o por qué no? (*b*) ¿Cuántas toneladas métricas de hidrógeno se necesitarían para suministrar la carga positiva calculada en la pregunta (*a*)? La masa molar del hidrógeno es de 1.008 g/mol.

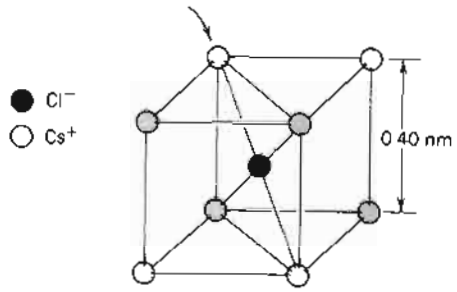


Figura 16 Problema 32.

34. Dos estudiantes de física (María de 52.0 kg y Juan de 90.7 kg) están a una separación de 28.0 m. Suponga que cada uno tiene un desbalance del 0.01% en sus cantidades de carga positiva y negativa, siendo uno de ellos positivo y el otro negativo. Calcule la fuerza electrostática de atracción entre ellos. (*Sugerencia*: Remplace a los estudiantes por esferas de agua y use el resultado del problema 31.)

Sección 27-6 La carga se conserva

35. Identifique al elemento X en las siguientes reacciones nucleares:

(*a*) $^{1}H + {}^{9}Be \rightarrow X + n$;

(*b*) $^{12}C + {}^{1}H \rightarrow X$;

(*c*) $^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + X$.

(*Sugerencia*: Véase el apéndice E.)

36. En la desintegración radiactiva de ^{238}U ($^{238}U \rightarrow {}^{4}He + {}^{234}Th$), el centro de la partícula de ^{4}He emergente está, en cierto instante, a 12×10^{-15} m del núcleo residual de ^{234}Th. En ese instante, (*a*) ¿cuál es la fuerza sobre la partícula de ^{4}He y (*b*) cuál es su aceleración?

CAPÍTULO 28

EL CAMPO ELÉCTRICO

El 25 de agosto de 1989, doce años después de su lanzamiento, el vehículo espacial Voyager 2 *pasó cerca del planeta del espacio exterior Neptuno, a una distancia de 4.4 × 10⁹ km de la Tierra. Entre otros descubrimientos, el* Voyager *informó de la observación de seis lunas de Neptuno y un sistema de anillos, hasta entonces desconocidos.*

¿Cómo se transmitió esta información a través de la enorme distancia entre el Voyager *y la Tierra? La clave para entender esta clase de comunicación es el* campo electromagnético. *Los electrones que se mueven en los circuitos eléctricos del* Voyager *forman un campo electromagnético, y las variaciones en su movimiento causan una perturbación en el campo para viajar a la velocidad de la luz. Poco más de 4 horas después, electrones de otros circuitos en la Tierra detectan estos cambios en el campo y se mueven en consonancia con ellos.*

Aunque éste es el ejemplo de un campo variable en el tiempo generado por cargas en movimiento, y en este capítulo nos ocuparemos del campo estático de cargas en reposo, el ejemplo ilustra, sin embargo, la utilidad del concepto de campo para entender cómo actúan las fuerzas electromagnéticas a través de grandes distancias. En capítulos siguientes presentamos el campo magnético análogo para corrientes constantes, para demostrar, a continuación, cómo las ondas electromagnéticas, como las de la radio o de la luz, pueden explicarse en términos de campos electromagnéticos producidos por cargas en movimiento y corrientes variables.

28-1 CAMPOS

La temperatura tiene un valor definido en cada punto del salón en el que usted debe estar sentado. Podemos medir la temperatura en cada punto colocando un termómetro en ese punto, y podríamos entonces representar la distribución de las temperaturas a través del salón ya sea con una función matemática, digamos, $T(x,y,z)$, o bien con un gráfico trazando la variación de T. Tal distribución de temperaturas se llama *campo de temperaturas*. De igual forma podríamos medir la presión en distintos puntos en el seno de un fluido y así obtener una representación del *campo de presión*, describiendo la variación espacial de la presión. Tales campos se llaman *campos escalares*, porque la temperatura T y la presión p son cantidades escalares. Si la temperatura y la presión no varían con el tiempo, son también *campos estáticos*; de otro modo serían *campos variables con el tiempo* y debieran estar representados matemáticamente por una función como $T(x,y,z,t)$.

Como se estudió en la sección 18-5, la velocidad de flujo en un fluido puede representarse por un campo de flujo, el cual es un ejemplo de *campo vectorial* (véanse las figs. 14 a 18 del capítulo 18). Asociada con cada punto del fluido está una cantidad vectorial, la velocidad **v** con la que fluye el fluido al pasar por ese punto. Si la velocidad del flujo permanece constante en el tiempo, este campo vectorial puede también describirse como un campo estático, representado por la función matemática $\mathbf{v}(x,y,z)$. Nótese que, aun cuando el fluido está fluyendo, el *campo* es estático si los valores en un punto no cambian con el tiempo.

En la sección 16-7, presentamos al campo gravitatorio **g**, definido en la ecuación 19 del capítulo 16 como la fuerza gravitatoria **F** por unidad de masa de prueba m_0, o sea

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m_0}. \tag{1}$$

Este campo es también un campo vectorial y, además, es usualmente estático cuando la distribución de la masa del cuerpo gravitatorio, que es la fuente del campo, permanece constante. Cerca de la superficie de la Tierra, y para puntos no demasiado alejados, es también un campo *uni-*

forme, queriendo decir que **g** es la misma (tanto en dirección como en magnitud) para todos los puntos.

Podemos emplear la ecuación 1 en la manera siguiente para proporcionar un procedimiento operativo para medir el campo gravitatorio. Usamos un cuerpo de prueba de una masa m_0 muy pequeña y lo soltamos en el campo gravitatorio que deseamos medir. Determinamos su aceleración gravitatoria en un punto en particular, y la ecuación 1 nos dice entonces que la aceleración $\mathbf{F}/m_0$ es igual (en magnitud y en dirección) al campo gravitatorio **g** en ese punto. En este procedimiento especificamos que se trata de un cuerpo de prueba de masa pequeña para estar seguros de que el cuerpo de prueba no perturba la distribución de masa del cuerpo gravitatorio y no cambia, por lo tanto, el campo que estamos tratando de medir. Por ejemplo, la Luna provoca mareas que cambian la distribución de la masa en la Tierra y, en consecuencia, su campo gravitatorio; ¡no vamos a usar un cuerpo de prueba tan grande como la Luna!

Antes de que el concepto de los campos fuera ampliamente aceptado, se pensaba que la fuerza entre cuerpos gravitatorios era una interacción directa e instantánea. Esta perspectiva, llamada *acción a distancia*, se usó también para las fuerzas electromagnéticas. En el caso de la gravitación, puede representarse esquemáticamente como

$$\text{masa} \rightleftarrows \text{masa},$$

indicando que las dos masas interactúan directamente entre sí. De acuerdo con ello, el efecto de un movimiento de un cuerpo se transmite instantáneamente al otro cuerpo. Esta perspectiva viola la teoría especial de la relatividad, la cual limita la velocidad a la que puede transmitirse tal información a la velocidad de la luz c, cuando mucho. Una interpretación más moderna, basada en el concepto de campo y ahora una parte esencial de la teoría general de la relatividad, puede representarse así:

$$\text{masa} \rightleftarrows \text{campo} \rightleftarrows \text{masa},$$

en donde cada masa interactúa no directamente con la otra sino más bien con el campo gravitatorio establecido por la otra. Esto es, la primera masa establece un campo que tiene cierto valor en cada punto en el espacio; la segunda masa interactúa entonces con el campo en esa ubicación en particular. El campo desempeña el papel de intermediario entre los dos cuerpos. La fuerza ejercida sobre la segunda masa puede calcularse a partir de la ecuación 1, dado el valor del campo **g** debido a la primera masa. La situación es completamente simétrica desde el punto de vista de la primera masa, la cual interactúa con el campo gravitatorio establecido por la segunda masa. Los cambios en la ubicación de una masa provocan variaciones en su campo gravitatorio; estas variaciones viajan con la velocidad de la luz, de modo que el concepto de campo es consistente con las restricciones impuestas por la relatividad especial.

28-2 EL CAMPO ELÉCTRICO E

La descripción anterior del campo gravitatorio puede trasplantarse directamente a la electrostática. La ley de Coulomb para la fuerza entre cargas nos anima a pensar en términos de la acción a distancia, representada como

$$\text{carga} \rightleftarrows \text{carga}.$$

Introduciendo de nuevo al campo como un intermediario entre las cargas, podemos representar a la interacción como

$$\text{carga} \rightleftarrows \text{campo} \rightleftarrows \text{carga}.$$

Esto es, la primera carga establece un *campo eléctrico*, y la segunda carga interactúa con el campo eléctrico de la primera carga. Nuestro problema de determinar la interacción entre las cargas se reduce por tanto a dos problemas por separado: (1) determinar, por medición o por cálculo, el campo eléctrico establecido por la primera carga en cada punto en el espacio, y (2) calcular la fuerza que el campo ejerce sobre la segunda carga situada en un punto en particular en el espacio.

En analogía con la ecuación 1 para el campo gravitatorio, definimos al campo eléctrico **E** asociado con un cierto conjunto de cargas en términos de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba positiva q_0 en un punto en particular, o bien

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \qquad (2)$$

La dirección del vector **E** es la misma que la dirección de **F**, porque q_0 es un escalar positivo.

Dimensionalmente, el campo eléctrico es la fuerza por unidad de carga, y su unidad en el SI es el newton/coulomb (N/C), si bien es más frecuente, como se verá en el capítulo 30, expresarla en la unidad equivalente de volt/metro (V/m). Nótese el parecido con el campo gravitatorio, en el que g (que suele expresarse en unidades de m/s^2) puede también expresarse como la fuerza por unidad de masa en unidades de newton/kilogramo. Ambos campos gravitatorio y eléctrico pueden expresarse como una fuerza dividida entre una propiedad (masa o carga) del cuerpo de prueba. La tabla 1 muestra algunos campos eléctricos que se forman en unas cuantas situaciones.

La figura 1 ilustra el campo eléctrico que actúa como intermediario en la interacción entre dos cargas. En la figura 1*a*, la carga q_1 establece un campo eléctrico en el espacio que la rodea, sugerido por el sombreado en la

TABLA 1 ALGUNOS CAMPOS ELÉCTRICOS[a]

Localización	*Campo eléctrico* (N/C)
En la superficie de un núcleo de uranio	3×10^{21}
Dentro de un átomo de hidrógeno, en la órbita del electrón	5×10^{11}
La descarga eléctrica que ocurre en el aire	5×10^{6}
En el cilindro cargado de una fotocopiadora	10^{5}
El acelerador del haz de electrones de un aparato de televisión	10^{5}
Cerca de un peine de plástico cargado	10^{3}
En la parte más baja de la atmósfera	10^{2}
Dentro del alambre de cobre de circuitos domésticos	10^{-2}

[a] Valores aproximados.

figura. El campo actúa entonces sobre la carga q_2, dando por resultado la fuerza $\mathbf{F}_2$. A partir de la perspectiva de q_1, como se muestra en la figura 1*b*, podríamos también aseverar que q_2 establece un campo eléctrico y que la fuerza $\mathbf{F}_1$ sobre q_1 es el resultado de su interacción con el campo de q_2. Las fuerzas son, por supuesto, iguales y opuestas ($\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$), aun cuando los dos campos eléctricos deban ser muy diferentes (como lo indica la diferencia en el sombreado entre las figuras 1*a* y 1*b*) si las cargas son diferentes.

Para usar la ecuación 2 como un procedimiento operativo para medir el campo eléctrico, debemos aplicar la misma precaución que al usar una masa de prueba para medir el campo gravitatorio: la carga de prueba deberá ser lo suficientemente pequeña como para no perturbar la distribución de las cargas cuyos campos eléctricos estamos tratando de medir. Esto es, escribiríamos la ecuación 2 más apropiadamente así:

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0} \tag{3}$$

si bien sabemos, del capítulo 27, que este límite en realidad no puede llegar a 0 porque la carga de prueba nunca puede ser más pequeña que la carga elemental e. Por supuesto, si estamos *calculando* (más bien que midiendo) el campo eléctrico debido a un conjunto especificado de cargas en las posiciones fijas, ni la magnitud ni el signo de q_0 afectan el resultado. Como demostraremos más adelante en este capítulo, los campos eléctricos de conjuntos de cargas pueden calcularse sin hacer una referencia directa a la ecuación 3.

Problema muestra 1 Un protón se coloca en un campo eléctrico uniforme **E**. ¿Cuáles deben ser la magnitud y la dirección de este campo si la fuerza electrostática que actúa sobre el protón ha de equilibrar precisamente a su peso?

Solución De la ecuación 2, y remplazando a q_0 por e y a F por mg, tenemos

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{mg}{e} = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 1.0 \times 10^{-7}\ \text{N/C, dirigido hacia arriba.}$$

Éste es un campo muy débil, realmente. **E** debe apuntar verticalmente hacia arriba para que el protón (cargado positivamente) flote, porque $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ y $q_0 > 0$.

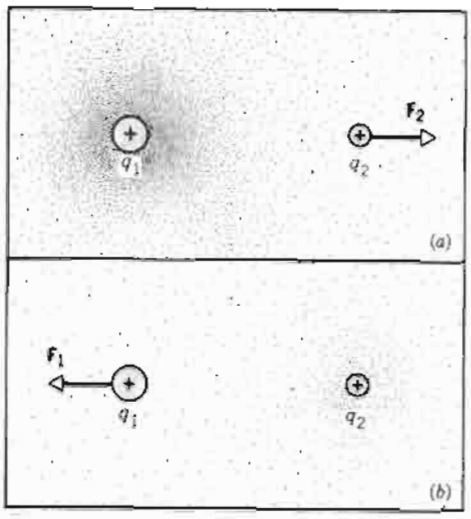


Figura 1 (*a*) La carga q_1 establece un campo eléctrico que ejerce una fuerza $\mathbf{F}_2$ sobre la carga q_2. (*b*) La carga q_2 establece un campo eléctrico que ejerce una fuerza $\mathbf{F}_1$ sobre la carga q_1. Si las cargas tienen magnitudes diferentes, los campos resultantes serán diferentes. Sin embargo, las fuerzas son siempre iguales en magnitud y opuestas en dirección; esto es, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$.

28-3 EL CAMPO ELÉCTRICO DE LAS CARGAS PUNTUALES

En esta sección consideramos el campo eléctrico de cargas puntuales, primero una sola carga y luego un conjunto de cargas por separado. Más adelante generalizaremos las distribuciones continuas de la carga.

Sea que una carga de prueba positiva q_0 esté situada a una distancia r de una carga puntual q. La magnitud de la fuerza que actúa sobre q_0 está dada por la ley de Coulomb,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}.$$

La magnitud del campo eléctrico en el lugar de la carga de prueba es, según la ecuación 2,

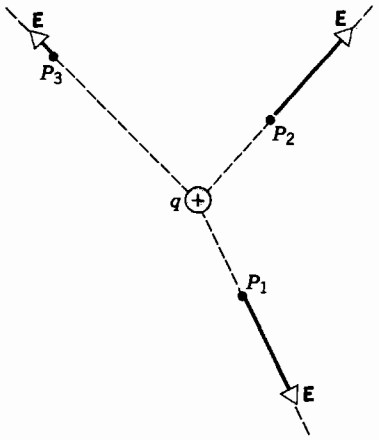


Figura 2 El campo eléctrico **E** en varios puntos cercanos de una carga puntual positiva q. Nótese que la dirección de **E** es en todas partes radialmente hacia afuera de q. Los campos en P_1 y en P_2, los cuales están a la misma distancia de q, son iguales en magnitud. El campo en P_3, que está el doble de lejos de q que P_1 o P_2, tiene la cuarta parte de la magnitud del campo en P_1 o P_2.

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{4}$$

La dirección de **E** es la misma que la dirección de **F**, a lo largo de una línea radial que parte de q, apuntando hacia afuera si q es positiva y hacia adentro si q es negativa. La figura 2 muestra la magnitud y la dirección del campo eléctrico **E** en varios puntos cercanos de una carga positiva puntual. ¿Cómo debería dibujarse esta figura si la carga fuese negativa?

Para hallar **E** para un grupo de N cargas puntuales, el procedimiento es el siguiente: (1) Calcule $\mathbf{E}_i$ debido a cada carga i en el punto dado *como si ésta fuera la única carga presente*. (2) Sume vectorialmente estos campos calculados por separado para hallar el campo resultante **E** en el punto. En forma de ecuación,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots \\ &= \sum \mathbf{E}_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, N).\end{aligned} \tag{5}$$

La suma es una suma vectorial, considerando todas las cargas. La ecuación 5 (al igual que la ec. 8 del capítulo 27), es un ejemplo de la aplicación del *principio de superposición*, el cual afirma, en este contexto, que en un punto dado los campos eléctricos debidos a distribuciones de carga separadas simplemente se suman (vectorialmente) o se superponen de manera independiente. Este principio no se cumple cuando las magnitudes de los campos son extremadamente grandes, pero será válido en todas las situaciones que se estudian en este texto.

Problema muestra 2 En un átomo de helio ionizado (un átomo de helio en el que uno de los dos electrones se ha retirado), el electrón y el núcleo están separados por una distancia de 26.5 pm. ¿Cuál es el campo eléctrico debido al núcleo en la localización del electrón?

Solución Usamos la ecuación 4, con q (la carga del núcleo) igual a $+2e$:

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \\ &= \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\frac{2(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})}{(26.5 \times 10^{-12}\ \text{m})^2} \\ &= 4.13 \times 10^{12}\ \text{N/C}.\end{aligned}$$

Este valor es 8 veces el campo eléctrico que actúa sobre un electrón en el hidrógeno (véase la Tabla 1). El aumento ocurre porque (1) la carga nuclear en el helio es el doble que en el hidrógeno, y (2) el radio orbital en el helio es la mitad que en el hidrógeno. ¿Puede usted estimar el campo para un electrón similar en el uranio ionizado ($Z = 92$), del cual se hayan retirado 91 de los electrones? Tales átomos altamente ionizados se encuentran en los interiores de las estrellas.

Problema muestra 3 La figura 3 muestra una carga q_1 de $+1.5\ \mu\text{C}$ y una carga q_2 de $+2.3\ \mu\text{C}$. La primera carga está en el origen del eje x, y la segunda está en una posición $x = L$, en donde $L = 13$ cm. ¿En qué punto P, a lo largo del eje x, es cero el campo eléctrico?

Solución El punto debe encontrarse entre las cargas porque únicamente en esta región es donde las fuerzas ejercidas por q_1 y por q_2 en una carga de prueba se oponen entre sí. Si $\mathbf{E}_1$ es el campo eléctrico debido a q_1 y $\mathbf{E}_2$ es el debido a q_2, las magnitudes de estos vectores deben ser iguales, o sea

$$E_1 = E_2.$$

De la ecuación 4 tenemos entonces

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{(L-x)^2},$$

en donde x es la coordenada del punto P. Al despejar x, obtenemos

$$x = \frac{L}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = \frac{13\ \text{cm}}{1 + \sqrt{2.3\ \mu\text{C}/1.5\ \mu\text{C}}} = 5.8\ \text{cm}.$$

Este resultado es positivo y es menor que L, confirmando que el punto donde el campo es cero se encuentra entre las dos cargas, como sabemos que debe ser.

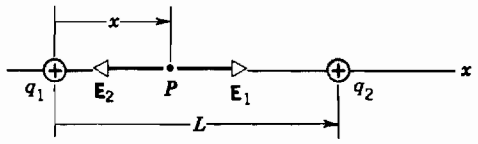


Figura 3 Problema muestra 3. En el punto P, los campos eléctricos de las cargas q_1 y q_2 son iguales y opuestos, de modo que el campo neto en P es cero.

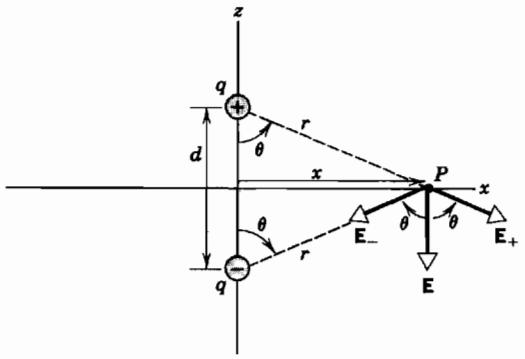


Figura 4 Cargas positiva y negativa de igual magnitud de un dipolo eléctrico. El campo eléctrico **E** en cualquier punto es la suma vectorial de los campos debidos a cada carga por separado. En el punto P en el eje x, el campo tiene sólo una componente z.

El dipolo eléctrico

La figura 4 muestra una carga positiva y una carga negativa de igual magnitud q situada a una distancia d, una configuración llamada *dipolo eléctrico*. Queremos calcular el campo eléctrico **E** en el punto P, a una distancia x a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une a las cargas.

Las cargas positiva y negativa establecen los campos eléctricos $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$, respectivamente. Las magnitudes de estos dos campos en P son iguales, porque P equidista de las cargas positiva y negativa. La figura 4 muestra también las direcciones de $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$, determinadas por las direcciones de la fuerza debida a cada carga por separado que actuaría sobre una carga de prueba positiva en P. El campo eléctrico total en P se determina, de acuerdo con la ecuación 5, por la suma de los vectores

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-.$$

Partiendo de la ecuación 4, las magnitudes de los campos de cada carga están dadas por

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2 + (d/2)^2}. \qquad (6)$$

A causa de que los campos $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ tienen magnitudes iguales y se encuentran en ángulos iguales θ con respecto a la dirección z como se muestra, la componente x del campo total es E_+ sen θ - E_- sen $\theta = 0$. El campo total **E** tiene por lo tanto una componente z únicamente, de magnitud

$$E = E_+ \cos\theta + E_- \cos\theta = 2E_+ \cos\theta. \qquad (7)$$

De la figura vemos que el ángulo θ se determina de acuerdo con

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}.$$

Al sustituir este resultado y la ecuación 6 en la ecuación 7, obtenemos

$$E = (2)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2 + (d/2)^2}\frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}$$

o sea

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{[x^2 + (d/2)^2]^{3/2}}. \qquad (8)$$

La ecuación 8 da la magnitud del campo eléctrico en P debido al dipolo.

El campo es proporcional al producto qd, que comprende las magnitudes de las cargas del dipolo y su separación. Esta esencial propiedad combinada de un dipolo eléctrico se llama *momento dipolar eléctrico* p, definido por

$$p = qd. \qquad (9)$$

El momento dipolar es una propiedad fundamental de las moléculas, las cuales frecuentemente contienen una carga negativa y una carga igual positiva separadas por una distancia definida. Una molécula (*no* un cristal) de un compuesto como el NaCl es un buen ejemplo. Podemos ver a una molécula de NaCl como compuesta de un ion Na^+ (un átomo neutro de sodio del se cual ha retirado un solo electrón) con una carga eléctrica de $+e$, y un ion Cl^- (un átomo neutro de cloro que ha adquirido un electrón extra) con una carga de $-e$. La separación entre Na y Cl medida para el NaCl es de 0.236 nm (1 nm = 10^{-9} m), y así el momento dipolar se espera que sea

$$p = ed = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.236 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 3.78 \times 10^{-29}\ \text{C}\cdot\text{m}.$$

El valor medido es de 3.00×10^{-29} C · m, indicando que el electrón no ha sido enteramente retirado del Na y añadido al Cl. Hasta cierto punto, el electrón lo comparten el Na y el Cl, resultando en un momento dipolar un tanto más pequeño de lo esperado.

A menudo observamos el campo de un dipolo eléctrico en los puntos P, cuya distancia x del dipolo es muy grande comparada con la separación d. En este caso podemos simplificar el campo dipolar un tanto haciendo uso del desarrollo del binomio,

$$(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \cdots.$$

Escribamos nuevamente la ecuación 8 así:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}\frac{1}{[1+(d/2x)^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1+\left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{-3/2}$$

y apliquemos el desarrollo del binomio al factor entre corchetes, lo que nos da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{d}{2x}\right)^2+\cdots\right].$$

Para este cálculo es suficiente conservar sólo el primer término dentro de los corchetes (el 1), y así hallamos una expresión para la magnitud del campo eléctrico debida a un dipolo en puntos distantes en su plano medio:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}. \qquad (10)$$

Una expresión de una forma similar se obtiene para el campo a lo largo del eje dipolar (el eje z de la fig. 4); véase el problema 11. Puede calcularse también un resultado más general para el campo en cualquier punto en el plano xz; véase el problema 12. En cualquier caso, el campo en puntos distantes varía con la distancia r desde el dipolo como $1/r^3$. Esto es un resultado característico para el campo eléctrico dipolar. El campo varía con la distancia más rápidamente que la dependencia característica $1/r^2$ de una carga puntual. Si imaginamos a la figura 4 trazada de nuevo cuando x es muy grande, el ángulo θ se aproxima a 90° y los campos $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ se encuentran muy próximos en direcciones opuestas cercanos al eje x. Los campos casi, aunque no totalmente, se cancelan. La variación $1/r^2$ de los campos de las cargas puntuales individuales se cancela, quedando el término $1/r^3$, que varía más rápidamente, y que caracteriza de modo singular a un dipolo eléctrico.

Existen también distribuciones de carga más complejas que dan campos eléctricos que varían según el recíproco de potencias de r con exponentes mayores. Véanse los problemas 13 y 14 como ejemplos de la variación $1/r^4$ del campo de un *cuadripolo eléctrico*.

28-4 LÍNEAS DE FUERZA

El concepto del vector del campo eléctrico no lo utilizó Michael Faraday, quien siempre pensó en términos de *líneas de fuerza*. Si bien a estas líneas ya no asociamos la misma clase de realidad que Faraday, continúan proporcionándonos un modo conveniente e instructivo de representar el campo eléctrico, por lo que las usaremos con este propósito.

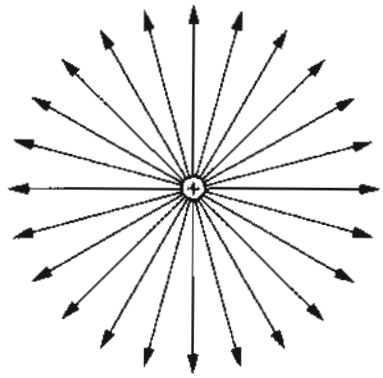


Figura 5 Líneas de fuerza alrededor de una carga puntual positiva. La dirección de la fuerza sobre una carga de prueba positiva, y también la dirección del campo eléctrico en cualquier punto, están indicadas por la dirección de las líneas. El espaciamiento relativo entre las líneas en cualquier ubicación indica la fuerza relativa del campo en esa ubicación. Se supone que las líneas terminan en cargas negativas distantes las cuales no aparecen aquí.

La figura 5 muestra las líneas de fuerza que rodean a una carga puntual positiva. Esta figura puede concebirse como una extensión de la figura 2, obtenida al situar la carga de prueba en muchos puntos alrededor de la carga central. Para el objeto de las ilustraciones en esta sección, vemos a una "carga puntual" como una pequeña esfera uniforme de carga más bien que a un punto matemático real. Además, conviene tener presente, al observar tales dibujos, que muestran sólo un plano bidimensional de un modelo tridimensional.

Nótense varias cualidades de la figura 5. (1) *Las líneas de fuerza dan la dirección del campo eléctrico en cualquier punto.* (En modelos más complejos, en los que las líneas de fuerza pueden tener una curvatura, es la dirección de la *tangente* a la línea de fuerza la que da la dirección de **E**.) Una carga de prueba positiva liberada en cualquier punto en la vecindad de la carga en la figura 5 experimentaría una fuerza de repulsión que actúa radialmente hacia afuera, y la carga de prueba se movería en esa dirección. De aquí que las líneas de fuerza de una carga puntual positiva estén dirigidas radialmente hacia afuera. (2) *Las líneas de fuerza se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.* En la figura 5 no se muestran las cargas negativas, pero debemos imaginar que la carga positiva está rodeada por paredes de carga negativa, en las cuales terminan las líneas de fuerza. (3) *Las líneas de fuerza se trazan de tal modo que el número de líneas por unidad de área de sección transversal (perpendicular a las líneas) sea proporcional a la magnitud del campo eléctrico.* Imaginemos un elemento de superficie esférica de un área determinada cerca de la carga puntual, en donde la penetrarían muchas líneas de fuerza. Confor-

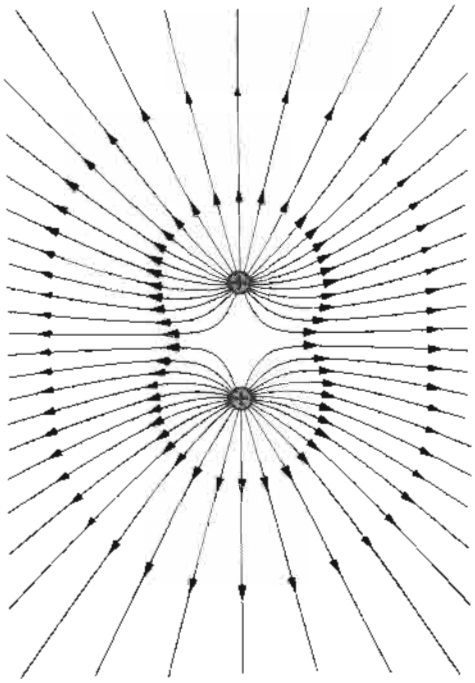


Figura 6 Líneas de fuerza alrededor de dos cargas positivas iguales.

me desplacemos dicha área radialmente hacia afuera, el número de líneas de fuerza que penetrarán el área será menor, porque las líneas de fuerza están más separadas a grandes distancias de la carga. Esto corresponde a la disminución del campo eléctrico y a un aumento de la distancia de la carga.

Si la carga puntual de la figura 5 fuera negativa, el patrón de líneas de fuerza sería el mismo, excepto que todas las flechas apuntarían ahora hacia adentro. En este caso, la fuerza sobre una carga de prueba positiva estaría radialmente hacia adentro.

La figura 6 muestra las líneas de fuerza de dos cargas positivas iguales. Imaginemos que las cargas comienzan muy lejos, en donde la influencia que ejercen entre sí es despreciable, y que cada una tiene líneas de fuerza como las mostradas en la figura 5 y luego se aproximan para formar el modelo de la figura 6. En el proceso, las líneas de fuerza que originalmente estaban entre las dos cargas han sido "empujadas" hacia los lados. Nótese que la concentración de líneas es menor en la región directamente entre las dos cargas. ¿Qué nos dice esto acerca de las fuerzas sobre una carga de prueba situada allí? Conforme nos alejamos de las cargas, las líneas de fuerza se vuelven casi radiales, característica de una sola carga de magnitud igual al total de las dos cargas.

La figura 6 muestra que, en las regiones a izquierda y derecha del centro de las cargas, las líneas de fuerza son casi paralelas en el plano de la figura. Imaginemos ahora que el conjunto de dos cargas se extiende a una línea larga

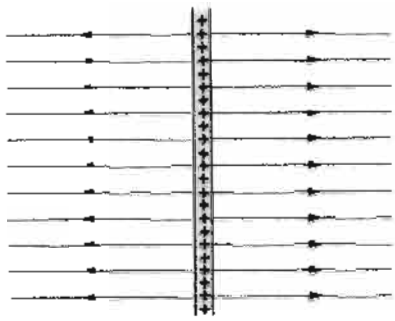


Figura 7 Líneas de fuerza cerca de una línea larga de carga positiva. Para una representación tridimensional, la figura debe imaginarse girada alrededor de un eje que pase por la línea.

de cargas positivas apenas separadas, y consideremos únicamente la región cercana al centro de la línea y lejos de cualquier extremo. La figura 7 muestra las líneas de fuerza resultantes. Nótese que son realmente paralelas.

La figura 8 muestra las líneas de fuerza en el caso de un dipolo eléctrico, dos cargas iguales de signos opuestos. Aquí puede verse cómo terminan las líneas de fuerza en la carga negativa. En este caso la concentración de líneas de campo es más grande en la región entre las cargas. ¿Qué nos dice esto acerca del campo eléctrico allí? Imaginemos, como lo hicimos en el caso de la figura 6, que estas dos cargas están originalmente muy separadas y que se juntan. En lugar de que las líneas de fuerza sean *repelidas de* la región central, como en la figura 6, *se llevan hacia* la región central. Nótese la dirección del campo eléctrico a lo largo de la bisectriz del eje dipolar, lo cual calculamos en la sección anterior.

Las líneas de fuerza pueden hacerse visibles al aplicar un campo eléctrico a una suspensión de objetos diminutos en un fluido aislante. La figura 9 muestra fotografías de

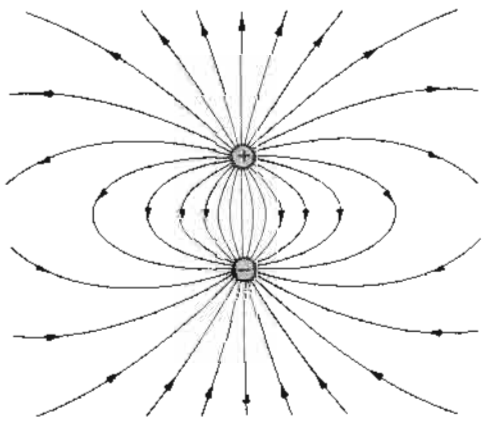


Figura 8 Líneas de fuerza alrededor de cargas positiva y negativa de igual magnitud (un dipolo eléctrico).

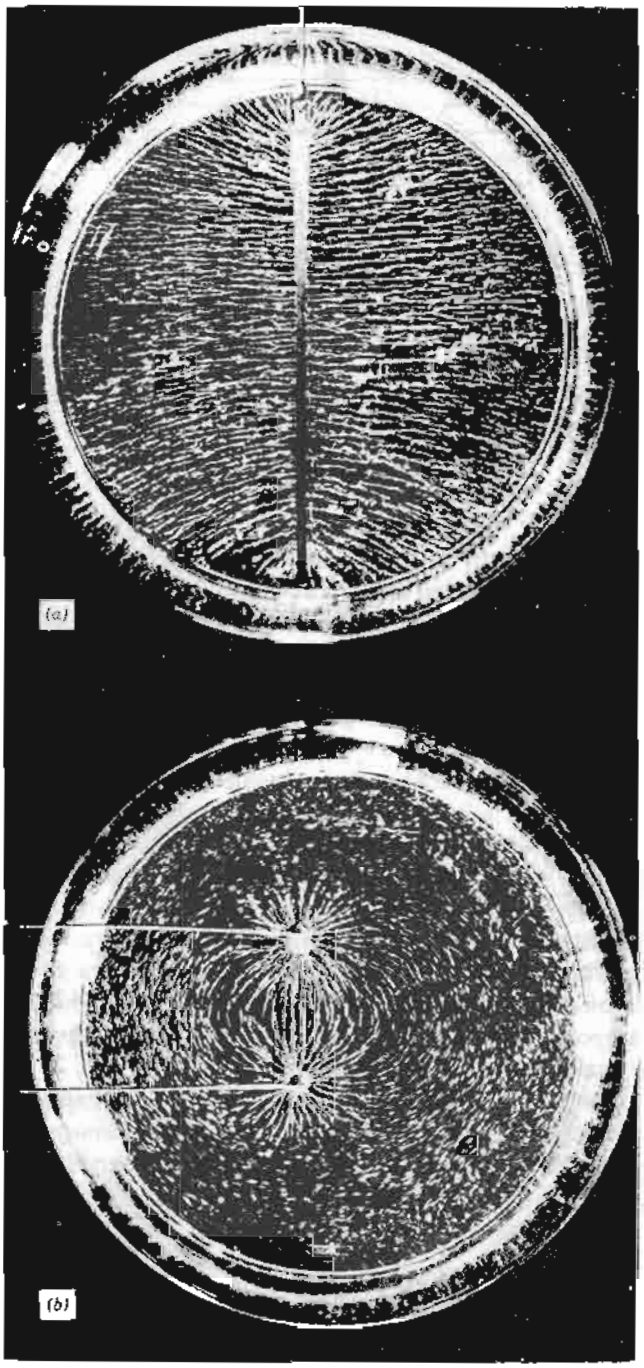


Figura 9 Fotografías de los modelos de las líneas eléctricas de fuerza alrededor de (*a*) una placa cargada (que produce líneas paralelas de fuerza) y (*b*) dos varillas con cargas iguales y opuestas (de manera similar al dipolo eléctrico de la Fig. 8). Los patrones se hicieron visibles al suspender semillas de pasto en un líquido aislante.

los patrones resultantes, los cuales se asemejan a los dibujos de las líneas de fuerza que hemos presentado en esta sección.

Problema muestra 4 En la figura 5, ¿en qué varía la magnitud del campo eléctrico con la distancia desde el centro del cuerpo cargado?

Solución Supongamos que N líneas de campo terminen en la esfera de la figura 5. Dibuje una esfera concéntrica imaginaria de radio r. El número de líneas por unidad de área en cualquier punto de esta esfera es de $N/4\pi r^2$. A causa de que E es proporcional a esta cantidad, podemos escribir $E \propto 1/r^2$. Entonces el campo eléctrico generado por una esfera de carga uniforme varía con el cuadrado del inverso de la distancia desde el centro de la esfera, como lo demostramos en la sección anterior (véase la ec. 4). De una manera muy parecida, puede demostrarse que el campo eléctrico establecido por la línea larga de cargas (Fig. 7) varía según $1/r$, en donde r es la distancia perpendicular desde el eje de la línea. En la sección siguiente deduciremos este resultado.

28-5 EL CAMPO ELÉCTRICO DE LAS DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA

Aun cuando la carga eléctrica está cuantizada (véase la Sec. 27-5), una colección de un gran número de cargas elementales puede considerarse como una *distribución de carga continua*. El campo establecido por la distribución de carga continua puede calcularse al dividir la distribución en elementos infinitesimales dq. Cada elemento de carga establece un campo $d\mathbf{E}$ en un punto P, y el campo resultante en P se determina entonces a partir del principio de superposición al sumar (es decir, al integrar) las contribuciones de campo debidas a todos los elementos de carga, o sea

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}. \tag{11}$$

La integración, al igual que la suma en la ecuación 5, es una operación vectorial; en los ejemplos que siguen, vemos cómo se aplica tal integral en tres casos. La ecuación 11 es realmente una notación abreviada de integrales escalares separadas en cada dirección; por ejemplo, en coordenadas cartesianas tenemos

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad \text{y} \quad E_z = \int dE_z.$$

Como lo veremos a continuación, a menudo podemos simplificar el cálculo argumentando sobre la base de simetría que una o dos de las integrales se hacen cero o que dos de ellas tienen valores idénticos.

Al calcular el campo eléctrico de una distribución de carga continua, la estrategia general es elegir un elemento de carga arbitrario dq, encontrar el campo eléctrico $d\mathbf{E}$ en el punto de observación P, y luego integrar sobre la

distribución usando la ecuación 11 para determinar el campo total **E**. En muchos casos, el elemento de carga dq se considera como una carga puntual y da una contribución al campo $d\mathbf{E}$ de magnitud dada por la ecuación 4, o sea

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}, \tag{12}$$

donde r es la distancia desde el elemento de carga dq al punto P. En otros casos, podemos simplificar los cálculos eligiendo que dq sea un elemento en la forma de una distribución de carga que da un campo conocido $d\mathbf{E}$.

Una distribución de carga continua se describe por su *densidad de carga*. En una distribución lineal, como en un filamento delgado en el que se ha colocado una carga, un elemento arbitario de longitud ds porta una carga dq dada por

$$dq = \lambda\, ds, \tag{13}$$

en donde λ es la *densidad de carga lineal* (o la carga por unidad de longitud) del objeto. Si el objeto está cargado uniformemente (esto es, si la carga está distribuida uniformemente en el objeto) entonces λ es constante y es igual a la carga total q en el objeto dividida entre su longitud total L. En este caso

$$dq = \frac{q}{L}\, ds \qquad \text{(carga lineal uniforme).} \tag{14}$$

Si la carga está distribuida no en una línea sino en una superficie, la carga dq sobre cualquier elemento de área dA es

$$dq = \sigma\, dA, \tag{15}$$

donde σ es *la densidad de carga superficial* (o carga por unidad de área) del objeto. Si la carga está distribuida uniformemente en la superficie, entonces σ es constante y es igual a la carga total q dividida entre el área total A de la superficie, o sea

$$dq = \frac{q}{A}\, dA \qquad \text{(carga superficial uniforme).} \tag{16}$$

Podemos también considerar el caso en que una carga esté distribuida por completo en un objeto tridimensional, en cuyo caso la carga dq en un elemento de volumen dV es

$$dq = \rho\, dV, \tag{17}$$

donde ρ es la *densidad volumétrica de carga* (o carga por unidad de volumen). Si el objeto está uniformemente cargado, entonces ρ es constante, y es igual a la carga total q dividida entre el volumen total V, o sea

$$dq = \frac{q}{V}\, dV \qquad \text{(carga volumétrica uniforme).} \tag{18}$$

Consideraremos ahora ejemplos del cálculo del campo eléctrico de algunas distribuciones continuas de carga.

El anillo de carga

La figura 10 muestra un anillo delgado de radio R por el cual fluye una densidad lineal de carga uniforme λ alrededor de su circunferencia. Podemos imaginar al anillo hecho de plástico o algún otro aislante, de modo que las cargas puedan ser vistas como fijas en el lugar. ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto P, a una distancia z del plano del anillo a lo largo de su eje central?

Consideremos un elemento diferencial del anillo de longitud ds localizado en una posición arbitraria en el anillo de la figura 10. El anillo contiene un elemento de carga dado por la ecuación 13, $dq = \lambda\, ds$. Este elemento determina un campo diferencial $d\mathbf{E}$ en el punto P. Partiendo de la ecuación 4 tenemos

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2} = \frac{\lambda\, ds}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)}. \tag{19}$$

Nótese que todos los elementos de carga que forman el anillo están a la misma distancia r del punto P.

Para determinar el campo resultante en P debemos sumar, vectorialmente, todas las contribuciones de campo $d\mathbf{E}$ de

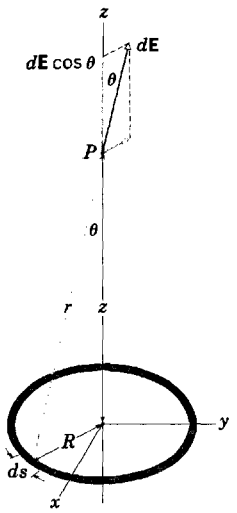


Figura 10 Un anillo de carga uniforme. Un elemento del anillo de longitud ds contribuye en $d\mathbf{E}$ al campo eléctrico en un punto P sobre el eje del anillo. El campo total en P es la suma de todas las contribuciones.

todos los elementos diferenciales del anillo. Veamos cómo podemos simplificar este cálculo utilizando la simetría del problema con el fin de evitarnos algunas integraciones.

En particular, demostraremos que el campo eléctrico del anillo uniformemente cargado puede no tener componentes x o y. Lo hacemos suponiendo que tal componente existe y demostrando, luego, que las consecuencias serían irrazonables. Supongamos que hubiese una componente x del campo en P; una carga de prueba situada en P aceleraría en la dirección de x. Consideremos ahora que, sin darnos cuenta, alguien gira el anillo en un ángulo de 90° alrededor del eje z. Cuando obsrvamos nuevamente el anillo, ¿podríamos afirmar que giró? Si el anillo está cargado uniformemente, entonces el estado físico del anillo antes de la rotación es idéntico a aquél después de la rotación, pero una carga de prueba colocada ahora en P aceleraría en la dirección de y, a causa de que el campo (y la fuerza sobre la partícula de prueba) debe girar con el anillo. Tenemos entonces una situación en la que distribuciones de carga idénticas producirían fuerzas diferentes sobre una partícula de prueba. Esto es un resultado inaceptable y, así pues, nuestra hipótesis inicial es incorrecta: no puede haber una componente del campo eléctrico que sea perpendicular al eje del anillo.

Otra manera de obtener este resultado es considerar dos elementos de carga en el anillo situados en extremos opuestos de un diámetro. El campo eléctrico neto, debido a los dos elementos, se encuentra paralelo al eje, porque las componentes perpendiculares al eje se cancelan entre sí. *Todos* los elementos alrededor del anillo pueden, de esta manera, considerarse en pares, de modo que el campo total debe ser paralelo al eje z.

A causa de que existe únicamente una componente al campo total (por ser E_x y E_y cero), la adición vectorial se transforma en una adición escalar de componentes paralelas al eje. La componente z de $d\mathbf{E}$ es $dE\cos\theta$. De la figura 10 vemos que

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}. \tag{20}$$

Si multiplicamos las ecuaciones 19 y 20, hallamos

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{z\lambda\, ds}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}. \tag{21}$$

Para sumar las diversas contribuciones, necesitamos sumar sólo las longitudes de los elementos, pues las demás cantidades en la ecuación 21 tienen el mismo valor para todos los elementos de carga. Entonces

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int ds \\ &= \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{22}$$

donde la integral es simplemente $2\pi R$, la circunferencia del anillo. Pero $\lambda(2\pi R)$ es q, la carga total en el anillo, de modo que podemos escribir la ecuación 22 así:

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} \qquad \text{(anillo cargado).} \tag{23}$$

¿Da la ecuación 23 la dirección correcta del campo cuando z es negativa? ¿Cuando q es negativa?

En los puntos muy alejados del anillo de modo que $z \gg R$, podemos despreciar a R^2 en comparación con z^2, en el término dentro del paréntesis, en cuyo caso

$$E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2} \qquad (z \gg R), \tag{24}$$

la cual (sustituyendo la z por la r) es la ecuación 4, el campo eléctrico de una carga puntual. Esto no debería sorprendernos porque, a distancias muy grandes, el anillo aparecería como una carga puntual. Observamos también en la ecuación 23 que $E_z = 0$ para $z = 0$. Esto tampoco es sorprendente porque una carga de prueba en el centro del anillo sería empujada o jalada igualmente en todas las direcciones en el plano del anillo y no experimentaría ninguna fuerza neta. ¿Es éste un equilibrio estable o inestable?

Un disco de carga

La figura 11 muestra un disco plástico circular de radio R, con una carga uniforme en su superficie y de una densidad σ. ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto P, a una distancia z del disco a lo largo de su eje?

Nuestro plan es dividir al disco en anillos concéntricos y luego calcular el campo eléctrico sumando, esto es, integrando, las contribuciones de los distintos anillos. La figura 11 muestra un anillo plano con radio w y anchura dw, siendo su carga total, de acuerdo con la ecuación 15,

$$dq = \sigma\, dA = \sigma(2\pi w)dw, \tag{25}$$

donde $dA = 2\pi w\, dw$ es el área diferencial del anillo.

Hemos ya resuelto el problema del campo eléctrico creado por un anillo de carga. Sustituyendo a dq de la ecuación 25 por q en la ecuación 23, y reemplazando a R por w en la ecuación 23, obtenemos

$$dE_z = \frac{z\sigma 2\pi w\, dw}{4\pi\epsilon_0(z^2+w^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}(z^2+w^2)^{-3/2}(2w)dw.$$

Podemos ahora hallar a E_z integrando para la superficie del disco, esto es, integrando con respecto a la variable w entre los límites $w = 0$ y $w = R$. Nótese que z permanece constante durante este proceso. Entonces

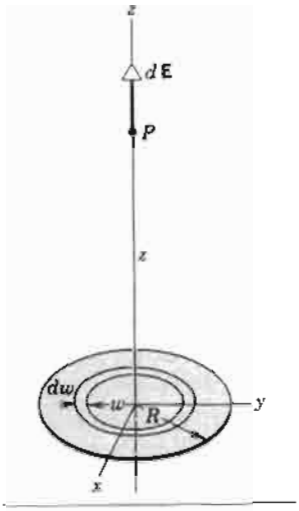


Figura 11 Un disco con una carga uniforme en su superficie. El anillo de radio w y anchura dw da una contribución $d\mathbf{E}$ al campo eléctrico en un punto P en el eje del disco. El campo total en P es la suma de todas esas contribuciones.

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\int_0^R (z^2 + w^2)^{-3/2}(2w)dw. \quad (26)$$

Esta integral es de la forma $\int X^m\, dX$, en donde $X = (z^2 + w^2)$, $m = -\frac{3}{2}$, y $dX = (2w)dw$. Integrando, obtenemos

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \quad \text{(disco cargado)} \quad (27)$$

como el resultado final. Esta ecuación sólo es válida para $z > 0$ (véase el Prob. 28).

Para $R \gg z$, el segundo término dentro del paréntesis de la ecuación 27 tiende a cero, por lo cual esta ecuación puede reducirse a

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{(lámina infinita).} \quad (28)$$

Éste es el campo eléctrico generado por una lámina uniforme de carga de extensión infinita. Es un resultado importante, el cual deduciremos en el capítulo siguiente empleando un enfoque diferente. Nótese que la ecuación 28 también se aplica cuando $z \to 0$ en la ecuación 27; para tales puntos cercanos, el disco cargado se comporta realmente como si fuese de extensión infinita. En el problema 24 le pedimos demostrar que la ecuación 27 se reduce al campo de una carga puntual cuando $z \gg R$.

Línea de carga infinita

La figura 12 muestra una sección de una línea infinita de carga cuya densidad de carga lineal tiene el valor

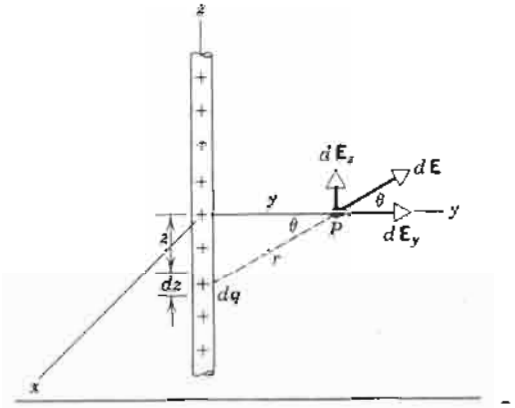


Figura 12 Una línea de carga uniforme de gran longitud. El elemento de longitud dz da una contribución $d\mathbf{E}$ al campo eléctrico en el punto P, cuya distancia y a partir de la línea, es pequeña comparada con la longitud de la línea.

constante λ. ¿Cuál es el campo $\mathbf{E}$ a una distancia y de la línea?

La magnitud de la contribución del campo dE debida al elemento de carga $dq(= \lambda\, dz)$ está dada, usando la ecuación 12, por

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz}{y^2 + z^2}. \quad (29)$$

El vector $d\mathbf{E}$, como lo muestra la figura 12, tiene las componentes

$$dE_y = dE\cos\theta \quad \text{y} \quad dE_z = dE\,\text{sen}\,\theta.$$

Las componentes y y z del vector resultante $\mathbf{E}$ en el punto P están dadas por

$$E_y = \int dE_y = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \cos\theta\, dE \quad (30a)$$

y

$$E_z = \int dE_z = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \text{sen}\,\theta\, dE. \quad (30b)$$

Aquí nuevamente podemos usar un argumento de simetría para simplificar el problema. Si la línea de carga se girara alrededor del eje z, la situación física no cambiaría, por lo que no puede entonces haber una componente de $\mathbf{E}$ en la dirección tangencial al punto P (la dirección x de la fig. 12, perpendicular al plano de la figura). Además, si la línea de carga fuese girada en 180° alrededor del eje y, intercambiando por tanto las porciones de la línea de carga a lo largo de las direcciones positiva y negativa de z, tampoco cambiaría el arreglo físico; por tanto, no puede haber una componente z del campo eléctrico (el

cual, de estar presente, cambiaría de signo después de la rotación).

Otra manera de demostrar que E_z debe ser cero, es considerar que, para cada elemento de carga en z positivo existe un elemento correspondiente en z negativo, de modo que las componentes z de sus campos se cancelan en P. Entonces $\mathbf{E}$ apunta por completo en la dirección y. Esto es estrictamente así únicamente si el eje y pasa a través del centro de la línea; sin embargo, cuando la línea es infinitamente larga, estamos siempre en su "centro" y nunca cerca de ningún extremo.

A causa de que las contribuciones a E_y de las mitades superior e inferior de la barra son iguales, podemos escribir

$$E = E_y = 2\int_{z=0}^{z=\infty} \cos\theta \, dE. \qquad (31)$$

Nótese que hemos cambiado el límite inferior de integración y que hemos introducido un factor de 2 compensatorio. Al sustituir la expresión para dE de la ecuación 29 en la ecuación 31 nos da

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{z=0}^{z=\infty} \cos\theta \frac{dz}{y^2+z^2}. \qquad (32)$$

De la figura 12 vemos que las cantidades θ y z no son independientes. Podemos eliminar a una de ellas, digamos a z, usando la relación (véase la figura)

$$z = y\tan\theta.$$

Al diferenciar, obtenemos

$$dz = y\sec^2\theta \, d\theta.$$

Sustituyendo estas dos expresiones llegamos finalmente a

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos\theta \, d\theta.$$

El lector debe comprobar este paso cuidadosamente, observando que los límites deben estar ahora en θ y no en z. Por ejemplo, cuando $z \to +\infty$, $\theta \to \pi/2$, como lo muestra la figura 12. Esta ecuación se integra sin dificultad quedando

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}. \qquad (33)$$

Este problema tiene una *simetría cilíndrica* con respecto al eje z. En todos los puntos del plano xy a una distancia r de la línea de carga, el campo tiene el valor

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{(línea infinita)}, \qquad (34)$$

en donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ es la distancia desde la línea de carga hasta el punto P en las coordenadas x,y.

Usted, lector, se preguntará, quizás, cuál es la utilidad de resolver un problema de una línea infinita de carga cuando cualquier línea real debe tener una longitud finita (véase el Prob. 31). Sin embargo, en los puntos suficientemente cercanos a líneas finitas y lejos de sus extremos, la ecuación que acabamos de deducir rinde resultados que están tan cerca de los valores correctos que puede hacerse caso omiso de la diferencia en muchas situaciones prácticas. Por lo general, es innecesario resolver exactamente cada geometría encontrada en los problemas prácticos. Realmente, si no se llevasen a cabo idealizaciones o aproximaciones, la gran mayoría de problemas significativos de todas clases en física y en ingeniería no podrían resolverse de forma alguna.

28-6 UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En las secciones precedentes hemos considerado la primera parte de la interacción carga ⇄ campo ⇄ carga: Dado un conjunto de cargas, ¿cuál es el campo eléctrico resultante? En esta sección y en la próxima consideraremos la segunda parte: ¿qué sucede cuando ponemos una partícula cargada en un campo eléctrico conocido?

Partiendo de la ecuación 2, sabemos que una partícula de carga q en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ experimenta una fuerza $\mathbf{F}$ dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Para estudiar el movimiento de la partícula en el campo eléctrico, todo lo que necesitamos es emplear la segunda ley de Newton, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde la fuerza resultante sobre la partícula incluye la fuerza eléctrica y a cualquier otra fuerza que pudiera actuar.

Como lo hicimos en nuestro estudio original de las leyes de Newton, podemos lograr una simplificación si consideramos el caso en que la fuerza sea constante. Por lo tanto, comenzaremos considerando los casos en que el campo eléctrico y la fuerza eléctrica correspondiente sean constantes. Una situación tal puede lograrse en la práctica al conectar las terminales de una batería a un par de placas metálicas paralelas que estén aisladas entre sí, tema que estudiaremos en el capítulo siguiente. Si la distancia entre las placas es pequeña comparada con sus dimensiones, el campo en la región entre las placas será muy aproximadamente uniforme, excepto cerca de los bordes. En los problemas muestra siguientes, supondremos que el campo existe sólo en la región entre las placas y cae súbitamente a cero cuando la partícula deja esa región. En realidad, el campo disminuye rápidamente con la distancia cuando

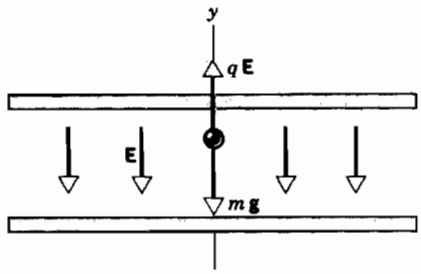


Figura 13 Problema muestra 5. Una gota cargada negativamente se coloca en un campo eléctrico uniforme **E**. La gota se mueve bajo la influencia combinada de su peso $m\mathbf{g}$ y de la fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$.

ésta es del orden del espaciamiento entre las placas o mayor; cuando esta distancia es pequeña, no cometeremos un error demasiado grande al calcular el movimiento de la partícula si hacemos caso omiso del efecto del borde.

Problema muestra 5 Una gota de aceite cargada de radio $R = 2.76\ \mu$m y densidad $\rho = 920\ \text{kg/m}^3$ se mantiene en equilibrio bajo la influencia combinada de su peso y de un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo de magnitud $E = 1.65 \times 10^6\ \text{N/C}$ (Fig. 13). (*a*) Calcule la magnitud y el signo de la carga en la gota. Exprese el resultado en términos de la carga elemental e. (*b*) La gota es expuesta a una fuente radiactiva que emite electrones. Dos electrones chocan con la gota y son capturados por ella, cambiando su carga en dos unidades. Si el campo eléctrico permanece con su valor constante, calcule la aceleración resultante de la gota.

Solución (*a*) Para mantener a la gota en equilibrio, su peso mg debe ser balanceado por una fuerza eléctrica igual de magnitud qE que actúa hacia arriba. Puesto que el campo eléctrico está dado como dirigido hacia abajo, la carga q en la gota debe ser negativa para que la fuerza eléctrica apunte en dirección opuesta al campo. La condición de equilibrio es

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} = 0.$$

Al considerar componentes y, obtenemos

$$-mg + q(-E) = 0$$

o, despejando la incógnita q,

$$\begin{aligned} q &= -\frac{mg}{E} = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{E} \\ &= -\frac{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6}\ \text{m})^3(920\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)}{1.65 \times 10^6\ \text{N/C}} \\ &= -4.8 \times 10^{-19}\ \text{C}. \end{aligned}$$

Si expresamos q en términos de la carga electrónica $-e$ como $q = n(-e)$, en donde n es el número de cargas electrónicas en la gota, entonces

$$n = \frac{q}{-e} = \frac{-4.8 \times 10^{-19}\ \text{C}}{-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 3.$$

(*b*) Si agregamos dos electrones más a la gota, su carga es entonces de

$$q' = (n + 2)(-e) = 5(-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -8.0 \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

La segunda ley de Newton puede expresarse como:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + q'\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

y, al considerar las componentes en y, obtenemos

$$-mg + q'(-E) = ma.$$

Podemos ahora resolver para la aceleración:

$$\begin{aligned} a &= -g - \frac{q'E}{m} \\ &= -9.80\ \text{m/s}^2 - \frac{(-8.0 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.65 \times 10^6\ \text{N/C})}{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6}\ \text{m})^3(920\ \text{kg/m}^3)} \\ &= -9.80\ \text{m/s}^2 + 16.3\ \text{m/s}^2 = +6.5\ \text{m/s}^2. \end{aligned}$$

La gota acelera en la dirección y positiva.

En este cálculo hemos considerado la fuerza de la resistencia viscosa, la cual es, por lo general, muy importante en estos casos. En efecto, hemos hallado la aceleración de la gota en el instante en que adquirió los dos electrones extra. La fuerza de resistencia al avance, que depende de la velocidad de la gota, es inicialmente cero si la gota parte del reposo, pero aumenta cuando la gota comienza a moverse, y por lo tanto la aceleración de la gota disminuirá en magnitud.

Esta configuración experimental es la base del experimento de Millikan de la gota de aceite, quien lo realizó para medir la magnitud de la carga electrónica. El experimento se estudiará más adelante en esta sección.

Problema muestra 6 La figura 14 muestra el sistema de electrodos desviadores (deflectores) de una impresora de chorro de tinta. Una gota de tinta cuya masa m es de 1.3×10^{-10} kg tiene una carga q de -1.5×10^{-13} C y entra al sistema de placas desviadoras con una velocidad de $v = 18$ m/s. La longitud L de estas placas es de 1.6 cm, y el campo eléctrico E entre las placas es de 1.4×10^6 N/C. ¿Cuál es la desviación vertical de la gota en el extremo alejado de las placas? No considere el campo eléctrico variable en los bordes de las placas.

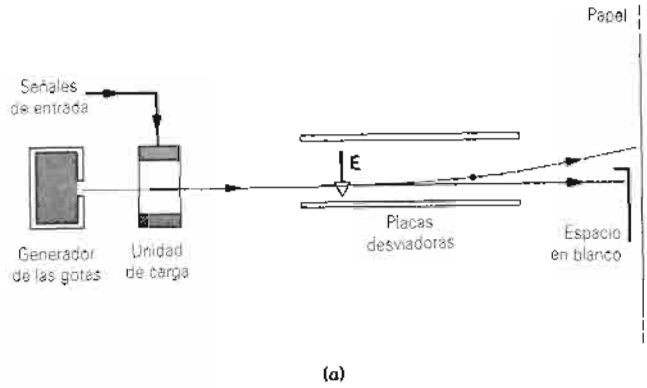
Solución Sea t el tiempo de tránsito de la gota a través del sistema desviador. Los desplazamientos vertical y horizontal están dados por

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{y} \quad L = vt,$$

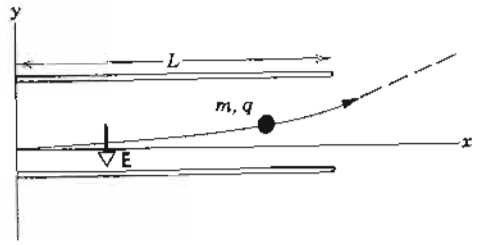
respectivamente, donde a es la aceleración vertical de la gota.

Al igual que en el problema muestra anterior, podemos escribir la componente y de la segunda ley de Newton como $-mg + q(-E) = ma$. La fuerza eléctrica que actúa sobre la gota, $-qE$, es mucho mayor, en este caso, que la fuerza gravitatoria mg, de modo que puede considerarse que la aceleración de la gota es de $-qE/m$. Si se elimina t entre las dos ecuaciones de arriba y se sustituye este valor para a llegamos a

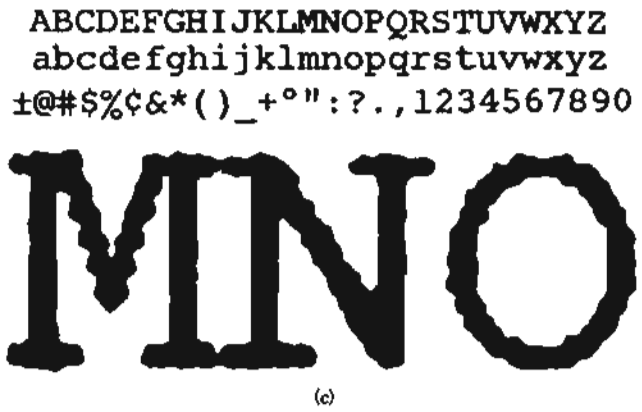
$$\begin{aligned} y &= \frac{-qEL^2}{2mv^2} \\ &= \frac{-(-1.5 \times 10^{-13}\ \text{C})(1.4 \times 10^6\ \text{N/C})(1.6 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{(2)(1.3 \times 10^{-10}\ \text{kg})(18\ \text{m/s})^2} \\ &= 6.4 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0.64\ \text{mm}. \end{aligned}$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 14 Problema muestra 6. (*a*) Las características esenciales de una impresora por chorro de tinta. Una señal de entrada de una computadora controla la carga dada a la gota y por ello la posición a la cual la gota choca con el papel. Una fuerza transversal a partir del campo eléctrico **E** es la responsable de la desviación de la gota. (*b*) Detalle de las placas desviadoras. La gota se mueve en una trayectoria parabólica mientras está entre las placas, y se mueve a lo largo de una línea recta (aquí se muestra entrecortada) después de que abandona las placas. (*c*) Una muestra de la impresión por chorro de tinta, mostrando tres letras amplificadas. Para imprimir una letra típica se requieren unas 100 gotas. Las gotas se producen a razón de unas 100,000 por segundo.

La desviación en el papel será mayor que esto, puesto que la gota de tinta sigue una trayectoria en línea recta hacia el papel después de haber dejado la región desviadora, como se muestra en la figura 14*b*. Para dirigir a las gotas de tinta de modo que formen bien los caracteres, es necesario controlar la carga q en las gotas —a la cual es proporcional la desviación— dentro de un pequeño porcentaje. En nuestro tratamiento hemos despreciado otra vez las fuerzas de la resistencia viscosa que actúan sobre la gota; éstas son muy grandes a estas velocidades de la gota. El análisis es el mismo que para la desviación del haz de electrones en un tubo electrostático de rayos catódicos.

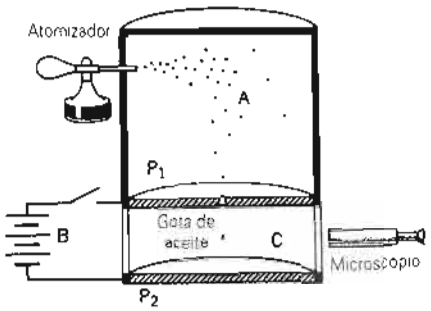


Figura 15 El aparato de la gota de aceite de Millikan para medir la carga elemental e. El movimiento de una gota se observa en la cámara C, donde la gota experimenta la fuerza de la gravedad, el campo eléctrico creado por la batería B y, si la gota se mueve, una fuerza de resistencia viscosa.

Medición de una carga elemental*

La figura 15 muestra un diagrama del aparato empleado por el físico estadounidense Robert A. Millikan en 1910-1913 para medir la carga elemental e. En la cámara A se introdujeron gotitas de aceite por medio de un atomizador, resultando cargadas, en el proceso, algunas de ellas, ya fuera positiva o negativamente. Consideremos una gota que halla su camino a través de un pequeño orificio en la placa P_1 y se dirige hacia la cámara C. Supongamos que esta gota porta una carga q, la cual consideramos es negativa.

Si no existe un campo eléctrico, sobre la gota actúan dos fuerzas, su peso mg y una fuerza de resistencia viscosa dirigida hacia arriba, cuya magnitud es proporcional a la magnitud de la velocidad de la gota al caer. La gota llega rápidamente a una velocidad terminal constante v a la cual estas dos fuerzas se equilibran precisamente.

Ahora, en la cámara, se crea un campo eléctrico **E** hacia abajo, al conectar a la batería B entre las placas P_1 y P_2. Sobre la gota actúa ahora una tercera fuerza, $q\mathbf{E}$. Si q es

* Para detalles de los experimentos de Millikan, véase Henry A. Boorse y Lloyd Motz (eds.), *The World of the Atom* (Basic Books, 1966), capítulo 40. Para el punto de vista de los dos físicos que conocieron a Millikan siendo estudiantes graduados, véase "Robert A. Millikan, Physics Teacher", por Alfred Romer, *The Physics Teacher*, febrero de 1978, pág. 78, y "My Work with Millikan on the Oil-Drop Experiment", por Harvey Fletcher, *Physics Today*, junio de 1982, pág. 43.

negativa, esta fuerza apunta hacia arriba, y —esto, suponemos— la gota se dirige ahora hacia arriba, con una nueva velocidad terminal v'. En cada caso, la fuerza de resistencia al avance apunta en la dirección opuesta a aquella en que la gota se está moviendo y tiene una magnitud proporcional a la velocidad de la gota. La carga q sobre la gota puede determinarse por mediciones de v y v'.

Millikan halló que los valores de q eran todos consistentes con la relación

$$q = ne \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

donde e es la carga elemental, con un valor de 1.60×10^{-19} C. El experimento de Millikan es una prueba convincente de que la carga está cuantizada. En parte por este trabajo, fue galardonado con el Premio Nobel de Física 1923. Las mediciones modernas de la carga elemental se apoyan en una variedad de experimentos entrelazados, todos ellos más precisos que el experimento pionero de Millikan.

El movimiento en campos eléctricos no uniformes *(Opcional)*

Hasta ahora hemos considerado únicamente campos uniformes, en los que el campo eléctrico es constante tanto en magnitud como en dirección dentro de la región en la que se mueve la partícula. Sin embargo, a menudo encontramos campos no uniformes. Una vez que hemos calculado el campo, debemos entonces resolver las leyes de Newton de una manera apropiada para fuerzas no constantes, como lo vimos en el capítulo 6. Consideremos brevemente un ejemplo de este procedimiento.

La figura 16 muestra un anillo de carga positiva, para el cual el campo eléctrico está dado por la ecuación 23 para puntos en el eje. Supongamos que proyectamos una partícula cargada positivamente con una velocidad inicial v_0 a lo largo del eje z hacia el anillo desde una distancia muy larga. ¿Cuál será el movimiento subsiguiente de la partícula?

Podemos resolver este problema usando la técnica numérica descrita en la sección 8-4 para una fuerza que depende de la posición. Supongamos que se nos da la posición y la velocidad iniciales de la partícula. Podemos calcular el campo eléctrico en la posición inicial de la partícula y entonces determinar su aceleración inicial. En un intervalo de tiempo suficientemente pequeño, consideramos que la aceleración es constante y hallamos el cambio en la velocidad y la posición en ese intervalo como lo hicimos en la sección 8-4. En la nueva posición al final del primer intervalo, tenemos un nuevo campo eléctrico y una nueva aceleración, y hallamos el cambio en la velocidad y la posición durante el segundo intervalo. Continuando de esta manera podemos determinar la dependencia del tiempo en función de la posición y de la velocidad de la partícula.

Para este cálculo, usamos un anillo de radio $R = 3$ cm y una densidad de carga lineal $\lambda = +2 \times 10^{-7}$ C/m. Un protón ($q = +1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) es proyectado a lo largo del eje del anillo desde una posición inicial en $z = +0.5$ m con una velocidad inicial de $v_{z0} = -7 \times 10^5$ m/s. (La velocidad inicial negativa significa que el protón se mueve hacia abajo, hacia el anillo que está en el plano xy.) El anillo cargado positivamente ejerce una fuerza de repulsión sobre el protón cargado positivamente, disminuyendo su velocidad. En la figura 16*a* trazamos el movimiento resultante en el caso de que el protón no tenga la energía cinética inicial suficiente para llegar al plano del anillo. El protón llega instantáneamente al reposo en un punto justo arriba del plano del anillo y luego invierte su movimiento cuando el anillo lo acelera ahora en la dirección z positiva. Nótese que, excepto en la región cercana al anillo, la velocidad del protón es casi constante, porque el campo eléctrico es débil a distancias más grandes.

La figura 16*b* ilustra el movimiento en el caso de que el protón tenga una energía cinética inicial más que suficiente para alcanzar el plano del anillo. La fuerza de repulsión desacelera el movimiento del protón, pero no lo detiene. El protón pasa a través del anillo, siendo la magnitud de su velocidad un mínimo al pasar a través del anillo. Una vez más, lejos del anillo, el protón se mueve con una velocidad casi constante.

En el capítulo 30 estudiaremos un método basado en la conservación de la energía, el cual permite calcular a v_t directamente.

En el apéndice *I* puede encontrarse un listado del programa de computadora que da la solución a este problema (y a otros problemas unidimensionales similares). El problema 58 ofrece otro ejemplo de una aplicación de esta técnica. ■

28-7 UN DIPOLO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En la sección 28-3 hemos estudiado el dipolo eléctrico, el cual se representa como dos cargas iguales y opuestas $+q$ y $-q$ separadas por una distancia d. Cuando colocamos un dipolo en un campo eléctrico *externo*, la fuerza sobre la carga positiva será en una dirección y la fuerza sobre la carga negativa en otra dirección. Para tener en cuenta el efecto neto de estas fuerzas es conveniente indroducir el *vector* **p** del momento dipolar. El vector **p** tiene la magnitud $p = qd$ y la dirección a lo largo de la línea que une a las dos cargas apuntando *desde* la carga negativa *hacia* la carga positiva. Como a menudo es el caso con los vectores, el hecho de escribir el momento dipolar en forma vectorial nos permite escribir, de manera concisa, las relaciones fundamentales para el caso que intervengan dipolos eléctricos.

La figura 17*a* muestra un dipolo en un campo eléctrico uniforme **E**. (Este campo *no* es el del dipolo sino uno que es producido por un agente externo no mostrado en la figura.) El momento dipolar **p** forma un ángulo θ con la dirección del campo. Supongamos que el campo sea uniforme, de modo que **E** tenga la misma magnitud y dirección en la ubicación de $+q$ y $-q$. Las fuerzas sobre $+q$ y $-q$ tienen, por tanto, magnitudes iguales $F = qE$ pero direcciones opuestas, como se muestra en la figura 17*a*. La fuerza neta sobre el dipolo debida al campo externo es, por tanto, cero, pero existe un momento de torsión neto alrededor de su centro de masa el cual tiende a girar al dipolo para llevar a **p** al alineamiento con **E**. El momento de torsión neto alrededor del centro del dipolo debido a las dos fuerzas, tiene una magnitud de

$$\tau = F\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta + F\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta = Fd\operatorname{sen}\theta, \qquad (35)$$

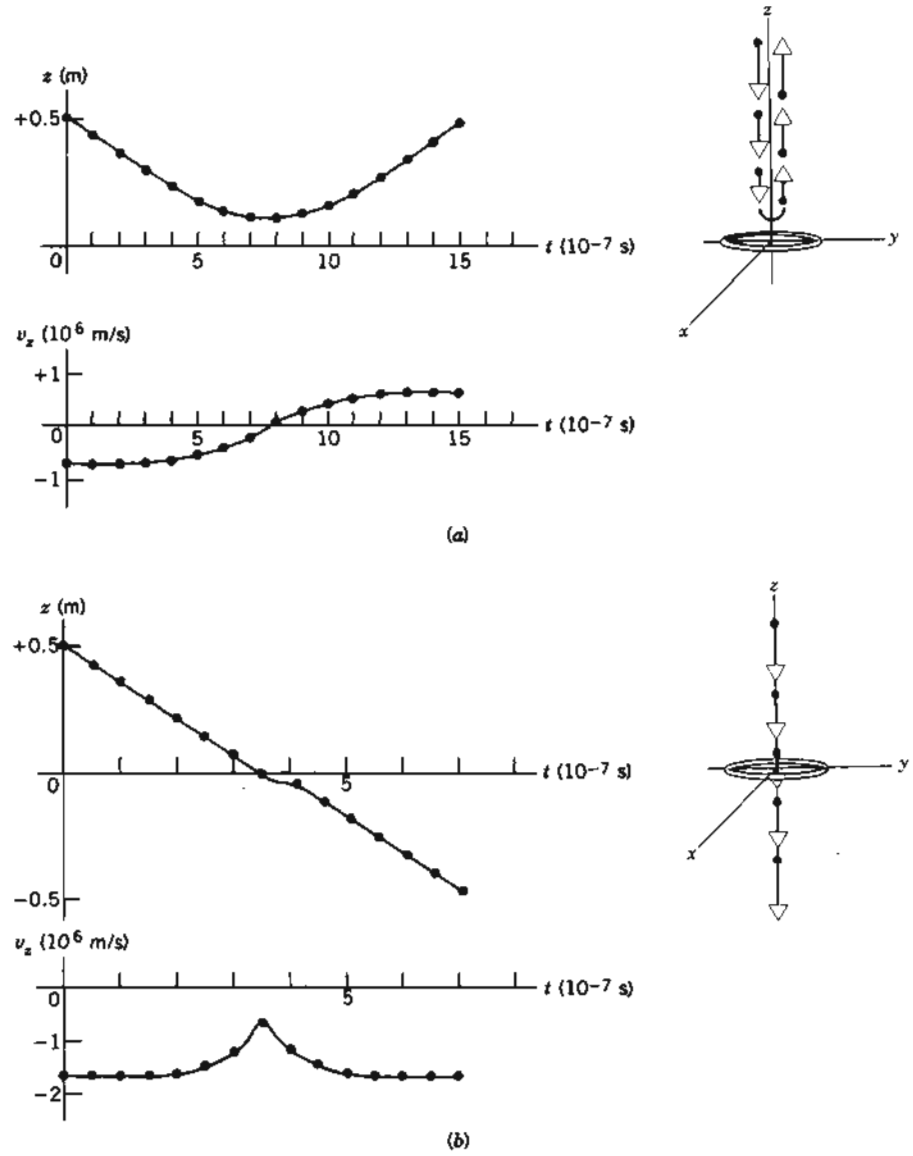


Figura 16 (*a*) El movimiento de un protón proyectado a lo largo del eje de un anillo uniforme cargado positivamente. Se muestran la posición y la velocidad. El protón alcanza instantáneamente el reposo en un tiempo de unos 8×10^{-7} s e invierte su movimiento. Los puntos son los resultados de un cálculo numérico; las curvas están trazadas a través de los puntos. (*b*) Si la velocidad inicial del protón aumenta suficientemente, puede pasar a través del anillo; su velocidad es mínima cuando pasa a través del centro del anillo.

y su dirección es perpendicular al plano de la página y hacia adentro en la página, como se indica en la figura 17*b*. Podemos escribir la ecuación 35 como

$$\tau = (qE)d \operatorname{sen}\theta = (qd)E \operatorname{sen}\theta = pE \operatorname{sen}\theta. \quad (36)$$

La ecuación 36 puede escribirse en forma vectorial como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (37)$$

que es consistente con las relaciones direccionales para el producto cruz, como se muestra por medio de los tres vectores en la figura 17*b*.

Como sucede generalmente en dinámica cuando fuerzas conservativas actúan (la fuerza electrostática es conservativa, como se explicó en el capítulo 30), podemos representar al sistema igualmente bien, utilizando ya sea ecuaciones de fuerza o bien ecuaciones de energía. Consideremos por tanto el trabajo realizado por el campo

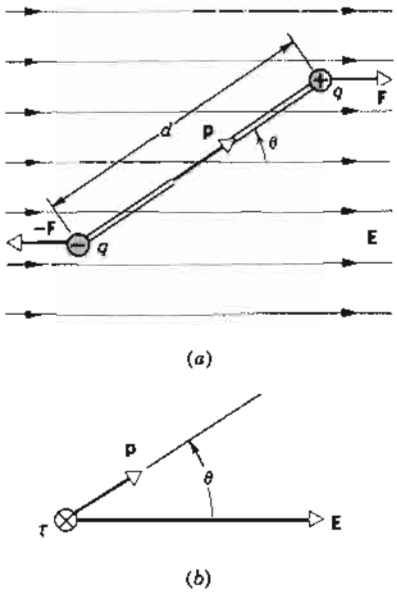


Figura 17 (*a*) Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme. (*b*) La relación vectorial $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ entre el momento dipolar **p**, el campo eléctrico **E**, y el momento de torsión resultante sobre el dipolo. El momento de torsión apunta hacia adentro de la página.

eléctrico al girar al dipolo en un ángulo θ. Usando la expresión apropiada para el trabajo en el movimiento rotatorio (Ec. 14 del capítulo 12), el trabajo realizado por el campo externo para girar al dipolo desde un ángulo inicial θ_0 hasta un ángulo final θ es

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau \cdot d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} -\tau \, d\theta, \qquad (38)$$

donde τ es el momento de torsión ejercido por el campo eléctrico externo. El signo menos en la ecuación 38 es necesario porque el momento de torsión tiende a *decrecer* a θ; en la terminología vectorial, τ y $d\theta$ están en direcciones opuestas, de modo que $\tau \cdot d\theta = -\tau d\theta$. Al combinar la ecuación 38 con la ecuación 36, obtenemos

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$
$$= pE(\cos\theta - \cos\theta_0). \qquad (39)$$

Puesto que el trabajo realizado por el agente que produce el campo externo es igual al negativo del cambio en la energía potencial del sistema de campo + dipolo, tenemos

$$\Delta U = U(\theta) - U(\theta_0) = -W = -pE(\cos\theta - \cos\theta_0). \quad (40)$$

Arbitrariamente definimos que el ángulo de referencia θ_0 sea de 90° y elegimos que la energía potencial $U(\theta_0)$ sea cero para ese ángulo. Para cualquier ángulo θ la energía potencial es entonces

$$U = -pE\cos\theta, \qquad (41)$$

la cual puede ser escrita en forma vectorial como

$$U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}. \qquad (42)$$

Así pues, U es mínima cuando **p** y **E** son paralelos.

El movimiento de un dipolo en un campo eléctrico uniforme puede, por tanto, interpretarse como una fuerza (el momento de torsión resultante sobre el dipolo trata de girarlo para alinearlo con la dirección del campo eléctrico externo) o de la energía (la energía potencial del sistema tiende a un mínimo cuando el momento dipolar está alineado con el campo externo). La elección entre los dos métodos depende mucho de la conveniencia al aplicarlo al problema particular que nos ocupe.

Problema muestra 7 Una molécula de vapor de agua (H_2O) tiene un momento dipolar eléctrico de magnitud $p = 6.2 \times 10^{-30}$ C · m. (Este gran momento dipolar es responsable de muchas de las propiedades que hacen del agua una sustancia tan importante, por ejemplo, la de ser un disolvente casi universal.) La figura 18 es una representación de esta molécula, mostrando los tres núcleos y las nubes de electrones circundantes. El momento dipolar eléctrico **p** se representa por un vector en el eje de simetría. El momento dipolar se presenta porque el centro efectivo de la carga positiva no coincide con el centro efectivo de la carga negativa. (Un caso contrastante es el de una molécula de bióxido de carbono, CO_2. Aquí los tres átomos están unidos en una línea recta, con un átomo de carbono en el centro y los oxígenos a cada lado. El centro de la carga positiva y el centro de la carga negativa coinciden en el centro de masa de la molécula, y el momento dipolar eléctrico del CO_2 es cero.) (*a*) ¿Qué tan separados están los centros efectivos de las cargas positiva y negativa en una molécula de H_2O? (*b*) ¿Cuál es el momento de torsión máximo sobre una molécula de H_2O en un campo eléctrico típico de laboratorio de magnitud 1.5×10^4 N/C? (*c*) Supongamos que el momento dipolar de una molécula

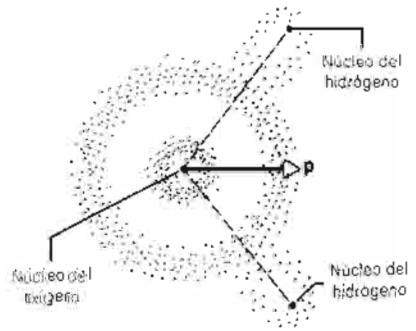


Figura 18 Una molécula de H_2O en la que se muestran los tres núcleos, las nubes de electrones, y el vector del momento dipolar eléctrico **p**.

de H_2O esté inicialmente apuntando en una dirección opuesta al campo. ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico para girar a la molécula en alineamiento con el campo?

Solución (*a*) Existen 10 electrones y, correspondientemente, 10 cargas positivas en esta molécula. Podemos escribir, para la magnitud del momento dipolar,

$$p = qd = (10e)(d),$$

en donde d es la separación que estamos buscando y e es la carga elemental. Entonces

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{6.2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m}}{(10)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})} = 3.9 \times 10^{-12}\ \text{m} = 3.9\ \text{pm}.$$

Esto es de cerca de un 4% de la distancia del enlace OH en esta molécula.

(*b*) Como lo muestra la ecuación 36, el momento de torsión es máximo cuando $\theta = 90°$. Al sustituir este valor en esa ecuación nos da

$$\tau = pE \operatorname{sen}\theta = (6.2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m})(1.5 \times 10^{4}\ \text{N/C})(\operatorname{sen} 90°) = 9.3 \times 10^{-26}\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

(*c*) El trabajo realizado para girar al dipolo desde $\theta_0 = 180°$ hasta $\theta = 0°$ está dado por la ecuación 39,

$$W = pE(\cos\theta - \cos\theta_0) = pE(\cos 0° - \cos 180°) = 2pE = (2)(6.2 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m})(1.5 \times 10^{4}\ \text{N/C}) = 1.9 \times 10^{-25}\ \text{J}.$$

A modo de comparación, el promedio de contribución de la energía de traslación a la energía interna ($= \frac{3}{2}kT$) de una molécula a la temperatura ambiente es de 6.2×10^{-21} J, lo cual es 33,000 veces mayor. Para las condiciones de este problema, la agitación térmica sobrepasaría en valor a la tendencia de los dipolos a alinearse por sí mismos con el campo. Esto es, si tuviésemos un conjunto de moléculas a la temperatura ambiente con momentos dipolares orientados al azar, la aplicación de un campo eléctrico de esta magnitud tendría una influencia despreciable en el alineamiento de los momentos dipolares, debido a las grandes energías internas. Si deseamos alinear a los dipolos, debemos emplear campos mucho más intensos o temperaturas mucho más bajas, o ambos procesos.

PREGUNTAS

1. Nombre tantos campos escalares y vectoriales como pueda.
2. (*a*) En la atracción gravitatoria entre la Tierra y una piedra, ¿podemos decir que la Tierra se encuentra en el campo gravitatorio de la piedra? (*b*) ¿Cuál es la relación entre el campo gravitatorio que pertenece a la piedra y el que pertenece a la Tierra?
3. Una bola cargada positivamente pende de un hilo de seda largo. Deseamos medir a E en un punto en el mismo plano horizontal que el de la carga colgante. Para hacerlo, ponemos una carga de prueba positiva q_0 en el punto y medimos F/q_0. ¿Será F/q_0 menor que, igual a, o mayor que E en el punto en cuestión?
4. Al explorar los campos eléctricos con una carga de prueba, a menudo hemos supuesto, por conveniencia, que la carga de prueba era positiva. ¿Realmente constituye ello alguna diferencia para determinar el campo? Ilustre con un caso sencillo su propia idea.
5. Las líneas de fuerza eléctricas nunca se cruzan. ¿Por qué?
6. En la figura 6, ¿por qué las líneas de fuerza alrededor de la figura parecen, cuando se extienden hacia atrás, irradiar uniformemente desde el centro de la figura?
7. Una carga puntual se está moviendo en un campo eléctrico en ángulo recto con las líneas de fuerza. ¿Actúa alguna fuerza sobre ella?
8. En la figura 9, ¿por qué se alinearían las semillas de pasto con las líneas de fuerza eléctricas? Normalmente las semillas de pasto no portan ninguna carga eléctrica. (Véase "Demonstration of the Electric Fields of Current-Carrying Conductors", por O. Jefimenko. *American Journal of Physics*, enero de 1962, pág. 19.)
9. ¿Cuál es el origen de la "adherencia estática", un fenómeno que a veces se presenta en la ropa cuando se retira de una secadora?
10. Dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos están situadas a una distancia d de separación. El campo eléctrico es cero en un punto entre ellas, sobre la línea que las une. ¿Qué puede concluirse acerca de las cargas?
11. Dos cargas puntuales de magnitud y signo desconocidos están situadas a una distancia d de separación. (*a*) Si es posible que $E = 0$ en algún punto *no* situado entre las cargas sino sobre la línea que las une, ¿cuáles son las condiciones necesarias y en dónde se localiza el punto? (*b*) Es posible, en cualquier arreglo de dos cargas puntuales, hallar *dos* puntos (ninguno de ellos en el infinito) en los cuales $E = 0$? De ser así, ¿en qué condiciones?
12. Dos cargas puntuales de signo y magnitud desconocidos están fijas a una distancia d de separación. ¿Podemos tener $E = 0$ en puntos fuera del eje (excluyendo el infinito)? Explique.
13. En el problema muestra 3, una carga situada en el punto P en la figura 3 está en equilibrio porque no actúa sobre ella ninguna fuerza. ¿Es el equilibrio estable (*a*) para desplazamientos a lo largo de la línea que une a las cargas y (*b*) para desplazamientos en ángulo recto con esta línea?
14. En la figura 8, la fuerza sobre la carga más baja apunta hacia arriba y es finita. Sin embargo, el aglomeramiento de las líneas de fuerza sugiere que E es infinitamente grande en la ubicación de esta carga (puntual). Una carga inmersa en un campo infinitamente grande debería expe-

rimentar una fuerza infinitamente grande actuando sobre ella. ¿Cuál es la solución a este dilema?

15. Una carga puntual q de masa m se libera del reposo en un campo no uniforme. (*a*) ¿Seguirá necesariamente a la línea de fuerza que pasa por el punto de liberación? (*b*) ¿En qué circunstancias, de haber alguna, seguirá una partícula cargada las líneas del campo eléctrico?

16. Tres pequeñas esferas x, y, y z portan cargas de magnitudes iguales y con los signos que se muestran en la figura 19. Están situadas en los vértices de un triángulo isósceles con la distancia entre x y y igual a la distancia entre x y z. Las esferas y y z se mantienen en su lugar, pero la esfera x tiene libertad de moverse sobre una superficie carente de fricción. ¿Qué trayectoria tomará la esfera x cuando se la libera?

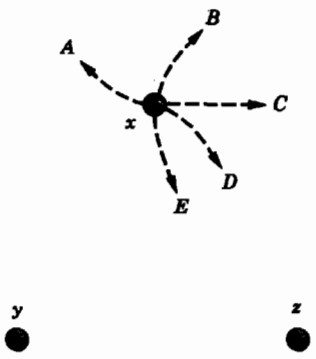


Figura 19 Pregunta 16.

17. Una carga positiva y una negativa de la misma magnitud están en una línea recta larga. ¿Cuál es la dirección de **E** en los puntos de esta línea que estén (*a*) entre las cargas, (*b*) afuera de las cargas en la dirección de la carga positiva, (*c*) afuera de las cargas en la dirección de la carga negativa, y (*d*) afuera de la línea pero en el plano medio de las cargas?

18. En el plano medio de un dipolo eléctrico, ¿es el campo eléctrico paralelo o antiparalelo al momento dipolar eléctrico **p**?

19. ¿Por qué no puede la ecuación 10 representar las líneas de fuerza de la figura 8 si moderamos el requisito de que $x \gg d$?

20. (*a*) Dos dipolos eléctricos idénticos están situados en una línea recta, como se muestra en la figura 20*a*. ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica sobre cada dipolo debida a la presencia del otro? (*b*) Supóngase que los dipolos están reacomodados como en la figura 20*b*. ¿Cuál es ahora la dirección de la fuerza?

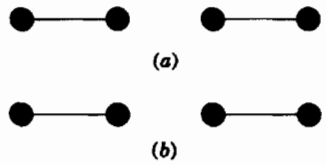


Figura 20 Pregunta 20.

21. Compare la manera en que E varía de acuerdo con r en (*a*) una carga puntual, (*b*) un dipolo, y (*c*) un cuadripolo.

22. ¿Qué dificultades matemáticas se encontrarían al calcular el campo eléctrico de un anillo (o un disco) cargado en puntos *no* situados sobre el eje?

23. La ecuación 28 muestra que E tiene el mismo valor en todos los puntos en frente de una lámina infinita uniformemente cargada. ¿Es esto razonable? Cabría suponer que el campo sería más intenso cerca de la lámina porque las cargas están tan próximas.

24. Describa brevemente cuál era el objetivo del experimento de la gota de aceite de Millikan.

25. ¿Cómo influye en la operación del experimento de Millikan el signo de la carga en la gota de aceite?

26. ¿Por qué Millikan no trató de equilibrar los electrones en su aparato, en lugar de las gotas de aceite?

27. Usted gira a un dipolo eléctrico extremo por extremo en un campo eléctrico uniforme. ¿Cómo depende el trabajo que usted realiza de la orientación inicial del dipolo con respecto al campo?

28. ¿Para qué orientaciones de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme es la energía potencial del dipolo (*a*) la mayor y (*b*) la menor?

29. Un dipolo eléctrico está situado en un campo eléctrico no uniforme. ¿Existe una fuerza neta sobre él?

30. Un dipolo eléctrico está situado en reposo en un campo eléctrico externo uniforme, como en la figura 17*a*, y es liberado. Diga cuál será su movimiento.

31. Un dipolo eléctrico tiene a su momento dipolar **p** alineado con un campo eléctrico externo uniforme **E**. (*a*) ¿Es el equilibrio estable o inestable? (*b*) ¿Cuál es la naturaleza del equilibrio si **p** y **E** apuntan en direcciones opuestas?

PROBLEMAS

Sección 28-2 El campo eléctrico **E**

1. Un electrón es acelerado hacia el este a razón de 1.84×10^9 m/s^2 por medio de un campo eléctrico. Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico.

2. El aire húmedo se descompone (sus moléculas se ionizan) en un campo eléctrico de 3.0×10^6 N/C. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica sobre (*a*) un electrón y (*b*) un ion (con un solo electrón faltante) en este campo?

3. Una partícula alfa, el núcleo de un átomo de helio, tiene una masa de 6.64×10^{-27} kg y una carga de $+2e$. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico que equilibrará a su peso?

4. En un campo eléctrico uniforme cerca de la superficie de la Tierra, una partícula que tiene una carga de -2.0×10^{-9} C recibe la acción de una fuerza eléctrica hacia abajo de 3.0×10^{-6} N. (*a*) Halle la magnitud del campo eléctrico. (*b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica ejercida sobre un protón situado en este campo? (*c*) ¿Cuál es la razón de la fuerza eléctrica a la fuerza gravitatoria en este caso?

Sección 28-3 El campo eléctrico de las cargas puntuales

5. ¿Cuál es la magnitud de una carga puntual elegida de tal modo que el campo eléctrico alejado a una distancia de 75.0 cm tenga una magnitud de 2.30 N/C?
6. Calcule el momento dipolar de un electrón y un protón con una separación de 4.30 nm.
7. Calcule la magnitud del campo eléctrico, debido a un dipolo eléctrico de un momento dipolar de 3.56×10^{-29} C · m, en un punto a 25.4 nm de distancia a lo largo del eje bisector.
8. Halle el campo eléctrico en el centro del cuadrado de la figura 21. Suponga que $q = 11.8$ nC y $a = 5.20$ cm.

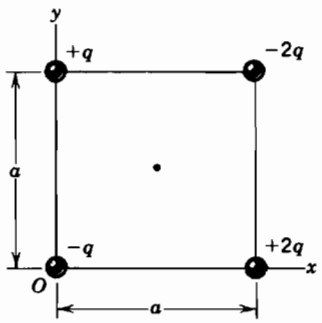


Figura 21 Problema 8.

9. La carátula de un reloj tiene cargas puntuales negativas $-q$, $-2q$, $-3q$,..., $-12q$ fijas en las posiciones de los números correspondientes. Las manecillas del reloj no perturban al campo. ¿En qué momento la manecilla de las horas apunta en la misma dirección que el campo eléctrico en el centro de la carátula? (*Sugerencia*: Considere cargas diametralmente opuestas.)
10. En la figura 4, suponga que ambas cargas son positivas. Demuestre que E en el punto P de la figura, y suponiendo que $x \gg d$, está dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{x^2}.$$

11. En la figura 4, considere un punto a una distancia z desde el centro de un dipolo *a lo largo de su eje*. (*a*) Demuestre que, para valores grandes de z, el campo eléctrico está dado por

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p}{z^3}.$$

(Compare con el campo en un punto de la bisectriz perpendicular.) (*b*) ¿Cuál es la dirección de **E**?

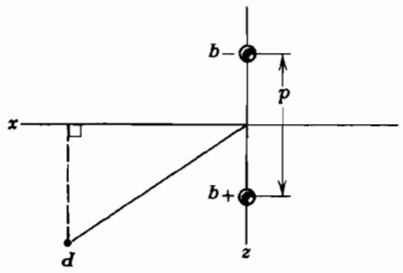


Figura 22 Problema 12

12. Demuestre que las componentes de **E** debidas a un dipolo están dadas, en puntos distantes, por

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3pxz}{(x^2+z^2)^{5/2}}, \qquad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p(2z^2-x^2)}{(x^2+z^2)^{5/2}},$$

donde x y z son las coordenadas del punto P en la figura 22. Demuestre que este resultado general abarca los resultados especiales de la ecuación 10 y del problema 11.

13. Un tipo de cuadripolo eléctrico está formado por cuatro cargas colocadas en los vértices de un cuadrado de lado $2a$. El punto P se encuentra a una distancia x del centro del cuadripolo en una línea paralela a dos lados del cuadrado como se muestra en la figura 23. Para $x \gg a$, demuestre que el campo eléctrico en P está dado, aproximadamente, por

$$E = \frac{3(2qa^2)}{2\pi\epsilon_0 x^4}.$$

(*Sugerencia*: Considere al cuadripolo como dos dipolos.)

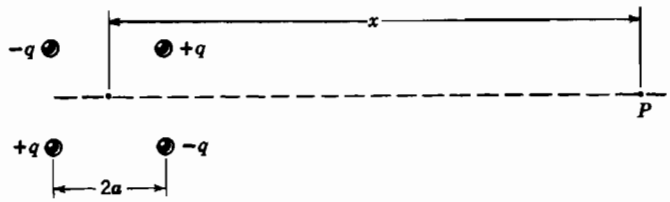


Figura 23 Problema 13.

14. La figura 24 muestra un tipo de cuadripolo eléctrico. Éste consta de dos dipolos y sus efectos en puntos externos no se cancelan totalmente. Demuestre que el valor de E en el eje del cuadripolo para puntos a una distancia z del centro (supóngase que $z \gg d$) está dado por

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

donde Q ($= 2qd^2$) se llama *momento cuadripolar* de la distribución de cargas.

15. Considere el anillo de carga de la sección 28-5. Suponga que la carga q no esté distribuida uniformemente en el anillo, sino que la carga q_1 está distribuida uniformemente en la semicircunferencia y que la carga q_2 está distribuida uniformemente en la otra mitad. Sea $q_1 + q_2 = q$. (*a*) Halle

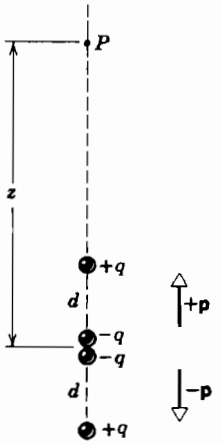


Figura 24 Problema 14.

la componente del campo eléctrico en cualquier punto del eje dirigido *a lo largo* del eje y compare con el caso uniforme. (*b*) Halle la componente del campo eléctrico en cualquier punto del eje *perpendicular* al eje y compare con el caso uniforme.

Sección 28-4 Líneas de fuerza

16. La figura 25 muestra las líneas de campo de un campo eléctrico; el espaciamiento de las líneas, perpendicularmente a la página, es el mismo en cualquier parte. (*a*) Si la magnitud del campo en *A* es de 40 N/C, ¿qué fuerza experimenta un electrón en ese punto? (*b*) ¿Cuál es la magnitud del campo en *B*?

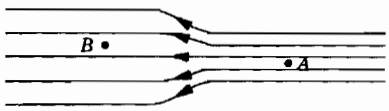


Figura 25 Problema 16.

17. Dibuje cualitativamente las líneas de fuerza asociadas con un disco delgado, circular, cargado uniformemente, de radio *R*. (*Sugerencia*: Considere como casos limitantes a puntos muy cercanos al disco, en donde el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, y puntos muy alejados de él, en donde el campo eléctrico es como si se tuviera una carga puntual.)

18. Dibuje cualitativamente las líneas de fuerza asociadas con dos cargas puntuales separadas $+q$ y $-2q$.

19. Tres cargas están dispuestas en un triángulo equilátero como se muestra en la figura 26. Considere las líneas de fuerza debidas a $+Q$ y $-Q$, y a partir de ellas identifique la dirección de la fuerza que actúa sobre $+q$ debido a la presencia de las otras dos cargas. (*Sugerencia*: Véase la figura 8.)

20. (*a*) En la figura 27, encuentre el punto (o los puntos) en donde el campo electrico es cero. (*b*) Dibuje cualitativamente las líneas de fuerza.

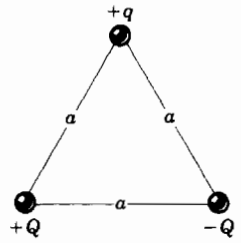


Figura 26 Problema 19.

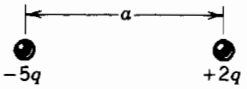


Figura 27 Problema 20.

21. Dos cargas puntuales están fijas y separadas por una distancia *d* (Fig. 28). Trace $E(x)$, suponiendo que $x = 0$ en la carga de la izquierda. Considere valores de x tanto positivos como negativos. Grafique E como positivo si **E** apunta hacia la derecha y negativo si **E** apunta hacia la izquierda. Suponga que $q = +1.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = +3.0 \times 10^{-6}$ C, y $d = 10$ cm.

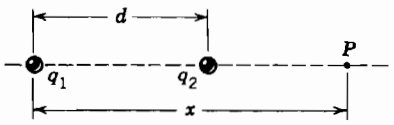


Figura 28 Problema 21.

22. Las cargas $+q$ y $-2q$ están fijas y separadas una distancia *d* como en la figura 29. (*a*) Encuentre **E** en los puntos *A*, *B* y *C*. (*b*) Dibuje aproximadamente las líneas del campo eléctrico.

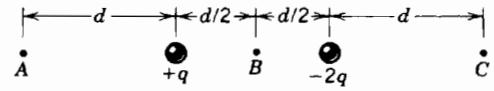


Figura 29 Problema 22.

23. Suponga que el exponente en la ley de Coulomb no sea 2 sino n. Demuestre que para $n \neq 2$ es imposible construir líneas que tengan las propiedades enunciadas para las líneas de fuerza en la sección 28-4. Para simplificar, considere una carga puntual aislada.

Sección 28-5 El campo eléctrico de las distribuciones de carga continua

24. Demuestre que la ecuación 27, para el campo eléctrico de un disco cargado en puntos sobre su eje, se reduce al campo de una carga puntual para $z \gg R$.

25. ¿A qué distancia a lo largo del eje de un disco cargado de radio *R* es la intensidad del campo eléctrico igual a un medio del valor del campo en la superficie del disco en el centro?

26. ¿A qué distancia a lo largo del eje de un anillo cargado de radio R es máxima la intensidad del campo eléctrico axial?

27. (*a*) ¿Qué carga total q debe contener un disco de 2.50 cm de radio para que el campo eléctrico en la superficie del disco en su centro iguale al valor al cual el aire se descompone eléctricamente, produciendo chispas? Véase la tabla 1. (*b*) Suponga que cada átomo en la superficie tenga un área de sección transversal efectiva de 0.015 nm^2. ¿Cuántos átomos están en la superficie del disco? (*c*) La carga en (*a*) resulta de alguno de los átomos de la superficie que portan un electrón en exceso. ¿Qué fracción de los átomos de la superficie deben estar cargados así?

28. Escriba la ecuación 27 en una forma que sea válida para una z tanto negativa como positiva. (*Sugerencia*: Al realizar la integral de la ecuación 26, se obtiene la cantidad $z/\sqrt{z^2}$. ¿Cuál es el valor de esta cantidad para $z < 0$?

29. Abajo se dan los valores medidos del campo eléctrico E a una distancia z a lo largo del eje de un disco de plástico cargado:

z (cm)	E (10^7 N/C)
0	2.043
1	1.732
2	1.442
3	1.187
4	0.972
5	0.797

Calcule (*a*) el radio del disco y (*b*) la carga sobre él.

30. Una varilla de vidrio está doblada en un semicírculo de radio r. Una carga $+q$ está uniformemente distribuida a lo largo de la mitad superior, y una carga $-q$ está uniformemente distribuida a lo largo de la mitad inferior, como se muestra en la figura 30. Determine el campo eléctrico **E** en P, el centro del semicírculo.

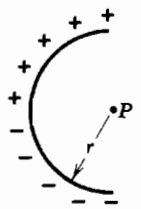


Figura 30 Problema 30.

31. Una varilla no conductora de longitud finita L contiene una carga total q, distribuida uniformemente a lo largo de ella. Demuestre que E en el punto P sobre la bisectriz perpendicular en la figura 31 está dado por

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y}\frac{1}{(L^2 + 4y^2)^{1/2}}.$$

32. Una barra aislante de longitud L tiene carga $-q$ distribuida uniformemente a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura 32. (*a*) ¿Cuál es la densidad de carga lineal de la barra? (*b*) Calcule el campo eléctrico en el punto P a una distancia a del extremo de la barra. (*c*) Si P estuviese muy lejos de la barra en comparación con L, la barra podría considerarse como una carga puntual. Demuestre que la respuesta de (*b*) se reduce al campo eléctrico de una carga puntual para $a \gg L$.

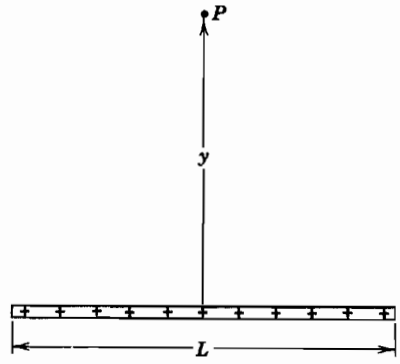


Figura 31 Problema 31.

Figura 32 Problema 32.

33. Dibuje cualitativamente las líneas de fuerza asociadas con tres líneas de carga largas y paralelas, en un plano perpendicular. Suponga que las intersecciones de las líneas de carga con tal plano forman un triángulo equilátero (Fig. 33) y que cada línea de carga tiene la misma densidad de carga lineal λ.

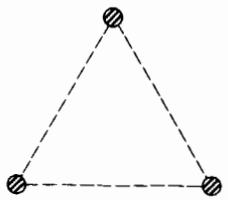


Figura 33 Problema 33.

34. Una barra aislante "semiinfinita" (Fig. 34) tiene una carga constante por unidad de longitud igual a λ. Demuestre que el campo eléctrico en el punto P forma un ángulo de 45° con la barra y que este resultado es independiente de la distancia R.

35. Una copa hemisférica no conductora de radio interior R tiene una carga total q distribuida uniformemente sobre su superficie interior. Determine el campo eléctrico en el centro de curvatura. (*Sugerencia:* Considere a la copa como una pila de anillos.)

Sección 28-6 Una carga puntual en un campo eléctrico

36. Un arma de defensa considerada para la Iniciativa de Defensa Estratégica (Star Wars) usa haces de partículas.

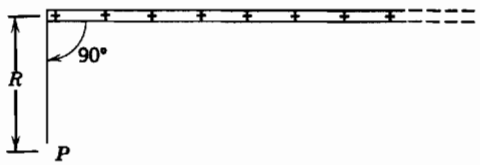


Figura 34 Problema 34.

Por ejemplo, un haz de protones que choque con un proyectil dirigido (misíl) enemigo podría volverlo inocuo. Tales haces pueden producirse en "cañones" que emplean campos eléctricos para acelerar a las partículas cargadas. (*a*) ¿Qué aceleración experimentaría un protón si el campo eléctrico fuera de 2.16×10^4 N/C? (*b*) ¿Qué velocidad adquiriría el protón si el campo actuara sobre una distancia de 1.22 cm?

37. Un electrón que se mueve con una velocidad de 4.86×10^6 m/s se dispara en forma paralela a un campo eléctrico de 1030 N/C de intensidad dispuesto de tal modo que retarde su movimiento. (*a*) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en el campo antes de llegar (momentáneamente) al reposo y (*b*) cuánto tiempo transcurriría? (*c*) Si el campo eléctrico termina abruptamente después de 7.88 mm, ¿qué fracción de su energía cinética inicial perderá el electrón al atravesarlo?

38. En una región situada entre dos placas cargadas opuestamente existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón se suelta desde el reposo de la superficie de la placa cargada negativamente y golpea la superficie de la placa opuesta, situada a 1.95 cm, 14.7 ns más tarde. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del electrón al golpear la segunda placa? (*b*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

39. Dos cargas iguales y opuestas de 1.88×10^{-7} C de magnitud se mantienen separadas por 15.2 cm. (*a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de **E** en el punto medio entre las cargas? (*b*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) actuaría sobre un electrón situado allí?

40. Dos cargas puntuales de magnitudes $q_1 = 2.16\ \mu$C y $q_2 = 85.3$ nC están separadas por 11.7 cm. (*a*) Calcule la magnitud del campo eléctrico que cada una produce en el sitio donde está la otra. (*b*) Determine la magnitud de la fuerza sobre cada carga.

41. En el experimento de Millikan, una gota de 1.64 μm de radio y 0.851 g/cm^3 de densidad se encuentra en equilibrio cuando se aplica un campo eléctrico de 1.92×10^5 N/C. Determine la carga en la gota, en términos de e.

42. Dos grandes placas de cobre paralelas están separadas por 5.00 cm y tienen un campo eléctrico uniforme entre ellas como se muestra en la figura 35. De la placa negativa se suelta un electrón, al mismo tiempo que, de la placa positiva, se suelta un protón. Desprecie la fuerza de las partículas entre sí y calcule sus distancias respecto a la placa positiva cuando se cruzan. ¿No le sorprende que no necesite conocer el campo eléctrico para resolver este problema?

43. En uno de los primeros experimentos (1911), Millikan observó que aparecían, entre otras, las siguientes cargas medidas en tiempos diferentes en una misma gota:

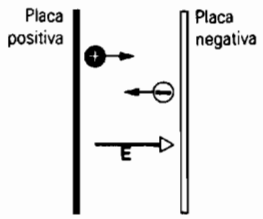


Figura 35 Problema 42.

6.563×10^{-19} C	13.13×10^{-19} C	19.71×10^{-19} C
8.204×10^{-19} C	16.48×10^{-19} C	22.89×10^{-19} C
11.50×10^{-19} C	18.08×10^{-19} C	26.13×10^{-19} C

¿Qué valor puede deducirse de estos datos para el cuanto de carga e?

44. Un campo vertical uniforme **E** está establecido en el espacio entre dos placas paralelas grandes. Dentro del campo se encuentra suspendida, de un hilo de longitud L, una pequeña esfera conductora de masa m. Encuentre el periodo de este péndulo cuando a la esfera se le proporciona una carga $+q$ si la placa inferior (*a*) está cargada positivamente y (*b*) está cargada negativamente?

45. En el problema muestra 6, determine la desviación total de la gota de tinta al golpear el papel a 6.8 mm del extremo de las placas desviadoras (deflectoras); véase la figura 14.

46. Un electrón está limitado a moverse a lo largo del eje del anillo de carga, como se vio en la sección 28-5. Demuestre que el electrón puede realizar oscilaciones pequeñas, cuando pasa por el centro del anillo, con una frecuencia dada de

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}\ .$$

47. Un electrón es proyectado como en la figura 36 con una velocidad de $v_0 = 5.83 \times 10^6$ m/s y a un ángulo de $\theta = 39.0°$; **E** = 1870 N/C (dirigido hacia arriba), $d = 1.97$ cm, y $L = 6.20$ cm. ¿Golpeará el electrón a cualquiera de las placas? Si golpea a una placa, ¿a cuál de ellas golpeará y a qué distancia del extremo izquierdo?

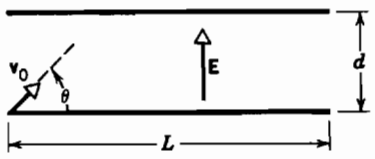


Figura 36 Problema 47.

Sección 28-7 Un dipolo en un campo eléctrico

48. Un dipolo eléctrico, que consta de cargas de 1.48 nC de magnitud separadas por 6.23 μm se encuentra dentro de un campo eléctrico de 1100 N/C de intensidad. (*a*) ¿Cuál es la magnitud del momento dipolar eléctrico? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de la energía potencial correspondiente a las orientaciones dipolares paralela y antiparalela al campo?

49. Un dipolo eléctrico consta de cargas $+2e$ y $-2e$ separadas por 0.78 nm. El dipolo está en un campo eléctrico de 3.4×10^6 N/C de intensidad. Calcule la magnitud del momento de torsión sobre el dipolo cuando el momento dipolar es (*a*) paralelo, (*b*) en ángulo recto, y (*c*) opuesto al campo eléctrico.

50. Una carga $q = 3.16\ \mu$C está a 28.5 cm de un pequeño dipolo a lo largo de su bisectriz perpendicular. La fuerza sobre la carga es igual a 5.22×10^{-16} N. Muestre con ayuda de un diagrama (*a*) la dirección de la fuerza sobre la carga y (*b*) la dirección de la fuerza sobre el dipolo. Determine (*c*) la magnitud de la fuerza sobre el dipolo y (*d*) el momento dipolar del dipolo.

51. Determine el trabajo necesario para que un dipolo eléctrico gire, extremo por extremo, en un campo eléctrico uniforme **E**, en términos del momento dipolar **p** y del ángulo inicial θ_0 entre **p** y **E**.

52. Encuentre la frecuencia de oscilación de un dipolo eléctrico, de momento p e inercia de rotación I, para pequeñas amplitudes de oscilación alrededor de su posición de equilibrio en un campo eléctrico uniforme E.

53. Considere dos cargas puntuales $+q$ iguales y positivas separadas una distancia a entre sí. (*a*) Obtenga una expresión para dE/dz en el punto medio entre ellas, en donde z es la distancia desde el punto medio a lo largo de la línea que une a las cargas. (*b*) Demuestre que la fuerza sobre un pequeño dipolo situado en este punto, estando su eje a lo largo de la línea que une a las cargas, está dado por $F = p(dE/dz)$, donde p es el momento dipolar.

Proyectos para la computadora

54. Escriba un programa de computadora o diseñe una hoja de cálculo para calcular las componentes del campo eléctrico debido a una colección de cargas puntuales. Proporcione el número de partículas, sus cargas, y las coordenadas de sus posiciones. Luego proporcione las coordenadas del campo puntual. Disponga el programa de modo que le permita aceptar las coordenadas de un nuevo campo puntual después de que haya exhibido las componentes del campo para el punto previo. Por sencillez, suponga que todas las cargas están en el plano xy y que el campo puntual está también en dicho plano. Si la carga q_i tiene coordenadas x_i y y_i, entonces su contribución al campo en x, y es $E_{ix} = (1/4\pi\epsilon_0)q_i(x - x_i)/r_i^3$, $E_{iy} = (1/4\pi\epsilon_0)q_i(y - y_i)/r_i^3$, $E_{iz} = 0$, donde $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$. Haga también que la computadora calcule la magnitud del campo y el ángulo que forma con el eje x.

(*b*) Suponga que dos cargas están localizadas sobre el eje x: $q_1 = 6.0 \times 10^{-9}$ C en $x_1 = -0.030$ m y $q_2 = 3.0 \times 10^{-9}$ C en $x_2 = 0.030$ m. Use su programa para calcular el campo eléctrico en los siguientes puntos a lo largo del eje y: $y = 0$, 0.050, 0.100, 0.150, y 0.200 m. Trace un diagrama que muestre las posiciones de las cargas en cada campo puntual dibujando una flecha para representar al campo eléctrico. Su longitud debe ser proporcional a la magnitud del campo allí y debe formar el ángulo apropiado con el eje x. Puede usted hacer que el programa trace los vectores en la pantalla del monitor.

(*c*) Use ahora el programa para hallar el campo eléctrico en los siguientes puntos del eje y: $y = -0.050$, -0.100, -0.150, y -0.200 m. Trace los vectores del campo en el diagrama. ¿Cuál es la relación entre la componente x del campo en $y = +0.050$ m y la componente x en $y = -0.050$ m? ¿Cuál es la relación entre las componentes y en estos puntos? Se cumplen las mismas relaciones para el campo en otros pares de puntos?

55. Dos cargas están ubicadas en el eje x: $q_1 = -3.0 \times 10^{-9}$ C en $x_1 = -0.075$ m y $q_2 = 3.0 \times 10^{-9}$ C en $x_2 = 0.075$ m. Use el programa descrito en el problema anterior para determinar el campo eléctrico en los siguientes puntos sobre la línea $y = 0.030$ m; $x = -0.150$, -0.100, -0.050. 0, 0.050, 0.100, y 0.150 m. Trace un diagrama que muestre las posiciones de las cargas, y en cada campo puntual, dibuje una flecha que defina la dirección y la magnitud del campo eléctrico en ese punto. Es posible programar a la computadora para trazar las flechas en la pantalla del monitor.

Considerando a los campos de las cargas individuales, explique cualitativamente por qué la componente y del campo es negativa para los campos puntuales con componentes x negativas, cero para $x = 0$, y positivas para los campos puntuales con coordenadas x positivas. Explique también por qué la componente x del campo invierte su signo dos veces en la región considerada. Sin realizar un nuevo cálculo, trace los vectores del campo en tantos puntos como pueda a lo largo de la línea $y = -0.030$ m.

56. (*a*) Dos cargas están ubicadas en el eje x: $q_1 = 3.0 \times 10^{-9}$ C en $x_1 = -0.075$ m y $q_2 = 6.0 \times 10^{-9}$ C en $x_2 = 0.075$ m. Use el programa descrito previamente y aplique el método de prueba y error para encontrar las coordenadas de un punto donde el campo eléctrico total sea cero. (*b*) Haga lo mismo para $q_1 = -3.0 \times 10^{-9}$ C, con q_2 y las posiciones de las cargas como antes.

57. Usted puede usar una computadora para graficar las líneas de un campo eléctrico. Considere las cargas en el plano xy y trace líneas en ese plano. Escoja un punto, con coordenadas x y y. Calcule las componentes del campo E_x y E_y y la magnitud de E para dicho punto. Otro punto sobre la misma línea de campo tiene las coordenadas $x + \Delta x$ y $y + \Delta y$, en donde $\Delta x = (E_x/E)\Delta s$, $\Delta y = (E_y/E)\Delta s$, y Δs es la distancia desde el primer punto. Estas expresiones son aproximaciones válidas cuando Δs pequeña. La línea que une a los puntos es tangente al campo en algún lugar entre ellos y está, por tanto, a lo largo de la línea del campo, toda vez que la curvatura de la línea entre los puntos pueda despreciarse. Se calculan las componentes y la magnitud del campo para el nuevo punto y el proceso se repite.

(*a*) Escriba un programa de computadora o diseñe una hoja de cálculo para calcular y graficar las coordenadas de los puntos sobre la línea del campo. Proporcione el valor de las cargas, sus coordenadas, las coordenadas del punto inicial sobre la línea, y la distancia Δs entre puntos contiguos en la línea. Obtenga de la computadora la lista o trace una serie de puntos, pero haga que se detenga cuando los puntos lleguen lejos de las cargas o cerca de cualquiera de las cargas. Quizá desee usted calcular las coordenadas de más puntos de los que se exhiben. Esto mantiene pe-

queña a Δs, con la ventaja de que no genera una lista abrumadoramente larga.

(*b*) Considere un dipolo eléctrico. La carga $q_1 = 7.1 \times 10^{-9}$ C está ubicada en el origen, y la carga $q_2 = -7.1 \times 10^{-9}$ C está ubicada sobre el eje y en $y = -0.40$ m. Trace cuatro líneas de campo. Inicie una en $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = 5 \times 10^{-3}$ m, la segunda en $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = -5 \times 10^{-3}$ m, la tercera en $x = -5 \times 10^{-3}$ m, $y = 5 \times 10^{-3}$ m, y la cuarta en $x = -5 \times 10^{3}$ m, $y = -5 \times 10^{-3}$ m. Considere que $\Delta s = 0.004$ m y continúe trazando mientras los puntos estén a menos de 2 m del origen y a más de Δs de cada una de las cargas. Dibuje la línea del campo que pasa por los puntos.

(*c*) Repita para $q_1 = q_2 = 7.1 \times 10^{-9}$ C, siendo todo lo demás lo mismo. Dibuje cuatro líneas más, de las que una comience en $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.395$ m, la segunda en $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.405$ m, la tercera en $x = -5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.395$ m, y la cuarta en $x = -5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.405$ m.

58. El programa de computadora que se describe en el apéndice I puede emplearse para investigar el movimiento de una partícula en un campo eléctrico. Considere dos partículas que ejerzan fuerzas eléctricas entre sí. Cada una experimenta una aceleración en respuesta al campo eléctrico de la otra, y cuando sus posiciones cambian, las fuerzas que ellas ejercen también cambian.

Dos partículas idénticas, cada una con una carga $q = 1.9 \times 10^{-9}$ C y una masa $m = 6.1 \times 10^{-15}$ kg, comienzan con velocidades idénticas de 3.0×10^{4} m/s en la dirección x positiva. Inicialmente una está en $x = 0$, $y = 6.7 \times 10^{-3}$ m y la otra está en $x = 0$, $y = -6.7 \times 10^{-3}$ m. Ambas están en el plano xy y continúan moviéndose en ese plano. Considere sólo las fuerzas eléctricas que ejercen entre sí.

(*a*) Use un programa de computadora para trazar las trayectorias desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. Gracias a la simetría del problema sólo se necesita calcular la posición y la velocidad de una de las cargas. Tenga presente la simetría para determinar la posición y la velocidad de la otra al principio de cada intervalo de integración. Use $\Delta t = 1 \times 10^{8}$ s como el intervalo de integración.

(*b*) Supóngase ahora que una de las partículas tiene una carga $q = -1.9 \times 10^{-9}$ C, pero que todas las demás condiciones son las mismas. Grafique las trayectorias desde $t = 0$ hasta $t = 5.0 \times 10^{-7}$ s.

CAPÍTULO 29

LA LEY DE GAUSS

La ley de Coulomb puede emplearse siempre para calcular el campo eléctrico **E** *en cualquier distribución discreta o continua de cargas en reposo. Las sumas o integrales pueden resultar complicadas (y puede ser necesario el uso de la computadora para evaluarlas numéricamente), pero siempre es posible hallar el campo eléctrico resultante.*

Algunos casos considerados en el capítulo anterior requerían argumentos simplificados basados en la simetría del problema físico. Por ejemplo, al calcular el campo eléctrico en puntos sobre el eje de un anillo circular cargado, se empleó un argumento de simetría para concluir que las componentes de **E**, *perpendiculares al eje, deben ser cero. En este capítulo explicaremos otra forma alternativa de la ley de Coulomb, llamada la* ley de Gauss, *la cual proporciona un enfoque más útil e instructivo para calcular el campo eléctrico en situaciones que presenten ciertas simetrías.*

El número de situaciones que pueden analizarse directamente usando la ley de Gauss es pequeño, pero todas ellas constituyen casos, que pueden realizarse con extraordinaria facilidad. Si bien la ley de Gauss y la ley de Coulomb dan resultados idénticos en los casos en que pueden aplicarse ambas, se considera que la ley de Gauss es una ecuación más fundamental que la ley de Coulomb. Es justo decir que, mientras la ley de Coulomb constituye el "caballo de batalla" de la electrostática, la ley de Gauss proporciona perspicacia.

29-1 EL FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

Antes de explicar la ley de Gauss, debemos primero entender el concepto de *flujo*. El flujo (símbolo Φ) es una propiedad de cualquier campo vectorial. El término proviene del latín *fluxus*, y éste de *fluere*, que significa fluir, manar. Resulta conveniente considerar el flujo de un campo vectorial determinado como si fuese una medida del flujo o intensidad de penetración de los vectores de campo a través de una superficie fija imaginaria en el campo. Posteriormente, consideraremos el flujo del campo eléctrico para la ley de Gauss, pero por ahora veremos un ejemplo más familiar de un campo vectorial, es decir, el campo de velocidad de un fluido que corre. Recuérdese, del capítulo 18, que el campo de la velocidad da la velocidad en los puntos por los que fluye el fluido. El campo de velocidad representa al flujo del fluido; el campo mismo no está fluyendo sino que es una representación *fija* del flujo.

La figura 1 muestra el campo de flujo de un fluido incompresible, el cual suponemos para simplificar que es estacionario y uniforme. Imaginemos que colocamos en la corriente un alambre doblado en forma de espira cuadrada de área A. En la figura 1*a*, el cuadrado está situado de modo que su plano es perpendicular a la dirección del flujo. En nuestro análisis del flujo de un fluido (capítulo 18), reemplazábamos el movimiento real de las partículas del fluido por el campo de velocidad asociado con el flujo. Por lo tanto, podemos considerar el flujo real de las partículas materiales a través de la espira, o bien el flujo del campo de velocidad a través de la espira. El concepto de campo nos proporciona la abstracción que necesitaremos más adelante para la ley de Gauss, pero, por supuesto, el flujo a través de la espira puede describirse igualmente bien en términos de las propias partículas del fluido.

La magnitud $|\Phi|$ del flujo del campo de velocidad a través de la espira de área A en la figura 1*a* está escrito en términos del gasto volumétrico del flujo del fluido (digamos, en unidades de m^3/s) como

$$|\Phi| = vA \qquad (1)$$

donde v es la magnitud de la velocidad en la ubicación de la espira. El flujo puede, por una parte, considerarse como

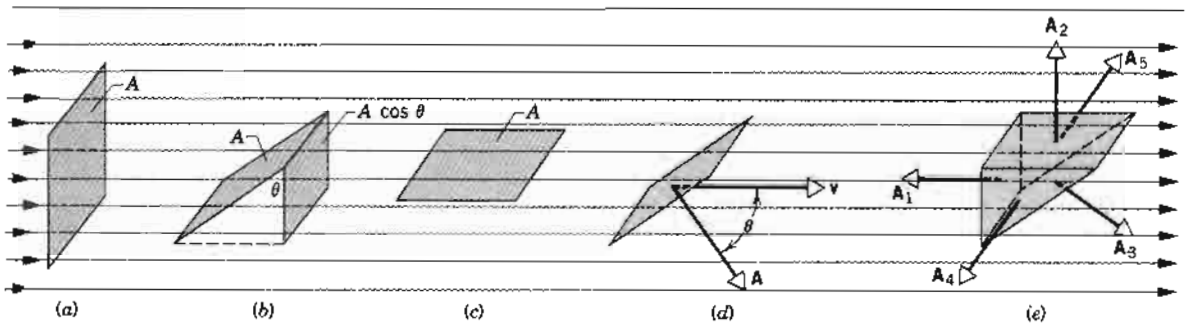


Figura 1 Una espira de alambre de área A está inmersa en una corriente que fluye, la cual representamos como un campo de velocidad. (*a*) La espira está en ángulo recto al flujo. (*b*) La espira ha girado en un ángulo θ; la proyección del área perpendicular al flujo es $A \cos \theta$. (*c*) Cuando $\theta = 90°$, ninguna de las líneas de la corriente pasan a través del plano de la espira. (*d*) El área de la espira está representada por un vector **A** perpendicular al plano de la espira. El ángulo entre **A** y la velocidad de flujo **v** es θ. (*e*) Superficie cerrada hecha de cinco superficies planas. El área **A** de cada superficie se representa por la normal hacia afuera.

la rapidez con la cual pasa el fluido a través de la espira. Sin embargo, en términos del concepto de campo (y con el propósito de presentar la ley de Gauss), es conveniente considerarlo como una medida del *número de líneas de campo que pasan a través de la espira.*

En la figura 1*b*, la posición de la espira es tal que su plano ya no es perpendicular a la dirección de la velocidad. Nótese que el número de líneas del campo de velocidad que pasan a través de la espira es menor en la figura 1*b* que el correspondiente a la figura 1*a*. El área proyectada del cuadrado es $A \cos \theta$ y, al examinar la figura 1*b*, usted podrá convencerse de que el número de líneas de campo que pasan por la espira inclinada de área A es el mismo que el número de líneas de campo que pasan a través de la espira más pequeña de área $A \cos \theta$ perpendicular a la corriente. Así pues, la magnitud del flujo en la situación de la figura 1*b* es

$$|\Phi| = vA \cos \theta. \tag{2}$$

Si la espira se gira de modo que la velocidad del fluido sea paralela a su superficie, como se muestra en la figura 1*c*, el flujo sería cero, correspondiendo a $\theta = 90°$ en la ecuación 2. Nótese que en este caso no pasan líneas de campo a través de la espira.

La ley de Gauss, como podremos ver, trata del flujo neto a través de una superficie *cerrada*. Por lo tanto, debemos distinguir entre un flujo negativo y uno positivo al penetrar una superficie. El miembro derecho de la ecuación 2 puede expresarse en términos del producto punto entre **v** y un vector **A** cuya magnitud es el área de la superficie y cuya dirección es perpendicular a la superficie (Fig. 1*d*). Sin embargo, puesto que la normal a una superficie puede apuntar ya sea en la dirección mostrada en la figura 1*d* o en la dirección opuesta, debemos tener un modo de especificar esta dirección; de otro modo el signo de Φ no quedaría definido con claridad. Por convención, elegimos que la dirección de **A** sea la de la *normal hacia afuera* de una superficie cerrada. Así, el flujo que sale del volumen encerrado por la superficie se considera positivo, y el flujo que entra al volumen se considera negativo. Con esta elección, podemos entonces escribir el flujo para una superficie cerrada consistente en varias superficies individuales (la Fig. 1*e*, por ejemplo) como:

$$\Phi = \sum \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \tag{3}$$

donde **v** es el vector de velocidad, en la superficie. La suma se realiza sobre todas las superficies individuales que forman una superficie cerrada. El flujo es una cantidad escalar, porque se define en términos del producto punto de dos vectores.

Problema muestra 1 Consideremos la superficie cerrada de la figura 1*e*, la cual muestra un volumen encerrado por cinco superficies (1, 2 y 3, que son paralelas a las superficies de las Figs. 1*a*, 1*b* y 1*c*, junto con 4 y 5, las cuales son paralelas a las líneas de corriente). Si se supone que el campo de velocidad es uniforme, de modo que tenga la misma magnitud y dirección en todas partes, calcule el flujo total a través de la superficie cerrada.

Solución Usando la ecuación 3 podemos escribir el flujo total como la suma de los valores del flujo a través de cada una de las cinco superficies por separado:

$$\Phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_4 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_5.$$

Nótese que para la superficie 1 el ángulo entre la *normal hacia afuera* $\mathbf{A}_1$ y la velocidad **v** es de 180°, de modo que el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_1$ puede escribirse como $-vA_1$. Las contribuciones de las superficies 2, 4 y 5 son cero todas, porque en cada caso (como se muestra en la Fig. 1*e*) el vector **A** es perpendicular a **v**. Para la superficie A_3, el flujo puede escribirse como $vA_3 \cos \theta$, y así el flujo total es

$$\Phi = -vA_1 + 0 + vA_3 \cos \theta + 0 + 0 = -vA_1 + vA_3 \cos \theta.$$

Sin embargo, de la geometría de la figura 1*e* concluimos que $A_2 \cos\theta = A_1$, y como resultado, obtenemos

$$\Phi = 0.$$

O sea, el flujo total a través de la superficie cerrada es cero.

El resultado del problema muestra anterior no debe sorprendernos si recordamos que el campo de velocidad es una manera equivalente de representar el flujo real de las partículas materiales en la corriente. Cada línea de campo que entra a la superficie cerrada de la figura 1*e* a través de la superficie 1 sale a través de la superficie 3. De modo equivalente, podemos afirmar que, para la superficie cerrada mostrada en la figura 1*e*, la cantidad neta de fluido que entra al volumen encerrado por la superficie es igual a la cantidad neta de fluido que sale del volumen. Cabe esperar que sea así *con cualquier superficie cerrada* si no existen dentro del volumen *fuentes* o *sumideros* de fluido, esto es, lugares en los que se cree nuevo fluido o éste se halle atrapado. Si hubiese una fuente dentro del volumen (tal como un cubo de hielo fundiéndose que introdujese un fluido más en la corriente), entonces saldría más fluido de la superficie que el que entró, y el flujo total sería positivo. Si hubiese un sumidero dentro del volumen, entonces entraría más fluido del que saldría, y el flujo neto sería negativo. El flujo neto positivo o negativo a través de la superficie depende de la intensidad de la fuente o del sumidero (es decir, del gasto volumétrico con que el fluido sale de la fuente o entra al sumidero). Por ejemplo, si un sólido fundiéndose dentro de la superficie liberase 1 cm^3 de fluido por segundo en la corriente, entonces hallaríamos que el flujo neto a través de la superficie cerrada es de +1 cm^3/s.

La figura 1 mostró el caso especial de un campo uniforme y superficies planas. Podemos fácilmente generalizar estos conceptos a un campo no uniforme y a superficies de forma y orientación arbitrarias. Cualquier superficie arbitraria puede dividirse en elementos infinitesimales de área dA que son aproximadamente superficies planas. La dirección del vector $d\mathbf{A}$ es la de la normal hacia afuera de este elemento infinitesimal. El campo tiene un valor **v** en la ubicación de este elemento, y el flujo neto se encuentra al sumar las contribuciones de todos los elementos, esto es, integrando para toda la superficie:

$$\Phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \qquad (4)$$

Las conclusiones a las que llegamos anteriormente son válidas en este caso general: si la ecuación 4 se evalúa para una superficie cerrada, entonces el flujo es (1) *cero* si la superficie no incluye fuentes o sumideros, (2) *positivo* y de igual magnitud a su intensidad si la superficie contiene sólo fuentes, o (3) *negativo* y de igual magnitud a su intensidad si la superficie contiene únicamente sumideros. Si la superficie incluye fuentes y sumideros, el flujo neto puede ser cero, positivo, o negativo, dependiendo de la intensidad relativa de las fuentes y de los sumideros.

Consideremos ahora otro ejemplo, el campo gravitatorio **g** (véase la Secc. 16-7) cerca de la superficie de la Tierra, el cual (al igual que el campo de velocidad) es un campo vectorial fijo. El flujo neto de **g** a través de cualquier contenedor cerrado pero vacío es cero. Si éste contiene materia (fuentes de **g**), entonces sale más flujo de la superficie del que entra, y el flujo neto de **g** a través de la superficie es positivo.

En la sección siguiente aplicaremos consideraciones similares al flujo de otro campo vectorial, es decir, el campo eléctrico **E**. Como usted puede prever, al hablar de electrostática, las fuentes o sumideros del campo son cargas positivas o negativas, y las intensidades de las fuentes o de los sumideros son proporcionales a las magnitudes de las cargas. La ley de Gauss relaciona al flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, calculada por analogía con la ecuación 4, a la carga eléctrica neta encerrada por la superficie.

29-2 EL FLUJO DEL CAMPO ELÉCTRICO

Imaginemos que las líneas de campo de la figura 1 representan un campo eléctrico de cargas en reposo más bien que un campo de velocidad. Aun cuando en el caso electrostático no hay nada que fluya, de todas maneras emplearemos el concepto de flujo. La definición del flujo eléctrico es semejante a la del flujo de velocidad, reemplazando **E** por **v** siempre que aparezca. Por analogía con la ecuación 3, definimos al flujo del campo eléctrico Φ_E como

$$\Phi_E = \sum \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}. \qquad (5)$$

Como en el caso con el flujo de velocidad, el flujo Φ_E puede considerarse como una medida del número de líneas del campo eléctrico que atraviesan la superficie. El subíndice E de Φ_E nos recuerda que estamos refiriéndonos al flujo *eléctrico* y sirve para distinguir al flujo eléctrico del flujo magnético, el cual trataremos en el capítulo 36. La ecuación 5 se aplica, como se hizo con la ecuación 3, sólo en aquellos casos en que **E** es constante en magnitud y dirección en cada área **A** incluida en la suma.

Al igual que el flujo de velocidad, el flujo del campo eléctrico es un escalar. Sus unidades son, según la ecuación 5, $N \cdot m^2/C$.

La ley de Gauss trata del flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada. Para definir Φ_E de modo más general, particularmente en los casos en que **E** no sea uniforme, consideremos la figura 2, la cual muestra una

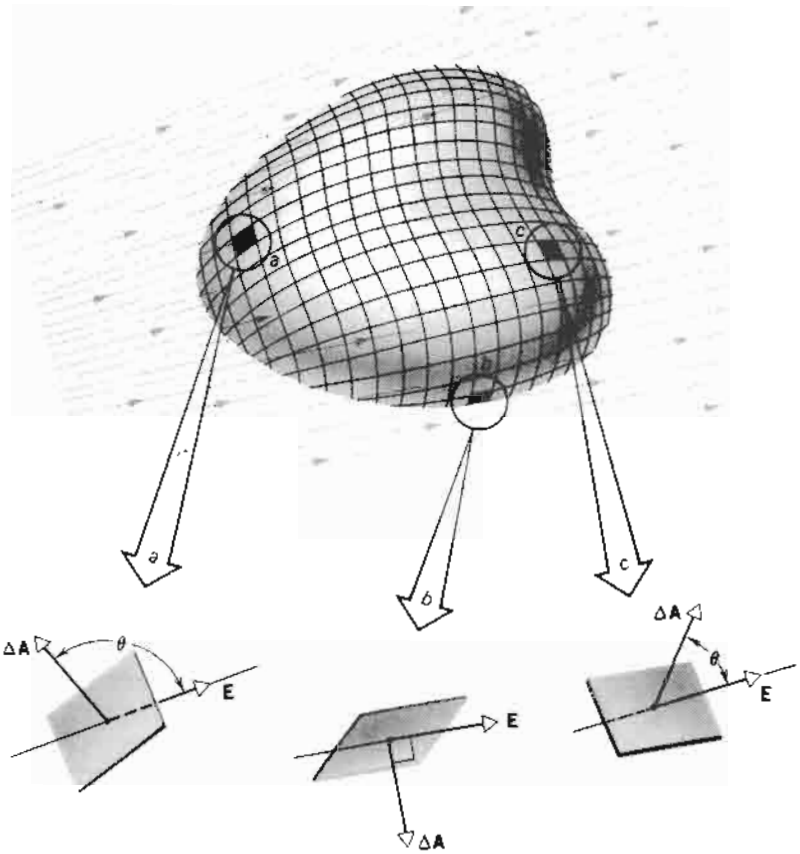


Figura 2 Una superficie de forma arbitraria inmersa en un campo eléctrico no uniforme **E**. La superficie se divide en pequeños elementos de área $\Delta\mathbf{A}$. La relación entre los vectores **E** y $\Delta\mathbf{A}$ se muestra para tres elementos diferentes (a, b y c).

superficie cerrada arbitraria inmersa en un campo eléctrico no uniforme. Dividamos la superficie en pequeños cuadrados de área ΔA, siendo cada uno de ellos lo suficientemente pequeño como para que puedan considerarse como planos. Cada elemento de área puede representarse como un vector $\Delta\mathbf{A}$, y cuya magnitud es el área ΔA. La dirección de $\Delta\mathbf{A}$ es la normal a la superficie y dirigida hacia afuera, como se muestra en la figura 1. Puesto que los cuadrados fueron hechos muy pequeños, **E** puede considerarse como constante en todos los puntos de un cuadrado determinado.

Los vectores **E** y $\Delta\mathbf{A}$ que caracterizan a cada cuadrado forman un ángulo θ entre sí. La figura 2 muestra una vista aumentada de tres cuadrados en la superficie, marcados como a, b y c. Nótese que en a, $\theta > 90°$ (**E** apunta hacia adentro); en b, $\theta = 90°$ (**E** es paralelo a la superficie); y en c, $\theta < 90°$ (**E** apunta hacia afuera).

Una definición provisional del flujo total del campo eléctrico en la superficie es, por analogía con la ecuación 5,

$$\Phi_E = \sum \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}, \qquad (6)$$

la cual nos indica que sumemos la cantidad escalar $\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}$ de todos los elementos de área en que se dividió la superficie. Para puntos como a en la figura 2 la contribución al flujo es negativa; en b es cero, y en c es positiva. Entonces, si **E** es en todas partes hacia afuera ($\theta < 90°$), cada $\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}$ es positivo, y Φ_E, en toda la superficie, es positivo. Si **E** es en todas partes hacia adentro ($\theta > 90°$), cada $\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}$ es negativo, y Φ_E para la superficie es negativo. Cuando **E** sea en todas partes paralelo a una superficie ($\theta = 90°$), cada $\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}$ es cero, y Φ_E para la superficie es cero.

La definición exacta del flujo eléctrico se encuentra en el límite diferencial de la ecuación 6. Al reemplazar la suma sobre la superficie por una integral sobre la superficie se obtiene

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}. \qquad (7)$$

Esta *integral de la superficie* indica que la superficie en cuestión debe dividirse en elementos infinitesimales de área $d\mathbf{A}$ y que la cantidad escalar $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ tiene que calcularse para cada elemento y sumarse sobre toda la superficie. El círculo en el símbolo de integral indica que la superficie de integración es una superficie *cerrada*. El flujo puede calcularse para cualquier superficie, ya fuese

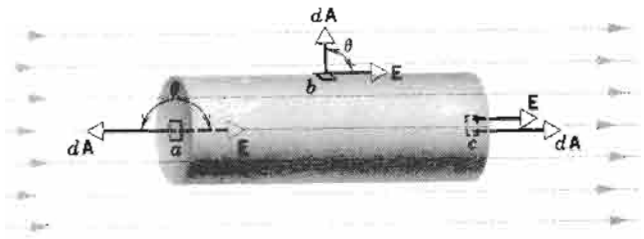


Figura 3 Problema muestra 2. Un cilindro cerrado está inmerso en un campo eléctrico uniforme **E** paralelo a su eje.

cerrada o abierta; en la ley de Gauss, que presentamos en la sección siguiente, nos ocupamos únicamente de superficies cerradas.

Problema muestra 2 La figura 3 muestra un cilindro cerrado hipotético de radio R inmerso en un campo eléctrico uniforme **E**, siendo el eje del cilindro paralelo al campo. ¿Cuál es el valor de Φ_E en esta superficie cerrada?

Solución El flujo Φ_E puede escribirse como la suma de los tres términos, una integral sobre (*a*) la tapa izquierda del cilindro, (*b*) la superficie cilíndrica, y (*c*) la tapa derecha. Entonces, según la ecuación 7,

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} + \int_b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} + \int_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}.$$

Para la tapa izquierda, el ángulo θ en todos los puntos es de 180°, **E** tiene un valor constante, y los vectores $d\mathbf{A}$ son todos paralelos. Entonces

$$\int_a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int E\,dA\cos 180° = -E\int dA = -EA,$$

donde A ($= \pi R^2$) es el área de la tapa izquierda. Similarmente, para la tapa derecha,

$$\int_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = +EA,$$

siendo aquí 0 el ángulo θ para todos los puntos. Por último, para la pared del cilindro,

$$\int_b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0,$$

porque $\theta = 90°$; así pues, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0$ para todos los puntos en la superficie del cilindro. Entonces, el flujo total es

$$\Phi_E = -EA + 0 + EA = 0.$$

Como lo veremos en la sección siguiente, este resultado es previsible, porque no existen fuentes ni sumideros de **E** (es decir, cargas) dentro de la superficie cerrada de la figura 3. Las líneas de **E** (constante) entran por la izquierda y salen por la derecha, como en la figura 1*e*.

29-3 LA LEY DE GAUSS*

Una vez que hemos definido el flujo del vector del campo eléctrico a través de una superficie *cerrada*, estamos listos para escribir la ley de Gauss. Supongamos que tenemos una colección de cargas positivas y negativas, que crean un campo eléctrico **E** en una cierta región del espacio. Construimos, en ese espacio, una superficie cerrada imaginaria, llamada *superficie gaussiana*, la cual puede o no encerrar algunas de las cargas. La ley de Gauss, que relaciona el flujo total Φ_E a través de esta superficie con la carga *neta* q encerrada por la superficie, puede escribirse como

$$\epsilon_0\Phi_E = q \tag{8}$$

o sea

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q. \tag{9}$$

Vemos que la ley de Gauss predice que Φ_E es cero en la superficie considerada en el problema muestra 2, porque la superficie no encierra ninguna carga.

Como se explicó en la sección 28-4, la magnitud del campo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo que cruzan a un elemento de área perpendicular al campo. La integral en la ecuación 9 cuenta esencialmente el número de líneas de campo que pasan a través de la superficie. Es totalmente razonable suponer que el número de líneas de campo que pasan a través de una superficie debe ser proporcional a la carga neta encerrada por la superficie, como lo requiere la ecuación 9.

La elección de la superficie gaussiana es arbitraria. Ésta suele escogerse de tal manera que la simetría de la distribución dé, aunque sea sólo en una parte de la superficie, un campo eléctrico constante, que pueda entonces factorizarse fuera de la integral de la ecuación 9. En tal situación, la ley de Gauss puede emplearse para determinar el campo eléctrico.

La figura 4 muestra las líneas de fuerza (y por consiguiente del campo eléctrico) de un dipolo. Se han trazado cuatro superficies gaussianas, y sus secciones transversales se muestran en la figura. En la superficie S_1, el campo eléctrico es, en todas partes, hacia afuera de la superficie y entonces, como fue el caso con el elemento de superficie c de la figura 2, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ es en todas partes positivo en S_1. Cuando evaluamos la integral de la ecuación 9 en toda la

* Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un matemático alemán que hizo sustanciales descubrimientos en la teoría de números, la geometría y la probabilidad. Realizó también contribuciones de importancia en el campo de la astronomía y en la medición del tamaño y forma de la Tierra. Véase "Gauss", por Ian Stewart, *Scientific American*, julio de 1977, pág. 122, una interesante historia de la vida de este notable matemático.

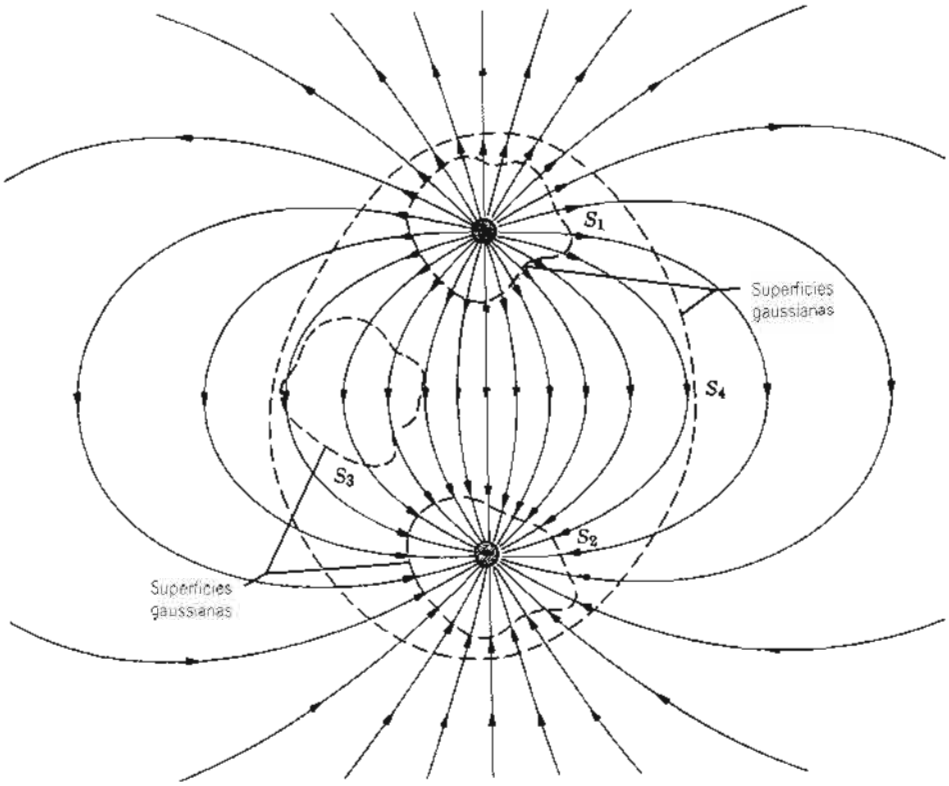


Figura 4 Dos cargas iguales y opuestas y las líneas de fuerza que representan al campo eléctrico en su vecindad. Se muestran las secciones transversales de cuatro superficies gaussianas cerradas.

superficie cerrada, obtenemos un resultado positivo. La ecuación 9 exige entonces que la superficie encierre una carga positiva neta, como en este caso. En la terminología de Faraday, más líneas de fuerza salen de la superficie que las que entran, de modo que debe encerrar a una carga positiva neta.

En la superficie S_2 de la figura 4, en cambio, el campo eléctrico está penetrando por todas partes en la superficie. Al igual que el elemento de superficie *a* en la figura 2, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ es negativo para cualquier elemento de área, y la integral de la ecuación 9 da un valor negativo, lo cual indica que la superficie encierra una carga negativa neta (como es el caso). Más líneas de fuerza entran a la superficie que las que salen.

La superficie S_3 no encierra ninguna carga, de modo que, de acuerdo con la ley de Gauss, el flujo total a través de la superficie debe ser cero. Esto es consistente con la figura, la cual muestra que tantas líneas de fuerza entran por arriba de la superficie como salen por debajo, lo cual no sucede por casualidad; podemos trazar una superficie en la figura 4 de cualquier forma irregular, y siempre que no encierre ninguna carga, el número de líneas de campo que entran en la superficie es igual al número de las que salen.

La superficie S_4 tampoco encierra ninguna carga *neta*, puesto que hemos supuesto que las magnitudes de las dos cargas son iguales. Una vez más, el flujo total a través de la superficie debe ser cero. Algunas de las líneas de campo están contenidas, por completo, dentro de la superficie y, por tanto, no contribuyen al flujo *a través de* la superficie. Sin embargo, puesto que cada línea de campo que sale de la carga positiva termina en la carga negativa, cada línea que parte de la carga positiva y atraviesa la superficie en dirección hacia afuera tiene una línea correspondiente que atraviesa la superficie en dirección hacia adentro cuando busca a la carga negativa. Por tanto, el flujo total es cero.

La ley de Gauss y la ley de Coulomb

La ley de Coulomb puede deducirse de la ley de Gauss y de ciertas consideraciones de simetría. Para ello, apliquemos la ley de Gauss a una carga puntual positiva q aislada como se muestra en la figura 5. Si bien la ley de Gauss se cumple para una superficie cualquiera, elegimos una superficie esférica de radio r con centro en la carga. La ventaja de esta superficie es que, por simetría, $\mathbf{E}$ debe ser perpendicular a la superficie, de modo que el ángulo θ entre $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{A}$ es cero en todas las partes de la superficie. Además, $\mathbf{E}$ es constante en todas las partes de la superficie. *Construir una superficie gaussiana que aproveche tal simetría es de importancia fundamental al aplicar la ley de Gauss.*

En la figura 5 tanto $\mathbf{E}$ como $d\mathbf{A}$ están dirigidas radialmente hacia afuera en cualquier punto de la superficie gaussiana, de modo que la cantidad $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ se convierte

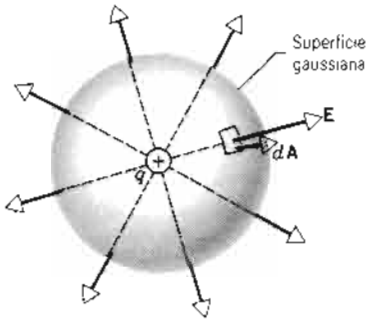


Figura 5 Superficie gaussiana esférica que rodea una carga puntual positiva q.

simplemente en $E\,dA$. La ley de Gauss (ecuación 9) se reduce entonces a

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 \oint E\,dA = q.$$

Puesto que E es constante en todos los puntos de la esfera, entonces E puede ponerse fuera del signo de la integral, lo cual da

$$\epsilon_0 E \oint dA = q.$$

La integral es simplemente el área total de la superficie de la esfera, $4\pi r^2$. Por lo tanto obtenemos

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

o sea

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (10)$$

La ecuación 10 da la magnitud del campo eléctrico **E** en cualquier punto a una distancia r de la carga puntual aislada q y es idéntica a la ecuación 4 del capítulo 28, la cual se obtuvo a partir de la ley de Coulomb. Así pues, al escoger una superficie gaussiana con la simetría apropiada, obtenemos la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. Estas dos leyes son totalmente equivalentes cuando —como sucede en estos capítulos— las aplicamos a problemas en los que intervienen cargas que sean estacionarias o bien que se muevan lentamente. La ley de Gauss es más general pues también abarca el caso de una carga que se mueve rápidamente. Para tales cargas, las líneas eléctricas de fuerza resultan comprimidas en un plano en ángulo recto con la dirección del movimiento, perdiendo entonces su simetría esférica.

La ley de Gauss es una de las ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética y aparece en la tabla 2 del capítulo 40 como una de las ecuaciones de Maxwell. La ley de Coulomb no está en dicha tabla pues, como lo acabamos de demostrar, puede deducirse de la ley de Gauss partiendo de una hipótesis simple acerca de la simetría de **E** debida a una carga puntual.

Es interesante observar que el hecho de escribir la constante de proporcionalidad en la ley de Coulomb como $1/4\pi\epsilon_0$ permite una forma más sencilla de la ley de Gauss. Si hubiéramos escrito la constante de la ley de Coulomb simplemente como k, la ley de Gauss tendría que haberse escrito como $(1/4\pi k)\Phi_E = q$. Preferimos dejar el factor 4π en la ley de Coulomb, de modo que no aparezca en la ley de Gauss o en otras relaciones frecuentemente empleadas las cuales se encontrarán más adelante.

29-4 UN CONDUCTOR CARGADO AISLADO

La ley de Gauss nos permite probar un teorema importante acerca de los conductores aislados:

> *Una carga en exceso en un conductor aislado se traslada por completo a la superficie exterior del conductor. Ninguna de las cargas en exceso se encuentra en el interior del cuerpo del conductor.**

Esto no parece absurdo, considerando que las cargas iguales se repelen entre sí. Podríamos imaginar que, por moverse a la superficie, las cargas de más están alejándose una de la otra tanto como pueden. Volvemos a la ley de Gauss para una prueba cuantitativa de esta especulación cualitativa.

La figura 6*a* muestra, en sección transversal, un conductor aislado (un trozo de cobre, quizás) que cuelga de un hilo y que es portador de una carga positiva neta q. La línea de trazos muestra la sección transversal de una superficie gaussiana que se encuentra justamente adentro de la superficie real del conductor.

Lo crucial de nuestra prueba es darnos cuenta de que, en condiciones de equilibrio, el campo eléctrico dentro del conductor debe ser cero. Si no fuera así, el campo ejercería una fuerza sobre los electrones de conducción que están presentes en cualquier conductor, y se generarían corrientes internas. Sin embargo, sabemos por experimentación que no existen tales corrientes en un conductor aislado. Los campos eléctricos aparecen dentro de un conductor durante el proceso de carga, pero estos campos no duran mucho. Las corrientes internas actúan rápidamente para redistribuir la carga agregada de tal modo que los campos eléctricos dentro del conductor son cero, las corrientes cesan, y las condiciones de equilibrio (electrostático) prevalecen.

* Esta afirmación no corresponde a un alambre portador de corriente, el cual no puede considerarse un conductor "aislado", pues está conectado a un agente externo, como una batería.

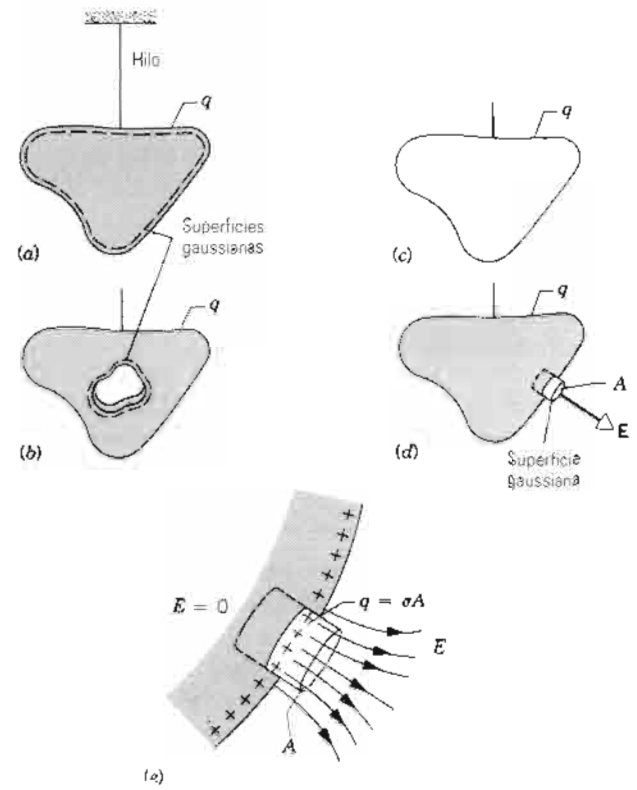


Figura 6 (*a*) Un conductor metálico aislado portador de una carga q pende de un hilo. Se ha dibujado una superficie gaussiana justo dentro de la superficie del conductor. (*b*) Una cavidad interna en el conductor está rodeada por una superficie gaussiana diferente. (*c*) La cavidad está aumentada para que incluya a todo el interior del conductor original, dejando únicamente las cargas que estaban sobre la superficie. (*d*) Una pequeña superficie gaussiana está construida en la superficie del conductor original. (*e*) Una vista aumentada de la superficie gaussiana, la cual encierra una carga q igual a σA. El campo eléctrico dentro del conductor es cero, y el campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es perpendicular a la superficie del conductor y de magnitud constante.

Si **E** es cero en todas partes dentro del conductor, debe ser cero en todos los puntos de la superficie gaussiana pues dicha superficie, si bien cercana a la superficie del conductor, está definitivamente dentro de él. Esto significa que el flujo a través de la superficie gaussiana debe ser cero. Por consiguiente, la ley de Gauss nos dice que la carga neta dentro de la superficie gaussiana debe también ser cero. Si la carga agregada no está dentro de la superficie gaussiana entonces sólo puede estar afuera de dicha superficie, lo que significa que *debe estar en la superficie exterior real del conductor.*

Un conductor aislado con una cavidad

La figura 6*b* muestra al mismo conductor colgante en el que se ha perforado una cavidad. Parece razonable suponer que al perforar el material elétricamente neutro no cambiaría ni la distribución de carga ni el patrón del campo eléctrico existente de la figura 6*a*. Una vez más, volvemos a la ley de Gauss para una demostración cuantitativa.

Tracemos una superficie gaussiana que rodee a la cavidad, cerca de sus paredes pero adentro del cuerpo conductor. Puesto que **E** = 0 dentro del conductor, no puede haber un flujo que atraviese esta nueva superficie gaussiana. Por lo tanto, según la ley de Gauss, esta superficie no puede encerrar ninguna carga neta. Llegamos, pues, a la conclusión de que no existe una carga en las paredes de la cavidad, sino que permanece en la superficie *exterior* del conductor, como se muestra en la figura 6*a*.

Supongamos que las cargas estuviesen situadas dentro de la cavidad. La ley de Gauss todavía exige que no exista una carga *neta* dentro de la superficie gaussiana, y así las cargas adicionales deben ser atraídas a la superficie de la cavidad (del mismo modo que las cargas fueron atraídas a un extremo de la barra de cobre de la figura 3 del capítulo 27) para hacer que la carga neta sea cero dentro de la superficie gaussiana.

Supongamos ahora que, mediante algún proceso, las cargas en exceso pudieran "congelarse" en su posición sobre la superficie del conductor de la figura 6*a*, quizás embebiéndolas en una capa plástica delgada, y supongamos que el conductor pudiera ser, entonces, retirado completamente, como se muestra en la figura 6*c*. Esto es equivalente a aumentar la cavidad de la figura 6*b* hasta que consuma a todo el conductor, dejando sólo las cargas. El patrón del campo eléctrico no cambiaría en absoluto; permanecería siendo cero dentro de la capa delgada de carga y permanecería inalterable en todos los puntos externos. El campo eléctrico se crea por las cargas y no por el conductor. El conductor simplemente proporciona un camino para que las cargas puedan cambiar sus posiciones.

El campo eléctrico externo

Si bien la carga en exceso en un conductor aislado se mueve por completo a su superficie, dicha carga —excepto en un conductor esférico aislado— no se distribuye por sí misma, en general, uniformemente sobre dicha superficie. Dicho de otro modo, la densidad de carga superficial σ (= dq/dA) varía de punto a punto sobre la superficie.

Podemos emplear la ley de Gauss para hallar una relación, en cualquier punto de la superficie, entre la densidad de carga superficial σ en ese punto y el campo electrico **E** afuera de la superficie en ese mismo punto. La figura 6*d* muestra una superficie gaussiana cilíndrica reducida, en la que A es el área (pequeña) de las dos tapas de los extremos. Las tapas son paralelas a la superficie, una de las cuales se encuentra totalmente dentro del conductor

y la otra completamente afuera. Las cortas paredes cilíndricas son perpendiculares a la superficie del conductor. En la figura 6*e* se aprecia una vista aumentada de la superficie gaussiana.

El campo eléctrico afuera de un conductor cargado aislado en equilibrio electrostático debe estar en ángulo recto con la superficie del conductor. Si esto no fuera así, existiría una componente de **E** en la superficie y esta componente generaría corrientes en la superficie redistribuyendo las cargas en la superficie, y violando, por tanto, nuestra hipótesis del equilibrio electrostático. Entonces **E** es perpendicular a la superficie del conductor, y el flujo que pasa por la tapa de afuera de la superficie gaussiana de la figura 6*e* es EA. El flujo a través de la tapa de dentro es cero, porque $\mathbf{E} = 0$ para todos los puntos interiores del conductor. El flujo a través de las paredes cilíndricas es también cero porque las líneas de **E** son paralelas a la superficie, de modo que no pueden atravesarla. La carga q encerrada por la superficie gaussiana es σA.

El flujo total puede, entonces, calcularse así:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\substack{\text{tapa de}\\ \text{afuera}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} + \int_{\substack{\text{tapa de}\\ \text{adentro}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} + \int_{\substack{\text{paredes}\\ \text{laterales}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$
$$= EA + 0 + 0 = EA.$$

Ahora puede calcularse el campo eléctrico usando la ley de Gauss

$$\epsilon_0 \Phi_E = q,$$

y al sustituir los valores para el flujo y la carga encerrada q ($= \sigma A$), obtenemos

$$\epsilon_0 EA = \sigma A$$

o sea

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \qquad (11)$$

Compare este resultado con la ecuación 28 del capítulo 28 (la cual deduciremos también en la sección siguiente usando la ley de Gauss) para el campo eléctrico cercano a una lámina de carga: $E = \sigma/2\epsilon_0$. El campo eléctrico cerca de un conductor es *el doble* del campo que esperaríamos si consideráramos que el conductor es una lámina de carga, aun para puntos muy próximos a la superficie, en donde la vecindad inmediata *se parece* a una lámina de carga. ¿Cómo podemos entender la diferencia entre los dos casos?

Puede construirse una lámina de carga esparciendo cargas sobre un lado de una capa de plástico delgada. Las cargas se adhieren en donde caen y no están en libertad de moverse. No podemos cargar un conductor de la misma manera. Una capa delgada de material conductor siempre tiene dos superficies. Si rociamos carga sobre una superficie, la carga viajará a través del conductor y se distribuirá por sí sola sobre todas las superficies. Entonces, si queremos cargar una capa conductora delgada con una densidad de carga superficial dada, debemos suministrar la carga suficiente para cubrir *ambas* superficies. En efecto, se requiere el doble de carga para dar a una lámina conductora una determinada densidad de carga superficial de la que se requiere para dar a una lámina aislante la misma densidad de carga superficial.

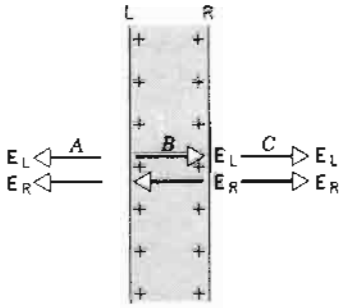


Figura 7 La carga eléctrica cerca de una lámina conductora delgada. Nótese que ambas superficies tienen cargas sobre ellas. Los campos $\mathbf{E}_L$ y $\mathbf{E}_R$ debidos, respectivamente, a las cargas en las superficies izquierda y derecha se refuerzan en los puntos A y C, y se cancelan en el punto B en el interior de la lámina.

Podemos entender el campo eléctrico en el caso de la lámina conductora delgada si hacemos referencia a la figura 7. Si consideramos a cada cara del conductor como si fuera una lámina de carga generando un campo eléctrico de $\sigma/2\epsilon_0$ (de acuerdo con la Ec. 28 del capítulo 28), entonces en el punto A los campos eléctricos $\mathbf{E}_L$ de la cara izquierda y $\mathbf{E}_R$ de la cara derecha se suman para generar un campo eléctrico total cerca del conductor de $\sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$. En el punto C, el efecto es el mismo. Sin embargo, en el punto B los campos $\mathbf{E}_L$ y $\mathbf{E}_R$ se oponen directamente y la suma será cero, como se esperaba para el interior de un conductor.

Problema muestra 3 El campo eléctrico justo sobre la superficie del cilindro cargado de una máquina fotocopiadora tiene una magnitud E de 2.3×10^5 N/C. ¿Cuál es la densidad superficial de carga sobre el cilindro si éste es un conductor?

Solución De la ecuación 11 tenemos

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.3 \times 10^5\ \text{N/C})$$
$$= 2.0 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2 = 2.0\ \mu\text{C/m}^2.$$

Problema muestra 4 La magnitud del campo eléctrico promedio normalmente presente en la atmósfera de la Tierra justo arriba de su superficie es de unos 150 N/C, dirigido hacia abajo. ¿Cuál es la carga superficial neta total que contiene la Tierra? Suponga que la Tierra sea un conductor.

Solución Las líneas de fuerza terminan en las cargas negativas de modo que, si el campo eléctrico de la Tierra apunta hacia abajo, su densidad superficial de carga promedio σ debe ser negativa. Según la ecuación 11 hallamos

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(-150\ \mathrm{N/C})$$
$$= -1.33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}.$$

La carga total q de la Tierra es la densidad superficial de carga multiplicada por $4\pi R^2$, el área superficial de la Tierra (considerada como esférica). Entonces

$$q = \sigma 4\pi R^2$$
$$= (-1.33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2})(4\pi)(6.37 \times 10^{6}\ \mathrm{m})^2$$
$$= -6.8 \times 10^{5}\ \mathrm{C} = -680\ \mathrm{kC}.$$

29-5 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

La ley de Gauss puede emplearse para calcular **E** si la simetría de la distribución de la carga es alta. Ya se explicó un ejemplo de este cálculo, el campo de una carga puntual, en relación con la ecuación 10. Aquí presentamos otros ejemplos.

Línea infinita de carga

La figura 8 muestra una sección de una línea infinita de carga de densidad lineal de carga (carga por unidad de longitud) constante $\lambda = dq/ds$. Deseamos calcular el campo eléctrico a una distancia r de la línea.

En la sección 28-5 estudiamos los argumentos de simetría que nos llevaron a la conclusión de que el campo eléctrico en este caso puede tener sólo una componente radial. Por lo tanto, el problema tiene simetría cilíndrica y así, por tratarse de una superficie gaussiana, elegimos un cilindro circular de radio r y longitud h, cerrado en cada extremo por tapas planas perpendiculares al eje. E es constante sobre la superficie cilíndrica y perpendicular a la superficie. El flujo de **E** a través de esta superficie es $E(2\pi rh)$, donde $2\pi rh$ es el área de la superficie. No hay un flujo a través de las tapas circulares porque **E** es aquí paralelo a la superficie en cada punto, de modo que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$ en todas partes sobre las tapas.

La carga q encerrada por la superficie gaussiana de la figura 8 es λh. La ley de Gauss (Ec. 9) da entonces

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$
$$\epsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h,$$

o sea

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \qquad (12)$$

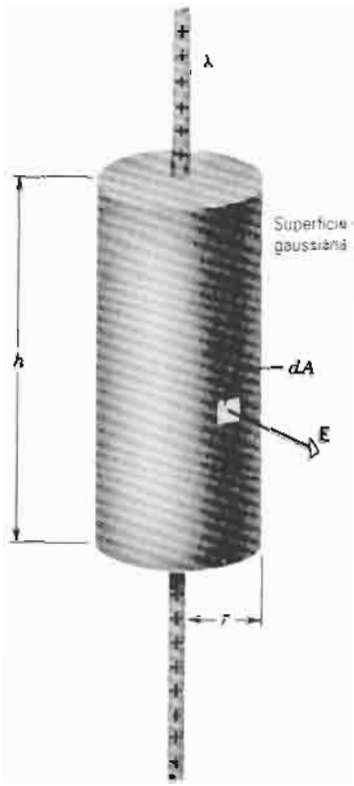


Figura 8 Una superficie gaussiana en forma de cilindro cerrado rodea a una porción de una línea infinita de carga.

Nótese lo mucho más simple que resulta la solución usando la ley de Gauss en lugar de los métodos de integración, como en el capítulo 28. Adviértase también que la solución usando la ley de Gauss es posible sólo si elegimos la superficie gaussiana para lograr plena ventaja de la simetría cilíndrica del campo eléctrico creado por una línea de carga larga. Estamos en libertad de elegir cualquier superficie cerrada, como un cubo o una esfera (véase el problema 48), para una superficie gaussiana. Aun cuando la ley de Gauss se cumple para todas esas superficies, éstas no son totalmente útiles para el problema que estamos considerando; en este caso sólo es apropiada la superficie cilíndrica de la figura 8.

La ley de Gauss tiene la propiedad de que proporciona una técnica para el cálculo únicamente en problemas que tengan un cierto grado de simetría, pero en estos problemas las soluciones son notoriamente simples.

Lámina infinita cargada

La figura 9 muestra una porción de una lámina infinita, delgada, no conductora, cargada, de una densidad superficial de carga σ (carga por unidad de área). Calcularemos el campo eléctrico en puntos cercanos a la lámina.

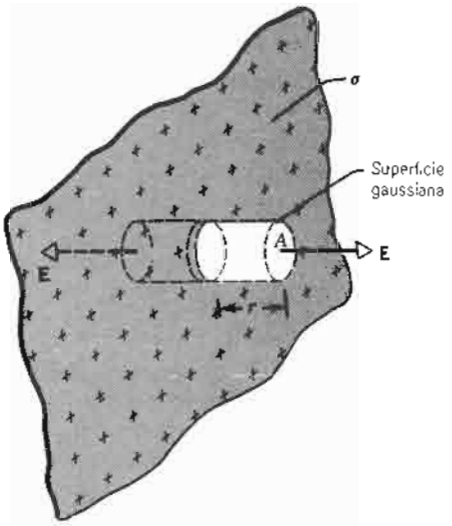


Figura 9 Una superficie gaussiana en forma de cilindro pequeño cerrado interseca a una pequeña porción de una lámina cargada positivamente. El campo es perpendicular a la lámina, de modo que sólo contribuyen al flujo las tapas de la superficie gaussiana.

Una superficie gaussiana conveniente es un cilindro cerrado de área de sección transversal A, dispuesta de tal modo que penetre el plano como se muestra. De la simetría, podemos concluir que $\mathbf{E}$ apunta en ángulo recto en las tapas y lejos del plano. Puesto que $\mathbf{E}$ no penetra en la superficie cilíndrica, no existe contribución al flujo de la pared curvada del cilindro. Suponemos que las tapas equidistan de la lámina y, por simetría, el campo tiene la misma magnitud en las tapas. El flujo que atraviesa a cada tapa es EA y es positivo para ambas. La ley de Gauss da

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q$$
$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

donde σA es la carga encerrada. Al despejar E, obtenemos

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \qquad (13)$$

Nótese que E es el mismo para todos los puntos en cada lado de la lámina (y así no necesitamos realmente suponer que las tapas eran equidistantes de la lámina).

Si bien una lámina infinita cargada no puede existir físicamente, este resultado sigue siendo útil, pues la ecuación 13 da resultados aproximadamente correctos para láminas de carga reales (no infinitas) si consideramos sólo los puntos que están lejos de los bordes y cuya distancia de la lámina es pequeña comparada con las dimensiones de la lámina.

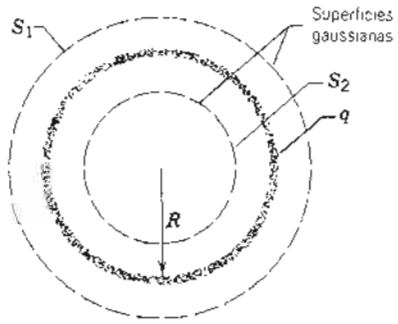


Figura 10 Una sección transversal de un cascarón delgado uniformemente cargado de carga total q. El cascarón está rodeado por dos superficies gaussianas esféricas cerradas, una dentro del cascarón y otra afuera del mismo.

Un cascarón esférico cargado

La figura 10 muestra una sección transversal de un cascarón uniformemente cargado y esférico que tiene una densidad de carga superficial σ constante y una carga total $q(= 4\pi R^2\sigma)$, como la que podríamos producir al esparcir carga uniformemente sobre la superficie de un globo esférico de radio R. Usamos la ley de Gauss para demostrar dos propiedades útiles de esta distribución, lo cual podemos resumir en los dos *teoremas del cascarón* que siguen:

1. *Un cascarón esférico uniforme cargado se comporta, en los puntos externos, como si toda la carga estuviese concentrada en su centro.*

2. *Un cascarón esférico uniforme cargado no ejerce ninguna fuerza electrostática sobre una partícula cargada situada dentro del cascarón.*

Estos dos teoremas del cascarón son los análogos electrostáticos de los dos teoremas de la corteza gravitatoria presentados en el capítulo 16. Veremos ahora que nuestra demostración mediante la ley de Gauss es mucho más sencilla que la demostración detallada en la sección 16-5, donde no se tomó plena ventaja de la simetría esférica.

El cascarón esférico de la figura 10 está rodeado por dos superficies gaussianas esféricas y concéntricas, S_1 y S_2. Partiendo de un argumento de simetría, concluimos que el campo puede tener únicamente una componente radial. (Supongamos que hubiera una componente que no fuese radial y que, sin que nos percatemos de ello, alguien gira el cascarón en un ángulo determinado alrededor de un diámetro. Al ver de nuevo el cascarón, podríamos usar una sonda de detección del campo eléctrico, digamos, una carga de prueba, para comprobar que el campo eléctrico ha cambiado de dirección, aun si la distribución de la carga fuese la misma que antes de la rotación. Claramente,

esto es una contradicción. ¿Se cumpliría este argumento de simetría si la carga *no* estuviese distribuida uniformemente sobre la superficie?) Aplicando la ley de Gauss a la superficie S_1, en la cual $r > R$, da

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q,$$

o sea

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(cascarón esférico, } r > R\text{)}, \quad (14)$$

tal como sucedió en relación con la figura 5. Así pues, *el cascarón cargado uniformemente se comporta como una carga puntual en todos los puntos afuera del cascarón*. Esto demuestra el primer teorema del cascarón.

Si se aplica la ley de Gauss a la superficie S_2, para la cual $r < R$, nos conduce directamente a

$$E = 0 \qquad \text{(cascarón esférico, } r < R\text{)}, \quad (15)$$

porque esta superficie gaussiana no encierra ninguna carga y porque E (según otro argumento de simetría) tiene el mismo valor en todas las partes de la superficie. Por lo tanto *el campo eléctrico es cero dentro de un cascarón uniforme cargado*; una carga de prueba situada en cualquier parte en el interior no sentiría ninguna fuerza eléctrica. Esto demuestra el segundo teorema del cascarón.

Estos dos teoremas se aplican sólo en el caso de un cascarón cargado *uniformemente*. Si las cargas estuviesen esparcidas sobre la superficie de una manera no uniforme, de modo que la densidad de carga *no* fuese constante sobre la superficie, estos teoremas no se aplicarían. La simetría se perdería y, como resultado, E no podría sacarse fuera de la integral en la ley de Gauss. El flujo permanecería igual a q/ϵ_0 en los puntos exteriores y a cero en los puntos interiores, pero no podríamos establecer una relación directa con E, como es posible hacerlo en el caso uniforme. Al contrario de lo que ocurre con el cascarón cargado uniformemente, el campo *no* sería cero en el interior.

Distribución de la carga esféricamente simétrica

La figura 11 muestra una sección transversal de una distribución esférica de carga de radio R. Aquí, la carga está distribuida sobre todo el volumen esférico. No suponemos que la densidad volumétrica de carga ρ (carga por unidad de volumen) sea una constante; sin embargo, hacemos la restricción de que ρ, en cualquier punto, dependa *únicamente* de la distancia del punto desde el centro, condición denominada *simetría esférica*. Es decir, ρ puede ser una función de r, pero no de cualquier coordenada angular. Hallemos una expresión para E en los puntos fuera (Fig. 11*a*) y dentro (Fig. 11*b*) de la distribución de carga. Nótese que el objeto de la figura 11 no puede ser un conductor o, como lo hemos visto, la carga

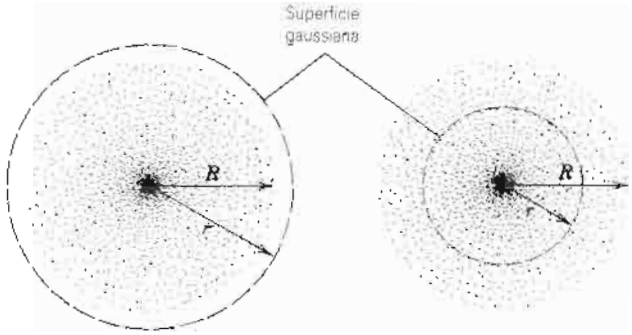


Figura 11 Sección transversal de una distribución de carga simétricamente esférica, en la que la densidad volumétrica de carga puede variar con r en este material supuestamente no conductor. Se han dibujado las superficies gaussianas esféricas cerradas (*a*) afuera de la distribución y (*b*) dentro de la distribución.

en exceso residiría en su superficie (y podríamos aplicar los teoremas del cascarón para determinar E).

Cualquier distribución de carga esféricamente simétrica, como la de la figura 11, puede verse como un grupo de cascarones delgados concéntricos. La densidad volumétrica de carga ρ puede variar de un cascarón al siguiente, pero hacemos a los cascarones tan delgados que podemos suponer que ρ es constante en cualquier cascarón en particular. Podemos usar los resultados de la subsección previa para calcular la contribución de cada cascarón al campo eléctrico total. El campo eléctrico de cada cascarón delgado tiene sólo una componente radial, y así el campo eléctrico total de la esfera puede, de igual manera, tener únicamente una componente radial. (Esta conclusión se deduce también de un argumento de simetría pero no se mantendría si la distribución de la carga careciese de simetría esférica, esto es, si ρ dependiera de la dirección.)

Calculemos el campo eléctrico en puntos que estén a una distancia radial r mayor que el radio R de la esfera, como se muestra en la figura 11*a*. Cada cascarón concéntrico, con una carga dq contribuye con una componente radial dE al campo eléctrico, de acuerdo con la ecuación 14. El campo total, es el total de todas esas componentes y, puesto que todas las componentes del campo son radiales, debemos calcular sólo la suma algebraica más bien que una suma vectorial. La suma sobre todos los cascarones da, entonces,

$$E = \int dE = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

o, puesto que r es constante en la integral para q,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}, \qquad (16)$$

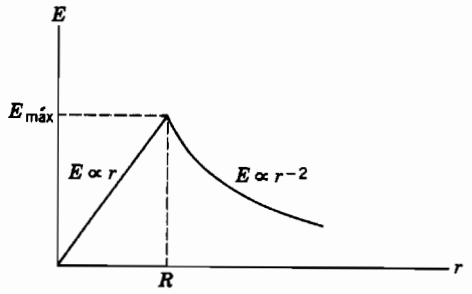


Figura 12 La variación con el radio del campo eléctrico debido a una distribución de carga esférica y uniforme de radio R. La variación para $r > R$ se aplica a *cualquier* distribución de carga esféricamente simétrica, mientras que para $r < R$ se aplica *únicamente* a una distribución uniforme.

donde q es la carga total de la esfera. Entonces, para los puntos afuera de una distribución de carga esféricamente simétrica, el campo eléctrico tiene el valor que tendría si la carga estuviese concentrada en su centro. Este resultado es similar al caso gravitatorio demostrado en la sección 16-5. Ambos resultados se deducen de la naturaleza del inverso de los cuadrados de las correspondientes leyes de la fuerza.

Consideraremos ahora el campo eléctrico para los puntos dentro de la distribución de carga. La figura 11*b* muestra una superficie gaussiana esférica de radio $r < R$. La ley de Gauss da

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 E(4\pi r^2) = q'$$

o sea

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{r^2}, \qquad (17)$$

en donde q' es aquella parte de q contenida *dentro* de la esfera de radio r. De acuerdo con el segundo teorema del cascarón, la parte de q que está afuera de esta esfera no contribuye en forma alguna a $\mathbf{E}$ en el radio r.

Para continuar este cálculo, debemos conocer la carga q' que está dentro del radio r; esto es, debemos conocer $\rho(r)$. Consideremos el caso especial en que la esfera esté cargada uniformemente, de modo que la densidad de carga ρ tiene el mismo valor para todos los puntos dentro de una esfera de radio R y es cero para todos los puntos afuera de esta esfera. Para los puntos dentro de tal esfera uniforme de carga, la fracción de la carga dentro de r es igual a la fracción del volumen dentro de r, y así

$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

o sea

$$q' = q\left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

donde $\frac{4}{3}\pi R^3$ es el volumen de la distribución de carga esférica. La expresión para E resulta entonces

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qr}{R^3} \qquad \text{(esfera uniforme, } r < R\text{)}. \quad (18)$$

Esta ecuación da cero, como debería, para $r = 0$. La ecuación 18 se aplica *únicamente* cuando la densidad de carga es uniforme, independiente de r. Nótese que las ecuaciones 16 y 18 dan el mismo resultado (así debe ser) para los puntos sobre la superficie de la distribución de carga (es decir, para $r = R$). La figura 12 muestra el campo eléctrico para los puntos con $r < R$ (dados por la Ec. 18) y para los puntos con $r > R$ (dados por la Ec. 16).

Problema muestra 5 Una barra de plástico, cuya longitud L es de 220 cm y cuyo radio R es de 3.6 mm, contiene una carga negativa q de magnitud 3.8×10^{-7} C, distribuida uniformemente sobre su superficie. ¿Cuál es el campo eléctrico cerca del punto medio de la barra, en un punto sobre su superficie?

Solución Si bien la barra no es infinitamente larga, para un punto sobre su superficie y cerca de su punto medio es en efecto muy larga, de modo que se justifica emplear la ecuación 12. La densidad lineal de carga para la barra es

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{-3.8 \times 10^{-7}\ \text{C}}{2.2\ \text{m}} = -1.73 \times 10^{-7}\ \text{C/m}.$$

De la ecuación 12 tenemos entonces

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$
$$= \frac{-1.73 \times 10^{-7}\ \text{C/m}}{(2\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.0036\ \text{m})}$$
$$= -8.6 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

El signo menos nos dice que, puesto que la barra está cargada negativamente, la dirección del campo eléctrico es radialmente hacia dentro, hacia el eje de la barra. El chisporroteo ocurre en aire seco a la presión atmosférica con una intensidad del campo eléctrico de unos 3×10^6 N/C. La intensidad del campo que hemos calculado es menor que este valor por un factor de aproximadamente 3.4, de modo que no debe haber chisporroteo.

Problema muestra 6 La figura 13*a* muestra porciones de dos láminas grandes de carga con densidades superficiales y uniformes de carga de $\sigma_+ = +6.8\ \mu\text{C/m}^2$ y $\sigma_- = -4.3\ \mu\text{C/m}^2$. Encuentre el campo eléctrico $\mathbf{E}$ (*a*) a la izquierda de las láminas, (*b*) entre las láminas, y (*c*) a la derecha de las láminas.

Solución Nuestra estrategia es tratar con cada lámina por separado y luego sumar los campos eléctricos resultantes usando el principio de superposición. Para la lámina positiva tenemos, según la ecuación 13,

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} = \frac{6.8 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 3.84 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

De igual manera, la magnitud del campo para la lámina negativa es de

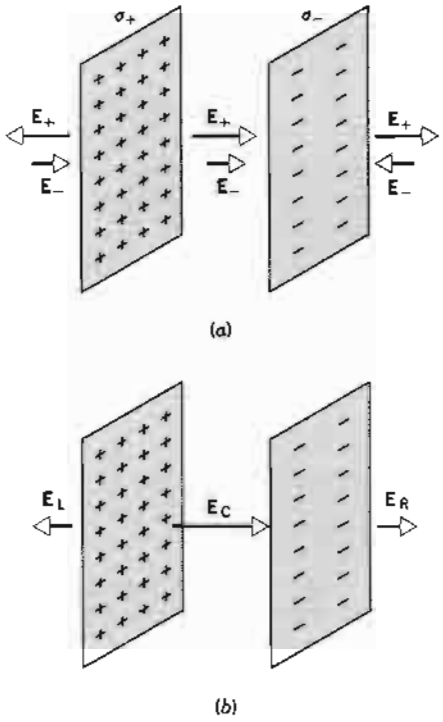


Figura 13 Problema muestra 6. (*a*) Dos láminas grandes paralelas cargadas contienen distribuciones de carga diferentes σ_+ y σ_-. Los campos $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ se crearían en cada lámina si la otra no estuviese presente. (*b*) Los campos netos en las regiones cercanas a la izquierda (L), al centro (C), y a la derecha (R) de las láminas, calculados de la suma vectorial de $\mathbf{E}_+$ y de $\mathbf{E}_-$ en cada región.

$$E_- = \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0} = \frac{4.3 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 2.43 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

La figura 13*a* muestra los dos conjuntos de los campos calculados anteriormente, a la izquierda de las láminas, entre ellas, y a la derecha de las láminas.

Los campos resultantes en estas tres regiones se deducen del principio de superposición. A la izquierda de las láminas, tenemos (considerando que las componentes de $\mathbf{E}$ de la Fig. 13 son positivas si $\mathbf{E}$ apunta a la derecha y negativas si $\mathbf{E}$ apunta a la izquierda)

$$E_L = -E_+ + E_- = -3.84 \times 10^5\ \text{N/C} + 2.43 \times 10^5\ \text{N/C}$$
$$= -1.4 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

El campo eléctrico resultante (negativo) en esta región apunta a la izquierda, como lo muestra la figura 13*b*. A la derecha de las láminas, el campo eléctrico tiene esta misma magnitud, pero apunta a la derecha en la figura 13*b*.

Entre las láminas, los dos campos se suman para dar

$$E_C = E_+ + E_- = 3.84 \times 10^5\ \text{N/C} + 2.43 \times 10^5\ \text{N/C}$$
$$= 6.3 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

Fuera de las láminas, el campo eléctrico se comporta como si se tratara de una sola lámina cuya densidad superficial de carga es $\sigma_+ + \sigma_-$, o sea $+2.5 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2$. El patrón del campo de la figura 13*b* lo corrobora. En los problemas 22 y 23 el lector tendrá la oportunidad de investigar el caso en que las dos densidades superficiales de carga son iguales en magnitud pero opuestas en signo y también el caso en que son iguales tanto en magnitud como en signo.

29-6 PRUEBAS EXPERIMENTALES DE LA LEY DE GAUSS Y DE LA LEY DE COULOMB

En la sección 29-4 dedujimos que la carga en exceso en un conductor debe encontrarse sólo en su superficie exterior. No puede estar ninguna carga dentro del volumen del conductor o en la superficie de una cavidad interior vacía. Este resultado se dedujo directamente de la ley de Gauss. Por lo tanto, probar si la carga se encuentra de hecho por completo en la superficie exterior, es una manera de probar la ley de Gauss. Si sucede que la carga está dentro del conductor o en una superficie interior (como en el caso de la cavidad de la Fig. 6*b*), entonces la ley de Gauss no se aplica. En la sección 29-3 demostramos también que la ley de Coulomb se deduce directamente de la ley de Gauss. Así pues, si la ley de Gauss falla, entonces la ley de Coulomb falla. En particular, la ley de la fuerza pudiera no ser exactamente una ley del inverso de los cuadrados. El exponente de r puede diferir de 2 en una cantidad pequeña δ, de modo que

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^{2+\delta}}, \qquad (19)$$

en donde δ es exactamente cero si se cumplen las leyes de Coulomb y de Gauss.

La medición directa de la fuerza entre dos cargas, descrita en el capítulo 27, no tiene la precisión necesaria para probar si δ es cero más allá de un pequeño porcentaje. La observación de la carga dentro de un conductor proporciona el medio para una prueba que, como veremos, es mucho más precisa.

En principio, el experimento sigue un procedimiento ilustrado en la figura 14. Una bola de metal cargada cuelga de un hilo aislante y se introduce dentro de una lata metálica la cual descansa sobre una base aislante. Cuando la bola toca con el interior de la lata, los dos objetos forman *un solo conductor*, y, si la ley de Gauss es válida, toda la carga de la bola debe desplazarse hacia el exterior del conductor combinado, como se muestra en la figura 14*c*. Cuando se retira la bola, ya no debería contener ninguna carga. Tocar a otros objetos de metal aislados en el interior de la lata no debería resultar en la transferencia de ninguna carga a los objetos. Sólo en el exterior de la lata será posible transferir carga.

Al parecer, fue Benjamin Franklin el primero en percatarse de que no puede haber una carga dentro de un recipiente

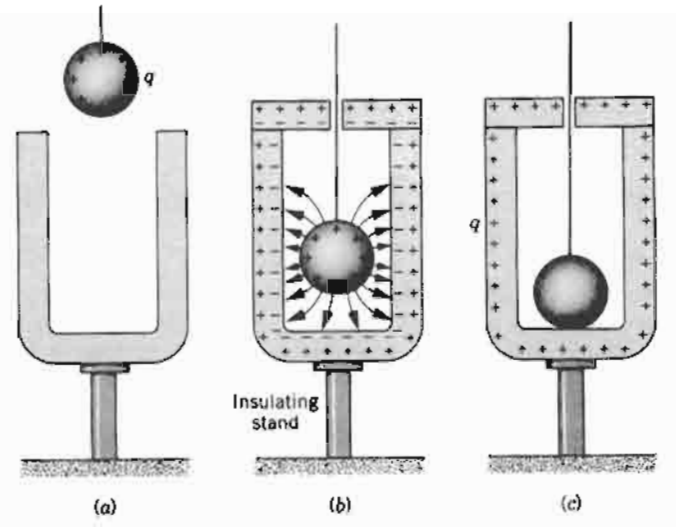


Figura 14 Un arreglo concebido por Benjamin Franklin para demostrar que la carga colocada en un conductor se desplaza hacia su superficie. (*a*) Una bola de metal cargada se introduce dentro de una lata metálica descargada. (*b*) La bola está adentro de la lata y se le agrega una cubierta. Se muestran las líneas de fuerza entre la bola y la lata descargada. La bola atrae cargas de signo opuesto a las del interior de la lata. (*c*) Cuando la bola toca al bote, se forma un solo conductor, y la carga neta fluye hacia la superficie exterior. La bola puede, entonces, retirarse de la lata demostrando que está completamente descargada, y comprobando así que la carga debió transferirse totalmente a la lata.

metálico aislado. En 1755 le escribió lo siguiente a un amigo:

> Electrifiqué una lata plateada de una pinta, sobre un soporte eléctrico, y luego introduje dentro de ella una bola de corcho, de aproximadamente una pulgada de diámetro, que colgara de un hilo de seda, hasta que el corcho tocó el fondo de la lata. El corcho no fue atraído hacia el interior de la lata como hubiera sucedido de estar en el exterior, y si bien tocó el fondo, cuando la saqué descubrí que no se había electrificado al tocarlo, como habría sucedido de estar afuera. El hecho es singular. Tú pides una razón; yo no la conozco...

Unos 10 años más tarde, Franklin sometió este "hecho singular" a la atención de su amigo Joseph Priestley (1733-1804). En 1767 (unos 20 años después de los experimentos de Coulomb) Priestley comprobó la observación de Franklin y, con una notable perspicacia, comprendió que la ley del inverso de los cuadrados de la fuerza se deducía de ello. Así, el enfoque indirecto no es sólo más exacto que el enfoque directo de la sección 27-4 sino que se llevó a cabo mucho antes.

Priestley, razonando por analogía con la gravitación, dijo que el hecho de que no actuase ninguna fuerza sobre la bola de corcho de Franklin cuando estaba rodeada por una lata metálica profunda es similar al hecho (véase la Sec. 16-5) de que ninguna fuerza gravitatoria actúa sobre una partícula dentro de un cascarón esférico de materia; si la gravitación obedece a una ley del inverso de los cuadrados, quizá la fuerza eléctrica lo hace también. Al considerar el experimento de Franklin, Priestley razonó:

> ¿No debemos, acaso, inferir de esto que la atracción de la electricidad está sujeta a las mismas leyes que las de la gravitación y actúa, por tanto, de acuerdo con los cuadrados de las distancias? ¿No es, también, fácilmente demostrable que, si la Tierra fuera una esfera hueca, su cuerpo en su interior no sería atraído hacia uno de los lados más que hacia el otro?

Obsérvese cómo el conocimiento sobre un tema (la gravitación) ayuda a comprender otro (la electrostática).

Michael Faraday llevó a cabo también experimentos diseñados para demostrar que la carga en exceso reside en la superficie exterior de un conductor. En particular, construyó una gran caja cubierta de metal, la cual montó sobre bases aislantes y la cargó con un poderoso generador electrostático. En las palabras de Faraday:

> Me introduje dentro del cubo y viví en él, y usando velas encendidas, electrómetros, y todas las demás pruebas de estados eléctricos, no pude hallar la menor influencia sobre ellos... aun cuando, durante ese tiempo, el exterior del cubo estuvo potentemente cargado, y de todas las partes de su superficie externa saltaban grandes chispas y descargas.

La ley de Coulomb es de importancia crucial en física, y si δ en la ecuación 19 no es cero, ello tendrá serias consecuencias para la comprensión del electromagnetismo y de la física cuántica. La mejor manera de medir δ es averiguar *experimentalmente* si una carga en exceso, colocada sobre un conductor aislado, se mueve o no *por completo* a su superficie exterior.

Los experimentos modernos, realizados con notable precisión, han demostrado que si δ en la ecuación 19 no es cero es ciertamente muy, pero muy pequeño. La tabla 1 resume los resultados de los experimentos más importantes.

La figura 15 es un dibujo del aparato empleado por Plimpton y Lawton para medir δ. Consiste, en principio, en dos esferas huecas metálicas concéntricas, A y B, teniendo la primera 1.5 m de diámetro. La esfera hueca interior contiene un electrómetro sensible E conectado de modo que indique si se mueve alguna carga entre las esferas huecas A y B. Si las esferas están conectadas eléctricamente, cualquier carga situada en el conjunto de

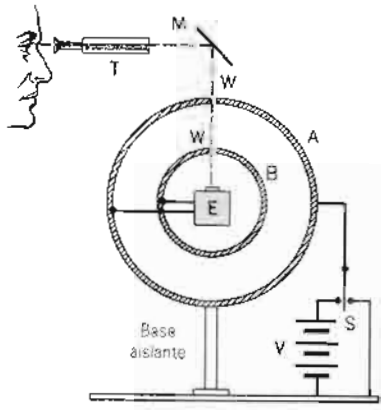


Figura 15 Una versión moderna y más precisa del aparato de la figura 14, diseñado también para verificar que la carga reside sólo en la superficie exterior de un conductor. La carga se coloca en la esfera A, activa el interruptor S hacia la izquierda, y el electrómetro sensible E se usa para detectar cualquier carga que pudiera moverse hacia la esfera interior B. Cabe esperar que toda la carga permanecerá en la superficie exterior (esfera A).

esferas huecas residiría totalmente en la esfera A si la ley de Gauss, y por tanto la ley de Coulomb, son correctas como se ha afirmado.

Al mover el interruptor S hacia la izquierda, se situaría una carga sustancial en el conjunto de esferas. Si alguna de estas cargas se moviera a la esfera B, tendría que pasar por el electrómetro, causando una desviación (deflexión), lo cual podría observarse ópticamente usando el telescopio T, el espejo M y las ventanas W.

Sin embargo, cuando el interruptor S se movió alternativamente de izquierda a derecha, conectando al conjunto de esferas huecas a la batería o a tierra, no se observó ningún efecto. Conociendo la sensibilidad de su electrómetro, Plimpton y Lawton calcularon que, en la ecuación 19, δ difiere de cero por no más de 2×10^{-9}, realmente un valor muy pequeño. Empero, de su experimento, los límites de δ se han mejorado en más de siete órdenes de magnitud por otros experimentadores usando versiones más detalladas y precisas de este aparato básico.

29-7 EL MODELO NUCLEAR DEL ÁTOMO *(Opcional)*

Un átomo consta de electrones cargados negativamente ligados a un centro de carga positiva. El centro positivo debe tener la mayor parte de la masa del átomo, porque la masa total de los electrones de un átomo constituye típicamente sólo cerca de 1/4000 de la masa del átomo. A principios del siglo XX hubo mucha especulación acerca de la distribución de esta carga positiva.

De acuerdo con una teoría que fue popular en esos tiempos, la carga positiva se distribuye más o menos uniformemente en todo el volumen esférico del átomo. Este patrón de estructura del átomo se llama *modelo de Thomson* en honor de J. J. Thomson, que fue quien lo propuso. (Thomson fue el primero en medir la razón carga/masa del electrón y, por lo tanto, es frecuente reconocerlo como el descubridor del electrón.) También se le llama el modelo del "budín inglés", porque los electrones están incrustados en la esfera difusa de carga positiva tal y como lo están las pasas en un budín inglés.

Una manera de probar la validez de este modelo es determinar el campo eléctrico del átomo sondeándolo mediante un haz de proyectiles cargados positivamente que pasan junto a él. El campo eléctrico del átomo desvía o *dispersa* las partículas del haz. En la explicación que sigue, consideramos sólo el efecto que ejerce la esfera de carga positiva sobre el proyectil. Suponemos que el proyectil tiene una masa mucho menor que el átomo y mucho *mayor* que la de un electrón. De esta manera los electrones tienen un efecto insignificante sobre la dispersión del proyectil, y puede suponerse que el átomo permanece en reposo cuando el proyectil se desvía.

El campo eléctrico debido a una esfera uniforme de carga positiva fue dado por la ecuación 16 para los puntos afuera de la esfera de carga y por la ecuación 18 para los puntos adentro de ella. Calculemos el campo eléctrico en la superficie, el cual, como lo muestra la figura 12, es el *máximo* campo posible que esta distribución puede producir. Consideremos a un átomo pesado como el oro, el cual tiene una carga positiva Q de $79e$ y un radio R de unos 1.0×10^{-10} m. Si no tomamos en cuenta a los

TABLA 1 COMPROBACIÓN DE LA LEY DEL INVERSO DE LOS CUADRADOS DE COULOMB

Experimentadores	*Fecha*	*δ(Ec. 19)*
Franklin	1755	
Priestley	1767	...de acuerdo con los cuadrados...
Robison	1769	<0.06
Cavendish	1773	<0.02
Coulomb	1785	un pequeño porcentaje a lo sumo
Maxwell	1873	$<5 \times 10^{-5}$
Plimpton y Lawton	1936	$<1.3 \times 10^{-9}$
Bartlett, Goldhagen, Phillips	1970	$<1.3 \times 10^{-13}$
Williams, Faller, Hill	1971	$<1.0 \times 10^{-16}$

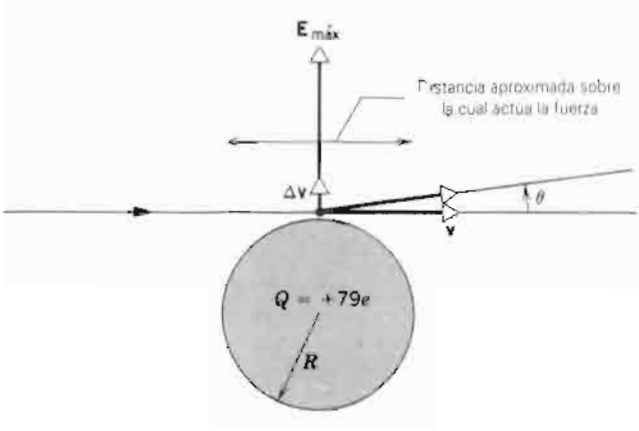


Figura 16 La dispersión de un proyectil cargado positivamente que pasa cerca de la superficie de un átomo, representado por una esfera uniforme de carga positiva. El campo eléctrico sobre el proyectil causa una desviación transversal en un ángulo θ.

electrones, el campo eléctrico en $r = R$ debido a las cargas positivas es de

$$E_{máx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{(9\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1.6\times10^{-19}\ \text{C})}{(1.0\times10^{-10}\ \text{m})^2}$$
$$= 1.1\times10^{13}\ \text{N/C}.$$

Para los proyectiles de nuestro experimento, usemos un haz de partículas alfa, que tiene una carga positiva q de $2e$ y una masa m de 6.64×10^{-27} kg. Las partículas alfa son núcleos de átomos de helio, los cuales se emiten en ciertos procesos de desintegración radiactiva. Una energía cinética típica de tal partícula puede ser de alrededor de $K = 6$ MeV, o sea 9.6×10^{-13} J.

Con esta energía la partícula tiene una velocidad de

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(9.6\times10^{-13}\ \text{J})}{6.64\times10^{-27}\ \text{kg}}} = 1.7\times10^7\ \text{m/s}.$$

Nótese que esta velocidad es de alrededor de $0.06c$, lo cual justifica nuestro uso de la relación no relativista entre la velocidad y la energía cinética.

Hagamos que la partícula pase cerca de la superficie del átomo, donde experimenta el máximo campo eléctrico que este átomo pudiera ejercer. La fuerza correspondiente sobre la partícula es de

$$F = qE_{máx} = 2(1.6\times10^{-19}\ \text{C})(1.1\times10^{13}\ \text{N/C}) = 3.5\times10^{-6}\ \text{N}.$$

La figura 16 muestra un diagrama esquemático de un experimento de dispersión. El cálculo real de la desviación es relativamente complicado, pero podemos realizar algunas aproximaciones que simplifiquen el cálculo y permitan un cálculo aproximado de la máxima desviación. Supongamos que la fuerza de arriba es constante y que actúa únicamente durante el tiempo Δt que tarda al proyectil en recorrer una distancia igual a un diámetro del átomo, como se indica en la fig. 16. Este intervalo de tiempo es

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = \frac{2(1.0\times10^{-10}\ \text{m})}{1.7\times10^7\ \text{m/s}} = 1.2\times10^{-17}\ \text{s}.$$

La fuerza le imprime a la partícula una aceleración transversal a, la cual produce una velocidad transversal Δv dada por

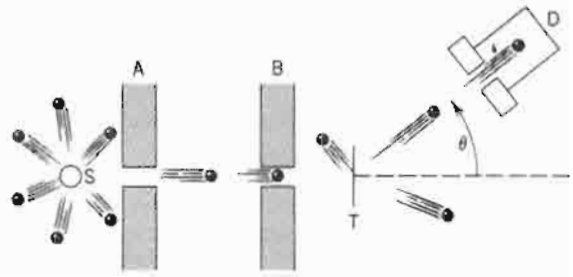


Figura 17 El arreglo experimental para estudiar la dispersión de las partículas alfa. Las partículas se emiten por una fuente radiactiva S e inciden sobre un blanco delgado T (una laminilla de oro). Las partículas alfa dispersas se observan en un detector D que puede colocarse a distintos ángulos θ.

$$\Delta v = a\,\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t = \frac{3.5\times10^{-6}\ \text{N}}{6.64\times10^{-27}\ \text{kg}}\,1.2\times10^{-17}\ \text{s}$$
$$= 6.6\times10^3\ \text{m/s}.$$

Éste es un cambio pequeño cuando se le compara con la magnitud de la velocidad de la partícula (1.7×10^7 m/s). La partícula se desviará en un ángulo θ pequeño que puede calcularse aproximadamente

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Delta v}{v} = \tan^{-1}\frac{6.6\times10^3\ \text{m/s}}{1.7\times10^7\ \text{m/s}} = 0.02°.$$

Este experimento lo realizó primero Ernest Rutherford junto con sus colaboradores H. Geiger y E. Marsden en la Universidad de Manchester en 1911. La figura 17 muestra los detalles del experimento que usaron para medir el ángulo de dispersión. Un haz de partículas alfa provenientes de la fuente radiactiva S se dispersó por una lámina delgada de oro T y se observó con un detector D que podía colocarse a cualquier ángulo θ con respecto a la dirección del haz incidente. Así, determinaron el número de partículas dispersas que llegaron al detector por unidad de tiempo para distintos ángulos.

Los resultados de su experimento se muestran esquemáticamente en la figura 18. Si bien de la dispersión de muchas de las partículas fue de ángulos pequeños, como lo predice nuestro cálculo aproximado, una partícula ocasional, quizás 1 en 10^4, se dispersaba en un ángulo tan grande que su movimiento se invertía. Tal resultado es en verdad sorprendente si aceptamos el modelo de Thomson, para el cual hemos estimado que la desviación (deflexión) *máxima* es de unos 0.02°. En las palabras de Rutherford: "Fue realmente el suceso más increíble que me haya pasado en mi vida. Fue casi tan increíble como si un obús de 15 pulgadas, disparado contra un pañuelo de papel, hubiera rebotado para pegarme".

Basado en este tipo de experimento de dispersión, Rutherford concluyó que la carga positiva de un átomo no se difundía por todas partes de la esfera del mismo tamaño que el átomo, pero en su lugar se concentraba en una pequeña región (el *núcleo*) cerca del centro del átomo. En el caso del átomo de oro, el núcleo tiene un radio de unos 7×10^{-15} m (7 fm), más o menos 10^{-4} veces menor que el radio del átomo. Esto es, ¡el núcleo ocupa un volumen de sólo 10^{-12} el del átomo!

Calculemos el campo eléctrico máximo y la fuerza correspondiente sobre una partícula alfa que pase cerca de la superficie del núcleo. Si consideramos al núcleo como una bola

esférica uniforme de carga $Q = 79e$ y radio $R = 7$ fm, el campo eléctrico máximo es de

$$E_{\text{máx}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})}{(7.0 \times 10^{-15}\ \text{m})^2}$$
$$= 2.3 \times 10^{21}\ \text{N/C}.$$

Esto es más de ocho órdenes de longitud mayor que el campo eléctrico que actuaría sobre una partícula en la superficie de un modelo de "budín inglés" del átomo. La fuerza correspondiente es de

$$F = qE_{\text{máx}} = 2(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(2.3 \times 10^{21}\ \text{N/C}) = 740\ \text{N}.$$

¡Ésta es una fuerza enorme! Hagamos la misma simplificación que hicimos en nuestro cálculo previo; supongamos que esta fuerza sea constante y que actúe sobre la partícula sólo durante el tiempo Δt que le toma a la partícula viajar una distancia igual a un diámetro nuclear:

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = \frac{2(7.0 \times 10^{-15}\ \text{m})}{1.7 \times 10^7\ \text{m/s}} = 8.2 \times 10^{-22}\ \text{s}.$$

Puede estimarse que el cambio correspondiente en la velocidad de la partícula es de

$$\Delta v = a\,\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t = \frac{740\ \text{N}}{6.64 \times 10^{-27}\ \text{kg}}\,8.2 \times 10^{-22}\ \text{s}$$
$$= 9 \times 10^7\ \text{m/s}.$$

Esto es comparable en magnitud a la velocidad misma. Concluimos que un átomo nuclear puede producir un campo eléctrico que es lo suficientemente grande como para invertir el movimiento del proyectil.

Podemos medir el radio del núcleo disparando partículas alfa contra él y midiendo su desviación. La desviación puede calcularse con mucha precisión si *suponemos* que el proyectil está siempre afuera de la distribución de carga del núcleo, en cuyo caso el campo eléctrico está dado por la ecuación 16. Sin embargo, si el proyectil lo disparamos con la suficiente energía, puede penetrar a la región para $r < R$, en donde experimentará un campo eléctrico diferente (dado, por ejemplo, por la Ec. 18 si suponemos que la distribución de la carga nuclear es uniforme) y donde su desviación será, por tanto, diferente de la que calcularíamos suponiendo que el proyectil estuviera siempre afuera del núcleo. Determinar la energía a la cual sucede esto es, en efecto, una forma de medir el radio del núcleo del átomo. De tales experimentos aprendemos que el radio del núcleo de un átomo de número másico A es de alrededor de $R_0A^{1/3}$, donde R_0 es aproximadamente de 1.2 fm.

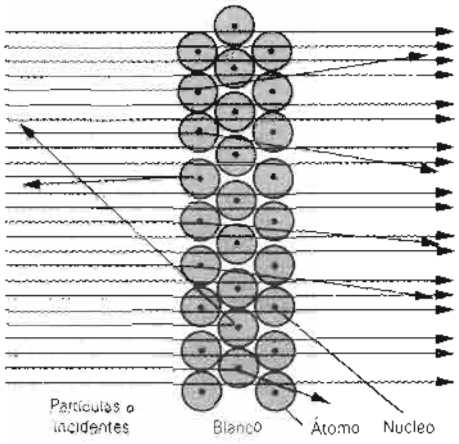


Figura 18 Representación esquemática del resultado de la dispersión. La mayoría de las partículas alfa atraviesan sin desviarse, pero unas cuantas se desvían en ángulos pequeños. Una partícula ocasional (una en 10^4) experimenta una dispersión de ángulo de más de 90°.

El análisis de Rutherford fue mucho más detallado que el presentado aquí; fue capaz de encontrar una expresión matemática que daba una relación exacta entre el número de partículas dispersas y el ángulo de dispersión basado puramente en el campo eléctrico de $1/r^2$, y lo verificó para ángulos entre 0° y 180°. Su relación dependía también del *número atómico Z* de los átomos blanco, y así, este experimento de dispersión proporcionó una manera directa de determinar la Z de un átomo. Finalmente, demostró que la dispersión es como la hemos esbozado en la figura 18: existe sólo una pequeña probabilidad de tener alguna dispersión; la mayoría de los proyectiles pasan sin desviarse, y la probabilidad de tener más de una dispersión de un solo proyectil es insignificante. Esto es consistente con el tamaño pequeño deducido para el núcleo. El átomo es en su mayoría espacio vacío, y existe sólo una probabilidad muy pequeña de que un proyectil llegue lo suficientemente cerca de un núcleo, como para experimentar un campo eléctrico lo suficientemente grande para causar una desviación. La probabilidad de que ocurra dispersión dos veces con el mismo proyectil es muy pequeña.

Esta serie clásica y concienzuda de experimentos y su brillante interpretación, constituyen los cimientos de la física moderna atómica y nuclear, y a Rutherford, generalmente, se le atribuye el mérito de ser el fundador de estos campos. ■

PREGUNTAS

1. ¿Cuál es la base de la afirmación de que las líneas de fuerza eléctrica comienzan y terminan sólo en cargas eléctricas?
2. A las cargas positivas se les llama a veces "fuentes" y a las cargas negativas "sumideros" del campo eléctrico. ¿Cómo justificaría usted esta terminología? ¿Existen fuentes y sumideros del campo gravitatorio?
3. Por analogía con Φ_ε cómo definiría usted el flujo Φ_g de un campo gravitatorio? ¿Cuál es el flujo del campo gravitatorio de la Tierra a través de los límites de un salón, suponiendo que no contenga materia? A través de una superficie esférica que rodeara muy cercanamente a la Tierra? ¿A través de una superficie esférica del tamaño de la órbita de la Luna?
4. Considere la superficie gaussiana que rodea parte de la distribución de carga mostrada en la figura 19. (*a*) ¿Cuál de las cargas contribuye al campo eléctrico en el punto *P*?

(*b*) El valor obtenido para el flujo a través de la superficie, calculado usando únicamente el campo debido a q_1 y a q_2, ¿sería más grande que, igual a, o menor que el obtenido usando el campo total?

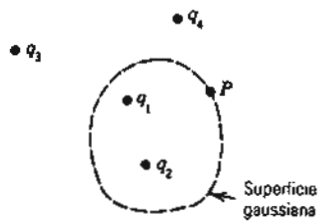


Figura 19 Pregunta 4.

5. Suponga que un campo eléctrico situado en cierta región tiene una dirección constante pero está decreciendo en intensidad en esa dirección. ¿Qué concluiría usted acerca de la carga en la región? Trace las líneas de fuerza.
6. ¿Afirma exactamente la ley de Gauss que el número total de líneas de fuerza que cruzan a toda superficie cerrada en la dirección hacia fuera es proporcional a la carga positiva neta encerrada dentro de la superficie?
7. Una carga puntual está situada en el centro de una superficie gaussiana esférica. ¿Cambia Φ_E (*a*) si la superficie se sustituye por un cubo del mismo volumen, (*b*) si la esfera se sustituye por un cubo de la décima parte del volumen, (*c*) si la carga se mueve fuera del centro en la esfera original y permanece adentro, (*d*) si la carga se mueve justo afuera de la esfera original, (*e*) si se sitúa una segunda carga cerca y afuera de la esfera original, y (*f*) si se sitúa una segunda carga adentro de la superficie gaussiana?
8. En la ley de Gauss,

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q,$$

es **E** necesariamente el campo eléctrico atribuible a la carga q?

9. Una superficie encierra a un dipolo eléctrico. ¿Qué puede usted decir acerca de Φ_E para esta superficie?
10. Supóngase que una superficie gaussiana no encierra carga neta alguna. ¿Requiere la ley de Gauss que **E** sea igual a cero para todos los puntos sobre la superficie? ¿Es cierto el recíproco de este postulado; esto es, si **E** es igual a cero en todas las partes de la superficie, requiere la ley de Gauss que no exista ninguna carga neta en el interior?
11. ¿Es útil la ley de Gauss para calcular el campo debido a tres cargas iguales situadas en los vértices de un triángulo equilátero? Explique.
12. Una carga total Q está distribuida uniformemente en un cubo de longitud a de su arista. El campo eléctrico resultante en un punto externo P, a una distancia r del centro C del cubo, ¿está dado por $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$? Véase la figura 20. Si no es así, ¿puede hallarse E, construyendo una superficie gaussiana cúbica "concéntrica"? Si no se puede, explique por qué. ¿Qué puede usted decir con respecto a E si $r \gg a$?

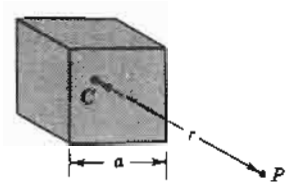


Figura 20 Pregunta 12.

13. ¿Es **E** necesariamente cero dentro de un globo de hule cargado, si su forma es (*a*) esférica o (*b*) alargada? Para cada forma suponga que la carga está distribuida uniformemente sobre la superficie. ¿Cómo cambiaría la situación, de ser así, si el globo tuviese una capa delgada de pintura conductora en su superficie externa?
14. Un globo esférico de hule contiene una carga que está uniformemente distribuida sobre su superficie. Cuando el globo estalla, ¿cómo varía E en los puntos (*a*) dentro del globo, (*b*) en la superficie del globo, y (*c*) fuera del globo?
15. En la sección 29-3 hemos visto que la ley de Coulomb puede deducirse de la ley de Gauss. ¿Significa ello, necesariamente, que la ley de Gauss puede deducirse de la ley de Coulomb?
16. ¿Se cumpliría la ley de Gauss si el exponente en la ley de Coulomb no fuese exactamente 2?
17. Un conductor hueco, aislado y grande contiene una carga positiva. A través de una pequeña abertura en la parte superior del conductor se hace descender una pequeña bola de metal que tiene una carga negativa de la misma magnitud, de manera que toque la superficie interior, y luego se retira. ¿Cuál es, entonces, la carga en (*a*) el conductor y (*b*) la bola?
18. ¿Podemos deducir del argumento de la sección 29-4 que los electrones en los conductores del sistema de alambrado eléctrico de una casa se mueven por las superficies de dichos conductores? Si no, ¿por qué no?
19. En la sección 29-4 supusimos que **E** es igual a cero en todas partes dentro de un conductor aislado. Sin embargo, existen ciertamente campos eléctricos muy grandes dentro del conductor, en los puntos cercanos a los electrones o al núcleo. ¿Invalida esto la demostración de la sección 29-4? Explique.
20. ¿Requiere la ley de Gauss, como se aplicó en la sección 29-4, que todos los electrones de conducción en un conductor aislado residan en la superficie?
21. Una carga puntual positiva q está situada en el centro de una esfera de metal hueca. ¿Qué cargas aparecen en (*a*) la superficie interna y en (*b*) la superficie externa de la esfera? (*c*) Si acercamos un objeto metálico (descargado) a la esfera, ¿cambiarán sus respuestas de (*a*) y (*b*) anteriores? ¿Cambiará el modo en que está distribuida la carga sobre la esfera?
22. Si una carga $-q$ está distribuida uniformemente en la superficie de una esfera metálica hueca, aislada y delgada

de radio a, no existirá ningún campo eléctrico dentro. Si ahora se coloca una carga puntual $+q$ en el centro de la esfera, no habrá tampoco un campo externo. Esta carga puntual puede desplazarse una distancia $d < a$ del centro, pero eso da al sistema un momento dipolar y crea un campo externo. ¿Cómo explica usted la energía que aparece en este campo externo?

23. ¿Cómo puede ser retirada completamente la carga en exceso de un cuerpo conductor pequeño?
24. Explique por qué la simetría esférica de la figura 5 nos restringe a considerar que **E** tiene sólo una componente radial en cualquier punto. (*Sugerencia*: Imagine otras componentes, quizás a lo largo del equivalente de las líneas de longitud o latitud de la superficie de la Tierra. La simetría esférica requiere que esto se vea lo mismo desde cualquier perspectiva. ¿Puede usted inventar las líneas de campo que satisfagan a este criterio?)
25. Explique por qué la simetría de la figura 8 nos restringe a considerar que **E** tenga únicamente una componente radial en cualquier punto. En este caso, recuerde que el campo no sólo debe verse igual en cualquier punto a lo largo, sino que debe verse también igual si la figura se gira extremo por extremo.
26. La carga *total* en una barra infinita cargada es infinita. ¿Por qué E no es también infinito? Después de todo, de acuerdo con la ley de Coulomb, si q es infinita, también E lo es.
27. Explique por qué la simetría de la figura 9 nos restringe a considerar que **E** tiene sólo una componente dirigida hacia afuera de la lámina. ¿Por qué, por ejemplo, no podría **E** tener una componente paralela a la lámina? En este caso, recuerde que el campo no sólo debe verse el mismo en cualquier punto a lo largo de la lámina en cualquier dirección, sino que también debe verse el mismo si la lámina se gira alrededor de una línea perpendicular a la lámina.
28. El campo debido a una lámina infinita de carga es uniforme, teniendo la misma intensidad en todos los puntos, sin importar lo lejos que estén de la carga superficial. Explique cómo puede ser esto, dada la naturaleza del inverso de los cuadrados de la ley de Coulomb.
29. Conforme usted penetra en una esfera de carga uniforme, E debe disminuir puesto que hay menos carga dentro de una esfera dibujada a lo largo del punto de observación. Por otra parte, E debe aumentar porque usted está más cerca del centro de esta carga. ¿Cuál efecto es dominante, y por qué?
30. Dada una distribución de carga esféricamente simétrica (no de densidad de carga radial y uniforme), ¿es E necesariamente máxima en la superficie? Comente sobre varias posibilidades.
31. ¿Se mantiene cierta la ecuación 16 para la figura 11*a* (*a*) si existe una cavidad esférica concéntrica en el cuerpo, (*b*) si una carga puntual Q está en el centro de esta cavidad, y (*c*) si la carga Q está dentro de la cavidad pero no en su centro?
32. Un átomo es por lo general *eléctricamente neutro*. Entonces, ¿por qué una partícula alfa sería desviada por el átomo en cualquier circunstancia?

PROBLEMAS

Sección 29-2 El flujo del campo eléctrico

1. La superficie cuadrada que se muestra en la figura 21 mide 3.2 mm en cada lado. Está inmersa en un campo eléctrico uniforme con $E = 1800$ N/C. Las líneas de campo forman un ángulo de 65° con la normal "apuntando hacia afuera", como se muestra. Calcule el flujo a través de la superficie.

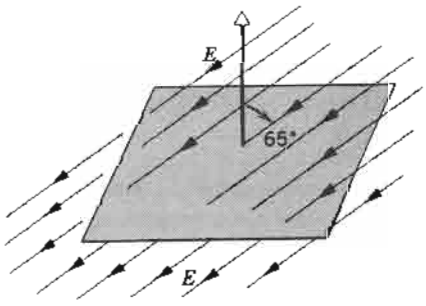


Figura 21 Problema 1.

2. Un cubo con aristas de 1.4 m está orientado como se muestra en la figura 22 en una región de campo eléctrico uniforme. Encuentre el flujo eléctrico a través de la cara derecha si el campo eléctrico, expresado en N/C, está dado por (*a*) 6**i**, (*b*) −2**j** y (*c*) −3**i** + 4**k**. (*d*) Calcule el flujo total a través del cubo para cada uno de estos campos.
3. Calcule Φ_E a través de (*a*) la base plana y (*b*) la superficie curva de un hemisferio de radio R. El campo **E** es uniforme y paralelo al eje del hemisferio, y las líneas de **E** entran

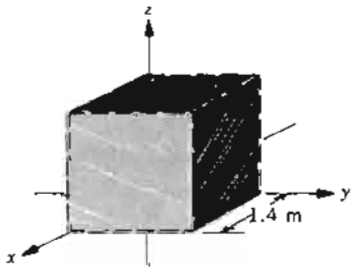


Figura 22 Problema 2.

a través de la base plana. (Use la normal apuntando hacia afuera.)

Sección 29-3 La ley de Gauss

4. La carga en un conductor aislado originalmente descargado se separa al sostener una barra cargada positivamente muy cerca de él, como se muestra en la figura 23. Calcule el flujo para las cinco superficies gaussianas mostradas. Suponga que la carga negativa inducida sobre el conductor es igual a la carga positiva q sobre la barra.

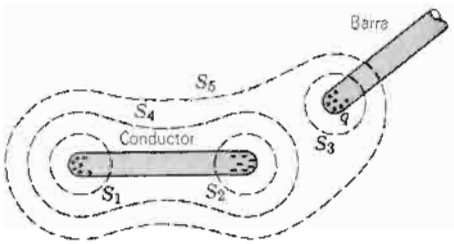


Figura 23 Problema 4.

5. Una carga puntual de 1.84 μC está en el centro de una superficie gaussiana cúbica de 55 cm de arista. Halle Φ_E a través de la superficie.
6. El flujo eléctrico neto a través de cada cara de un dado tiene una magnitud en unidades de 10^3 N · m²/C igual al número N de puntos en la cara (del 1 al 6). El flujo es hacia adentro para N impar y hacia afuera para N par. ¿Cuál es la carga neta dentro del dado?
7. Una carga puntual $+q$ está a una distancia $d/2$ de una superficie cuadrada de lado d y está directamente arriba del centro del cuadrado como se muestra en la figura 24. Halle el flujo eléctrico a través del cuadrado. (*Sugerencia:* Considere el cuadrado como una cara de un cubo con arista d.)

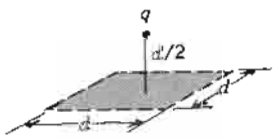


Figura 24 Problema 7.

8. Una red para cazar mariposas está en un campo eléctrico E uniforme como se muestra en la figura 25. El aro, un círculo de radio a, está alineado perpendicularmente al campo. Halle el flujo eléctrico a través de la red, respecto a la normal hacia afuera.
9. Experimentalmente se determina que el campo eléctrico en cierta región de la atmósfera de la Tierra está dirigido verticalmente hacia abajo. A una altitud de 300 m el campo es de 58 N/C y a una altitud de 200 m es de 110 N/C. Calcule la cantidad neta de carga contenida en un cubo de 100 m de arista ubicado a una altitud entre 200 y 300 m. Desprecie la curvatura de la Tierra.

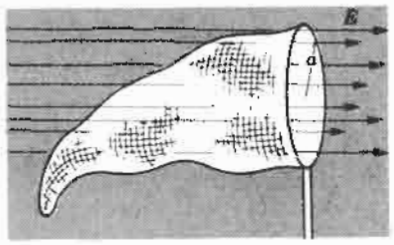


Figura 25 Problema 8.

10. Encuentre el flujo neto a través del cubo del problema 2 y la figura 22 si el campo eléctrico está dado en unidades del SI por (*a*) $\mathbf{E} = 3y\mathbf{j}$ y (*b*) $\mathbf{E} = -4\mathbf{i} + (6 + 3y)\mathbf{j}$. (*c*) En cada caso, ¿cuánta carga hay dentro del cubo?
11. La "ley de Gauss para la gravitación" es

$$\frac{1}{4\pi G}\Phi_g = \frac{1}{4\pi G}\oint \mathbf{g}\cdot d\mathbf{A} = -m,$$

donde m es la masa encerrada y G es la constante universal de la gravitación. Deduzca la ley de la gravitación de Newton para esto. ¿Qué significa el signo menos?
12. Una carga puntual q está situada en una esquina de un cubo de arista a. ¿Cuál es el flujo a través de cada una de las caras del cubo? (*Sugerencia*: Utilice la ley de Gauss y los argumentos de simetría.)
13. Las componentes del campo eléctrico en la figura 26 son $E_x = bx^{1/2}$, $E_y = E_z = 0$, donde $b = 8830$ N/C · m$^{1/2}$. Calcule (*a*) el flujo Φ_E a través del cubo y (*b*) la carga dentro del cubo. Suponga que $a = 13.0$ cm.

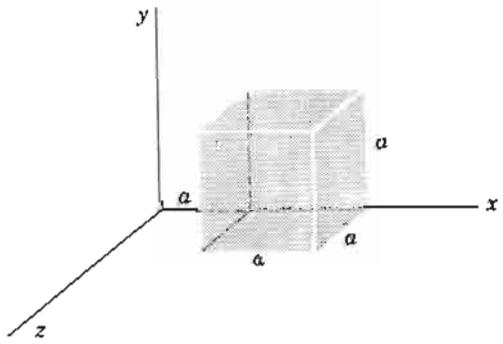


Figura 26 Problema 13.

Sección 29-4 Un conductor cargado aislado

14. Una esfera conductora uniformemente cargada de 1.22 m de radio tiene una densidad de carga superficial de 8.13 μC/m². (*a*) Halle la carga en la esfera. (*b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico total que sale de la superficie de la esfera? (*c*) Calcule el campo eléctrico en la superficie de la esfera.
15. Los vehículos espaciales que viajan a través de los cinturones de radiación de la Tierra chocan con electrones

atrapados. Puesto que en el espacio no existe un suelo, la carga resultante acumulada puede resultar significativa y dañar a los componentes electrónicos, generando averías en los circuitos de control y otras anomalías operativas. Un satélite metálico esférico de 1.3 m de diámetro acumula 2.4 μC de carga en una revolución orbital. (*a*) Determine la densidad de carga superficial. (*b*) Calcule el campo eléctrico resultante inmediatamente afuera de la superficie del satélite.

16. La ecuación 11 ($E = \sigma/\epsilon_0$) da el campo eléctrico en los puntos cercanos a una superficie conductora cargada. Aplique esta ecuación a una esfera conductora de radio r, que contenga una carga q en su superficie, y demuestre que el campo eléctrico afuera de la esfera es el mismo que el campo de una carga puntual en la posición del centro de la esfera.

17. Una esfera conductora que contiene una carga Q está rodeada por un cascarón conductor. (*a*) ¿Cuál es la carga neta en la superficie interna del cascarón? (*b*) Se coloca otra carga q afuera del cascarón; ¿cuál es ahora la carga neta en la superficie interior del cascarón? (*c*) Si q se mueve a una posición entre el cascarón y la esfera, ¿cuál es la carga neta en la superficie interna del cascarón? (*d*) ¿Son sus respuestas válidas si la esfera y el cascarón no son concéntricos?

18. Un conductor aislado de forma arbitraria contiene una carga neta de +10 μC. Dentro del conductor hay una cavidad hueca en la cual hay una carga puntual $q = +3.0$ μC. ¿Cuál es la carga (*a*) en la pared de la cavidad y (*b*) en la superficie externa del conductor?

19. Una placa de metal de 8.0 cm de lado tiene una carga total de 6.0 μC. (*a*) Usando la aproximación de la placa infinita, calcule el campo eléctrico a 0.50 mm arriba de la superficie de la placa, cerca del centro de la misma. (*b*) Estime el campo a una distancia de 30 m.

Sección 29-5 Aplicaciones de la ley de Gauss

20. Una línea de carga infinita produce un campo de 4.52×10^4 N/C a una distancia de 1.96 m. Calcule la densidad de carga lineal.

21. (*a*) El cilindro de la máquina fotocopiadora del problema muestra 3 tiene una longitud de 42 cm y un diámetro de 12 cm. ¿Cuál es la carga total en el cilindro? (*b*) El fabricante desea producir una versión portátil de la máquina. Esto requiere reducir el tamaño del cilindro a una longitud de 28 cm y un diámetro de 8 cm. El campo eléctrico en la superficie del cilindro debe permanecer inalterado. ¿Cuál debe ser la carga en este nuevo cilindro?

22. Dos láminas no conductoras largas y delgadas de carga positiva están una frente a la otra como en la figura 27. ¿Cuál es **E** en los puntos (*a*) a la izquierda de las láminas, (*b*) entre ellas y (*c*) a la derecha de las láminas? Suponga la misma densidad superficial de carga σ para cada lámina. Considere únicamente los puntos que no estén cerca de los extremos cuya distancia a partir de las láminas es pequeña comparada con las dimensiones de la lámina. (*Sugerencia*: Véase el problema muestra 6.)

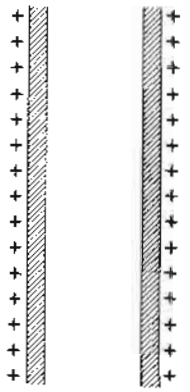


Figura 27 Problema 22.

23. Dos placas metálicas grandes están una frente a la otra como en la figura 28 y contienen cargas con densidad superficial de carga $+\sigma$ y $-\sigma$, respectivamente, sobre sus superficies internas. Determine **E** en los puntos (*a*) a la izquierda de las láminas, (*b*) entre ellas, y (*c*) a la derecha de las láminas. Considere sólo los puntos no cercanos a los extremos cuyas distancias a partir de las láminas son pequeñas comparadas con las dimensiones de la lámina. (*Sugerencia*: Véase el problema muestra 6.)

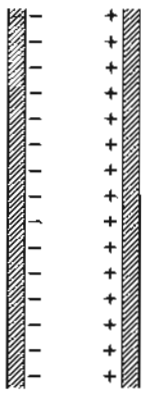


Figura 28 Problema 23.

24. Un electrón permanece estacionario en un campo eléctrico dirigido hacia abajo en el campo gravitatorio de la Tierra. Si el campo eléctrico se debe a la carga sobre dos placas conductoras paralelas y grandes, cargadas opuestamente y separadas por 2.3 cm, ¿cuál es la densidad superficial de carga, supuesta como uniforme, sobre las placas?

25. Una esfera pequeña cuya masa m es de 1.12 mg contiene una carga $q = 19.7$ nC. Cuelga en el campo gravitatorio de la Tierra de un hilo de seda que forma un ángulo $\theta = 27.4°$ con una lámina grande no conductora y uniformemente cargada como en la figura 29. Calcule la densidad de carga uniforme σ para la lámina.

26. Dos esferas huecas cargadas, delgadas y concéntricas, tienen radios de 10.0 cm y 15.0 cm. La carga en la esfera interna es de 40.6 nC y la de la esfera externa de 19.3 nC.

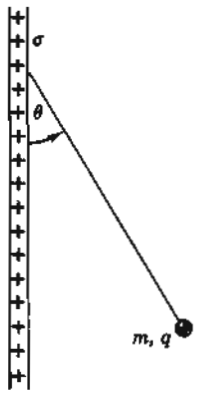


Figura 29 Problema 25.

Halle el campo eléctrico (*a*) en $r = 12.0$ cm, (*b*) en $r = 22.0$ cm y (*c*) en $r = 8.18$ cm del centro de las esferas.

27. Un alambre delgado, recto y muy largo, tiene -3.60 nC/m de carga negativa fija. El alambre se rodeará de un cilindro uniforme de carga positiva, de 1.50 cm de radio, coaxial con el alambre. La densidad volumétrica de carga ρ del cilindro se escoge de modo que el campo eléctrico neto afuera del cilindro sea cero. Calcule la densidad de carga ρ positiva requerida.
28. La figura 30 muestra una carga $+q$ dispuesta como una esfera conductora uniforme de radio a y situada en el centro de una esfera hueca conductora de radio interior b y radio exterior c. La esfera hueca exterior contiene una carga de $-q$. Halle $E(r)$ en las ubicaciones (*a*) dentro de la esfera ($r < a$), (*b*) entre la esfera sólida y la hueca ($a < r < b$), (*c*) dentro de la esfera hueca ($b < r < c$), y (*d*) afuera de la esfera hueca ($r > c$). (*e*) ¿Cuáles cargas aparecen en las superficies interna y externa de la esfera hueca?

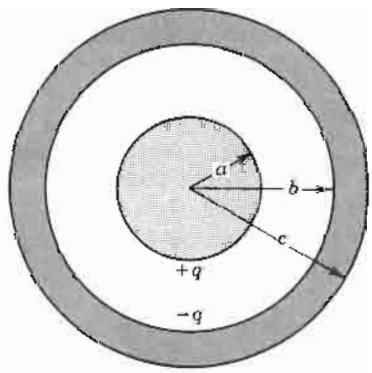


Figura 30 Problema 28.

29. Un cilindro conductor muy largo (de longitud L) conteniendo una carga total $+q$ está rodeado por un tubo cilíndrico (también de longitud L) con una carga total $-2q$, como se muestra en sección transversal de la figura 31. Use la ley de Gauss para hallar (*a*) el campo eléctrico en los puntos afuera del tubo conductor, (*b*) la distribución de la carga en el tubo conductor y (*c*) el campo eléctrico en la región comprendida entre el tubo y el cilindro.

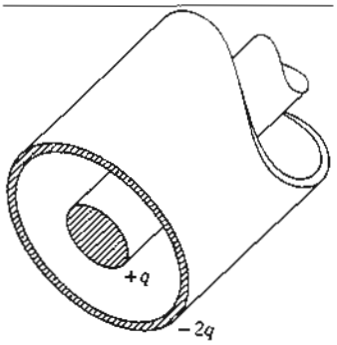


Figura 31 Problema 29.

30. La figura 32 muestra una carga puntual $q = 126$ nC en el centro de una cavidad esférica de 3.66 cm de radio en un trozo de metal. Use la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico (*a*) en el punto P_1, en un punto medio entre el centro y la superficie, y (*b*) en el punto P_2.

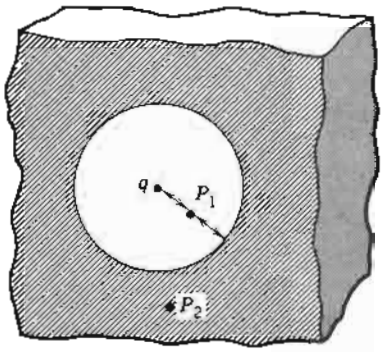


Figura 32 Problema 30.

31. Un protón gira con una velocidad de $v = 294$ km/s justo afuera de una esfera cargada de radio $r = 1.13$ cm. Determine la carga en la esfera.
32. Una superficie no conductora, grande y plana, tiene una densidad uniforme de carga σ. En el centro de la lámina se ha hecho un pequeño orificio circular de radio R, como se muestra en la figura 33. Haga caso omiso de las líneas de campo curvas alrededor de todos los bordes y calcule el campo eléctrico en el punto P, a una distancia z del centro del orificio a lo largo de su eje. (*Sugerencia:* Véase la ecuación 27 del capítulo 28 y aplique el principio de superposición.)
33. La figura 34 muestra la sección a través de un tubo metálico de pared delgada de radio R, que contiene una carga λ por unidad de longitud en su superficie. Deduzca expresiones de E para varias distancias r del eje del tubo, considerando tanto (*a*) $r > R$ como (*b*) $r < R$. (*c*) Dibuje los resultados para la zona entre $r = 0$ y $r = 5.0$ cm, suponiendo que $\lambda = 2.0 \times 10^{-4}$ C/m y $R = 3.0$ cm. (*Sugerencia*: Utilice las superficies gaussianas cilíndricas, coaxiales con el tubo de metal.)

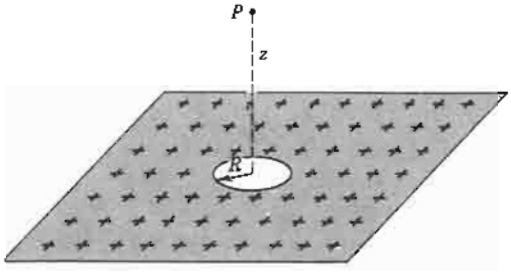


Figura 33 Problema 32.

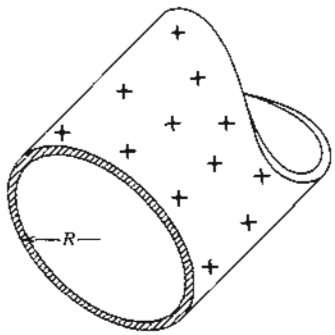


Figura 34 Problema 33.

Figura 35 Problema 34.

34. La figura 35 muestra una sección a través de dos cilindros concéntricos largos y delgados de radios a y b. Los cilindros contienen cargas λ por unidad de longitud iguales y opuestas. Use la ley de Gauss y demuestre (a) que $E = 0$ para $r < a$, y (b) que entre los cilindros E está dada por

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

35. En la geometría del problema 34 un positrón gira en una trayectoria circular entre los cilindros y concéntrica a éstos. Halle su energía cinética, en electrón-volts. Suponga que $\lambda = 30$ nC/m. (¿Por qué no es necesario saber cuáles son los radios de los cilindros?)

36. La figura 36 muestra un contador Geiger, el cual se emplea para detectar radiaciones ionizantes. El contador consta de un alambre conductor central delgado, con una carga positiva, rodeado por un cilindro conductor circular concéntrico, que tiene una carga negativa igual. Así, se crea un campo eléctrico radial intenso dentro del cilindro. El cilindro contiene un gas inerte a baja presión. Cuando una partícula de radiación entra al tubo a través de las paredes del cilindro, ioniza a unos cuantos átomos del gas. Los electrones libres resultantes son atraídos por el alambre positivo. Sin embargo, el campo eléctrico es tan intenso que, entre las colisiones con los átomos de gas, los electrones han adquirido la energía suficiente como para ionizar también a estos átomos. Así, se crean más electrones libres y el proceso se repite hasta que los electrones llegan al alambre. La "avalancha" de electrones se acumula en el alambre, generando una señal que registra el paso de la partícula de radiación incidente. Supóngase que el radio del alambre central sea de de 25 μm, el radio del cilindro de 1.4 cm, y la longitud del tubo de 16 cm. El campo eléctrico en la pared del cilindro es de 2.9×10^4 N/C. Calcule la cantidad de carga positiva en el alambre central. (*Sugerencia*: Véase el problema 34.)

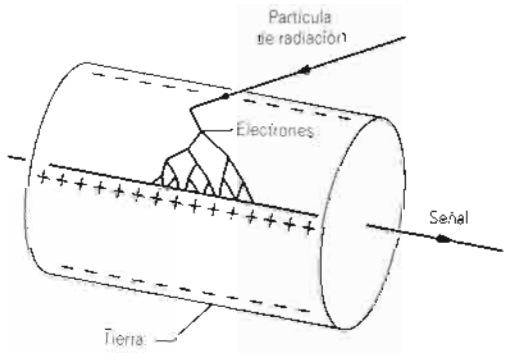


Figura 36 Problema 36.

37. Dos cilindros concéntricos, largos y cargados tienen radios de 3.22 y 6.18 cm. La densidad superficial de carga en el cilindro interno es de 24.7 μC/m^2 y la del cilindro externo es de -18.0 μC/m^2. Halle el campo eléctrico en (a) $r = 4.10$ cm y (b) $r = 8.20$ cm.

38. Una esfera hueca metálica, delgada, no cargada tiene una carga puntual q en su centro. Deduzca expresiones para el campo eléctrico (a) dentro de la esfera y (b) afuera de la esfera, usando la ley de Gauss. (c) ¿Tiene la esfera algún efecto sobre el campo debido a q? (d) ¿Tiene la presencia de q algún efecto sobre la esfera? (e) Si una segunda carga puntual se mantiene afuera de la esfera, ¿experimenta esta carga externa una fuerza? (f) ¿Experimenta una fuerza la carga interna? (g) ¿Existe una contradicción con la tercera ley de Newton? ¿Por qué existe o por qué no?

39. Un electrón de 115 keV se dispara directamente hacia una lámina plástica grande y plana que tiene una densidad superficial de carga de -2.08 μC/m^2. ¿Desde qué distancia debe disparse el electrón para que apenas falle en chocar contra la lámina? (Haga caso omiso de los efectos relativistas.)

40. Las partículas de polvo cargadas en el espacio interestelar, cada una con un electrón en exceso y cada una de ellas de

la misma masa, forman una nube uniforme, esférica, estable. Determine la masa de cada partícula.

41. Una carga positiva se distribuye uniformemente a través de un tubo cilíndrico largo de radio interior R y radio exterior $2R$. ¿A qué profundidad radial, bajo la superficie externa de la distribución de carga, la intensidad del campo eléctrico es igual a la mitad de su valor en la superficie?

42. La región esférica $a < r < b$ contiene una carga por unidad de volumen de $\rho = A/r$, donde A es una constante. En el centro ($r = 0$) de la cavidad cerrada se encuentra una carga puntual q. ¿Cuál sería el valor de A de modo que el campo eléctrico en la región $a < r < b$ tenga una magnitud constante?

43. Demuestre que es imposible un equilibrio estable bajo la acción de las fuerzas electrostáticas únicamente. (*Sugerencia*: Suponga que en un cierto punto P en un campo electrico $\mathbf{E}$, una carga $+q$ estaría en equilibrio estable si fuese situada allí. Trace una superficie gaussiana esférica con respecto a P, imagine a dónde debe apuntar $\mathbf{E}$ en esta superficie, y aplique la ley de Gauss para demostrar que la hipótesis lleva a una contradicción.) Este resultado se conoce como el teorema de Earnshaw.

44. Una región esférica contiene una carga uniforme por unidad de volumen ρ. Sea $\mathbf{r}$ el vector desde el centro de la esfera hasta un punto general P dentro de la esfera. (*a*) Demuestre que el campo eléctrico en P está dado por $\mathbf{E} = \rho\mathbf{r}/3\epsilon_0$. (*b*) Una cavidad esférica se crea dentro de la esfera de arriba, como se muestra en la figura 37. Usando los conceptos de la superposición, demuestre que el campo eléctrico en todos los puntos dentro de la cavidad es $\mathbf{E} = \rho\mathbf{a}/3\epsilon_0$ (campo uniforme), donde $\mathbf{a}$ es el vector que une al centro de la esfera con el centro de la cavidad. Nótese que ambos resultados son independientes de los radios de la esfera y de la cavidad.

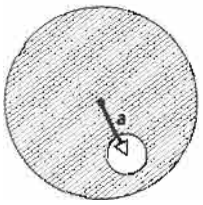


Figura 37 Problema 44.

45. Una carga está distribuida uniformemente a través de un cilindro infinitamente largo de radio R. (*a*) Demuestre que E, a una distancia r del eje del cilindro ($r < R$), está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^4}r^2.$$

donde ρ es la densidad volumétrica de carga. (*b*) ¿Qué resultado se obtendría cuando $r > R$?

46. Una losa plana de espesor d tiene una densidad volumétrica de carga ρ. Halle la magnitud del campo eléctrico en todos los puntos en el espacio (*a*) adentro, y (*b*) afuera de la losa, en términos de x, la distancia medida desde el plano mediano de la losa.

47. Una esfera sólida no conductora de radio R tiene una distribución de carga no uniforme, siendo $\rho = \rho_s r/R$ la densidad de carga, donde ρ_s es una constante y r es la distancia desde el centro de la esfera. Demuestra que (*a*) la carga total sobre la esfera es $Q = \pi\rho_s R^3$ y (*b*) el campo eléctrico dentro de la esfera está dado por

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

48. Construya una superficie gaussiana *esférica* centrada en una línea infinita de carga, calcule el flujo a través de la esfera y, a partir de ello, demuestre que se satisface la ley de Gauss.

Sección 29-7 El modelo nuclear del átomo

49. En un artículo publicado en 1911, Ernest Rutherford dijo: Con objeto de tener una idea de las fuerzas necesarias para desviar una partícula alfa en un ángulo grande, considere un átomo que contenga una carga puntual positiva Ze en su centro y rodeada por una distribución de electricidad negativa, $-Ze$ uniformemente distribuida dentro de una esfera de radio R. El campo eléctrico E... a una distancia r del centro para un punto *dentro* del átomo [es]

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

Verifique esta ecuación.

50. La figura 38 muestra un modelo Thomson del átomo de helio ($Z = 2$). Dos electrones, en reposo, están incrustados dentro de una esfera uniforme de carga positiva $2e$. Halle la distancia d entre los electrones de modo que la configuración esté en equilibrio estático.

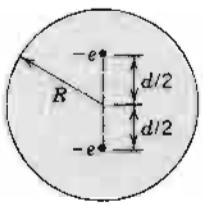


Figura 38 Problema 50.

Proyecto para la computadora

51. Modificando el programa para la computadora dado en el apéndice I, el cual usamos en la sección 28-6 para calcular la trayectoria de una partícula en un campo eléctrico no uniforme, halle la trayectoria de una partícula dispersa por el campo eléctrico de otra partícula, como en el experimento de dispersión de Rutherford (sección 29-7).

Seleccione un protón ($q = +e$, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) como partícula dispersa y un núcleo de oro ($Q = +79e$) como blanco, el cual se supone que está fijo en el origen del sistema de coordenadas xz. Use las componentes E_x y E_z del campo eléctrico del blanco para hallar las componen-

tes de aceleración a_x y a_z del protón. Considere que la posición inicial del protón es $z_0 = 3$ fm (el parámetro b del impacto) cuando x_0 es muy grande y negativa (digamos, -2000 fm), y que el protón se mueve inicialmente paralelo al eje x ($v_{0x} > 0$, $v_{0z} = 0$) con una velocidad correspondiente a una energía cinética inicial K de 4.7 MeV. Considere pequeños incrementos de tiempo al hacer el cálculo, y tabule x, z, v_x, v_z, $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$, y $\phi = \tan^{-1}(z/x)$ como funciones del tiempo t. Trace la trayectoria de la partícula y compárela con la trayectoria calculada, la cual puede hallarse de las leyes de Newton, y está dada por

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\operatorname{sen}\phi + \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 b^2 K}(\cos\phi - 1).$$

Para evitar errores, debe elegirse que el incremento de tiempo sea muy pequeño. Para probar si ha sido seleccionado un incremento suficientemente pequeño, corra el programa y examine la trayectoria en tiempos suficientemente grandes como para que el protón esté lejos del núcleo de oro después de la dispersión. La trayectoria sería simétrica en cualquier lado del punto de acercamiento del proyectil al blanco más cercano, y las velocidades inicial y final serían iguales.

Repita el cálculo para diferentes valores del parámetro de impacto. Para cada valor de b, determine el ángulo de dispersión $\theta = \pi - \phi$ donde ϕ se evalúa para $r \to \infty$ después de la dispersión. Trace θ contra b y trate de determinar la relación entre ellos.

CAPÍTULO 30

EL POTENCIAL ELÉCTRICO

En los capítulos 7 y 8 aprendimos que, en ciertos casos, el enfoque de la energía para el estudio de la dinámica de las partículas aporta no sólo simplificaciones sino también nuevas perspectivas. En el capítulo 16 empleábamos el método de la energía en situaciones en las que intervenía la fuerza gravitatoria; así, pudimos determinar propiedades como las velocidades de escape y los parámetros orbitales de los planetas y de los satélites.

Una ventaja del método de la energía es que, si bien la fuerza es un vector, la energía es un escalar. En problemas en que intervienen fuerzas y campos vectoriales, los cálculos que requieren sumas e integrales suelen ser complicados. Por ejemplo, cuando calculábamos el campo eléctrico en el capítulo 28 para distribuciones continuas de carga, fue necesario tomar en cuenta la naturaleza vectorial del campo y llevar a cabo las integrales de acuerdo con ello.

En el presente capítulo, introducimos el método de la energía para el estudio de la electrostática. Comenzamos con la energía potencial eléctrica, *un escalar que caracteriza a una fuerza electrostática, del mismo modo que la energía potencial gravitatoria caracteriza a una fuerza gravitatoria. A continuación, generalizamos hasta el campo de una distribución de carga arbitraria e introducimos el concepto de* potencial eléctrico. *Calculamos el potencial para distribuciones de carga continuas y discretas, y demostramos que el campo eléctrico y el potencial eléctrico se relacionan estrechamente: dado uno, podemos hallar el otro.*

30-1 LA ELECTROSTÁTICA Y LAS FUERZAS GRAVITATORIAS

La semejanza entre las fuerzas electrostática y gravitatoria nos permite simplificar nuestra deducción de las cantidades electrostáticas refiriéndonos nuevamente al capítulo 16 para la obtención de las cantidades gravitatorias correspondientes. Nótese la semejanza entre las dos leyes de fuerza:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{(gravitatoria)}, \quad (1a)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{(electrostática)}, \quad (1b)$$

las cuales dan, respectivamente, la fuerza gravitatoria entre dos partículas de masas m_1 y m_2 y la fuerza electrostática entre dos partículas de cargas q_1 y q_2, en ambos casos separadas por una distancia r. Las dos leyes de fuerza tienen exactamente la misma forma: una constante (G o $1/4\pi\epsilon_0$) que da la intensidad de la fuerza, por el producto de una propiedad de las dos partículas (la masa o la carga) divididas entre el cuadrado de su separación. Es decir, tanto la ley de la gravitación de Newton como la ley de Coulomb son *leyes del inverso de los cuadrados*.

En la sección 16-7 introdujimos la intensidad del campo gravitatorio **g**, definida en cualquier posición como la fuerza de gravitación por unidad de masa ejercida sobre un cuerpo de prueba de masa m_0 situado en esa posición. La intensidad del campo eléctrico **E** se definió en la ecuación 2 del capítulo 28 en forma muy semejante como la fuerza electrostática por unidad de carga ejercida sobre una carga de prueba q_0. Nótese la similitud entre las definiciones matemáticas:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m_0} \qquad \text{(gravitatoria)}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \qquad \text{(electrostática)}. \quad (2b)$$

En ambos casos, la ecuación 2 nos da un procedimiento operativo para medir la intensidad del campo.

Se recordará que la diferencia en la energía potencial ΔU cuando una partícula se mueve entre los puntos a y b

bajo la influencia de una fuerza **F** es igual al negativo del trabajo realizado por la fuerza, o sea

$$\Delta U = -W_{ab}, \tag{3}$$

donde W_{ab} es el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de a a b. La ecuación 3 se aplica sólo si la fuerza es conservativa; en efecto, la energía potencial se define *únicamente* para fuerzas conservativas, como lo explicamos en la sección 8-2. Podemos también escribir la ecuación 3 como

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \tag{4}$$

En el capítulo 8 generalizamos de la diferencia en energía potencial a la energía potencial misma, al definir la energía potencial como cero en un punto de referencia apropiado. Es conveniente, como en la sección 16-6, elegir el punto de referencia en el que la energía potencial corresponda a una separación infinita de las partículas (donde la fuerza es cero, de acuerdo con la Ec. 1*a*), y luego definir que la energía potencial es cero para esa condición.

La energía potencial puede definirse para una fuerza en particular sólo si la fuerza es conservativa, y por tanto debemos primero determinar la naturaleza conservativa de una fuerza antes de intentar el cálculo de su energía potencial. En la sección 16-6 (véase especialmente la Fig. 13 del capítulo 16) demostramos que la fuerza gravitatoria $1/r^2$ es conservativa, y argumentamos que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una partícula se desplaza de a a b es independiente del camino o trayecto seguido entre esas posiciones. Podemos aplicar el mismo argumento para la fuerza electrostática y llegar al mismo resultado: *la fuerza electrostática es conservativa, y puede representarse por una energía potencial.* En la siguiente sección damos la deducción matemática.

Existe una propiedad importante en la que la fuerza electrostática difiere de la fuerza gravitatoria: las fuerzas gravitatorias son siempre de atracción, mientras que (dependiendo de los signos relativos de las cargas) las fuerzas electrostáticas pueden ser de atracción o de repulsión. Como veremos en la siguiente sección, esta diferencia puede afectar el signo de la energía potencial, pero de ninguna manera cambia nuestro argumento basado en la analogía entre las dos fuerzas.

30-2 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Si levantamos una piedra de la superficie de la Tierra, el cambio en la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-piedra es, de acuerdo con la ecuación 4 del capítulo 8, el negativo del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria. Podemos tratar las situaciones electrostáticas de manera semejante.

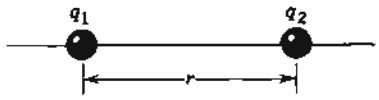


Figura 1 Dos cargas q_1 y q_2 separadas por una distancia r.

Ya hemos argumentado en la sección 30-1, utilizando la analogía con la fuerza gravitatoria, que la fuerza electrostática es conservativa, y, por lo tanto, *podemos asociar una energía potencial a todo sistema en el que una partícula cargada esté situada en un campo eléctrico y reciba la acción de una fuerza electrostática.* El cambio en la energía potencial electrostática, cuando una partícula de carga q se mueve en un campo eléctrico **E**, está dado por la ecuación 4, al sustituir la fuerza **F** por la fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$:

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -q\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}, \tag{5}$$

donde la integral se realiza para la trayectoria de la partícula desde el punto inicial a hasta el punto final b. Puesto que la fuerza eléctrica es conservativa, la integral es independiente de la trayectoria y depende sólo de los puntos inicial y final a y b.

Consideremos dos partículas de carga q_1 y q_2 separadas por una distancia r (Fig. 1). Supongamos primero que las cargas tienen signos opuestos, de modo que la fuerza entre ellas es de atracción. Si desplazamos q_2 hacia la derecha, la fuerza eléctrica realiza un trabajo negativo, el lado derecho de la ecuación 5 es positivo, y la energía potencial del sistema aumenta. Si soltamos las cargas desde esta separación mayor, la separación disminuye hasta llegar al valor inicial; la energía potencial del sistema disminuye mientras que la energía cinética del sistema aumenta, en analogía con el caso gravitatorio.

Si las dos cargas de la figura 1 tienen el mismo signo, al mover q_2 hacia la *izquierda* la energía potencial del sistema aumenta (porque en este caso la fuerza eléctrica realiza un trabajo negativo). Si soltamos las cargas, su separación aumenta; la disminución resultante en la energía potencial está acompañada de un aumento correspondiente en la energía cinética al separarse las dos cargas.

Calculemos ahora la expresión para la energía potencial del sistema de dos cargas puntuales mostrado en la figura 1. Usamos la ecuación 5, y suponemos que q_2 se mueve hacia q_1 o alejándose de éste a lo largo de la línea que une a las dos cargas, la cual tomamos como el eje x. La componente E_x del campo eléctrico debido a q_1 a lo largo de esta línea es $q_1/4\pi\epsilon_0 r^2$. Esta componente es positiva o negativa, según sea el signo de q_1. La figura 2 muestra las relaciones vectoriales correspondientes. El vector $\mathbf{r}$ ($= r\mathbf{i}$, donde $\mathbf{i}$ es el vector unitario en la dirección x) sitúa a q_2

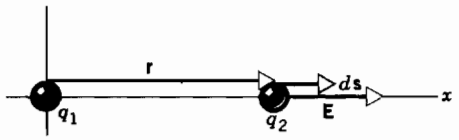


Figura 2 La carga q_2 se mueve en relación a q_1, por un desplazamiento $d\mathbf{s}$. El campo eléctrico debido a la carga positiva q_1 está en la dirección mostrada.

en relación con q_1, y el vector $d\mathbf{s}$ (= $dr\mathbf{i}$) indica el desplazamiento de q_2. Entonces, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_x dr$, por lo que, si movemos a q_2 de la separación r_a a r_b, el cambio en la energía potencial está dado por la ecuación 5 como

$$U_b - U_a = -q_2 \int_{r_a}^{r_b} E_x\, dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right). \qquad (6)$$

La ecuación 6 se cumple ya sea que q_2 se mueva hacia q_1 o se aleje de ella; en el primer caso, $r_b < r_a$, y en el segundo caso, $r_b > r_a$. La ecuación también se cumple para cualquier combinación de los signos de q_1 y q_2. Además, ya que ΔU es independiente de la trayectoria para una fuerza conservativa, la ecuación 6 se cumple sin importar cómo se mueva q_2 entre r_a y r_b; aquí elegimos una trayectoria radial directa para simplificar el cálculo, pero el resultado es válido para *cualquier* trayectoria.

Como lo hicimos en la sección 16-6, podemos elegir un punto de referencia a tal que r_a corresponda a una separación infinita de las partículas, y definimos a la energía potencial U_a como cero. Dejemos que r sea la separación en el punto final b, de modo que la ecuación 6 se reduzca a

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (7)$$

Comparemos este resultado con la ecuación 15 del capítulo 16 para la energía potencial gravitatoria, la cual podemos escribir como $U(r) = -Gm_1m_2/r$. Si la fuerza eléctrica es de atracción, q_1 y q_2 tienen signos opuestos, y el producto q_1q_2 es por consiguiente negativo. En este caso, la energía potencial eléctrica dada por la ecuación 7 es negativa, como lo es la energía potencial gravitatoria de atracción.

Si la fuerza eléctrica es de repulsión, q_1 y q_2 tienen el mismo signo, y el producto $q_1 q_2$ es positivo. En este caso, que no tiene un análogo gravitatorio conocido, la energía potencial es positiva. Si movemos a q_2 hacia q_1 desde una separación inicialmente infinita, la energía potencial aumenta desde su valor inicial (el cual hemos definido como 0). Si luego soltamos a q_2 desde el reposo, se mueve en una separación mayor, adquiriendo energía cinética al mismo tiempo que el sistema pierde energía potencial.

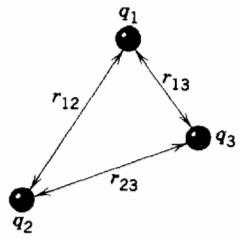


Figura 3 Un conjunto de tres cargas.

Problema muestra 1 Dos protones en el núcleo de un átomo de ^{238}U están a 6.0 fm el uno del otro. ¿Cuál es la energía potencial asociada a la fuerza eléctrica que actúa entre estas dos partículas?

Solución De la ecuación 7, con $q_1 = q_2 = +1.60 \times 10^{-19}$ C, obtenemos

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{6.0 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}}$$
$$= 3.8 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} = 2.4 \times 10^5\ \mathrm{eV} = 240\ \mathrm{keV}.$$

Los dos protones no salen disparados porque la *fuerza fuerte* de atracción que enlaza los núcleos los mantiene unidos. A diferencia de la fuerza eléctrica, no existe una función sencilla de la energía potencial que represente a la fuerza fuerte.

Energía potencial de un sistema de cargas

Supongamos que tenemos un sistema de cargas puntuales las cuales se mantienen en posiciones fijas por fuerzas no especificadas. Podemos calcular la energía potencial total de este sistema aplicando la ecuación 7 a cada par de cargas en el sistema. Por ejemplo, si tenemos un sistema de tres cargas como se muestra en la figura 3, la energía potencial del sistema es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}. \qquad (8)$$

Obsérvese que la energía potencial es una propiedad del sistema, y no de alguna carga individual.

De este ejemplo puede verse inmediatamente la ventaja de usar el enfoque de energía para analizar este sistema: la suma que forma parte de la ecuación 8 es una suma *algebraica* de cantidades escalares. Si tratáramos de calcular el campo eléctrico de las tres cargas, tendríamos que considerar una suma *vectorial*, la cual sería más complicada.

Existe otra manera de interpretar la energía potencial de este sistema. Dejemos que las tres cargas tengan inicialmente una separación infinita entre ellas. Traemos a la primera carga, q_1, desde el infinito y la colocamos en la posición mostrada en la figura 3. No hay ningún cambio en la energía potencial, pues las otras cargas no están

todavía presentes. Al poner a q_2 en posición se genera una energía potencial $q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r_{12}$. Finalmente, al traer a q_3 desde el infinito hasta su posición da dos términos más: $q_1q_3/4\pi\epsilon_0 r_{13}$ y $q_2q_3/4\pi\epsilon_0 r_{23}$, los cuales dan, la energía potencial de q_3 en los campos de q_1 y de q_2 respectivamente. Podemos continuar este proceso para reunir cualquier distribución arbitraria de carga. La energía potencial resultante es independiente del orden en el que reunamos las cargas.

Cuando un agente externo mueve las cargas desde la separación infinita para reunir o armar una distribución como la mostrada en la figura 3, el agente realiza un trabajo al ejercer una fuerza que se opone a la fuerza electrostática. El agente externo está, en efecto, almacenando energía en el sistema de cargas. Esto puede verse más fácilmente si se considera el caso especial en que todas las cargas tengan el mismo signo. Las cargas que ya están en su lugar, ejercen una fuerza de repulsión sobre las cargas nuevas que se incorporen, y el agente externo debe empujar las nuevas cargas a su posición. En efecto, el agente externo debe gastar energía para armar la distribución de carga. La energía se almacena en el campo eléctrico del sistema, y lo explicamos en términos de la energía potencial eléctrica de la distribución resultante. Si liberáramos súbitamente las sujeciones que mantienen a las cargas en sus posiciones, éstas obtendrían energía cinética al separarse el sistema; la energía cinética total de todas las partículas en una separación infinita es, por la conservación de la energía, igual a la energía proporcionada por el agente externo para reunir al sistema. Si las cargas tuviesen signos diferentes, de modo que la energía potencial total fuese negativa, las partículas tenderían a acercarse entre sí al ser liberadas de sus posiciones. En este caso el agente externo necesitaría proporcionar una energía adicional en forma de trabajo para desarmar al sistema y mover a las cargas a una separación infinita.

Resumimos este aspecto como sigue:

La energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales fijas es igual al trabajo que debe realizar un agente externo para armar al sistema, trayendo cada carga desde una distancia infinita. Las cargas están en reposo en sus posiciones iniciales y en sus posiciones finales.

En esta definición queda implícito que hemos considerado al punto de referencia de la energía potencial como la separación infinita entre las cargas, y tomamos a la energía potencial como cero en este punto de referencia.

Para distribuciones continuas de carga, la energía potencial puede calcularse mediante una técnica similar, es decir, dividiendo la distribución en pequeños elementos y tratando a cada elemento como una carga puntual. No consideraremos en este texto tales problemas.

Problema muestra 2 En el sistema que se muestra en la figura 3, asumamos que $r_{12} = r_{13} = r_{23} = d = 12$ cm, y que

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q, \quad \text{y} \quad q_3 = +2q,$$

en donde $q = 150$ nC. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?

Solución Al emplear la ecuación 8, obtenemos

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d}\right)$$
$$= -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$
$$= -\frac{(8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{0.12\ \text{m}}$$
$$= -1.7 \times 10^{-2}\ \text{J} = -17\ \text{mJ}.$$

En este caso, la energía potencial negativa significa que, para armar esta estructura, deberá realizarse un trabajo negativo por un agente externo, comenzando con las tres cargas separadas infinitamente y en reposo. Dicho de otro modo, un agente externo tendría que llevar a cabo +17 mJ de trabajo para desarmar la estructura completamente.

30-3 POTENCIAL ELÉCTRICO

La fuerza entre dos partículas cargadas depende de la magnitud y signo de cada carga. Nos fue de gran utilidad introducir una cantidad vectorial, el campo eléctrico, definido (véase la Ec. 2*b*) como la fuerza por unidad de carga de prueba. Con esta definición podemos ahora hablar del campo eléctrico asociado con una sola carga.

En muchas aplicaciones hallamos útil el trabajar con una cantidad escalar relacionada, la cual se obtiene a partir de la energía potencial de una manera semejante. Esta cantidad se llama *potencial eléctrico* y se define como la *energía potencial por unidad de carga de prueba.*

Supongamos que tenemos un conjunto de cargas y deseamos determinar su potencial eléctrico en un punto P en particular. Situamos una carga de prueba q_0 positiva a una distancia infinita del conjunto de cargas, en donde el campo eléctrico es cero. Luego desplazamos una carga de prueba desde esa separación infinita hasta P, y en el proceso la energía potencial cambia de 0 a U_P. El potencial eléctrico V_P en P debido al conjunto de cargas se define entonces como

$$V_P = \frac{U_P}{q_0}. \tag{9}$$

Obsérvese de la ecuación 9 que el potencial debe ser un escalar, pues éste se calcula a partir de cantidades escalares U y q.

Definido de esta manera, el potencial es independiente de la magnitud de la carga de prueba, como lo es el campo

eléctrico definido de acuerdo con la ecuación 2*b*. (Como lo hicimos en el caso del campo eléctrico, suponemos que q_0 es una carga muy pequeña, de modo que tiene un efecto insignificante sobre el conjunto de cargas cuyo potencial deseamos medir.) La ecuación 9 proporciona una base operativa para medir el potencial; como fue el caso con el campo eléctrico, más adelante establecemos procedimientos matemáticos más convenientes para calcular V.

Dependiendo de la distribución de las cargas, el potencial V_P puede ser positivo, negativo, o cero. Supongamos que el potencial es positivo en un cierto punto; de acuerdo con la ecuación 9, la energía potencial en ese punto es positiva. Si fuésemos a mover una carga de prueba positiva desde el infinito hasta ese punto, el campo eléctrico realizaría un trabajo negativo, lo cual indica que, en promedio, la carga de prueba ha experimentado una fuerza de repulsión. *Por lo tanto, el potencial cerca de una carga positiva aislada es positivo.* Si el potencial en un punto es negativo, sucede lo contrario: cuando traemos a una carga de prueba positiva desde el infinito, el campo eléctrico realiza un trabajo positivo y, en promedio, la fuerza es de atracción. *Por lo tanto, el potencial cerca de una carga negativa aislada es negativo.*

Si el potencial es cero en algún punto, el campo eléctrico no realiza ningún trabajo neto al moverse la carga de prueba desde el infinito, aunque la carga de prueba haya pasado a través de una región en que haya experimentado fuerzas eléctricas de atracción o de repulsión. *Un potencial de cero en un punto no necesariamente significa que el campo eléctrico sea cero en dicho punto.* Consideremos, por ejemplo, un punto situado en medio de dos cargas iguales y opuestas. Los potenciales en ese punto debidos a las dos cargas individuales tienen magnitudes iguales y signos opuestos, y así el potencial total en dicho punto es cero. Sin embargo, los campos eléctricos de las dos cargas tienen el mismo sentido en ese punto, e indudablemente el campo eléctrico total no es cero.

En lugar de hacer referencia a un punto en el infinito, a menudo deseamos determinar la *diferencia de potencial eléctrico* entre dos puntos a y b en un campo eléctrico. Para hacerlo, movemos una carga de prueba q_0 desde a hasta b. La diferencia de potencial eléctrico se define por una extensión de la ecuación 9 como

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0}. \qquad (10)$$

El potencial en b puede ser mayor que, menor que, o igual que el potencial en a, dependiendo de la diferencia en la energía potencial entre los dos puntos o, equivalentemente, del negativo del trabajo realizado por el campo eléctrico conforme una carga de prueba positiva se mueve entre los puntos. Por ejemplo, si b está a un potencial más elevado que a ($V_b - V_a > 0$), el campo eléctrico realiza un trabajo *negativo* conforme la carga de prueba se mueve desde a hasta b.

La unidad del potencial en el SI que se infiere de la ecuación 9 es el joule/coulomb. Esta combinación ocurre tan a menudo que se emplea una unidad especial, el *volt* (abreviado V) para representarla, es decir,

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb}.$$

A menudo se emplea el nombre común de "voltaje" para referirnos al potencial en un punto o a la diferencia de potencial entre puntos. Cuando tocamos con las dos puntas de prueba de un *vóltmetro* a dos puntos de un circuito eléctrico, estamos midiendo la diferencia de potencial (en volts) o el voltaje entre dichos puntos.

La ecuación 10 puede escribirse así

$$\Delta U = q\,\Delta V, \qquad (11)$$

lo que afirma que cuando *cualquier* carga q se mueve entre dos puntos cuya diferencia de potencial sea ΔV, el sistema experimenta un cambio de energía potencial ΔU dado por la ecuación 11. La diferencia de potencial ΔV se genera por otras cargas que se mantienen en reposo, de modo que el movimiento de la carga q no cambia la diferencia de potencial ΔV. Al usar la ecuación 11, cuando ΔV se expresa en volts y q en coulombs, ΔU resulta en joules.

De la ecuación 11 puede verse que el *electrón-volt*, unidad presentada previamente como una unidad de energía, se deduce directamente de la definición del potencial o de la diferencia de potencial. Si ΔV se expresa en volts y q en unidades de la carga elemental e, entonces ΔU se expresa en electrón-volts (eV). Por ejemplo, considérese un sistema en el cual un átomo de carbono del cual se han retirado los seis electrones ($q = +6e$) se mueve a través de un cambio en potencial de $\Delta V = +20$ kV. El cambio en la energía potencial es

$$\Delta U = q\,\Delta V = (+6e)(+20 \text{ kV}) = +120 \text{ keV}.$$

Es muy conveniente hacer tales cálculos en unidades de eV cuando se trata con átomos o con núcleos, en los que la carga se expresa fácilmente en términos de e.

Téngase en cuenta que las *diferencias de potencial* son de primordial importancia y que la ecuación 9 depende de la asignación arbitraria del valor cero al potencial en la posición de referencia (el infinito); este potencial de referencia igualmente pudo haber sido elegido como cualquier otro valor, digamos -100 V. De manera similar, podría haberse elegido cualquier otro punto acordado como una posición de referencia. En varios problema se toma a la Tierra como una referencia del potencial y se le asigna el valor cero. La situación del punto de referencia y el valor del potencial se eligen por conveniencia; otras elecciones cambiarían en todas partes el potencial en la misma magnitud pero no cambiarían los resultados para la diferencia de potencial.

Ya hemos explicado que el campo eléctrico es un campo conservativo, y por lo mismo la diferencia de energía potencial entre los puntos a y b depende únicamente de las ubicaciones de los puntos y no de la trayectoria seguida para mover a uno de los puntos hacia el otro. La ecuación 10 sugiere, por consiguiente, que la diferencia de potencial es similarmente independiente de la trayectoria: la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un campo eléctrico es independiente de la trayectoria por la que se mueve la carga de prueba al viajar de un punto a otro.

Problema muestra 3 En un acelerador nuclear, una partícula alfa ($q = +2e$) se mueve desde una terminal de potencial $V_a = +6.5 \times 10^6$ V a otra de potencial $V_b = 0$. (*a*) ¿Cuál es el cambio correspondiente en la energía potencial del sistema? (*b*) Suponiendo que las terminales y sus cargas no se mueven y que ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema, ¿cuál es el cambio en la energía cinética de la partícula?

Solución (*a*) De la ecuación 11, tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta U = U_b - U_a &= q(V_b - V_a)\\ &= (+2)(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0 - 6.5 \times 10^6\ \text{V})\\ &= -2.1 \times 10^{-12}\ \text{J}.\end{aligned}$$

(*b*) Si no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema, entonces su energía mecánica $E = U + K$ debe permanecer constante. Es decir, $\Delta E = \Delta U + \Delta K = 0$, y así

$$\Delta K = -\Delta U = +2.1 \times 10^{-12}\ \text{J}.$$

La partícula alfa adquiere una energía cinética de 2.1×10^{-12} J, de la misma manera en que una partícula cayendo en el campo gravitatorio de la Tierra adquiere energía cinética.

Para ver las simplificaciones que resultan, intente resolver este problema nuevamente pero ahora con las energías expresadas en unidades de eV.

30-4 CÁLCULO DEL POTENCIAL A PARTIR DEL CAMPO

Dado el campo eléctrico **E** podemos calcular el potencial V, y dado V podemos calcular **E**. Aquí estudiaremos el cálculo de V a partir de **E**; el cálculo de **E** a partir de V se verá en la sección 30-9.

Digamos que a y b son en la figura 4 dos puntos en un campo eléctrico uniforme **E**, creado por una disposición de cargas no mostrada, y dejemos que a sea una distancia L en la dirección del campo desde b. Suponga que una carga de prueba positiva q_0 se mueve desde a hasta b a lo largo de la línea recta que las une.

La fuerza eléctrica sobre la carga es $q_0\mathbf{E}$ y apunta en la dirección x negativa. Cuando una carga de prueba se mueve desde a hasta b en la dirección de ds, el trabajo

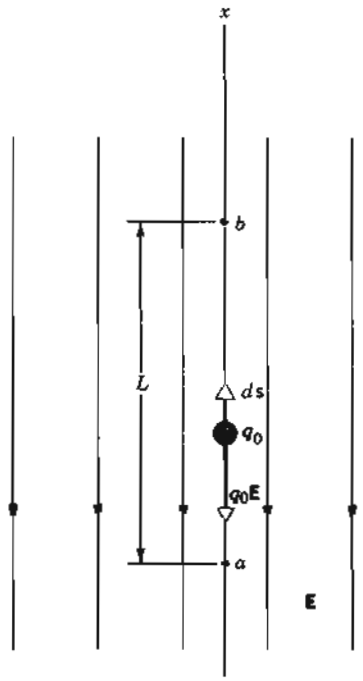


Figura 4 Una carga de prueba q_0 se mueve una distancia L desde a hasta b en un campo eléctrico uniforme **E**.

realizado por el campo eléctrico (constante) está dado por

$$W_{ab} = F_x\,\Delta x = (-q_0E)(L) = -q_0EL. \qquad (12)$$

Usando la definición de la diferencia en la energía potencial, $\Delta U = -W$, podemos combinar las ecuaciones 10 y 12 para obtener

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = \frac{-W_{ab}}{q_0} = EL. \qquad (13)$$

Esta ecuación muestra la relación entre la diferencia de potencial y la intensidad del campo para un simple caso especial. Nótese en ella que otra unidad para **E** en el SI es el volt/metro (V/m). Es posible que desee usted comprobar que el volt/metro es idéntico a un newton/coulomb (N/C); esta última unidad fue la primera presentada para **E** en la sección 28-2.

En la figura 4, b tiene un potencial más elevado que a. Esto es razonable pues el campo eléctrico realiza un trabajo negativo sobre la carga de prueba positiva al moverse desde a hasta b. La figura 4 podría utilizarse tal cual para ilustrar el acto de levantar una piedra desde a hasta b en un campo gravitatorio uniforme cerca de la superficie de la Tierra. Lo único que necesitamos es reemplazar la carga de prueba q_0 por una masa de prueba m_0 y reemplazar el campo eléctrico **E** por el campo gravitatorio **g**.

¿Cuál es la relación entre V y **E** en el caso más común en que el campo *no es* uniforme y en que el cuerpo de

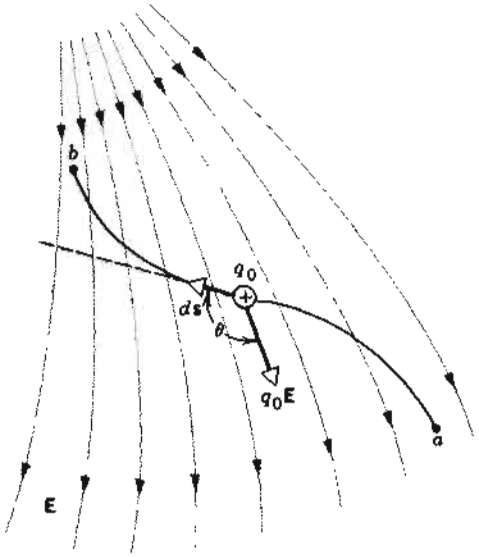


Figura 5 La carga de prueba q_0 se mueve desde a hasta b en el campo eléctrico no uniforme **E**.

prueba se mueve a lo largo de una trayectoria que *no es* recta, como en la figura 5? El campo eléctrico ejerce una fuerza $q_0\mathbf{E}$ sobre la carga de prueba, como se muestra. Un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria se representa por $d\mathbf{s}$. Para encontrar el trabajo total W_{ab} realizado por el campo eléctrico cuando la carga de prueba se mueve desde a hasta b, sumamos (es decir, integramos) las contribuciones del trabajo para todos los segmentos infinitesimales en que está dividida la trayectoria. Esto conduce a

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}. \tag{14}$$

Tal integral se llama *lineal*, como lo estudiamos en la sección 7-3.

Con $V_b - V_a = (U_b - U_a)/q_0 = -W_{ab}/q_0$, la ecuación 14 da

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}. \tag{15}$$

Frecuentemente conviene elegir que el punto a sea el punto de referencia en ∞, en donde V_a se considera que es cero. Podemos entonces determinar el potencial en cualquier punto arbitrario P usando la ecuación 15:

$$V_P = -\int_\infty^P \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}. \tag{16}$$

Estas dos ecuaciones nos permiten calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera o el potencial en cualquier punto de un campo eléctrico conocido **E**.

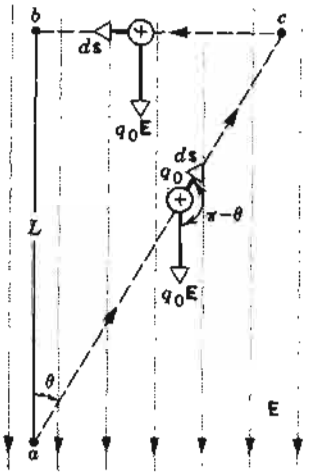


Figura 6 Problema muestra 4. Una carga de prueba q_0 se mueve a lo largo de la trayectoria acb a través de un campo eléctrico uniforme **E**.

Problema muestra 4 En la figura 6, dejemos que una carga de prueba q_0 sea llevada desde a hasta b a lo largo de la trayectoria acb. Calcule la diferencia de potencial entre a y b.

Solución Para la trayectoria ac tenemos, según la ecuación 15,

$$V_c - V_a = -\int_a^c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_a^c E\,ds\cos(\pi-\theta)$$
$$= E\cos\theta\int_a^c ds.$$

La integral es la longitud de la línea ac, lo cual es $L/\cos\theta$. Entonces

$$V_c - V_a = E\cos\theta\frac{L}{\cos\theta} = EL.$$

Los puntos b y c tienen el mismo potencial porque no se ha realizado ningún trabajo al mover una carga entre ellos, **E** y $d\mathbf{s}$ se encuentran en ángulo recto para todos los puntos sobre la línea cb. Así pues,

$$V_b - V_a = (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 + EL = EL.$$

Éste es el mismo valor encontrado para una trayectoria directa que une a a y b, un resultado que era de esperarse pues la diferencia de potencial entre dos puntos es independiente de la trayectoria.

30-5 EL POTENCIAL DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

La figura 7*a* muestra dos puntos a y b cerca de una carga puntual q positiva y aislada. Para simplificación, suponemos que a, b, y q se encuentran sobre una línea recta.

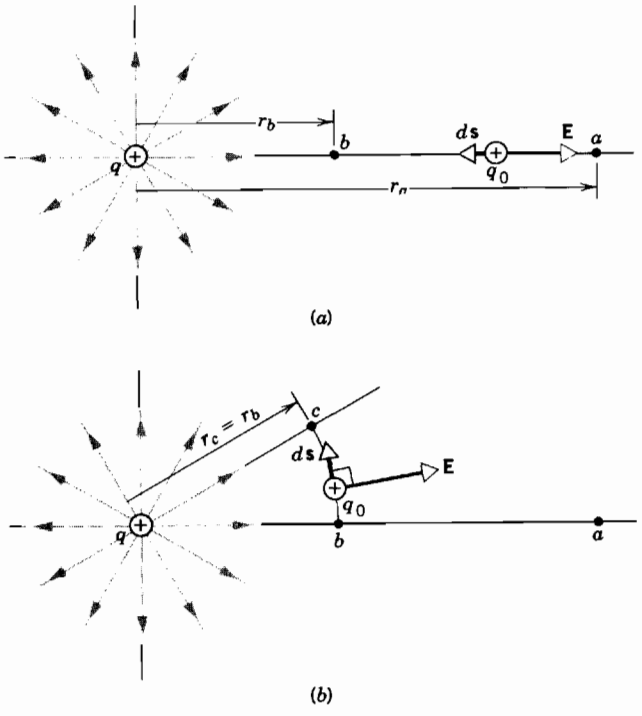


Figura 7 (*a*) Una carga de prueba q_0 se mueve desde *a* hasta *b* a lo largo de una línea radial desde una carga positiva *q* que crea un campo eléctrico **E**. (*b*) La carga de prueba se mueve ahora desde *b* hasta *c* a lo largo del arco de un círculo centrado en *q*.

Calculemos la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*, suponiendo que una carga positiva de prueba q_0 se mueve a lo largo de una línea radial desde *a* hasta *b*.

En la figura 7*a*, tanto **E** como *d*s (= *d*r) tienen únicamente una componente radial. Entonces $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E\,dr$, y al sustituir este resultado en la ecuación 15 nos da

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{r_a}^{r_b} E\,dr.$$

Usando la expresión para el campo eléctrico de una carga puntual, $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, obtenemos

$$V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right). \quad (17)$$

La ecuación 17 da la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*. Hemos simplificado la integración al elegir mover la carga de prueba a lo largo de una trayectoria radial, pero el potencial es independiente de la trayectoria, de modo que la ecuación 17 se cumple para *cualquier* trayectoria entre *a* y *b*. Esto es, la diferencia de potencial es una propiedad de los puntos *a* y *b* en sí mismos y no de la trayectoria *ab*.

Además, la ecuación 17 se cumple para la diferencia de potencial entre dos puntos aun cuando no se encuentren sobre la misma línea radial. La figura 7*b* muestra los puntos arbitrarios *a* y *c*. Ya que la diferencia de potencial es independiente de la trayectoria, estamos en libertad de elegir la trayectoria que sea más sencilla para la cual podamos calcular la diferencia de potencial. Elegimos la trayectoria *abc*, en la cual *ab* es radial y *bc* está a lo largo del arco de un círculo centrado en *q*. El campo no realiza ningún trabajo a lo largo de *bc*, ya que **E** es perpendicular a *d*s en todas partes sobre *bc*, y así la diferencia de potencial entre *a* y *c* es también dada por la ecuación 17.

Si deseamos calcular el potencial en cualquier punto (en lugar de la diferencia de potencial entre dos puntos), es ya costumbre elegir un punto de referencia en el infinito. Elegimos que *a* esté en el infinito (esto es, hacemos que $r_a \to \infty$) y definimos a V_a como 0 en esta posición. Al realizar estas sustituciones en la ecuación 17 y al eliminar el subíndice *b*, nos da

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}. \quad (18)$$

La ecuación 18 es también válida para cualquier distribución esféricamente simétrica de la carga total *q*, siempre y cuando *r* sea mayor que el radio de la distribución. Obsérvese que la ecuación 18 pudo también haberse obtenido directamente de la ecuación 16.

La ecuación 18 muestra que a grandes distancias el potencial debido a una carga puntual positiva es cero y crece hacia valores positivos grandes conforme nos aproximamos a la carga. Si *q* es negativa, el potencial tiende a valores negativos grandes cerca de la carga. La figura 8 muestra las gráficas de la ecuación 18, generadas por computadora, para una carga puntual positiva y una negativa. Nótese que estos resultados no dependen, en absoluto, del signo de la *carga de prueba* empleada en el cálculo.

Problema muestra 5 ¿Cuál debe ser la magnitud de una carga puntual positiva aislada para que el potencial eléctrico a 15 cm de la carga sea de +120 V?

Solución Al resolver la ecuación 18 para *q* obtenemos

$$q = V4\pi\epsilon_0 r = (120\text{ V})(4\pi)(8.9\times10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.15\text{ m})$$
$$= 2.0\times10^{-9}\text{ C} = 2.0\text{ nC}.$$

Esta carga es comparable a las cargas que se generan por fricción, como al frotar un globo.

Problema muestra 6 ¿Cuál es el potencial eléctrico en la superficie de un núcleo de oro? El radio es de 7.0×10^{-15} m, y el número atómico *Z* es 79.

Solución El núcleo, supuesto esféricamente simétrico, se comporta eléctricamente, para puntos externos, como si fuese una carga puntual. Por consiguiente, podemos usar la ecuación 18, la cual da, con $q = +79e$,

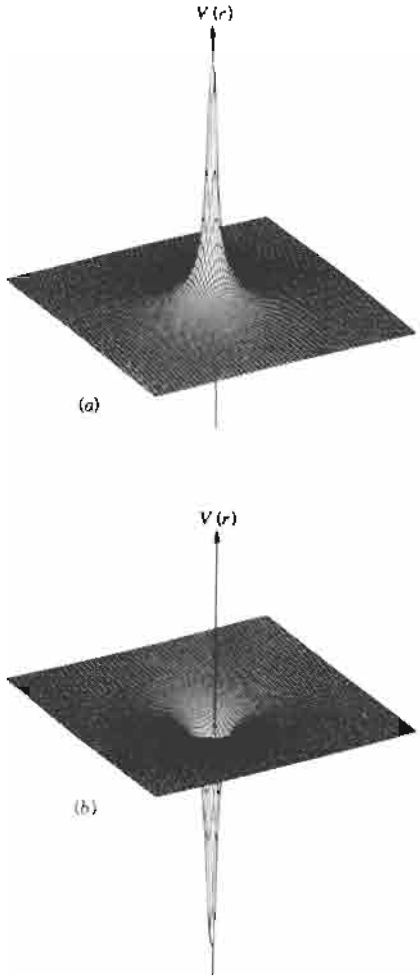


Figura 8 Gráfica del potencial $V(r)$ en un plano cerca de una carga puntual (*a*) positiva y (*b*) negativa, generada por computadora.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{(9.0\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(79)(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})}{7.0\times10^{-15}\ \mathrm{m}}$$
$$= 1.6\times10^7\ \mathrm{V}.$$

Este gran potencial positivo no tiene efecto fuera de un *átomo* de oro porque está compensado por un potencial negativo igualmente grande de los 79 electrones atómicos del oro.

30-6 POTENCIAL DEBIDO A UN CONJUNTO DE CARGAS PUNTUALES

El potencial en cualquier punto debido a un grupo de N cargas puntuales se encuentra (1) al calcular el potencial V_i debido a cada carga, como si las demás cargas no estuviesen presentes, y (2) al sumar las cantidades así obtenidas:

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_N,$$

o, usando la ecuación 18,

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \tag{19}$$

donde q_i es el valor (en magnitud y signo) de la carga *iésima* y r_i es la distancia de esta carga desde el punto en cuestión. Una vez más, vemos el beneficio obtenido al usar el potencial, que es un *escalar*: la suma utilizada para calcular V es una *suma algebraica* y no una suma vectorial como la empleada para calcular **E** para un grupo de cargas puntuales (véase la Ec. 5 del capítulo 28). Es una importante ventaja de calculo el usar el potencial en vez del campo eléctrico.

El potencial en un punto debido a una de las cargas no se afecta por la presencia de las otras cargas. Para hallar el potencial total, sumamos los potenciales debidos a cada una de las cargas como si fuese la única presente. Éste es el *principio de superposición*, que se aplica al potencial y al campo eléctrico.

Problema muestra 7 Calcule el potencial en el punto P, ubicado en el centro del cuadrado de cargas puntuales mostrado en la figura 9*a*. Suponga que $d = 1.3$ m y que las cargas son

$$q_1 = +12\ \mathrm{nC}, \quad q_3 = +31\ \mathrm{nC},$$
$$q_2 = -24\ \mathrm{nC}, \quad q_4 = +17\ \mathrm{nC}.$$

Solución De la ecuación 19 tenemos

$$V_P = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{R}.$$

La distancia R de cada carga desde el centro del cuadrado es $d/\sqrt{2}$, o sea 0.919 m, de modo que

$$V_P = \frac{(8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(12-24+31+17)\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{0.919\ \mathrm{m}}$$
$$= 3.5\times10^2\ \mathrm{V}.$$

Cerca de cualquiera de las tres cargas positivas de la figura 9*a*, el potencial puede tener valores positivos muy grandes. Cerca de la única carga negativa en esa figura, el potencial puede tener valores negativos grandes. Entonces debe haber otros puntos dentro de los límites del cuadrado que tienen el mismo potencial que el del punto P. La línea de trazos en la figura 9*b* une a otros puntos en el plano que tienen el mismo valor del potencial. Como se verá más adelante, en la sección 30-8, tales *superficies equipotenciales* proporcionan una manera útil de visualizar los potenciales de varias distribuciones de carga.

El potencial debido a un dipolo

Dos cargas iguales de signo opuesto, $\pm q$, separadas por una distancia d, constituyen un dipolo eléctrico; véase la

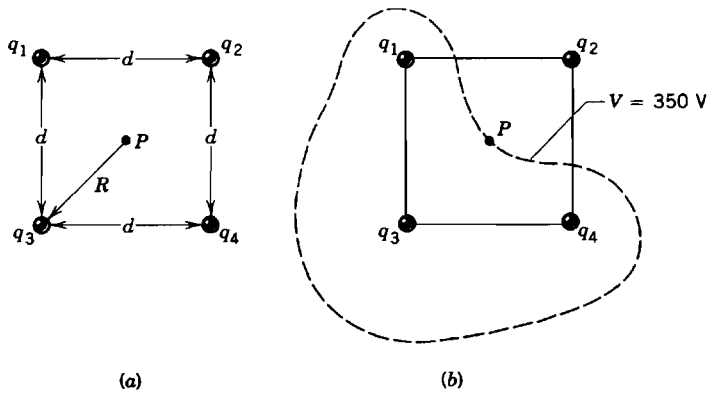


Figura 9 Problema muestra 7. (*a*) Cuatro cargas se mantienen en las esquinas de un cuadrado. (*b*) La curva une los puntos que tienen igual potencial (350 V) que el punto P en el centro del cuadrado.

sección 28-3. El momento eléctrico dipolar p tiene la magnitud qd y apunta de la carga negativa a la carga positiva. Aquí deduciremos una expresión para el potencial eléctrico V debido a un dipolo.

En la figura 10 se especifica un punto P dando las cantidades r y θ. Por simetría, es claro que el potencial no cambia cuando el punto P gira alrededor del eje z, siendo fijos r y θ. (En forma equivalente, considérese lo que sucedería si el dipolo girara alrededor del eje z: físicamente no se distinguiría un caso del otro.) De este modo, si determinamos V para los puntos en el plano de la figura 10 habremos encontrado a V para todos los puntos en el espacio. Al aplicar la ecuación 19 obtenemos

$$V_P = \sum_i V_i = V_1 + V_2$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{-q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}, \qquad (20)$$

la cual es una relación exacta.

Para dipolos que existen en estado natural, como muchas moléculas, el punto de observación P está ubicado muy lejos del dipolo, de modo que $r \gg d$. En esta condición, podemos deducir de la figura 10 que

$$r_2 - r_1 \approx d\cos\theta \quad \text{y} \quad r_1 r_2 \approx r^2,$$

y el potencial se reduce a

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}. \qquad (21)$$

Nótese que $V = 0$ en todas partes en el plano ecuatorial ($\theta = 90°$). Esto significa que el campo eléctrico del dipolo no realiza trabajo cuando una carga de prueba se mueve desde el infinito a lo largo de una línea que se encuentre sobre el plano que está en medio del dipolo (por ejemplo, el eje x en la Fig. 10). Para una r dada, el potencial tiene su máximo valor positivo para $\theta = 0°$ y su máximo valor negativo para $\theta = 180°$. Nótese que V no depende por separado de q y d, sino únicamente de su producto p.

Si bien ciertas moléculas, como el agua, poseen momentos dipolares eléctricos permanentes (véase la Fig. 18 del capítulo 28), los átomos individuales y muchas otras moléculas no. Sin embargo, pueden inducirse momentos dipolares si *cualquier* átomo o molécula se coloca dentro de un campo eléctrico externo. La función del campo, como lo muestra la figura 11, es la de separar los centros de las cargas positiva y negativa. Decimos que el átomo se *polariza* y adquiere un *momento dipolar eléctrico inducido*. Los momentos dipolares inducidos desaparecen cuando el campo eléctrico cesa.

Los dipolos eléctricos son importantes en otras situaciones además de las atómicas y moleculares. Las antenas de radio y de TV tienen a menudo la forma de un alambre o varilla de metal en la cual los electrones se mueven en oleadas de un lado a otro periódicamente. En cierto instante un extremo del alambre o de la varilla es negativo y el otro extremo positivo. Un semiciclo después, la polaridad de los extremos se invierte exactamente. Esto

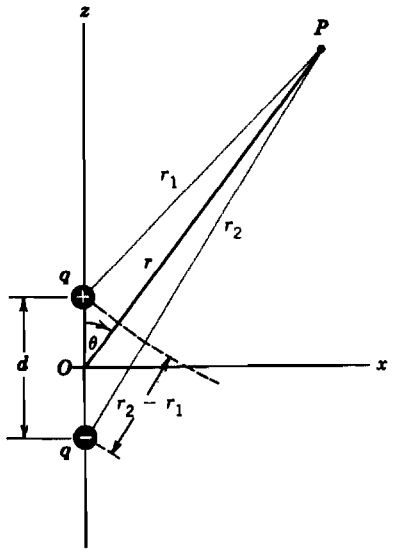


Figura 10 Un punto P en el campo de un dipolo eléctrico.

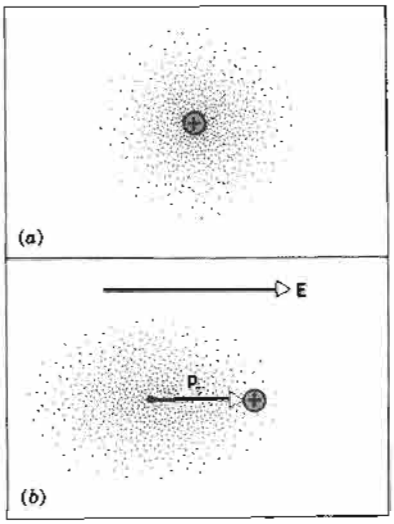


Figura 11 (*a*) El átomo está representado por su núcleo cargado positivamente y su difusa nube de electrones cargada negativamente. Los centros de las cargas positiva y negativa coinciden. (*b*) Cuando el átomo se sitúa en un campo eléctrico externo, las cargas positiva y negativa experimentan fuerzas en sentidos opuestos, y los centros de las cargas positiva y negativa ya no coinciden. El átomo adquiere un momento dipolar inducido.

es un dipolo eléctrico *oscilatorio*. Se le llama así porque sus momentos dipolares cambian de manera periódica con el tiempo.

Problema muestra 8 Un *cuadripolo eléctrico* consta de dos dipolos eléctricos dispuestos de tal manera que, aunque no totalmente, casi se cancelan entre sí en sus efectos eléctricos para puntos distantes (véase la Fig. 12). Calcule $V(r)$ para los puntos en el eje de este cuadripolo.

Solución Al aplicar la ecuación 19 a la figura 12 se obtiene

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r-d} + \frac{-2q}{r} + \frac{q}{r+d}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qd^2}{r(r^2-d^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2dq^2}{r^3(1-d^2/r^2)}.$$

Puesto que $d \ll r$, podemos despreciar d^2/r^2 comparada con 1, en cuyo caso el potencial es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^3}, \qquad (22)$$

en donde Q ($= 2qd^2$) es el *momento cuadripolar eléctrico* del conjunto de cargas de la figura 12. Nótese que V varía (1) como $1/r$ para una carga puntual (véase la Ec. 18), (2) como $1/r^2$ para un dipolo (véase la Ec. 21), y (3) como $1/r^3$ para un cuadripolo (véase la Ec. 22).

Adviértase además que (1) un dipolo está formado por dos cargas iguales y opuestas que no precisamente coinciden en el espacio, de modo que sus efectos eléctricos en puntos distantes no se cancelan por completo, y (2) un cuadripolo está formado por dos dipolos iguales y opuestos que no precisamente coinciden en el espacio de modo que, otra vez, sus efectos eléctricos en puntos distantes no se cancelan totalmente. Podemos continuar construyendo conjuntos más complejos de cargas eléctricas. Este proceso nos es útil, porque el potencial eléctrico de *cualquier* distribución de carga puede representarse mediante una serie de términos de potencias crecientes de $1/r$. La parte $1/r$, llamada el término *monopolar*, depende de la carga neta de la distribución, y los términos siguientes ($1/r^2$, el término *dipolar*; $1/r^3$, el término *cuadripolar*; y así sucesivamente) indican cómo está distribuida la carga. Este tipo de análisis se llama una *expansión o desarrollo en multipolos*.

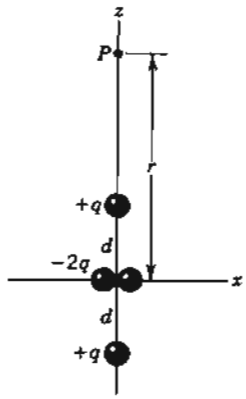


Figura 12 Problema muestra 8. Un cuadripolo eléctrico, que consta de dos dipolos eléctricos dirigidos opuestamente.

30-7 EL POTENCIAL ELÉCTRICO DE LAS DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA

Para calcular el potencial eléctrico de una distribución de carga continua, seguiremos el mismo método que se empleó en la sección 28-5 para calcular el campo eléctrico de una distribución de carga continua. El cálculo es más sencillo en el caso del potencial, porque el potencial es un escalar, y por lo tanto no es necesario tomar en cuenta las diferentes direcciones de las contribuciones de cada uno de los distintos elementos de carga.

Por analogía con la sección 28-5, suponemos que tenemos ya sea una línea de carga con densidad lineal de cargas λ, o una superficie de carga con densidad superficial de carga σ, o un volumen de carga con densidad volumétrica de carga ρ. Dividimos al objeto en pequeños elementos de carga dq, en donde

$$dq = \lambda\, ds, \quad dq = \sigma\, dA, \quad \text{o} \quad dq = \rho\, dv,$$

de acuerdo con la geometría del problema.*

* Escribimos el elemento de volumen como dv, de modo que no se confunda con el elemento diferencial de potencial dV.

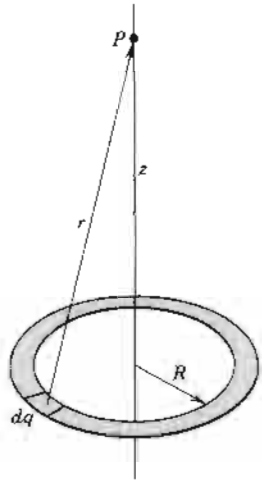


Figura 13 Un anillo cargado uniformemente. Para encontrar el potencial en P, calculamos el efecto total de todos los elementos de carga como dq.

Cada elemento dq puede considerarse como una carga puntual, con una contribución dV al potencial calculada de acuerdo con la ecuación 18, obteniéndose

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}. \tag{23}$$

Para determinar el potencial debido a toda la distribución, es necesario integrar las contribuciones individuales de todos los elementos, o sea

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}. \tag{24}$$

En muchos problemas, el objeto está cargado uniformemente, de modo que la densidad de carga es uniforme y sale de la integral.

Como ejemplo, hallemos el potencial eléctrico en el punto P, a una distancia z a lo largo del eje de un anillo uniforme de radio R y carga total q (Fig. 13). Consideremos un elemento de carga dq sobre el anillo. El potencial dV debido a este elemento está dado por la ecuación 23. Sin embargo, todos estos elementos del anillo están a la misma distancia r del punto P, y así, cuando integramos sobre el anillo, r permanece constante y se puede sacar de la integral. La integral restante $\int dq$, da simplemente la carga total q en el anillo. El potencial en el punto P puede, entonces, expresarse así

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad \text{(anillo de carga)}, \tag{25}$$

puesto que $r = \sqrt{R^2+z^2}$.

Problema muestra 9 Calcule el potencial en un punto sobre el eje de un disco circular de plástico de radio R, en el cual una superficie tiene una densidad uniforme de carga σ.

Solución En la figura 14 se muestra el disco. Consideremos un elemento de carga dq que consta de un anillo circular de radio w y anchura dw, para el cual

$$dq = \sigma(2\pi w)(dw),$$

en donde $(2\pi w)(dw)$ es el área superficial del anillo. La contribución de este anillo al potencial en P está dada por la ecuación 25:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma 2\pi w\, dw}{\sqrt{w^2+z^2}}.$$

El potencial V se halla al integrar para todos los anillos en los que se divide el disco, o sea

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R (w^2+z^2)^{-1/2}\, w\, dw,$$

lo cual da

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - z) \quad \text{(disco cargado uniformemente)}. \tag{26}$$

Este resultado general es válido para todos los valores positivos de z. En el caso especial de $z \gg R$, la cantidad $\sqrt{R^2+z^2}$ puede aproximarse como:

$$\sqrt{R^2+z^2} = z\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} = z\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+\cdots\right) \approx z+\frac{R^2}{2z},$$

en donde la cantidad dentro del paréntesis en el segundo miembro de esta ecuación se ha desarrollado mediante el teorema del binomio. Al usar esta aproximación, la ecuación 26 se reduce a

$$V \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(z+\frac{R^2}{2z}-z\right) = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z},$$

en donde q ($= \sigma\pi R^2$) es la carga total en el disco. Era de esperarse este resultado limitante, ya que el disco se comporta como una carga puntual cuando $z \gg R$.

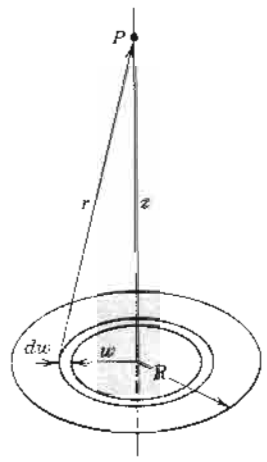


Figura 14 Problema muestra 9. Un disco de plástico de radio R tiene una densidad uniforme de carga σ sobre una superficie. El elemento de carga dq es un anillo cargado uniformemente.

30-8 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Las líneas de fuerza (o, de manera equivalente, las líneas a las que el campo eléctrico sea tangente) proporcionan una manera apropiada de visualizar el campo debido a cualquier distribución de carga. Podemos realizar una representación gráfica similar basados en el potencial eléctrico. En este método, trazamos una familia de superficies que unan puntos que tengan el mismo valor del potencial eléctrico. Estas superficies se llaman *superficies equipotenciales*.

Consideremos primero un campo eléctrico uniforme **E**, para el cual las líneas de fuerza se muestran en la figura 15*a*. Como lo dedujimos en la ecuación 4, la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera (como A y B_1 en la Fig. 15*a*) separados por una distancia L a lo largo de la dirección del campo tiene una magnitud igual a EL. Es decir, el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando una carga de prueba positiva q_0 se mueve desde A hasta B_1 es q_0EL. Si luego movemos la carga de prueba perpendicularmente al campo, como desde B_1 hasta B_2 o hasta B_3, el campo eléctrico no realiza ningún trabajo (porque $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$), y la diferencia de potencial entre B_1 y B_2 o B_3 es cero. De hecho, todos los puntos de la línea que contengan a B_1, B_2 y B_3 tienen el mismo potencial. Si este dibujo de un campo uniforme lo extendiéramos a tres dimensiones, los puntos que tuvieran un valor de potencial dado formarían una superficie plana: *en un campo eléctrico uniforme, las superficies equipotenciales son planos*. La figura 15*a* muestra (en sección transversal) una familia de superficies equipotenciales planas. La magnitud de la diferencia de potencial entre cualquier punto en el plano y cualquier punto en un plano vecino es EL, en donde L es el espaciamiento (constante) entre los planos.

El potencial de una carga puntual depende de la distancia radial desde la carga (Ec. 18). Así pues, todos los puntos en un radio dado tienen el mismo potencial, y *las superficies equipotenciales de una carga puntual forman una familia de esferas concéntricas*, que se muestra en sección transversal en la figura 15*b* como círculos concéntricos. Los círculos se han dibujado de modo que la diferencia de potencial entre cualquier superficie equipotencial y su vecina tenga el mismo valor (o sea, $\Delta V_{AB} = \Delta V_{BC} = \Delta V_{CD}$); las superficies equipotenciales de una carga puntual *no* están espaciadas igualmente, al contrario de la figura 15*a*. En un dipolo, las superficies equipotenciales son más complicadas (Fig. 15*c*).

Cuando una carga de prueba se mueve a lo largo de una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza ningún trabajo sobre ella. Esto se deduce directamente de la ecuación 10, ya que si $\Delta V = 0$, entonces $\Delta U = 0$, y el trabajo W es correspondientemente igual a 0. Además, debido a la independencia de la trayectoria del potencial, este resultado se cumple para dos puntos cualesquiera en la superficie equipotencial, aun si la trayectoria entre ellos no se encuentra por completo en la superficie equipotencial.

La figura 16 muestra una familia arbitraria de superficies equipotenciales. El trabajo realizado por el campo cuando una carga se mueve a lo largo de las trayectorias 1 o 2 es cero puesto que ambas comienzan y terminan en la misma superficie equipotencial. A lo largo de las trayectorias 3 y 4 el trabajo no es cero sino que tiene el mismo valor para estas dos trayectorias, ya que los potenciales inicial y final son idénticos; las trayectorias 3 y 4 unen al mismo par de superficies equipotenciales.

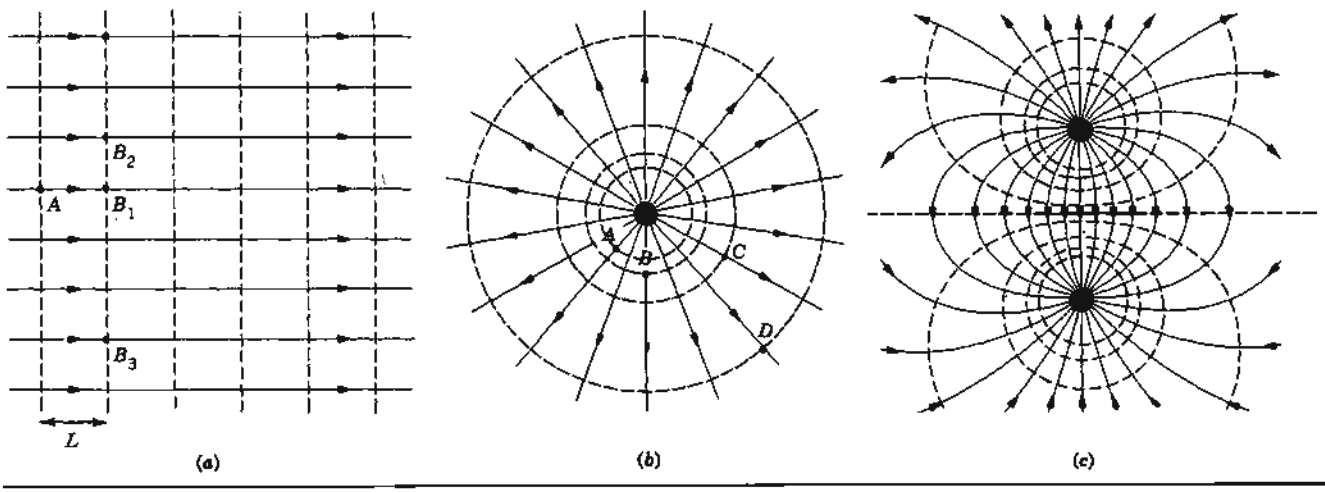


Figura 15 Líneas de fuerza (líneas continuas) y secciones transversales de superficies equipotenciales (líneas entrecortadas) para (*a*) un campo uniforme, (*b*) una carga puntual positiva, y (*c*) un dipolo eléctrico.

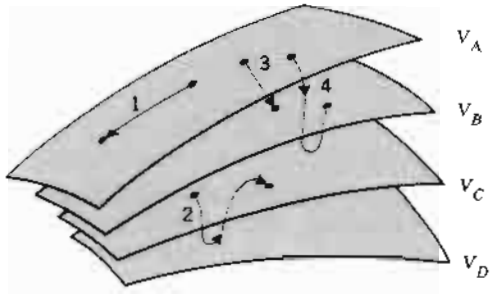


Figura 16 Porciones de cuatro superficies equipotenciales. Se muestran cuatro trayectorias diferentes para el movimiento de una partícula de prueba.

Al examinar la figura 15 vemos que las superficies equipotenciales están siempre en ángulo recto con las líneas de fuerza y por lo tanto con **E**. Si **E** *no* estuviese en ángulo recto con la superficie equipotencial, **E** tendría una componente que está en esta superficie. Esta componente ejercería una fuerza sobre una carga de prueba, y así se realizaría un trabajo sobre la carga de prueba al moverse sobre la superficie equipotencial. Pero, de acuerdo con la ecuación 10, no se puede realizar trabajo si la superficie es verdaderamente equipotencial. Por lo tanto **E** debe estar en ángulo recto con la superficie. En la sección siguiente consideraremos el cálculo de **E** a partir de V, lo cual confirma nuevamente que **E** debe ser perpendicular a la superficie equipotencial.

30-9 CÁLCULO DEL CAMPO A PARTIR DEL POTENCIAL

El potencial V y el campo **E** son descripciones equivalentes en electrostática. La ecuación 16, $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$, sugiere cómo calcular V a partir de **E**. Ahora consideraremos cómo calcular **E** si conocemos el valor de V a lo largo de cierta región.

Ya hemos determinado cómo resolver este problema gráficamente. Pueden dibujarse las líneas de fuerza si **E** es conocida en todos los puntos en el espacio; entonces puede trazarse una familia de equipotenciales al dibujar superficies perpendiculares a las líneas de fuerza. Estas equipotenciales describen el comportamiento de V. Inversamente, si V está dada como una función de la posición, puede dibujarse un conjunto de superficies equipotenciales. Las líneas de fuerza pueden entonces determinarse dibujando líneas perpendiculares a las superficies equipotenciales, describiendo así el comportamiento de **E**. Aquí buscamos el equivalente matemático de este segundo proceso gráfico, hallando **E** a partir de V. Véase la figura 15 para ejemplos de líneas de fuerza y las equipotenciales correspondientes.

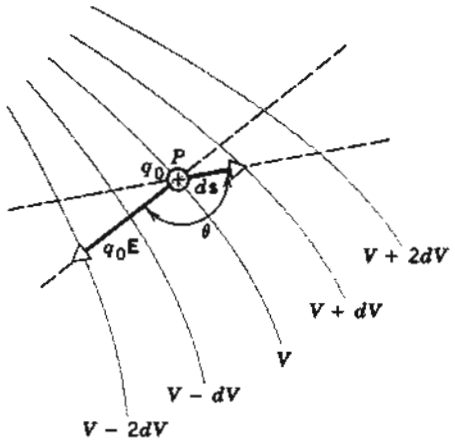


Figura 17 Una carga de prueba q_0 se mueve de una superficie equipotencial a otra a través del desplazamiento $d\mathbf{s}$.

La figura 17 muestra una sección transversal de una familia de superficies equipotenciales, que difieren en potencial por la cantidad dV. La figura muestra que **E** en un punto típico P está en ángulo recto con la superficie equipotencial que pasa por P.

Sea q_0 una carga de prueba que se mueve desde P a través del desplazamiento $d\mathbf{s}$ a la superficie equipotencial marcada $V + dV$. El trabajo realizado por el campo eléctrico es $-q_0 dV$. Desde otro punto de vista podemos calcular el trabajo realizado sobre la carga de prueba por el campo eléctrico de acuerdo con

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde **F** (= $q_0\mathbf{E}$) es la fuerza ejercida sobre la carga por por el campo eléctrico. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo puede escribirse como:

$$dW = q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 E\, ds \cos\theta.$$

Estas dos expresiones para el trabajo deben ser iguales, lo cual da

$$-q_0\, dV = q_0 E\, ds \cos\theta$$

o sea

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}.$$

Ahora $E\cos\theta$, a la que llamaremos E_s, es la componente de **E** en la dirección de $d\mathbf{s}$ en la figura 17. Por lo tanto obtenemos

$$E_s = -\frac{dV}{ds}. \qquad (27)$$

Es decir, esta ecuación afirma: *el negativo de la rapidez de cambio del potencial con la posición en cualquier dirección es la componente de* **E** *en esa dirección.* El signo menos implica que **E** apunta en la dirección, *decreciente* de V como en la figura 17. Es claro de la

ecuación 27 que una unidad apropiada para **E** es el volt/metro (V/m).

Habrá una dirección *ds* para la cual la cantidad $-dV/ds$ sea un máximo. De la ecuación 27 vemos que E_s será también un máximo para esta dirección y de hecho será E mismo. Entonces

$$E = -\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\text{máx}} \tag{28}$$

El valor máximo de dV/ds en un punto dado se llama *gradiente del potencial* en ese punto. La dirección *ds* para la cual dV/ds tiene su valor máximo está siempre en ángulo recto con la superficie equipotencial, correspondiendo a la dirección de **E** en la figura 17. Consideremos nuevamente a las superficies equipotenciales del campo uniforme (Fig. 15*a*), e imaginemos que las líneas de campo se remueven de la figura. Supongamos que una carga de prueba estuviese ubicada en el punto *A*, y que moviéramos la carga de prueba a una distancia fija *ds* en cualquier dirección y determináramos el cambio resultante en el potencial (como midiendo el trabajo realizado sobre la carga de prueba). Según la figura 15*a* está muy claro que, para una magnitud dada de *ds*, el cambio máximo en el potencial ocurrirá cuando movamos la carga tan lejos como sea posible del primer plano equipotencial y tan cerca como sea posible del siguiente. Esto ocurrirá sólo si movemos la carga perpendicularmente al plano, lo cual indica entonces que el campo eléctrico debe ser perpendicular al plano equipotencial. Al llevar a cabo este procedimiento para muchos puntos, podríamos dibujar un "mapa" del campo eléctrico para cualquier conjunto de superficies equipotenciales.

Si consideramos que la dirección *ds* está, a su vez, en las direcciones de los ejes *x*, *y* y *z*, podemos hallar las tres componentes de **E** en cualquier punto, de la ecuación 27:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \text{y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{29}$$

Entonces si V es conocida para todos los puntos del espacio, esto es, si la función $V(x, y \text{ y } z)$ es conocida, al derivar pueden determinarse las componentes de **E**, y por tanto **E** mismo.*

Tenemos, por tanto, dos métodos para calcular **E** para distribuciones continuas de carga. Una basada en la integración de la ley de Coulomb (véanse las Ecs. 11 y 12 del capítulo 28), y la otra basada en diferenciar a V (véase la Ec. 29). En la práctica, este segundo método suele ser menos difícil.

* El símbolo $\partial V/\partial x$ denota una *derivada parcial*. Al considerar esta derivada de la función $V(x, y, z)$, la cantidad x debe considerarse como una variable, y y y z como constantes. Consideraciones similares se aplican para $\partial V/\partial y$ y $\partial V/\partial z$.

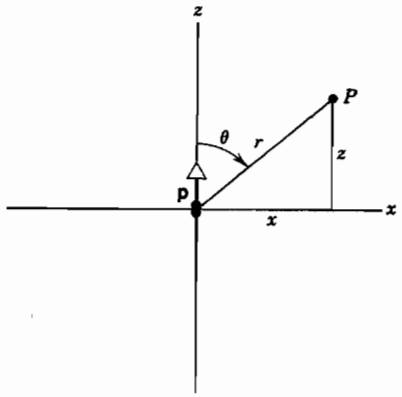


Figura 18 Problema muestra 11. Un dipolo está ubicado en el origen del sistema *xz*.

Problema muestra 10 Usando la ecuación 26 para el potencial sobre el eje de un disco cargado uniformemente, obtenga una expresión para el campo eléctrico en puntos sobre el eje.

Solución Según la simetría, **E** debe estar a lo largo del eje del disco (el eje z). Usando la ecuación 29, tenemos

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{d}{dz}\left[(z^2 + R^2)^{1/2} - z\right]$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right).$$

Ésta es la misma expresión que dedujimos en la sección 28-5 por integración directa, al emplear la ley de Coulomb; compárese con la ecuación 27 de aquel capítulo.

Problema muestra 11 La figura 18 muestra un punto *P* (distante) en el campo de un dipolo ubicado en el origen de un sistema de coordenadas *xz*. Calcule **E** como función de la posición.

Solución Por simetría, **E** en los puntos del plano de la figura 18 se encuentra en este plano y puede expresarse en términos de sus componentes E_x y E_z, siendo E_y cero. Expresemos primero el potencial en coordenadas rectangulares más bien que en coordenadas polares, valiéndonos de

$$r = (x^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}}.$$

V está dado por la ecuación 21,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}.$$

Al sustituir a r^2 y a $\cos\theta$, obtenemos

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Hallamos E_z a partir de la ecuación 29, recordando que x tiene que considerarse como una constante en este cálculo,

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x^2+z^2)^{3/2} - z[\frac{3}{2}(x^2+z^2)^{1/2}](2z)}{(x^2+z^2)^3} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^2-2z^2}{(x^2+z^2)^{5/2}}. \quad (30)$$

Al poner $x = 0$ se describen los puntos distantes a lo largo del eje del dipolo (esto es, el eje z), y la expresión para E_z se reduce a

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{z^3}.$$

Este resultado concuerda exactamente con el encontrado en el capítulo 28 (véase problema 11 del capítulo 28) para el campo a lo largo del eje del dipolo. Nótese que a lo largo del eje z, $E_x = 0$ por simetría.

Si ponemos $z = 0$ en la ecuación 30 nos da E_z para puntos distantes en el plano que está situado en el centro del dipolo:

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3},$$

lo cual coincide exactamente con el resultado hallado en la ecuación 10 del capítulo 28, ya que, nuevamente por simetría, E_z es igual a cero en el plano que está situado en el centro. En esta ecuación el signo de menos indica que $\mathbf{E}$ apunta hacia la dirección z negativa.

La componente E_x se halla también a partir de la ecuación 29, recordando que z tiene que considerarse como una constante durante este cálculo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{pz}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+z^2)^{-5/2}(2x) = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0}\frac{xz}{(x^2+z^2)^{5/2}}. \quad (31)$$

Como se esperaba, E_x se desvanece tanto en el eje del dipolo ($x = 0$) como en el plano que pasa por el centro ($z = 0$).

30-10 UN CONDUCTOR AISLADO

En la sección 29-4 empleábamos la ley de Gauss para probar un importante teorema acerca de los conductores aislados: una carga en exceso colocada en un conductor aislado se mueve por completo a la superficie externa del conductor. En el equilibrio, nada de la carga se encuentra dentro del cuerpo del conductor o en ninguna de las superficies interiores, aun cuando el conductor tenga cavidades internas (siempre y cuando no exista una carga neta dentro de alguna de las cavidades).

Esta propiedad de los conductores puede enunciarse equivalentemente en el lenguaje de potencial:

> *Una carga en exceso colocada en un conductor aislado se distribuye a sí misma en la superficie de modo que todos los puntos del conductor —ya estén en la superficie o dentro— llegan al mismo potencial.*

Esta propiedad se cumple aun cuando el conductor tenga cavidades internas, tanto si contienen o no una carga neta.

La demostración de este postulado se basa en la observación experimental de que, en la situación de estado estable (régimen permanente), no existen corrientes internas en un conductor. Si dos puntos dentro de un conductor estuviesen a potenciales diferentes, entonces las cargas libres (presumiblemente electrones, cargados negativamente) se moverían de las regiones de potencial bajo a las regiones de potencial elevado. Tal movimiento de las cargas estaría en contradicción con la observación de que no existen corrientes en estado estable. Por lo tanto, los puntos internos no pueden tener potenciales diferentes.

Podemos demostrar también este enunciado, basados en la ecuación 15. En la sección 29-4 aprendimos que el campo eléctrico es cero en un conductor. Si $\mathbf{E} = 0$ *en todas partes* dentro de un conductor, entonces la integral $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ en cualquier trayectoria entre cualquier par de puntos extremos a y b dentro del conductor. Así pues, $V_b - V_a = 0$ para todos los posibles pares de puntos, y el potencial tiene un valor constante.

También en la sección 29-4 dedujimos que el campo eléctrico cerca de la superficie de un conductor es perpendicular a su superficie. Esto es consistente con el hecho de que la superficie del conductor sea una equipotencial; como lo demostramos en la sección 30-9, el campo eléctrico es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales.

La figura 19 muestra la variación del potencial con la distancia radial en una esfera hueca conductora y aislada

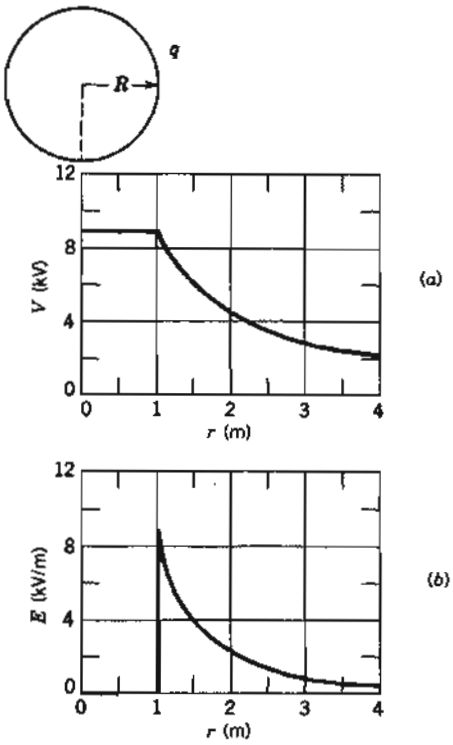


Figura 19 (*a*) El potencial y (*b*) el campo eléctrico en una esfera hueca que tiene una carga uniforme.

de 1.0 m de radio que contiene una carga de 1.0 μC. Para los puntos fuera de la esfera hueca, $V(r)$ puede calcularse a partir de la ecuación 16 porque la carga q se comporta, en los puntos externos, como si estuviese concentrada en el centro de la esfera. La ecuación 16 da el potencial conforme nos acercamos desde afuera, hasta la superficie de la esfera. Supongamos ahora que existe un orificio diminuto en la superficie, justo suficiente para permitirnos empujar una carga de prueba al interior. No actúa ninguna fuerza eléctrica adicional sobre la carga de prueba desde el interior, así que su potencial no cambia. Como lo muestra la figura 19*a*, el potencial en todo el interior de la esfera es igual al de la superficie.

La figura 19*b* muestra el campo eléctrico para esta misma esfera hueca. Nótese que $\mathbf{E} = 0$ en todo el interior. Podemos obtener la figura 19*b* de la figura 19*a* derivando, según la ecuación 28; podemos obtener la figura 19*a* de la figura 19*b* integrando, según la ecuación 16.

La figura 19 no cambiaría si el conductor fuese una esfera conductora *sólida* en lugar de hueca, como lo supusimos. Sin embargo, compárese la figura 19*b* (esfera conductora hueca o sólida) con la figura 12 del capítulo 29, en la cual se describió el caso de una esfera *no conductora*. La diferencia surge, pues la carga en la esfera conductora, hueca o sólida, se encuentra por completo en la superficie, pero para la esfera no conductora ésta se distribuye en todo el volumen.

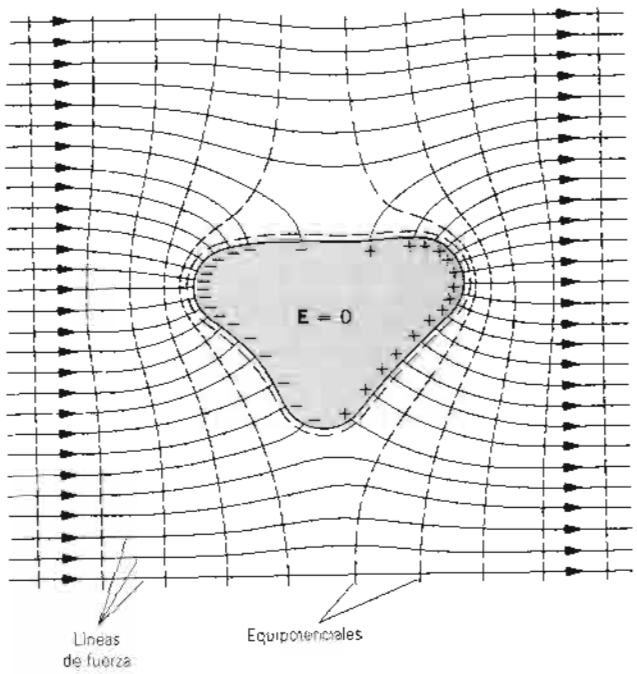


Figura 20 Un conductor sin carga está situado en un campo eléctrico externo. Los electrones de conducción se distribuyen por sí mismos sobre la superficie produciendo una distribución de carga como la que se muestra y reduciéndose a cero el campo dentro del conductor. Obsérvese la distorsión de las líneas de fuerza (líneas llenas) y las equipotenciales (líneas de trazos) cuando el conductor es colocado en el campo previamente uniforme.

Un conductor en un campo eléctrico externo

Todos los puntos de un conductor deben estar al mismo potencial ya sea que el conductor porte o no una carga neta. Además, esto es cierto aun si el campo eléctrico que da origen al potencial es impuesto externamente y no proviene de una carga neta en el conductor.

La figura 20 muestra un conductor sin carga dentro de un campo eléctrico externo. El campo era uniforme antes de que el conductor se colocara en él. Los electrones libres de conducción del conductor se mueven en respuesta al campo, tendiendo las cargas negativas a acumularse en un lado del conductor y las cargas positivas en el otro. Como se muestra en la figura 20, las líneas de campo, que deben comenzar o terminar en cargas libres, están distorsionadas de su configuración uniforme previa. Las superficies equipotenciales son láminas planas en las regiones uniformes lejos del conductor, y cerca del conductor toman gradualmente la forma de su superficie, la cual, como lo hemos visto, debe ser una superficie equipotencial.

Si las cargas superficiales en el conductor pudieran ser, de alguna forma, congeladas en el espacio y el conductor retirado, las líneas de campo no cambiarían. En particular, en la región anteriormente ocupada por el conductor, las cargas dan origen a un campo uniforme que apunta hacia la izquierda en la figura 20 y cancela exactamente al campo uniforme original para dar un campo cero en el interior del conductor. Fuera de esa región, las cargas superficiales dan un campo que se combina vectorialmente con el campo uniforme original para dar la resultante mostrada.

Un patrón de líneas de campo, como el dibujado en la figura 20, puede hacerse visible al rodear el conductor con una suspensión de partículas pequeñas, las cuales se alinean con las líneas de campo (véase la Fig. 9 del capítulo 28). Alternativamente, puede hacerse un mapa de las superficies equipotenciales mediante un par de sondas electrónicas, fijando una de ellas y usando la otra para localizar a todos los puntos con una diferencia de potencial de cero relativo al primer punto.

Descarga en corona *(Opcional)*

Si bien la carga superficial se distribuye uniformemente en un conductor esférico, éste *no* será el caso en conductores de forma arbitraria.* Cerca de puntas o bordes agudos, la densidad de carga superficial —y por lo tanto, el campo eléctrico justo fuera de la superficie— pueden alcanzar valores muy elevados.

* Véase "The Lightning-rod Fallacy", por Richard H. Price y Ronald J. Crowley, *American Journal of Physics*, septiembre de 1985, pág. 843, para un análisis detallado de este fenómeno.

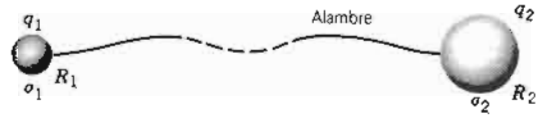


Figura 21 Dos esferas conductoras conectadas por un alambre delgado y largo.

Para ver cualitativamente cómo ocurre esto, consideremos dos esferas conductoras de radios diferentes conectadas por medio de un alambre delgado (Fig. 21). Considere que todo el conjunto se encuentra a algún potencial elevado arbitrario V. Los potenciales (iguales) de las dos esferas, usando la ecuación 18, son

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R_2},$$

lo cual da

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{32}$$

Nótese que la ecuación 18, la cual dedujimos originalmente de una carga puntual, se cumple para cualquier distribución de carga esféricamente simétrica. Suponemos que las esferas están tan separadas entre sí, que la carga sobre una no afecta a la distribución de la carga de la otra.

La razón de las densidades superficiales de carga de las dos esferas es

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1 R_2^2}{q_2 R_1^2}.$$

Al combinar este resultado con la ecuación 32 nos da

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{33}$$

La ecuación 33 sugiere que la esfera más pequeña tiene la densidad superficial de carga mayor. En la geometría mostrada en la figura 21, esto implica que el campo eléctrico cerca de la esfera más pequeña es mayor que el campo eléctrico cerca de la esfera más grande. Cuanto más pequeño sea el radio de la esfera, mayor será el campo eléctrico cerca de su superficie.

Cerca de un conductor agudo (es decir, uno de radio muy pequeño) el campo eléctrico puede ser lo suficientemente grande como para ionizar a las moléculas en el aire circundante; como resultado, el aire normalmente no conductor puede conducir y transportar carga lejos del conductor. Tal efecto se llama *descarga en corona*. Los rociadores electrostáticos de pintura usan una descarga en corona para transferir carga a las gotitas de pintura, las cuales entonces son aceleradas por un campo eléctrico. Las máquinas de fotocopiar basadas en el proceso de xerografía usan un alambre para producir una descarga en corona que transfiere la carga a una superficie recubierta con selenio; la carga se neutraliza en las regiones en donde la luz incide sobre la superficie, y las áreas cargadas restantes atraen un polvo negro fino que forma la imagen. ■

30-11 EL ACELERADOR ELECTROSTÁTICO *(Opcional)*

Muchos de los estudios sobre núcleos implican reacciones nucleares, que ocurren cuando un haz de partículas incide en un blanco. Un método empleado para acelerar partículas en reacciones nucleares se basa en una técnica electrostática. Una partícula de carga positiva q "cae" a través de un cambio negativo en el potencial ΔV y por lo tanto, experimenta un cambio negativo en su energía potencial, $\Delta U = q\Delta V$, de acuerdo con la ecuación 11. El aumento correspondiente en la energía cinética de la partícula es $\Delta K = -\Delta U$, y, suponiendo que la partícula inicie del reposo, su energía cinética final es

$$K = -q\,\Delta V. \tag{34}$$

En los átomos ionizados, q es normalmente positiva (si bien existe una aplicación importante de la ecuación 34 que hace uso de iones negativos y diferencias de potencial positivas). Para obtener la máxima energía posible para el haz, desearíamos tener la máxima diferencia de potencial. En aplicaciones de interés en física nuclear, se requieren partículas con energías cinéticas de millones de electrón-volts (MeV) para vencer la fuerza de repulsión de Coulomb entre las partículas incidentes y las del blanco. Las energías cinéticas del MeV requieren diferencias de potencial de millones de volts.

En la figura 22 se ilustra un aparato electrostático que puede producir tales diferencias de potencial grandes. Una pequeña esfera conductora de radio r que tiene una carga q se localiza dentro de un cascarón esférico de mayor tamaño de radio R que contiene una carga Q. Momentáneamente se establece una trayectoria conductora entre los dos conductores, y la carga q se mueve entonces totalmente al conductor exterior, independientemente de cuánta carga Q esté residiendo allí (véase también la Fig. 14 del capítulo 29 y el análisis relacionado en la sección 29-6). Si existe un mecanismo adecuado para abastecer de nuevo la carga q en la esfera interior a partir de una fuente externa, la carga Q en la esfera exterior y su potencial pueden, en principio, incrementarse sin límite. En la práctica, el potencial final está limitado por el chisporroteo que ocurre en el aire (Fig. 23).

Este bien conocido principio de la electrostática se aplicó primero a partículas nucleares en aceleración por Robert J. Van de Graaff a principios del decenio de 1930, y al acelerador se le conoce como *acelerador Van de Graaff*. Se alcanzaron fácilmente potenciales de varios millones de volts, ya que el límite en el potencial se debía a la fuga de carga a través de los soportes

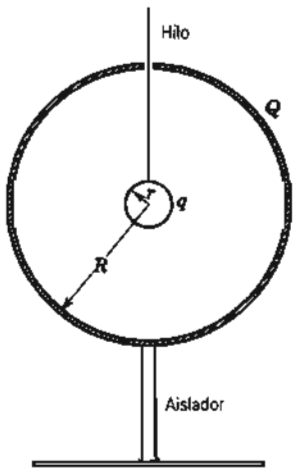


Figura 22 Una esfera pequeña cargada está suspendida dentro de un cascarón esférico cargado más grande.

Figura 23 Un generador electrostático, con un potencial de 2.7 millones de volts, produce chisporroteo debido a la conducción en el aire.

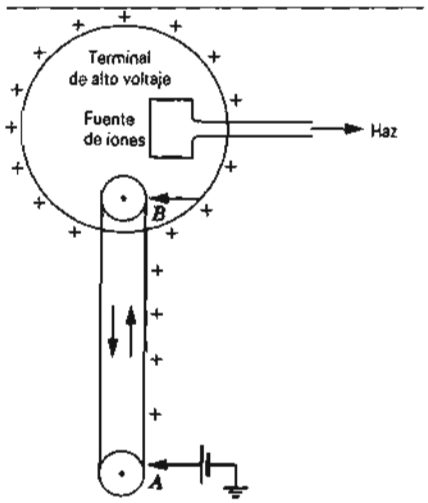


Figura 24 Diagrama del acelerador Van de Graaff. Una carga positiva se esparce sobre la banda móvil en *A* y se retira de la banda en *B*, de donde fluye por la terminal, la cual resulta cargada a un potencial *V*. Los iones cargados positivamente son repelidos por la terminal para formar el haz del acelerador.

aislantes o a la disrupción del aire (o del gas aislante a presión elevada) que rodeaba a la terminal de alto voltaje.

La figura 24 muestra el diseño básico del acelerador Van de Graaff. Se "alimenta" la carga mediante una punta aguda (llamada una punta de corona) en *A*, sobre una banda en movimiento hecha de material aislante (a menudo hule). La banda transporta la carga a la terminal de alto voltaje, en donde se remueve por otra punta de corona *B* y pasa al conductor exterior. Dentro de la terminal hay una fuente de iones positivos, por ejemplo, núcleos de hidrógeno (protones) o de helio (partículas alfa). Los iones "caen" desde el potencial elevado, adquiriendo una energía cinética de varios MeV en el proceso. La terminal está encerrada en un tanque que contiene un gas aislante para evitar el chisporroteo.

Una variación inteligente de este diseño básico hace uso del mismo voltaje elevado para acelerar a los iones dos veces, ganando por tanto un aumento adicional en la energía cinética. Afuera de la terminal se encuentra una fuente de iones *negativos*, formada al agregar un electrón a un átomo neutro. Estos iones negativos "caen" hacia el potencial positivo de la terminal. Adentro de la terminal de alto voltaje, el haz pasa a través de una cámara que consta de un gas o de una hoja delgada de metal, diseñada para retirar o despojar a varios electrones de los iones negativos, convirtiéndolos en iones positivos que luego "caen" al potencial positivo. Tales aceleradores Van de Graaff en "tandem" usan por lo común un voltaje terminal de 25 millones de volts para acelerar iones como el carbono o el oxígeno a energías cinéticas en exceso de 100 MeV.

Problema muestra 12 Calcule la diferencia de potencial entre las dos esferas ilustradas en la figura 22.

Solución La diferencia de potencial $V(R) - V(r)$ tiene dos contribuciones: una de la esfera pequeña y una del cascarón grande. Éstas pueden calcularse independientemente y sumarse algebraicamente. Consideremos en primer lugar al cascarón grande. La figura 19*a* muestra que el potencial en todos los puntos interiores tiene el mismo valor que el potencial en la superficie. De manera que la contribución del cascarón grande a la diferencia $V(R) - V(r)$ es 0.

Todo lo que resta entonces es evaluar la diferencia considerando sólo la esfera pequeña. Para todos los puntos externos a la esfera pequeña, podemos tratarla como una carga puntual, y la diferencia de potencial puede calcularse de la ecuación 19:

$$V(R) - V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Esta expresión da la diferencia de potencial entre la esfera interior y el cascarón exterior. Nótese que el resultado es *independiente de la carga Q en el cascarón exterior*. Si q es positiva, la diferencia será siempre negativa, indicando que el cascarón exterior siempre estará a un potencial más bajo. Si se permite que la carga positiva fluya entre las esferas, siempre fluirá desde el potencial más elevado al más bajo, es decir, de la esfera interior a la exterior, sin importar cuánta carga resida ya en el cascarón exterior. ■

PREGUNTAS

1. ¿Estamos en libertad de decir que el potencial de la Tierra es +100 V en lugar de cero? ¿Qué efecto tendría tal suposición en los valores medidos de (*a*) los potenciales y (*b*) las diferencias de potencial?

2. ¿Qué le sucedería a usted si estuviese sobre un soporte aislado y su potencial aumentara en 10 kV con respecto a la Tierra?
3. ¿Por qué a menudo el electrón-volt es una unidad de energía más conveniente que el joule?
4. ¿Cómo se compararía un protón-volt con un electrón-volt? La masa de un protón es 1840 veces mayor que la de un electrón.
5. ¿Tienden los electrones a ir a regiones de potencial elevado o de potencial bajo?
6. ¿Acaso la cantidad de trabajo por unidad de carga necesaria para transferir una carga eléctrica de un punto a otro en un campo electrostático depende de la cantidad de carga transferida?
7. Distinga entre la diferencia de potencial y la diferencia de energía potencial. Dé ejemplos de enunciados en los que cada término se use apropiadamente.
8. Calcule la energía combinada de todos los electrones que chocan con la pantalla de un osciloscopio de rayos catódicos en 1 segundo.
9. ¿Por qué es posible blindar a un salón contra las fuerzas eléctricas pero no contra las fuerzas gravitatorias?
10. Suponga que la Tierra tiene una carga neta que no sea cero. ¿Por qué aun así es posible adoptar a la Tierra como un punto estándar de referencia del potencial y asignarle el potencial $V = 0$?
11. ¿Puede existir una diferencia de potencial entre dos conductores que contengan cargas iguales de la misma magnitud?
12. Dé ejemplos de situaciones en las que el potencial de un cuerpo cargado tenga un signo opuesto al de su carga.
13. ¿Pueden intersecarse dos superficies equipotenciales diferentes?
14. Un electricista se electrocutó por accidente y la noticia apareció en el periódico como sigue: "Tocó por accidente un cable de alto voltaje y su cuerpo recibió una descarga de 20,000 V de electricidad". Critique esta aseveración.
15. Se aconseja a los montañistas que quedan atrapados en una tormenta eléctrica (*a*) alejarse rápidamente de picos y crestas y (*b*) juntar ambos pies y acurrucarse a cielo abierto, tocando tierra sólo con los pies. ¿En qué se basa este buen consejo?
16. Si **E** es igual a cero en un punto dado, ¿debe V ser igual a cero en ese punto? Dé algunos ejemplos para confirmar su respuesta.
17. Si usted conoce únicamente a **E** en un punto dado, ¿puede usted calcular V en ese punto? Si no, ¿qué información adicional se necesita?
18. En la figura 16, ¿es el campo eléctrico E mayor a la izquierda o a la derecha de la figura?
19. En el problema muestra 9, ¿es el disco uniformemente cargado, no conductor, una superficie de potencial constante? Explique.
20. Ya hemos visto que, dentro de un conductor hueco, uno queda blindado contra los campos de cargas exteriores. Si usted está *fuera* de un conductor hueco que contiene cargas, ¿quedará blindado contra los campos de estas cargas? Explique.
21. Si la superficie de un conductor cargado es una equipotencial, ¿significa que la carga está distribuida uniformemente en esa superficie? Si el campo eléctrico es de magnitud constante en la superficie de un conductor cargado, ¿significa precisamente *esto* que la carga está distribuida uniformemente?
22. En la sección 30-10 se nos advertía que la carga entregada al *interior* de un conductor aislado se transfiere *totalmente* a la superficie exterior del conductor, sin importar cuánta carga esté ya allí. ¿Puede usted seguir afirmando esto siempre? Si no, ¿qué se lo impide?
23. ¿Por qué un átomo aislado no puede tener un momento dipolar eléctrico permanente?
24. Los iones y los electrones actúan como centros de condensación; en el aire, alrededor de ellos se forman gotitas de agua. Explique por qué.
25. Si a lo largo de una determinada región del espacio, V es igual a una constante ¿qué se puede decir con respecto a **E** en esa región?
26. En el capítulo 16 vimos que la intensidad del campo gravitatorio es cero dentro de una esfera hueca de materia. La intensidad del campo eléctrico es cero no sólo dentro de un conductor esférico cargado y aislado sino también dentro de un conductor aislado de cualquier forma. ¿Es cero la intensidad del campo gravitatorio dentro, digamos, de un cubo hueco de materia? Si no, ¿en qué aspecto no es completa la analogía?
27. ¿Cómo se puede asegurar que el potencial eléctrico en una región determinada del espacio tendrá un valor constante?
28. Idee un arreglo de tres cargas puntuales, separadas por distancias finitas, que tenga una energía potencial eléctrica igual a cero.
29. Una carga se coloca en un conductor aislado que tiene la forma de un cubo perfecto. ¿Cuál será la densidad de carga relativa en varios puntos del cubo (caras, orillas y esquinas)? ¿Qué le sucederá a la carga si el cubo está en el aire?
30. Hemos visto (sección 30-10) que el potencial dentro de un conductor es igual al de su superficie. (*a*) ¿Qué sucede si el conductor tiene una forma irregular y además tiene una cavidad interior también de forma irregular? (*b*) ¿Qué sucede si la cavidad tiene un pequeño agujero, como el que traza un gusano en una manzana, que sale al exterior? (*c*) ¿Qué sucede si la cavidad está cerrada pero tiene una carga puntual suspendida dentro de ella? Analice el potencial dentro del material conductor y en diferentes puntos dentro de las cavidades.
31. Un cascarón conductor y aislado contiene una carga negativa. ¿Qué sucederá si se coloca un objeto metálico cargado positivamente en contacto con el interior del cascarón? Analice, en cuanto a magnitud, los tres casos en que la carga positiva sea (*a*) menor que, (*b*) igual a, y (*c*) mayor que la carga negativa.
32. Una esfera de metal no cargada suspendida por un hilo de seda se coloca en un campo eléctrico externo uniforme. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en los puntos dentro de la esfera? ¿Sería otra la respuesta si la esfera tuviera una carga?

PROBLEMAS

Sección 30-2 Energía potencial eléctrica

1. En el modelo de quark de las partículas fundamentales, el protón está compuesto de tres quarks: dos quarks "arriba", cada uno de ellos con una carga de $+\frac{2}{3}e$, y un quark "abajo", con una carga de $-\frac{1}{3}e$. Supóngase que los tres quarks están equidistantes entre sí. Considere que la distancia es de 1.32×10^{-15} m, y calcule (*a*) la energía potencial de la interacción entre los dos quarks "arriba" y (*b*) la energía potencial eléctrica total del sistema.
2. Obtenga una expresión para el trabajo requerido por un agente externo para juntar cuatro cargas como se indica en la figura 25. Cada lado del cuadrado tiene una longitud *a*.

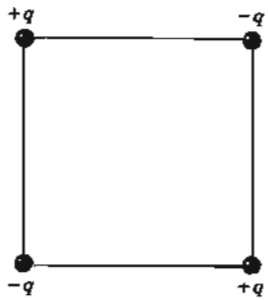


Figura 25 Problema 2.

3. Diez años antes de que Einstein publicara su teoría de la relatividad, J. J. Thomson propuso que el electrón estaba constituido de pequeñas partes y que su masa se debía a la interacción eléctrica de las partes. Además, sugirió que la energía era igual a mc^2. Haga un cálculo aproximado de la masa del electrón de la siguiente manera: suponga que el electrón está compuesto de tres partes idénticas las cuales se traen desde el infinito y se colocan en los vértices de un triángulo equilátero que tiene lados iguales al radio clásico del electrón, 2.82×10^{-15} m. (*a*) Halle la energía potencial eléctrica total de este arreglo. (*b*) Divida entre c^2 y compare su resultado con el de la masa aceptada para el electrón (9.11×10^{-31} kg). El resultado mejora si se suponen más partes. Hoy día, se piensa que el electrón tiene una sola partícula indivisible.
4. Las cargas mostradas en la figura 26 están fijas en el espacio. Determine el valor de la distancia *x* de modo que la energía potencial eléctrica del sistema sea cero.

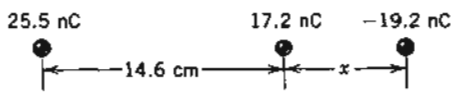


Figura 26 Problema 4.

5. La figura 27 es una representación idealizada de un núcleo de ^{238}U ($Z = 92$) el cual está a punto de fisionarse. Calcule (*a*) la fuerza de repulsión que actúa sobre cada fragmento y (*b*) la energía potencial eléctrica mutua de los dos fragmentos. Suponga que los fragmentos son iguales en tamaño y carga, esféricos, y que apenas se tocan. El radio del núcleo de ^{238}U, inicialmente esférico, es de 8.0 fm. Considere que el material del que están hechos los núcleos es de densidad constante.

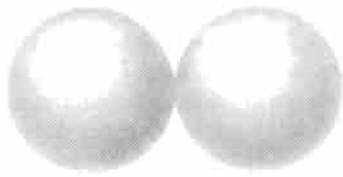


Figura 27 Problema 5.

Sección 30-3 Potencial eléctrico

6. Dos superficies conductoras planas y paralelas con un espaciamiento $d = 1.0$ cm tienen una diferencia de potencial ΔV de 10.3 kV. Un electrón es proyectado de una placa directamente hacia la segunda. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón si llega al reposo justo en la superficie de la segunda placa? No tome en cuenta los efectos relativistas.
7. En un relámpago típico la diferencia de potencial entre los puntos de la descarga es alrededor de 1.0×10^9 V y la cantidad de carga transferida es de unos 30 C. (*a*) ¿Cuánta energía se libera? (*b*) Si toda la energía liberada pudiera emplearse para acelerar un automóvil de 1200 kg desde el reposo, ¿cuál sería su velocidad final? (*c*) Si pudiera emplearse para fundir hielo, ¿cuánto hielo fundiría a 0°C?
8. La diferencia de potencial eléctrico entre puntos de descarga durante una tormenta eléctrica en particular es de 1.23×10^9 V. ¿Cuál es la magnitud del cambio en la energía potencial eléctrica de un electrón que se mueva entre estos puntos? Dé su respuesta en (*a*) joules, y (*b*) electrón-volts.
9. (*a*) ¿A través de qué diferencia de potencial debe caer un electrón, según la mecánica newtoniana, para adquirir una velocidad v igual a la velocidad c de la luz? (*b*) La mecánica newtoniana no funciona cuando $v \to c$. Por lo tanto, usando la expresión relativista correcta para la energía cinética (véase la Ec. 27 del capítulo 21)

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right]$$

en lugar de la expresión newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$, determine la velocidad real del electrón adquirida al caer a través de la diferencia de potencial calculada en (*a*). Exprese esta velocidad como una fracción apropiada de la velocidad de la luz.

10. Un electrón es proyectado con una velocidad inicial de 3.44×10^5 m/s directamente hacia un protón que está esencialmente en reposo. Si el electrón está inicialmente a una gran distancia del protón, ¿a qué distancia del protón

es su velocidad instantáneamente igual al doble del valor inicial?

11. Una partícula de carga q se mantiene en una posición fija en un punto P y una segunda partícula de masa m, que tiene la misma carga q, se mantiene inicialmente en reposo a una distancia r_1 de P. Luego se suelta la segunda partícula y es repelida por la primera. Determine su velocidad en el instante en que se encuentre a una distancia r_2 de P. Sea $q = 3.1\ \mu C$, $m = 18$ mg, $r_1 = 0.90$ mm y $r_2 = 2.5$ mm.
12. Calcule (*a*) el potencial eléctrico generado por el núcleo de un átomo de hidrógeno a la distancia promedio de la órbita del electrón ($r = 5.29 \times 10^{-11}$ m), (*b*) la energía potencial eléctrica del átomo cuando el electrón está en este radio, y (*c*) la energía cinética del electrón, suponiendo que esté moviéndose en una órbita circular de este radio centrado en el núcleo. (*d*) ¿Cuánta energía se requiere para ionizar al átomo de hidrógeno? Exprese todas las energías en electrón-volts.
13. Suponga que una carga Q (positiva) tiene una posición fija en P. Una segunda partícula de masa m y carga (negativa) $-q$ se mueve a velocidad constante en un círculo de radio r_1, centrado en P. Encuentre una expresión para el trabajo W que un agente externo debe realizar sobre la segunda partícula con objeto de aumentar el radio del círculo de movimiento, centrado en P, hasta r_2.
14. En el rectángulo mostrado en la figura 28, los lados tienen una longitud de 5.0 cm y 15 cm. $q_1 = -5.0\ \mu C$ y $q_2 = +2.0\mu C$. (*a*) ¿Cuáles son los potenciales eléctricos en la esquina B y en la esquina A? (*b*) ¿Cuánto trabajo externo se requiere para mover a una tercera carga $q_3 = +3.0\ \mu C$ desde B hasta A a lo largo de una diagonal del rectángulo? (*c*) En este proceso, ¿se convierte el trabajo externo en energía potencial electrostática o viceversa? Explique.

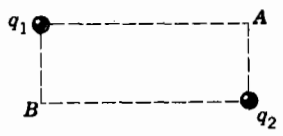


Figura 28 Problema 14.

15. Tres cargas de +122 mC cada una están colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero de 1.72 m de lado. Si se abastece energía a razón de 831 W, ¿cuántos días se necesitarían para mover a una de las cargas al punto medio de la línea que une a las otras dos?

Sección 30-4 Cálculo del potencial a partir del campo

16. Una lámina infinita de carga tiene una densidad de carga $\sigma = 0.12\ \mu C/m^2$. ¿Cuál es la separación entre las superficies equipotenciales cuyos potenciales difieren en 48 V?
17. Dos placas conductoras paralelas y grandes están separadas por 12.0 cm y portan cargas iguales pero opuestas sobre las superficies que están encaradas. Un electrón situado a medio camino entre las dos placas experimenta una fuerza de 3.90×10^{-15} N. (*a*) Calcule el campo eléctrico en la posición del electrón. (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?
18. En el experimento de Millikan de la gota de aceite (véase la sección 28-6), un campo eléctrico de 1.92×10^5 N/C, se mantiene en equilibrio entre dos placas con una separación entre ellas de 1.50 cm. Calcule la diferencia de potencial entre las placas.
19. Un contador Geiger tiene un cilindro metálico de 2.10 cm de diámetro a lo largo de cuyo eje se extiende un alambre de 1.34×10^{-4} cm de diámetro. Si se aplican 855 V entre ellos, determine el campo eléctrico en la superficie de (*a*) el alambre y (*b*) el cilindro. (*Sugerencia*: Utilice el resultado del problema 36, capítulo 29.)
20. El campo eléctrico dentro de una esfera no conductora de radio R, que contiene una densidad uniforme de carga, está dirigido radialmente y tiene una magnitud de

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

donde q es la carga total en la esfera y r es la distancia desde el centro de la esfera. (*a*) Encuentre el potencial $V(r)$ dentro de la esfera, considerando que $V = 0$ cuando $r = 0$. (*b*) ¿Cuál es la diferencia en el potencial eléctrico entre un punto en la superficie y el centro de la esfera? Si q es positiva, ¿qué punto está al potencial más elevado? (*c*) Demuestre que el potencial a una distancia r del centro, cuando $r < R$, está dado por

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3},$$

donde el cero de potencial se considera en $r = \infty$. ¿Por qué este resultado es diferente del de la parte (*a*)?

Sección 30-5 El potencial debido a una carga puntual

21. Un núcleo de oro contiene una carga positiva igual a la de 79 protones y tiene un radio de 7.0 fm; véase el problema muestra 6. Una partícula alfa (que consta de dos protones y dos neutrones) tiene una energía cinética K en los puntos alejados del núcleo y está viajando directamente hacia él. La partícula alfa toca apenas la superficie del núcleo cuando su velocidad invierte la dirección. (*a*) Calcule K. (*b*) La energía real de la partícula alfa usada en el experimento de Rutherford y sus colaboradores y que condujo al descubrimiento del concepto del núcleo atómico era de 5.0 MeV. ¿A qué conclusión llega usted?
22. Calcule la velocidad de escape de un electrón de la superficie de una esfera cargada uniformemente de 1.22 cm de radio y 1.76×10^{-15} C de carga total. Desprecie las fuerzas gravitatorias.
23. Una carga puntual tiene $q = 1.16\ \mu C$. Considérese el punto A, que está a 2.06 m de distancia, y el punto B, que está a 1.17 m de distancia en dirección diametralmente opuesta, como en la figura 29*a*. (*a*) Halle la diferencia de potencial $V_A - V_B$. Repita si los puntos A y B se localizan como en la figura 29*b*.
24. La mayor parte del material que forma los anillos de Saturno (véase la Fig. 30) tiene la forma de diminutas partículas de polvo que tienen radios del orden de 1.0 μm. Estos granos están en una región que contiene un gas ionizado diluido, y capturan electrones en exceso. Si el

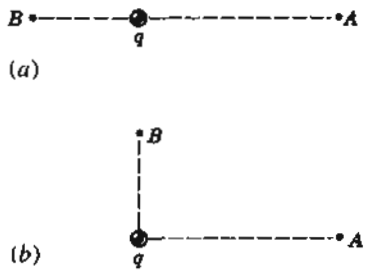


Figura 29 Problema 23.

potencial eléctrico en la superficie de un grano es de -400 V, ¿cuántos electrones en exceso ha capturado?

25. Cuando un vehículo espacial se mueve a través del gas ionizado diluido de la ionosfera de la Tierra, su potencial cambia típicamente en -1.0 V antes de completar una revolución. Si se supone que el vehículo es una esfera de 10 m de radio, calcule aproximadamente la cantidad de carga que recoge.
26. Una partícula de masa m, carga $q > 0$, y energía cinética inicial K es proyectada (desde el "infinito") hacia un núcleo pesado de carga Q, que se supone tiene una posición fija en nuestro marco de referencia. (*a*) Si la puntería es "perfecta", ¿cuán cerca del centro del núcleo está la partícula cuando llega instantáneamente al reposo? (*b*) Con una puntería imperfecta en particular, la máxima aproximación de la partícula al núcleo es el doble de la distancia determinada en la parte (*a*). Determine la velocidad de la partícula en esta distancia de aproximación más cercana. Suponga que la partícula no alcanza la superficie del núcleo.
27. Una gota esférica de agua con una carga de 32.0 pC tiene un potencial de 512 V en su superficie. (*a*) ¿Cuál es el radio de la gota? (*b*) Si dos de tales gotas de la misma carga y radio se combinan para formar una sola gota esférica, ¿Cuál es el potencial en la superficie de la nueva gota así formada?
28. Supóngase que la carga negativa de una moneda de cobre de un centavo fuese retirada y se llevara a una distancia lejos de la Tierra —quizás a una galaxia distante— y que la carga positiva estuviese distribuida uniformemente sobre la superficie de la Tierra. ¿En cuánto cambiaría el potencial eléctrico en la superficie de la Tierra? (véase el problema muestra 2 en el capítulo 27).
29. A menudo se observa un campo eléctrico de aproximadamente 100 V/m cerca de la superficie de la Tierra. Si este campo fuese el mismo en toda la superficie, ¿cuál sería el potencial eléctrico de un punto en la superficie? Véase el problema muestra 6.

Figura 30 Problema 24.

Sección 30-6 Potencial debido a un conjunto de cargas puntuales

30. La molécula de amoniaco NH_3 tiene un momento dipolar eléctrico permanente igual a 1.47 D, en donde D es la unidad debye con un valor de 3.34×10^{-30} C · m. Calcule el potencial eléctrico debido a una molécula de amoniaco en un punto alejado a 52.0 nm a lo largo del eje del dipolo.
31. (*a*) Para la figura 31, encuentre una expresión de $V_A - V_B$. (*b*) ¿Se reduce su resultado a la respuesta esperada cuando $d = 0$? ¿Cuando $a = 0$? ¿Cuando $q = 0$?

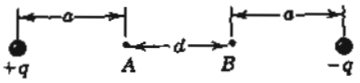


Figura 31 Problema 31.

32. En la figura 32, ubique los puntos, si los hay, (*a*) cuando $V = 0$ y (*b*) cuando $E = 0$. Considere únicamente los puntos sobre el eje.

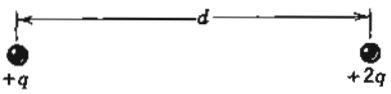


Figura 32 Problema 32.

33. Una carga puntual $q_1 = +6e$ está fija en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, y una segunda carga puntual $q_2 = -10e$ está fija en $x = 9.60$ nm, $y = 0$. El lugar geométrico de todos los puntos en el plano xy, cuando $V = 0$, es un círculo centrado en el eje x, como se muestra en la figura 33. Halle (*a*) la ubicación x_c del centro del círculo y (*b*) el radio R del círculo. (*c*) ¿Es también un círculo la equipotencial $V = 5$ V?
34. Dos cargas $q = +2.13\ \mu$C están fijas en el espacio separadas por una distancia $d = 1.96$ cm, como se muestra en la figura 34. (*a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto C? (*b*) Luego se lleva a una tercera carga $Q = +1.91\ \mu$C lentamente desde el infinito hasta C. ¿Cuánto trabajo debe

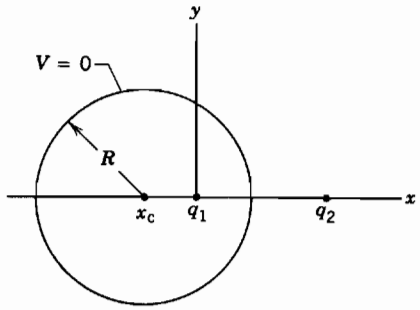


Figura 33 Problema 33.

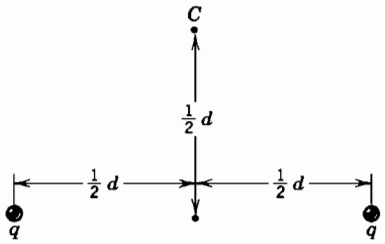


Figura 34 Problema 34.

realizarse? (*c*) ¿Cuál es la energía potencial U de la configuración cuando la tercera carga está en su lugar?

35. Para la configuración de carga de la figura 35, demuestre que $V(r)$ para los puntos en el eje vertical, suponiendo que $r \gg d$, está dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 + \frac{2d}{r}\right).$$

(*Sugerencia*: La configuración de carga puede verse como la suma de una carga aislada y un dipolo.)

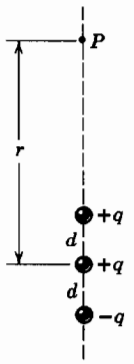


Figura 35 Problema 35.

Sección 30-7 El potencial eléctrico de las distribuciones de carga continua

36. La figura 36 muestra, de canto, una lámina "infinita" de densidad de carga positiva σ. (*a*) ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico de la lámina cuando una pequeña carga de prueba positiva q_0 se lleva desde una posición inicial, sobre la lámina, hasta una posición final, ubicada a una distancia perpendicular z de la lámina? (*b*) Use el resultado de (*a*) para demostrar que el potencial eléctrico de una lámina infinita de carga puede escribirse como

$$V = V_0 - (\sigma/2\epsilon_0)z,$$

donde V_0 es el potencial en la superficie de la lámina.

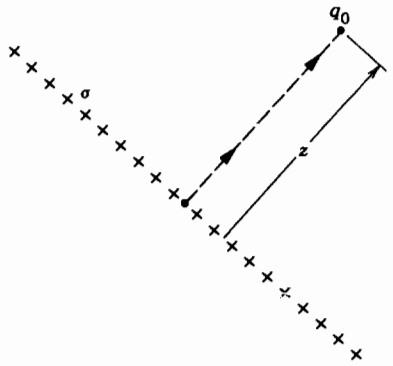


Figura 36 Problema 36.

37. Una carga eléctrica de -9.12 nC está distribuida uniformemente alrededor de un anillo de 1.48 m de radio que se encuentra en el plano yz con su centro en el origen. Una partícula que tiene una carga de -5.93 pC está ubicada sobre el eje x en x = 3.07 m. Calcule el trabajo realizado por un agente externo para mover la carga puntual hasta el origen.

38. Una cantidad total de carga positiva Q es distribuida en un anillo circular plano, no conductor, de radio interno a y radio externo b. La carga se distribuye de modo que la densidad de carga (carga por unidad de área) está dada por $\sigma = k/r^3$, en donde r es la distancia desde el centro del anillo a cualquier punto sobre él. Demuestre que el potencial en el centro del anillo está dado por

$$V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{a+b}{ab}\right).$$

Sección 30-8 Superficies equipotenciales

39. Dos cargas lineales son paralelas al eje z. Una, de carga por unidad de longitud $+\lambda$, está a una distancia a a la derecha de este eje. La otra, de carga por unidad de longitud $-\lambda$, está a una distancia a a la izquierda de este eje (las líneas y el eje z están en el mismo plano). Dibuje alguna de las superficies equipotenciales.

40. Al moverse desde A hasta B a lo largo de una línea de un campo eléctrico, éste realiza un trabajo de 3.94×10^{-19} J sobre un electrón en el campo ilustrado en la figura 37. ¿Cuáles son las diferencias en el potencial eléctrico (*a*) $V_B - V_A$, (*b*) $V_C - V_A$, y (*c*) $V_C - V_B$?

41. Considérese una carga puntual con $q = 1.5 \times 10^{-8}$ C. (*a*) ¿Cuál es el radio de una superficie equipotencial que tenga un potencial de 30 V? (*b*) Estarán uniformemente espacia-

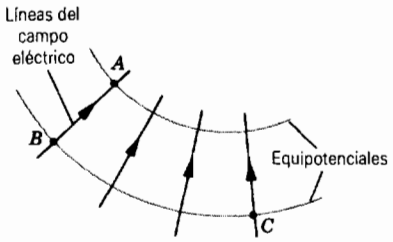


Figura 37 Problema 40.

das las superficies cuyos potenciales difieren en una cantidad constante (digamos, de 1.0 V)?

42. En la figura 38 trace cuantitativamente (*a*) las líneas de fuerza y (*b*) las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano de la figura. (*Sugerencia*: Considere el comportamiento cerca de cada carga puntual y a distancias grandes del par de cargas.)

Figura 38 Problema 42.

43. Tres líneas de carga paralelas y largas tienen las densidades lineales de carga relativas mostradas en la figura 39. Dibuje algunas líneas de fuerza y las intersecciones de algunas superficies equipotenciales con el plano de esta figura.

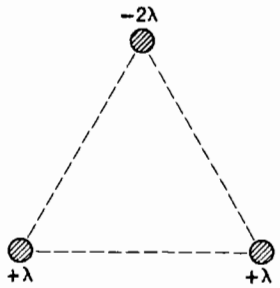


Figura 39 Problema 43.

Sección 30-9 Cálculo del campo a partir del potencial

44. Supóngase que el potencial eléctrico varía a lo largo del eje x como se muestra en la figura 40. De los intervalos mostrados (no tome en cuenta el comportamiento en los puntos extremos de los intervalos), determine los intervalos en los que E_x tiene (*a*) su máximo valor absoluto y (*b*) el mínimo. (*c*) Grafique E_x contra x.

45. Dos placas metálicas paralelas y grandes están separadas por 1.48 cm y contienen cargas iguales pero opuestas sobre sus superficies enfrentadas. La placa negativa hace tierra y se considera que su potencial es cero. Si el potencial en medio de las placas es de +5.52 V, ¿cuál es el campo eléctrico en esta región?

46. De la ecuación 25 encuentre una expresión para E en los puntos axiales de un anillo cargado uniformemente.

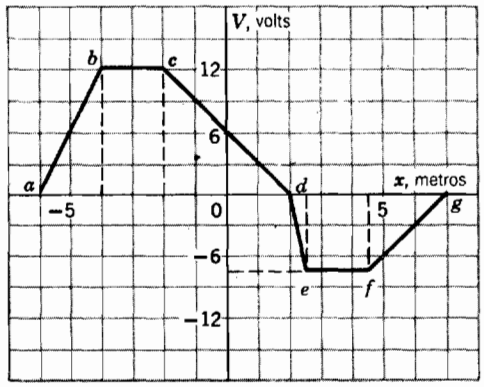


Figura 40 Problema 44.

47. Calcule el gradiente radial del potencial, en V/m, en la superficie de un núcleo de oro. Véase el problema muestra 6.

48. El problema 49, del capítulo 29, trata del cálculo de Rutherford del campo eléctrico, quien dio una distancia r del centro de un átomo. Rutherford dio también el potencial eléctrico como

$$V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right).$$

(*a*) Demuestre cómo la expresión para el campo eléctrico dada en el problema 49 del capítulo 29 se deduce de esta expresión para V. (*b*) ¿Por qué esta expresión para V no tiende a cero cuando $r \to \infty$?

49. El potencial eléctrico V en el espacio entre las placas de cierto tubo al vacío, y que ahora está en desuso, está dado por $V = 1530x^2$, donde V está en volts si x, la distancia desde una de las placas, está en metros. Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en $x = 1.28$ cm.

50. Una carga por unidad de longitud λ está distribuida uniformemente a lo largo de un segmento de línea recta de longitud L. (*a*) Determine el potencial (eligiendo que sea cero en el infinito) en un punto P a una distancia y de un extremo del segmento cargado y en línea con él (véase la Fig. 41). (*b*) Use el resultado de (*a*) para calcular la componente del campo eléctrico en P en la dirección y (a lo largo de la línea). (*c*) Determine la componente del campo eléctrico en P en una dirección perpendicular a la línea recta.

Figura 41 Problema 50.

51. En una varilla, de longitud L, que se encuentra a lo largo del eje x con uno de sus extremos en el origen ($x = 0$), como se muestra en la figura 42, existe una distribución de carga por unidad de longitud dada por $\lambda = kx$, donde k es una constante. (*a*) Si se considera que el potencial electrostático en el infinito sea cero, encuentre V en el punto P sobre el eje y. (*b*) Determine la componente vertical, E_y, del campo eléctrico en P a partir del resultado de la parte (*a*) y también por cálculo directo. (*c*) ¿Por qué no puede determinarse E_x, la componente horizontal del campo eléctrico en P, usando el resultado de la parte (*a*)? (*d*) ¿A qué distancia de la varilla, a lo largo del eje y, el potencial es igual a la mital del valor en el extremo izquierdo de la varilla?

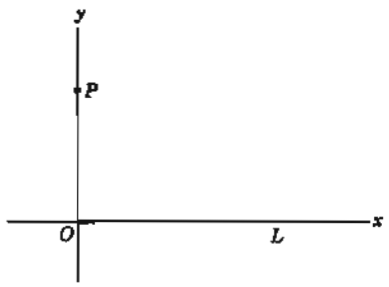


Figura 42 Problema 51.

Sección 30-10 Un conductor aislado

52. Un cascarón esférico de paredes delgadas, conductor, de 20 cm de radio exterior, contiene una carga de +3.0 μC. Dibuje (*a*) la magnitud del campo eléctrico **E** y (*b*) el potencial V contra la distancia r desde el centro del cascarón.

53. Considérense dos esferas conductoras separadas por una gran distancia, 1 y 2, teniendo, la segunda, el doble del diámetro que el de la primera. La esfera más pequeña tiene inicialmente una carga positiva q y la más grande está inicialmente sin carga. Se conectan ahora las esferas con un alambre delgado y largo. (*a*) ¿Cómo se relacionan los potenciales finales V_1 y V_2 de las esferas? (*b*) Halle las cargas finales q_1 y q_2 sobre las esferas en términos de q.

54. Si la Tierra tuviera una carga neta equivalente a 1 electrón/m^2 de área superficial (una hipótesis muy alejada de la realidad), (*a*) ¿cuál sería el potencial de la Tierra? (*b*) ¿Cuál sería el campo eléctrico debido a la Tierra justo por arriba de su superficie?

55. Una carga de 15 nC puede producirse por simple frotamiento. ¿A qué potencial elevaría dicha carga a una esfera conductora y aislada de 16 cm de radio?

56. Encuentre (*a*) la carga y (*b*) la densidad de carga sobre la superficie de una esfera conductora de 15.2 cm de radio cuyo potencial es de 215 V.

57. Considere que la Tierra sea un conductor esférico de 6370 km de radio y que inicialmente esté descargada. Una esfera metálica, que tiene un radio de 13 cm y una carga de -6.2 nC es puesta en contacto eléctrico con la Tierra. Demuestre que, efectivamente, este proceso descarga a la esfera, al calcular la fracción de los electrones en exceso inicialmente presentes en la esfera que permanecen después de que la esfera ha sido "aterrizada".

58. Dos esferas conductoras, una de 5.88 cm de radio y la otra de 12.2 cm de radio, contienen cada una una carga de 28.6 nC y están muy lejos una de la otra. Si posteriormente las esferas se conectan por medio de un alambre conductor, encuentre (*a*) la carga final sobre cada esfera y (*b*) el potencial de cada una de ellas.

59. Considérese un cascarón esférico aislado, delgado y conductor que se carga uniformemente a una densidad σ (C/m^2) constante de carga. ¿Cuánto trabajo implicaría mover una pequeña carga de prueba positiva q_0 (*a*) desde la superficie de la esfera al interior, a través de un pequeño orificio, (*b*) desde un punto a otro sobre la superficie, independiente de la trayectoria, (*c*) desde un punto a otro dentro de la esfera, y (*d*) desde cualquier punto P fuera de la esfera sobre cualquier trayectoria, ya sea que atraviese o no a la esfera, de regreso a P? (*e*) Para las condiciones dadas, ¿importa o no que la esfera sea conductora?

60. Dos esferas conductoras idénticas de 15.0 cm de radio están separadas por una distancia de 10.0 m. ¿Cuál es la carga sobre cada esfera si el potencial de una es de +1500 V y el de la otra es de -1500 V? ¿Qué suposiciones ha hecho usted?

61. El objeto metálico de la figura 43 es un perfil de revolución alrededor del eje horizontal. Si el objeto está cargado negativamente, dibuje algunas equipotenciales y líneas de fuerza. Use un razonamiento físico más bien que un análisis matemático.

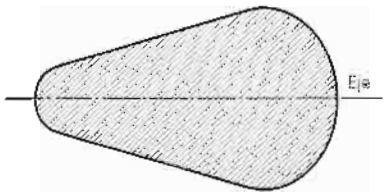


Figura 43 Problema 61.

62. Una esfera de cobre cuyo radio es de 1.08 cm tiene un recubrimiento superficial muy delgado de níquel. Algunos de los átomos de níquel son radiactivos, emitiendo cada átomo un electrón conforme se desintegra. La mitad de estos electrones entran a la esfera de cobre, depositando cada uno de ellos 100 keV de energía. La otra mitad de los electrones se escapa, cada uno con una carga de $-e$. El recubrimiento de níquel tiene una actividad de 10.0 mCi (= 10.0 milicuries = 3.70×10^8 decaimientos radiactivos por segundo). La esfera está colgada de un hilo largo, no conductor, y aislada de su entorno. ¿Cuánto tiempo le tomará al potencial de la esfera aumentar en 1000 V?

63. Una esfera metálica cargada de 16.2 cm de radio tiene una carga neta de 31.5 nC. (*a*) Halle el potencial eléctrico en la superficie esférica. (*b*) ¿A qué distancia de la superficie de la esfera ha decrecido el potencial en 550 V?

Sección 30-11 El acelerador electrostático

64. (*a*) ¿Cuánta carga se requiere para elevar una esfera metálica aislada de 1.0 m de radio a un potencial de 1.0 MV?

Repita para una esfera de 1.0 cm de radio. (*b*) ¿Por qué se usa una esfera grande en un acelerador electrostático cuando es posible alcanzar el mismo potencial usando una menor carga con una esfera pequeña? (*Sugerencia*: Calcule las densidades de carga.)

65. Sea 3.41 MV la diferencia de potencial entre el cascarón esférico interno de alto potencial de un acelerador Van de Graaff y el punto en que se suministran las cargas sobre la banda móvil. Si la banda transfiere carga a la esfera a razón de 2.83 mC/s, ¿qué potencia mínima debe proporcionarse para impulsar la banda?

66. El electrodo de alto voltaje de un acelerador electrostático es un cascarón esférico metálico, cargado, que tiene un potencial de $V = +9.15$ MV. (*a*) En esta máquina la disrupción eléctrica ocurre en el gas cuando el campo es $E = 100$ MV/m. Para impedir que suceda dicha disrupción, ¿qué restricción debe hacerse en el radio r del cascarón? (*b*) Una banda larga de hule en movimiento transfiere carga al cascarón a razón de 320 μC/s, permaneciendo su potencial constante a causa de las fugas. ¿Qué potencia mínima se requiere para transferir la carga? (*c*) La banda tiene una anchura de $w = 48.5$ cm y se desplaza con una velocidad de $v = 33.0$ m/s. ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la banda?

Proyectos para la computadora

67. La carga $q_1 = -1.2 \times 10^{-9}$ C está en el origen y la carga $q_2 = 2.5 \times 10^{-9}$ C está en $x = 0, y = 0.5$ m en el plano xy. Escriba un programa de computadora o diseñe una hoja de cálculo para determinar el potencial eléctrico debido a estas cargas en cualquier punto en el plano xy. Usted debe proporcionar (alimentar) las coordenadas del punto, y entonces la computadora desplegará el valor del potencial, regresando luego para aceptar las coordenadas de otro punto. Considere que el cero de potencial está lejos de ambas cargas.

(*a*) Use el programa para graficar la superficie equipotencial de 5-V en el plano xy. En una hoja de papel milimétrico dibuje ejes que vayan desde -5 m hasta +5 m en ambas direcciones x y y. Marque las posiciones de las cargas. Primero haga a $x = 0$ y pruebe con varios valores de y hasta que encuentre dos que difieran en menos de 0.005 m y encuadren $V = 5$ V. Evite las posiciones de las cargas. Considere que la posición promedio de los dos puntos sea un punto sobre la superficie. Puesto que la superficie es cerrada usted deberá hallar dos puntos sobre ella con la misma coordenada x. Cuando las haya encontrado, márquelas en la gráfica. Luego ensaye con $x = 0.25$ m. Continúe incrementando x en 0.25 m hasta llegar más allá de la superficie equipotencial, es decir, hasta que no encuentre ningún otro punto. Concluya el diagrama marcando puntos en la superficie para los valores negativos de x. Puesto que la superficie es simétrica con respecto a $x = 0$, no se necesita calcular los puntos. Dibuje la superficie trazando los puntos que ha marcado.

(*b*) Trace ahora la superficie equipotencial de 3-V en el plano xy. Tenga cuidado aquí. Para ciertos valores de x existen cuatro puntos para los cuales $V = 3$ V. De hecho existen dos superficies equipotenciales de 3-V.

68. La magnitud de un campo eléctrico está dada por $E = |dV/ds|$, en donde ds es la distancia (infinitesimal) entre las superficies equipotenciales para V y $V + dV$. E puede aproximarse como $|\Delta V/\Delta s|$ para dos superficies separadas por una distancia finita Δs. Considere la configuración de la carga del problema anterior y use el programa de computadora para graficar la superficie equipotencial de 6-V en la vecindad del punto en que cruza al eje x positivo. Si no hizo el problema anterior, entonces dibuje también la superficie equipotencial de 5-V en esa región. El plan más eficiente es hacer que $y = -0.1$, 0, y +0.1 m, en turno, y buscar, para cada valor de y, dos valores de x con un espaciamiento mínimo que encuadren con la superficie equipotencial. Dibuje una línea perpendicular desde una superficie a la otra y mida Δs; luego calcule $E = |\Delta V/\Delta s|$, con $\Delta V = 1$ V, estando E en V/m y Δs en metros. Compruebe la exactitud del resultado usando la ley de Coulomb para calcular la magnitud del campo eléctrico en el punto sobre el eje x en medio de las superficies equipotenciales.

CAPÍTULO 31

CAPACITORES Y DIELÉCTRICOS

El capacitor* *es un dispositivo que almacena energía en un campo electrostático. Una lámpara de destello o de luz relámpago, por ejemplo, requiere una breve emisión de energía eléctrica, un poco mayor de lo que generalmente puede proporcionar una batería. Podemos sacar energía con relativa lentitud (más de varios segundos) de la batería al capacitor, el cual libera rápidamente (en cuestión de milisegundos) la energía que pasa al foco. Otros capacitores mucho más grandes se emplean para proveer intensas pulsaciones de láser con el fin de inducir una fusión termonuclear en pequeñas bolitas de hidrógeno. En este caso el nivel de potencia es de alrededor de 10^{14} W, el equivalente a unas 200 veces toda la capacidad generadora en Estados Unidos, y dura sólo unos 10^{-9} s.*

Los capacitores se usan también para producir campos eléctricos como es el caso del dispositivo de placas paralelas que desvía los haces de partículas cargadas, y que se ilustra en las figuras 13 a 15 del capítulo 28. En el presente capítulo estudiaremos el campo electrostático y la energía almacenada en los capacitores.

Los capacitores tienen otras funciones importantes en los circuitos electrónicos, especialmente para voltajes y corrientes variables con el tiempo. Como lo estudiaremos en el capítulo 39, los capacitores son componentes fundamentales de los osciladores electromagnéticos para transmitir y recibir señales de radio y televisión.

31-1 CAPACITANCIA

La figura 1 muestra un capacitor generalizado, que consta de dos conductores *a* y *b* de forma arbitraria. Sin importar cuál sea su geometría, a estos conductores se les llama *placas*, y damos por hecho que se hallan totalmente aisladas de su entorno, como también que, por el momento, están en el vacío.

Decimos que el capacitor está *cargado* si sus placas contienen cargas $+q$ y $-q$ iguales y opuestas, respectivamente. Nótese que q *no es* la carga neta en el capacitor, la cual es cero. En nuestro estudio sobre los capacitores, denotamos con q el valor absoluto de la carga en cualquier placa; esto es, q representa una magnitud únicamente, y el signo de la carga en una placa dada debe especificarse.

Podemos cargar un capacitor conectando las dos placas a las terminales opuestas de una batería. Puesto que los placas son conductoras, son también equipotenciales,

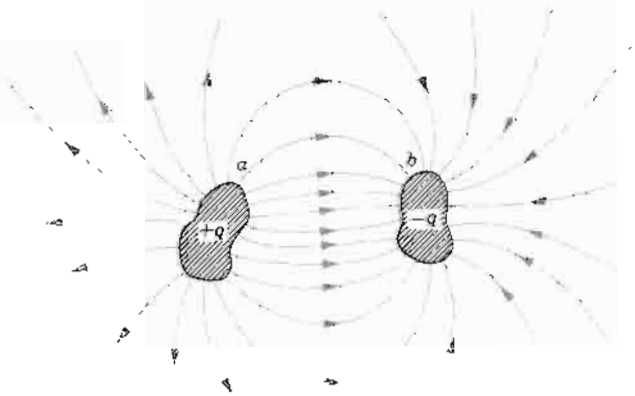


Figura 1 Dos conductores, aislados uno del otro y de su entorno, forman un capacitor. Cuando el capacitor se carga, los conductores contienen cargas iguales y opuestas de magnitud q. A los dos conductores se les llama *placas*, independientemente de cuál sea su forma.

y la diferencia de potencial de la batería aparecerá en las placas. Al cargar el capacitor, la batería transfiere a las dos placas cargas iguales y opuestas. Por conveniencia, a

* Véase "Capacitors", por Donald M. Trotter, Jr., *Scientific American*, julio de 1988, pág. 86.

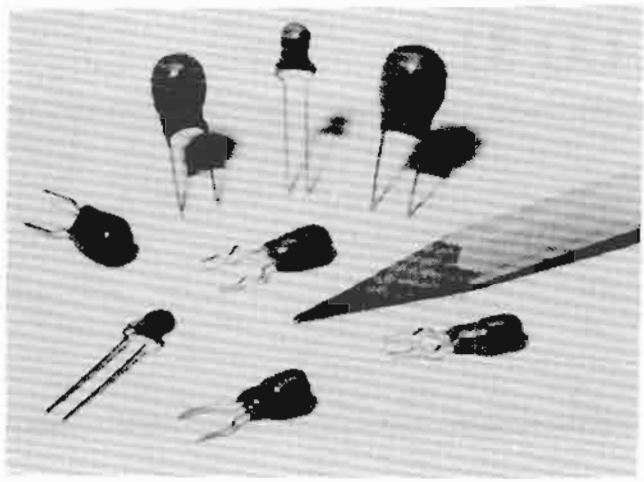


Figura 2 Varios tipos de capacitores que pueden encontrarse en circuitos electrónicos.

la *magnitud* de la diferencia de potencial entre las placas la representamos por V.

Como lo demostraremos en la sección siguiente, existe una proporcionalidad directa entre la magnitud de la carga q en un capacitor y la diferencia de potencial V entre sus placas. Esto es, podemos escribir

$$q = CV \qquad (1)$$

donde C, la constante de proporcionalidad, se llama *capacitancia* del capacitor. En la sección siguiente, demostraremos también que C depende de las formas y posiciones relativas de las placas, y calcularemos la dependencia real de C de dichas variables en tres casos especiales importantes. C depende también del material que llena el espacio entre las placas (véase la Sec. 31-5); sin embargo, por el momento supondremos que el espacio es el vacío.

La unidad de capacitancia en el SI que se infiere de la ecuación 1 es el coulomb/volt, y se le da el nombre de *farad* (abreviado F):

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb/volt}.$$

Recibe el nombre en honor de Michael Faraday quien, entre sus otras contribuciones, desarrolló el concepto de capacitancia. Los submúltiplos del farad, el *microfarad* ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}$ F) y el *picofarad* (1 pF $= 10^{-12}$ F), son unidades más convenientes en la práctica. La figura 2 muestra algunos capacitores en la región de los microfarad o de los picofarad que pueden encontrarse en equipos electrónicos o de computación.

Problema muestra 1 Un capacitor de almacenamiento en un microcircuito o *chip* de memoria de acceso directo o aleatorio (RAM, Random Access Memory) tiene una capacitancia de 55 fF. Si está cargado a 5.3 V, ¿cuántos electrones en exceso hay en su placa negativa?

Solución Si la placa negativa tiene N electrones en exceso, contiene una carga neta de magnitud $q = Ne$. Si se utiliza la ecuación 1, obtenemos

$$N = \frac{q}{e} = \frac{CV}{e} = \frac{(55 \times 10^{-15}\text{ F})(5.3\text{ V})}{1.60 \times 10^{-19}\text{ C}} = 1.8 \times 10^{6} \text{ electrones}.$$

Para los electrones, éste es un número muy pequeño. Una partícula de polvo, tan diminuta que de hecho siempre está en movimiento, contiene alrededor de 10^{17} electrones (y el mismo número de protones).

Analogía con el flujo de los fluidos *(Opcional)*

Cuando se estudian circuitos eléctricos, suele ser útil sacar analogías entre el movimiento de la carga eléctrica y el movimiento de partículas materiales como el que ocurre en el flujo de fluidos. En el caso de un capacitor, puede hacerse una analogía entre un capacitor que contiene una carga q y un recipiente rígido de volumen v (usamos v en lugar de V para el volumen con el fin de no confundirlo con la diferencia de potencial) que contiene n moles de un gas ideal. La presión p del gas es directamente proporcional a n para una temperatura fija, según la ley del gas ideal (Ec. 7 del capítulo 23)

$$n = \left(\frac{v}{RT}\right) p.$$

Para el capacitor (Ec. 1),

$$q = (C)V.$$

La comparación muestra que la capacitancia C del capacitor es análoga al volumen v del recipiente, suponiendo una temperatura fija para el gas. De hecho, la palabra "capacitor" nos refiere al término "capacidad", en el mismo sentido en que el volumen de un contenedor de gas tiene determinada "capacidad".

Podemos introducir más gas dentro del recipiente al someterlo a una presión más elevada, de la misma manera que podemos poner más carga en un capacitor al aplicarle un voltaje más elevado. Nótese que en el capacitor puede ponerse cualquier cantidad de carga, y que en el recipiente puede intoducirse cualquier masa de gas, hasta ciertos límites. Estos límites corresponden a la perforación eléctrica ("arqueo") del capacitor y a la ruptura de las paredes del recipiente. ■

31-2 CÁLCULO DE LA CAPACITANCIA

Aquí nuestra tarea es calcular la capacitancia de un capacitor una vez que conocemos su geometría. Puesto que consideramos un número de geometrías diferentes, parece acertado desarrollar un plan general para simplificar el trabajo. Resumido, nuestro plan es como sigue: (1) suponemos una carga q en las placas; (2) calculamos el campo eléctrico $\mathbf{E}$ entre las placas en términos de la carga, usando la ley de Gauss; (3) conociendo $\mathbf{E}$, calculamos la diferencia de potencial V entre las placas de la ecuación 15 del capítulo 30; (4) calculamos C de $C = q/V$ (Ec. 1).

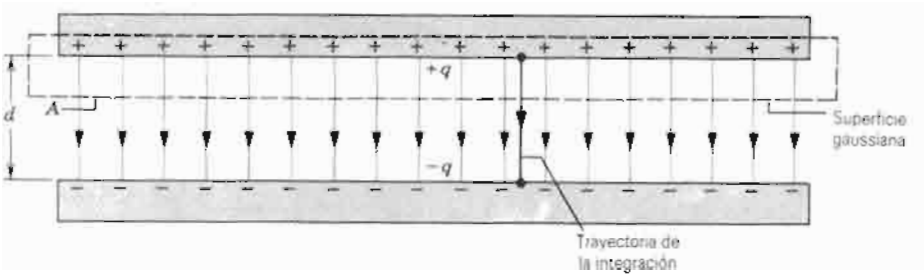


Figura 3 Sección transversal de un capacitor de placas paralelas cargado. Se ha dibujado una superficie gaussiana que encierra a la carga de la placa positiva. La línea vertical muestra la trayectoria de integración empleada en la ecuación 5.

Antes de comenzar, podemos simplificar el cálculo tanto del campo eléctrico como de la diferencia de potencial haciendo ciertas suposiciones. Veremos cada una en su momento.

Cálculo del campo eléctrico

El campo eléctrico se relaciona con la carga en las placas según la ley de Gauss, o sea

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q. \tag{2}$$

Aquí q es la carga contenida dentro de la superficie gaussiana, y la integral se efectúa sobre esa superficie. Consideraremos sólo los casos en que, cuando el flujo pase a través de la superficie gaussiana, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ tenga una magnitud constante E, y los vectores $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{A}$ sean paralelos. La ecuación 2 se reduce entonces a

$$\epsilon_0 EA = q, \tag{3}$$

donde A es el área de esa parte de la superficie gaussiana a través de la cual pasa el flujo. Por conveniencia, dibujamos la superficie gaussiana de modo que encierre por completo a la carga sobre la placa positiva; véase la figura 3 para un ejemplo.

Cálculo de la diferencia de potencial

La diferencia de potencial entre las placas se relaciona con el campo eléctrico $\mathbf{E}$ por la ecuación 15 del capítulo 30,

$$V_f - V_i = -\int_i^f \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}, \tag{4}$$

en la cual la integral se evalúa a lo largo de cualquier trayectoria que comience en una placa y termine en la otra. Siempre elegimos una trayectoria que siga a la línea del campo eléctrico desde la placa positiva hasta la placa negativa, como se muestra en la figura 3. Para esta trayectoria, los vectores $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{s}$ apuntan en la misma dirección, de modo que la cantidad $V_f - V_i$ es negativa. Puesto que estamos buscando a V, *valor absoluto* de la diferencia de potencial entre las placas, podemos establecer que $V_f - V_i = -V$. Podemos volver a escribir la ecuación 4 como:

$$V = \int_+^- E\, ds, \tag{5}$$

donde los signos + y − nos recuerdan que nuestra trayectoria de la integración comienza en la placa positiva y termina en la placa negativa.

El campo eléctrico entre las placas de un capacitor es la suma de los campos debidos a las dos placas: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$, en donde $\mathbf{E}_+$ es el campo debido a las cargas en la placa positiva y $\mathbf{E}_-$ es el campo debido a las cargas en la placa negativa. Según la ley de Gauss, E_+ y E_- deben ser cada una proporcional a q, de modo que E es proporcional a q, y según la ecuación 5 V es también proporcional a q. Esto es, si duplicamos a q (la carga en *cada* placa), $\mathbf{E}$ y V se duplican igualmente. Puesto que V es proporcional a q, la razón q/V es una constante y es independiente de q. Definimos esta razón como la capacitancia C, de acuerdo con la ecuación 1.

Ahora estamos listos para aplicar las ecuaciones 3 y 5 a algunos casos en particular.

Capacitor de placas paralelas

Suponemos, como se ve en la figura 3, que las placas de este capacitor son tan grandes y tan próximas entre sí que podemos despreciar la distorsión de las líneas del campo eléctrico en los bordes de las placas. Consideramos que $\mathbf{E}$ es constante en todo el volumen entre las placas.

Tracemos una superficie gaussiana que incluya a la carga q en la placa positiva, como lo muestra la figura 3. El campo eléctrico puede entonces calcularse de la ecuación 3: $E = q/\epsilon_0 A$, donde A es el área de las placas. La ecuación 5 da entonces

$$V = \int_+^- E\, ds = \frac{q}{\epsilon_0 A}\int_0^d ds = \frac{qd}{\epsilon_0 A}. \tag{6}$$

En la ecuación 6, E es constante y puede quitarse del signo de la integral; la segunda integral de arriba es simplemente la separación d entre las placas.

Obsérvese en la ecuación 6 que V es igual a una constante multiplicada por q. De acuerdo con la ecuación 1, esta constante es precisamente $1/C$, y así

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \text{(capacitor de placas paralelas).} \quad (7)$$

La capacitancia sólo depende de factores geométricos, por ejemplo, del área A de la placa y de la separación d de la placa.

Señalamos además que la ecuación 7 indica por qué escribimos la constante electrostática en la forma $1/4\pi\epsilon_0$ en la ley de Coulomb. Si no lo hubiésemos hecho así, la ecuación 7 —que se usa en la práctica más a menudo que la ley de Coulomb— su forma sería menos sencilla. Notamos también que la ecuación 7 sugiere unidades para la constante de permitividad ϵ_0 que son más apropiadas para los problemas en los que intervienen capacitores, es decir,

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} = 8.85\ \text{pF/m}.$$

Previamente hemos expresado esta constante como:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2,$$

que comprende unidades que son útiles cuando se trata con problemas en los que se aplica la ley de Coulomb. Los dos grupos de unidades son equivalentes.

Capacitor cilíndrico

La figura 4 muestra, en sección transversal, un capacitor cilíndrico de longitud L formado por dos cilindros coaxiales de radios a y b. Suponemos que $L \gg b$ de modo que podemos despreciar la no uniformidad de las líneas del campo eléctrico que se presenta en los extremos de los cilindros.

Como superficie gaussiana, elegimos un cilindro de longitud L y radio r, cerrado en los extremos por tapas. La ecuación 3 da

$$q = \epsilon_0 EA = \epsilon_0 E(2\pi rL)$$

donde $2\pi rL$ es el área de la parte curvada de la superficie gaussiana. Si se despeja E obtenemos

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Lr}. \quad (8)$$

La sustitución de este resultado en la ecuación 5 da

$$V = \int_+^- E\,ds = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (9)$$

De la relación $C = q/V$, tenemos entonces

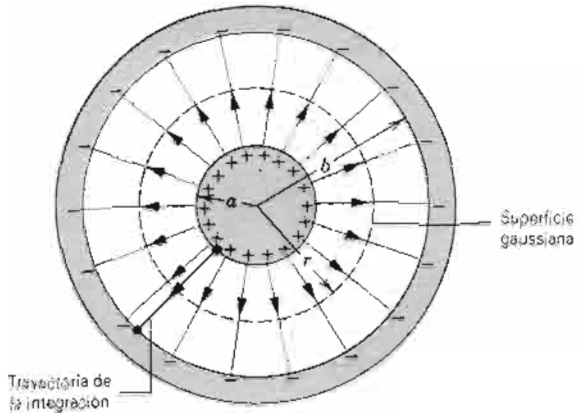


Figura 4 Capacitor cilíndrico largo visto en sección transversal. Se ha trazado una superficie gaussiana que encierra al conductor interno. Se muestra la trayectoria de integración usada para evaluar la ecuación 5. La misma figura podría utilizarse para ilustrar una sección transversal por el centro de un capacitor esférico.

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \qquad \text{(capacitor cilíndrico).} \quad (10)$$

Vemos que la capacitancia del capacitor cilíndrico, al igual que la de un capacitor de placas paralelas, depende sólo de los factores geométricos, en este caso de L, b y a.

Un capacitor esférico

La figura 4 puede también representar la sección transversal central de un capacitor que conste de dos cascarones esféricos concéntricos de radios a y b. Como superficie gaussiana trazamos una esfera de radio r. Si se aplica la ecuación 3 a esta superficie nos da

$$q = \epsilon_0 EA = \epsilon_0 E(4\pi r^2),$$

donde $4\pi r^2$ es el área de la superficie esférica gaussiana. Si despejamos de esta ecuación a E, se obtiene

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}, \quad (11)$$

la cual reconocemos como la expresión para el campo eléctrico debido a una distribución esférica uniforme de carga.

Si sustituimos esta expresión en la ecuación 5, hallamos

$$V = \int_+^- E\,ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}. \quad (12)$$

Al sustituir la ecuación 12 en la ecuación 1 y si despejamos C, obtenemos

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \qquad \text{(capacitor esférico).} \quad (13)$$

Esfera aislada

Podemos asignar una capacitancia a un conductor individual aislado si suponemos que la "placa faltante" es una esfera conductora de radio infinito. Al fin y al cabo, las líneas de campo que salen de la superficie de un conductor aislado cargado deben terminar en alguna parte; las paredes del salón en que esté alojado el conductor pueden servir, efectivamente, como nuestra esfera de radio infinito.

Si hacemos que $b \to \infty$ en la ecuación 13 y sustituimos a a por R, hallamos

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \qquad \text{(esfera aislada)}. \qquad (14)$$

Al comparar las ecuaciones 7, 10, 13 y 14, notamos que C se expresa siempre como ϵ_0 multiplicada por una cantidad con dimensión de longitud. Las unidades de ϵ_0(F/m) son consistentes con esta relación.

Problema muestra 2 Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas por una distancia $d = 1.0$ mm. ¿Cuál debe ser el área de la placa si la capacitancia ha de ser de 1.0 F?

Solución De la ecuación 7 tenemos

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}} = 1.1 \times 10^8\ \text{m}^2.$$

Ésta es el área de un cuadrado de más de 10 km de lado. El farad es en verdad una unidad grande. Sin embargo, la tecnología moderna ha permitido la construcción de capacitores de 1 F de tamaño muy reducido. Estos "supercapacitores" se usan como fuentes de voltaje de soporte para computadoras; pueden mantener la memoria de la computadora hasta por 30 días en caso de una falla de energía eléctrica.

Problema muestra 3 El espaciamiento entre los conductores de un cable coaxial largo, usado para transmitir señales de TV, tiene un radio interior $a = 0.15$ mm y un radio exterior $b = 2.1$ mm. ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud de este cable?

Solución De la ecuación 10 tenemos

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} = \frac{(2\pi)(8.85\ \text{pF/m})}{\ln(2.1\ \text{mm}/0.15\ \text{mm})} = 21\ \text{pF/m}.$$

Problema muestra 4 ¿Cuál es la capacitancia de la Tierra considerada como una esfera conductora aislada de 6370 km de radio?

Solución De la ecuación 14 tenemos

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = (4\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(6.37 \times 10^6\ \text{m})$$
$$= 7.1 \times 10^{-4}\ \text{F} = 710\ \mu\text{F}.$$

Un diminuto *Supercap* ("supercapacitor") de 1 F tiene una capacitancia que es de alrededor de 1400 veces más grande que aquélla de la Tierra.

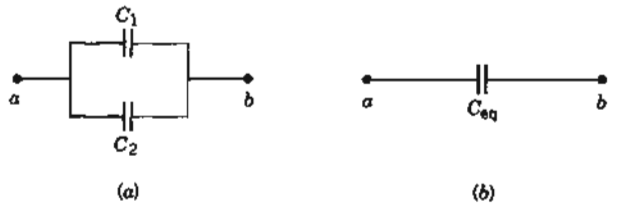


Figura 5 (*a*) Dos capacitores en paralelo. (*b*) La capacitancia equivalente que puede reemplazar a la combinación en paralelo.

31-3 CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO

Al analizar circuitos eléctricos, es deseable conocer la *capacitancia equivalente* de dos o más capacitores que estén conectados de un cierto modo. Por "capacitancia equivalente" queremos significar la capacitancia de un capacitor individual que puede sustituirse por la combinación sin que cambie la operación del resto del circuito. En un circuito eléctrico, un capacitor se representa por el símbolo ⊣|⊢, el cual, aunque parezca un capacitor de placas paralelas, representa a cualquier tipo de capacitor.

Capacitores conectados en paralelo

La figura 5*a* muestra dos capacitores conectados *en paralelo*. Existen tres propiedades que caracterizan a una conexión en paralelo de los elementos de un circuito. (1) Al viajar de a a b, podemos tomar cualquiera de varias trayectorias *paralelas* (dos, en este caso) cada una de las cuales pasa por *sólo uno* de los elementos en paralelo. (2) Cuando se conecta una batería de diferencia de potencial V entre las terminales de la combinación (es decir, las puntas de la batería están conectadas a los puntos a y b en la Fig. 5), en cada elemento de la conexión en paralelo aparece la misma diferencia de potencial V. Los alambres y las placas del capacitor son conductores y por lo tanto equipotenciales. El potencial en a aparece en los alambres conectados a a y en las dos placas de capacitor a la izquierda; similarmente, el potencial en b aparece en todos los alambres conectados a b y a las dos placas de capacitor a la derecha. (3) Los elementos comparten la carga total que la batería proporciona a la combinación.

Sin perder de vista estos principios, podemos ahora hallar la capacitancia equivalente C_{eq} que da la misma capacitancia total entre los puntos a y b, como se indica en la figura 5*b*. Suponga una batería de diferencia de potencial V conectada entre los puntos a y b. Para cada capacitor, podemos escribir (usando la Ec. 1)

$$q_1 = C_1 V \quad \text{y} \quad q_2 = C_2 V. \qquad (15)$$

Al escribir estas ecuaciones hemos empleado el mismo valor de la diferencia de potencial entre las terminales de los capacitores, de acuerdo con la segunda característica de una conexión en paralelo previamente estipulada. La batería extrae la carga q de un lado del circuito y la mueve hacia el otro lado. Esta carga la comparten los dos elementos de acuerdo con la tercera característica, de modo que la suma de las cargas de los dos capacitores es igual a la carga total:

$$q = q_1 + q_2. \tag{16}$$

Si la combinación en paralelo fuese reemplazada por un solo capacitor C_{eq} y conectada a la misma batería, el requisito de que el circuito opere de un modo idéntico significaría que la batería debe transferir la misma carga q. O sea, para el capacitor equivalente,

$$q = C_{eq}V. \tag{17}$$

Al sustituir la ecuación 16 en la ecuación 17, incorporando luego las ecuaciones 15 dentro del resultado, obtenemos

$$C_{eq}V = C_1V + C_2V,$$

o sea

$$C_{eq} = C_1 + C_2. \tag{18}$$

Si se tienen más de dos capacitores en paralelo, podemos primero reemplazar a C_1 y C_2 por su equivalente C_{12} determinado de acuerdo con la ecuación 18. Luego hallamos la capacitancia equivalente de C_{12} y el siguiente capacitor C_3 en paralelo. Si este proceso se continúa, podemos extender la ecuación 18 a cualquier número de capacitores conectados en paralelo:

$$C_{eq} = \sum_n C_n \quad \text{(combinación en paralelo).} \tag{19}$$

Es decir, para calcular la capacitancia equivalente de una combinación en paralelo, simplemente sumamos las capacitancias individuales. Nótese que la capacitancia equivalente es siempre mayor que la máxima capacitancia en la combinación en paralelo. La combinación en paralelo puede almacenar más carga que cualquiera de los capacitores individuales.

Capacitores conectados en serie

La figura 6 muestra dos capacitores conectados *en serie*. Existen tres propiedades que distinguen a una conexión en serie de los elementos de un circuito. (1) Si intentamos viajar de a a b, debemos pasar por *todos* los elementos del circuito *en sucesión*. (2) Cuando se conecta una batería entre la combinación, la diferencia de potencial V de la batería es igual a la suma de las diferencias de potencial entre cada uno de los elementos. (3) La carga q entregada a cada elemento de la combinación en serie tiene el mismo valor.

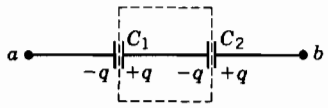


Figura 6 Combinación de dos capacitores en serie.

Para entender esta última propiedad, observemos la región de la figura 6 encerrada por la línea de trazos. Supongamos que la batería establece una carga $-q$ en la placa izquierda de C_1. Puesto que un capacitor contiene cargas iguales y opuestas en sus placas, una carga $+q$ aparece en la placa derecha de C_1. Pero el conductor en forma de H, encerrado dentro de la línea de trazos, está aislado eléctricamente del resto del circuito; al inicio no contiene ninguna carga neta, y no se le puede transferir ninguna carga. Si aparece una carga $+q$ en la placa derecha de C_1, entonces debe aparecer una carga $-q$ en la placa izquierda de C_2. Esto es, se mueven n ($= q/e$) electrones desde la placa derecha de C_1 hacia la placa izquierda de C_2. Si hubiese más de dos capacitores en serie, puede formularse un argumento semejante para toda la línea de capacitores, con el resultado de que la placa de la izquierda *en cada capacitor* de la conexión en serie contendrá una carga q de un signo, y que la placa derecha *de cada capacitor* de la conexión en serie contendrá una carga de igual magnitud q y de signo opuesto.

Podemos escribir para los capacitores individuales, usando la ecuación 1,

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \tag{20}$$

con la misma carga q en cada capacitor, pero distintas diferencias de potencial entre cada uno. De acuerdo con la segunda propiedad de una conexión en serie, tenemos

$$V = V_1 + V_2. \tag{21}$$

Buscamos la capacitancia equivalente C_{eq} que pueda reemplazar a la combinación, de modo que la batería proporcionaría la misma cantidad de carga:

$$V = \frac{q}{C_{eq}}. \tag{22}$$

Si se sustituye la ecuación 21 en la ecuación 22 e incluimos luego las ecuaciones 20, obtenemos

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

o sea

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{23}$$

Si tenemos varios capacitores en serie, podemos usar la ecuación 23 para determinar la capacitancia equivalente C_{12} de los primeros dos. Luego encontramos la capacitan-

cia equivalente de C_{12} y el siguiente capacitor en serie C_3. Al continuar de esta manera, hallaremos la capacitancia equivalente de cualquier número de capacitores en serie,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_n \frac{1}{C_n} \qquad \text{(combinación en serie).} \quad (24)$$

Esto es, para calcular la capacitancia equivalente de una combinación en serie, tómese el recíproco de la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Nótese que la capacitancia equivalente de la combinación en serie es siempre menor que la más pequeña de las capacitancias individuales en la serie.

A veces, los capacitores están conectados de modo tal que no son inmediatamente identificables como combinaciones en serie o en paralelo. Como vemos en el problema muestra 5, tales combinaciones pueden a menudo (pero no siempre) dividirse en unidades más pequeñas que pueden analizarse como conexiones en serie o en paralelo.

Problema muestra 5 (*a*) Halle la capacitancia equivalente de la combinación mostrada en la figura 7*a*. Suponga que

$$C_1 = 12.0\ \mu\text{F}, \quad C_2 = 5.3\ \mu\text{F}, \quad \text{y} \quad C_3 = 4.5\ \mu\text{F}.$$

(*b*) En la figura 7*a* se aplica una diferencia de potencial de $V = 12.5$ V en las terminales. ¿Cuál es la carga en C_1?

Solución (*a*) Los capacitores C_1 y C_2 están en paralelo. De la ecuación 18, su capacitancia equivalente es

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0\ \mu\text{F} + 5.3\ \mu\text{F} = 17.3\ \mu\text{F}.$$

Como lo muestra la figura 7*b*, C_{12} y C_3 están en serie. De la ecuación 23, la combinación equivalente final (véase la figura 7*c*) se encuentra de

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17.3\ \mu\text{F}} + \frac{1}{4.5\ \mu\text{F}} = 0.280\ \mu\text{F}^{-1},$$

o sea

$$C_{123} = \frac{1}{0.280\ \mu\text{F}^{-1}} = 3.57\ \mu\text{F}.$$

(*b*) Tratamos a los capacitores equivalentes C_{12} y C_{123} exactamente como si fuesen capacitores reales de la misma capacitancia. La carga en C_{123} en la figura 7*c* es, entonces,

$$q_{123} = C_{123}V = (3.57\ \mu\text{F})(12.5\ \text{V}) = 44.6\ \mu\text{C}.$$

Esta misma carga existe en cada capacitor en la combinación en serie de la figura 7*b*. La diferencia de potencial en C en esa figura es, entonces,

$$V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6\ \mu\text{C}}{17.3\ \mu\text{F}} = 2.58\ \text{V}.$$

Esta misma diferencia de potencial aparece en C en la figura 7*a*, de modo que

$$q_1 = C_1V_1 = (12\ \mu\text{F})(2.68\ \text{V}) = 31\ \mu\text{C}.$$

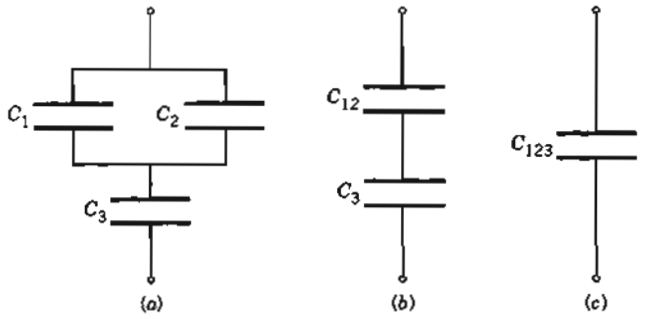


Figura 7 Problema muestra 5. (*a*) Combinación de tres capacitores. (*b*) La combinación en paralelo de C_1 y C_2 se ha reemplazado por su equivalente, C_{12}. (*c*) La combinación en serie de C_{12} y C_3 se ha reemplazado por su equivalente, C_{123}.

31-4 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Como se indicó en la introducción de este capítulo, un uso importante de los capacitores es el almacenamiento de energía electrostática en aplicaciones que van desde las lámparas de destello hasta los sistemas de láser (véase la Fig. 8), dependiendo ambas para su operación de la carga y descarga de capacitores.

En la sección 30-2 demostramos que cualquier configuración de carga tiene una cierta *energía potencial eléctrica* U, igual al trabajo W (que puede ser positivo o negativo) realizado por un agente externo que conjunte la configuración de carga a partir de sus componentes individuales, que originalmente se supuso estaban infinitamente separadas entre sí y en reposo. Esta energía potencial es semejante a la de los sistemas mecánicos, como un resorte comprimido o el sistema Tierra-Luna.

En un ejemplo simple, se realiza trabajo cuando dos cargas iguales y opuestas están separadas. Esta energía está almacenada como energía potencial eléctrica en el sistema, y puede recuperarse como energía cinética si se permite que las cargas se junten de nuevo. De modo semejante, un capacitor cargado tiene almacenada en él una energía potencial eléctrica U igual al trabajo W que el agente externo realiza cuando el capacitor se carga. Esta energía se recupera si se permite que el capacitor se descargue. Alternativamente, podemos visualizar el trabajo en el proceso de carga, al imaginarnos que el agente externo jala electrones de la placa positiva y los empuja hacia la placa negativa, lográndose así la separación de la carga. Por lo general, el trabajo en el proceso de carga lo realiza una batería, a costas de su energía química almacenada.

Supongamos que en un tiempo t se transfiere una carga q' de una placa a la otra. La diferencia de potencial V' entre

Figura 8 Este banco de 10,000 capacitores instalado en el Lawrence Livermore National Laboratory almacena 60 MJ de energía eléctrica y los libera en 1 ms a lámparas de destello que impulsan a un sistema de láser. La instalación es parte del proyecto Nova, con el cual se intenta producir reacciones sostenidas de fusión nuclear.

las placas en ese momento es $V' = q'/C$. Si ahora se transfiere un incremento de carga dq', el pequeño cambio dU resultante en la energía potencial eléctrica es, de acuerdo con la ecuación 10 del capítulo 30 ($\Delta V = \Delta U/q_0$),

$$dU = V'\,dq' = \frac{q'}{C}\,dq'.$$

Si este proceso continúa hasta que se haya transferido una carga q, la energía potencial total es de

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' \tag{25}$$

o sea

$$U = \frac{q^2}{2C}. \tag{26}$$

De la relación $q = CV$ podemos también escribir lo siguiente

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2. \tag{27}$$

Es razonable suponer que la energía almacenada en un capacitor reside en el campo eléctrico entre sus placas, del mismo modo que la energía que tiene una onda electromagnética puede considerarse que reside en su campo eléctrico. Cuando q o V en las ecuaciones 26 y 27 aumenta, por ejemplo, también lo hace el campo eléctrico E; cuando q y V son cero, también E lo es.

En un capacitor de placas paralelas, no considerando el efecto de borde, el campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos entre las placas. Se deduce que la *densidad de la energía u*, que es la energía almacenada por unidad de volumen, deberá también ser la misma en todas partes entre las placas; u es la energía almacenada U dividida entre el volumen Ad, o sea

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\tfrac{1}{2}CV^2}{Ad}.$$

Al sustituir la relación $C = \epsilon_0 A/d$ (Ec. 7) nos da

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2.$$

Pero, V/d es el campo eléctrico E, de modo que

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \tag{28}$$

Si bien hemos deducido esta ecuación para el caso particular de un capacitor de placas paralelas, en el caso general sigue siendo válida. *Si un campo eléctrico* $\mathbf{E}$ *existe en cualquier punto en el espacio (el vacío), podemos concebir ese punto como el sitio de energía almacenada en cantidad, por unidad de volumen, de* $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.

En general, E varía con la ubicación, de modo que u es función de las coordenadas. En el caso especial del capacitor de placas paralelas, E y u no varían con la ubicación en la región entre las placas.

Problema muestra 6 Un capacitor C_1 de 3.55 μF se carga a una diferencia de potencial $V_0 = 6.30$ V, mediante una batería. Luego se retira la batería de carga, y el capacitor se conecta como se muestra en la figura 9 a un capacitor C_2 de 8.95 μF, descargado. Después de cerrar el interruptor S, la carga fluye de C_1 a C_2 hasta que se llega al equilibrio, teniendo ambos capacitores la misma diferencia de potencial V. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial común? (*b*) ¿Cuál es la energía almacenada en el campo eléctrico antes y después de que el interruptor S se cierre en la figura 9?

Solución (*a*) La carga inicial q_0 la comparten ahora dos capacitores, o sea

$$q_0 = q_1 + q_2.$$

Si se aplica la relación $q = CV$ a cada término se tiene que

$$C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V,$$

o sea

$$V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6.30\text{ V})(3.55\ \mu\text{F})}{3.55\ \mu\text{F} + 8.95\ \mu\text{F}} = 1.79\text{ V}.$$

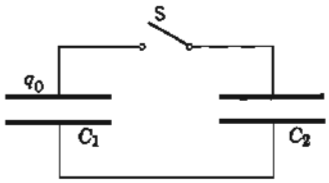


Figura 9 Problema muestra 6. El capacitor C_1 se ha cargado previamente a una diferencia de potencial V_0 por una batería que ha sido retirada. Cuando el interruptor S se cierra, la carga inicial q_0 en C_1 se comparte con C_2.

Si conocemos el voltaje V_0 de la batería y el valor de C_1, podemos determinar la capacitancia C_2 desconocida al medir el valor de V en una disposición similar a la de la figura 9.

(*b*) La energía almacenada inicial es

$$U_i = \tfrac{1}{2}C_1V_0^2 = \tfrac{1}{2}(3.55 \times 10^{-6}\ \text{F})(6.30\ \text{V})^2$$
$$= 7.05 \times 10^{-5}\ \text{J} = 70.5\ \mu\text{J}.$$

La energía final es

$$U_f = \tfrac{1}{2}C_1V^2 + \tfrac{1}{2}C_2V^2 = \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(3.55 \times 10^{-6}\ \text{F} + 8.95 \times 10^{-6}\ \text{F})(1.79\ \text{V})^2$$
$$= 2.00 \times 10^{-5}\ \text{J} = 20.0\ \mu\text{J}.$$

Concluimos que $U_f < U_i$, en aproximadamente un 72%. Esto no es una violación de la conservación de la energía. La energía "faltante" se presenta como energía térmica en los alambres de conexión, como lo explicaremos en el capítulo siguiente.*

Problema muestra 7 Una esfera conductora aislada cuyo radio R es de 6.85 cm contiene una carga $q = 1.25$ nC. (*a*) ¿Cuánta energía está almacenada en el campo eléctrico de este conductor cargado? (*b*) ¿Cuál es la densidad de energía en la superficie de la esfera? (*c*) ¿Cuál es el radio R_0 de una superficie esférica tal que la mitad de la energía potencial almacenada se encuentre en ella?

Solución (*a*) De las ecuaciones 26 y 14 tenemos que

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{(1.25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(8\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(0.0685\ \text{m})}$$
$$= 1.03 \times 10^{-7}\ \text{J} = 103\ \text{nJ}.$$

(*b*) Según la ecuación 28,

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2,$$

de modo que debemos primero hallar E en la superficie de la esfera. Esto está dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}.$$

La densidad de energía es entonces

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}$$
$$= \frac{(1.25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(32\pi^2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.0685\ \text{m})^4}$$
$$= 2.54 \times 10^{-5}\ \text{J/m}^3 = 25.4\ \mu\text{J/m}^3.$$

(*c*) La energía que se encuentra en una esfera hueca entre los radios r y $r + dr$ es

$$dU = (u)(4\pi r^2)(dr),$$

donde $(4\pi r^2)(dr)$ es el volumen de la esfera hueca. Si empleamos el resultado de la parte (*b*) para la densidad de la energía evaluada para un radio r, obtenemos

$$dU = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}4\pi r^2\,dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}.$$

La condición dada para este problema es que

$$\int_R^{R_0} dU = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} dU$$

o, usando el resultado obtenido antes para dU y cancelando los factores constantes en ambos lados,

$$\int_R^{R_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2},$$

lo cual se convierte en

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2R}.$$

Al despejar R_0 nos da

$$R_0 = 2R = (2)(6.85\ \text{cm}) = 13.7\ \text{cm}.$$

La mitad de la energía almacenada está contenida dentro de la superficie esférica cuyo radio es el doble del radio de la esfera conductora.

31-5 CAPACITOR CON DIELÉCTRICO

Hasta ahora hemos calculado la capacitancia suponiendo que no existe un material en el espacio entre las placas del capacitor. La presencia de un material altera la capacitancia de un capacitor y (posiblemente) el campo eléctrico entre sus placas. En esta sección estudiaremos el efecto de llenar la región entre las placas con una de las diversas sustancias aislantes conocidas como *dieléctricos*.

Michael Faraday, en 1837, fue el primero en investigar el efecto de llenar el espacio entre las placas de un capacitor con un dieléctrico. Faraday construyó dos capacitores idénticos, llenando uno con un dieléctrico y el otro con aire en condiciones normales. Cuando ambos capacitores fueron cargados a la *misma diferencia de potencial*, los

* Cierta cantidad pequeña de energía también se irradia. Para un estudio crítico, véase "Two-Capacitor Problem: A More Realistic View", por R. A. Powell, *American Journal of Physics*, mayo de 1979, pág. 460.

TABLA 1 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS DIELÉCTRICOS[a]

Material	*Constante dieléctrica,* κ_e	*Resistencia o rigidez dieléctrica* (kV/mm)
Vacío	1 (exactamente)	∞
Aire (1 atm)	1.00059	3
Poliestireno	2.6	24
Papel	3.5	16
Aceite de transformadores	4.5	12
Pyrex	4.7	14
Mica	5.4	160
Porcelana	6.5	4
Silicio	12	
Agua (25°C)	78.5	
Agua (20°C)	80.4	
Cerámica de titanio	130	
Titanato de estroncio	310	8

[a] Medidas a la temperatura ambiente.

experimentos de Faraday demostraron que *la carga en el capacitor con el dieléctrico era mayor que aquélla en el otro.*

Puesto que q es mayor para la misma V con el dieléctico presente, se sigue de la relación $C = q/V$ que la capacitancia de un capacitor *aumenta* si se coloca un dieléctrico entre las placas. (Suponemos, a menos que se indique lo contrario, que el dieléctrico llena completamente el espacio entre las placas.) El factor adimensional por el cual crece la capacitancia, en relación con su valor C_0 cuando no hay un dieléctrico presente, se llama *constante dieléctrica* κ_e:

$$\kappa_e = C/C_0. \tag{29}$$

La constante dieléctrica es una propiedad fundamental del material dieléctrico y es independiente del tamaño o la forma del conductor. La tabla 1 muestra las constantes dieléctricas de diversos materiales. Nótese que, en la mayor parte de las aplicaciones prácticas, el aire y el vacío son equivalentes en sus efectos dieléctricos.

La figura 10 nos da una idea de los experimentos de Faraday. La batería B carga inicialmente al capacitor con una carga q, y la batería permanece conectada para asegurar que la diferencia de potencial V y el campo eléctrico $\mathbf{E}$ entre las placas permanezca constante. Después de haber insertado una lámina dieléctrica, la carga aumenta en un factor de κ_e a un valor de $\kappa_e q$. La carga de más $(\kappa_e - 1)q$ se lleva desde la placa negativa a la placa positiva por la batería cuando la lámina dieléctrica se inserta.

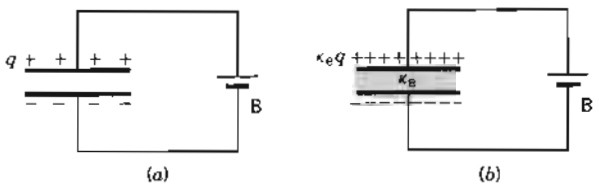


Figura 10 (*a*) Un capacitor vacío, inicialmente descargado, se carga por una batería B. En un circuito, la batería se representa mediante el símbolo ⊣⊢, cuyo lado más largo indica la terminal más positiva. La batería mantiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales. (*b*) La batería permanece conectada cuando la región entre las placas del capacitor se llena con un dieléctrico. En este caso, la diferencia de potencial permanece constante mientras que la carga en el capacitor aumenta.

Alternativamente, como en la figura 11, podemos desconectar la batería después de que el capacitor se ha cargado a la carga q. Si ahora insertamos la lámina dieléctrica, la carga permanece constante (pues no hay una trayectoria para la transferencia de carga), pero la diferencia de potencial cambia. En este caso, hallamos que la diferencia de potencial *disminuye* en un factor κ_e de V a V/κ_e después de haber insertado al dieléctrico. El campo eléctrico disminuye también por el factor κ_e. Esperamos esta disminución en V basándonos en la expresión $q = CV$; si q es constante, entonces el aumento en C por el factor κ_e debe compensarse por una disminución equivalente en V por el mismo factor.

Si el propósito de un capacitor es almacenar energía, entonces su capacidad aumenta gracias al dieléctrico, el cual le permite almacenar un factor κ_e más de carga para una misma diferencia de potencial. Sin embargo, la presencia del dieléctrico limita también la diferencia de potencial que puede mantenerse entre las placas. Si se excede este límite, el material dieléctrico se perfora, resultando en una trayectoria conductora entre las placas. Cada material dieléctrico tiene una *resistencia o rigidez dieléctrica* característica que es el valor máximo del campo dieléctrico que puede soportar sin perforación. En la tabla 1 se muestran algunos de estos valores.

En un capacitor de placas paralelas lleno con dieléctrico, la capacitancia es de

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{d}. \tag{30}$$

La ecuación 7 es un caso especial de este resultado con $\kappa_e = 1$, correspondiente al vacío entre las placas. La capacitancia de *cualquier* capacitor aumenta por un factor de κ_e cuando todo el espacio en donde existe el campo eléctrico está completamente lleno con un dieléctrico. De modo semejante, podemos corregir las ecuaciones 10, 13 o 14 para la presencia de un dieléctrico que llene la región entre las placas.

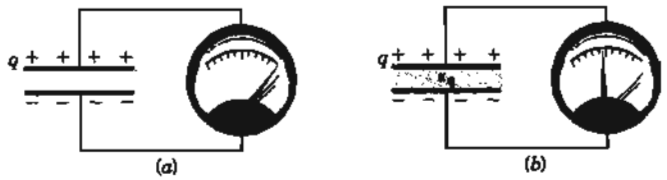


Figura 11 (*a*) Un capacitor vacío, inicialmente descargado, se carga mediante una batería, la cual se retira después. El voltímetro muestra la diferencia de potencial entre las placas. (*b*) La región entre las placas se llena con un dieléctrico. La carga permanece constante, pero la diferencia de potencial disminuye.

El reemplazo de ϵ_0 por $\kappa_e\epsilon_0$ explica el efecto sobre la capacitancia cuando el capacitor se llena con un dieléctrico. Este mismo cambio puede emplearse para modificar cualquiera de las ecuaciones de la electrostática y así explicar la presencia de un dieléctrico que llene todo el espacio. Para una carga puntual q incrustada en el dieléctrico, el campo eléctrico es (véase la Ec. 4 del capítulo 28)

$$E = \frac{1}{4\pi\kappa_e\epsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{31}$$

La ecuación 31 da el campo *total* en el dieléctrico. El campo debido a la carga puntual está aún dado por la ley de Coulomb (sin el factor κ_e), pero el dieléctrico mismo produce otro campo eléctrico, que se combina con el campo de la carga puntual para dar la ecuación 31.

De un modo similar, el campo eléctrico cerca de la superficie de un conductor cargado y aislado inmerso en un dieléctrico es

$$E = \frac{\sigma}{\kappa_e\epsilon_0}. \tag{32}$$

El conductor da una contribución σ/ϵ_0 al campo, y el dieléctrico da una contribución extra, de modo que el campo total está dado por la ecuación 32. En ambas ecuaciones, 31 y 32, la presencia del dieléctrico causa que ϵ_0 se reemplace por $\kappa_e\epsilon_0$. Nótese que el efecto de este reemplazo es debilitar el campo eléctrico. En la sección siguiente, veremos cómo se explica esta reducción mediante las propiedades microscópicas del dieléctrico.

Problema muestra 8 Un capacitor de placas paralelas cuya capacitancia C_0 es de 13.5 pF tiene una diferencia de potencial V = 12.5 V entre sus placas. La batería de carga se desconecta ahora y se desliza una lámina de porcelana (κ_e = 6.5) entre las placas como se muestra en la figura 11*b*. ¿Cuál es la energía almacenada de la unidad, tanto antes como después de haber introducido la lámina?

Solución La energía inicial almacenada está dada por la ecuación 27 como

$$U_i = \tfrac{1}{2}C_0V^2 = \tfrac{1}{2}(13.5\times10^{-12}\text{ F})(12.5\text{ V})^2$$
$$= 1.055\times10^{-9}\text{ J} = 1055\text{ pJ}.$$

Podemos escribir la energía final de la ecuación 26 en la forma

$$U_f = \frac{q^2}{2C}$$

porque, según las condiciones del enunciado del problema, q (pero no V) permanece constante cuando se introduce la lámina. Después de que la lámina esté en su lugar, la capacitancia aumenta a κ_eC_0 de modo que

$$U_f = \frac{q^2}{2\kappa_eC_0} = \frac{U_i}{\kappa_e} = \frac{1055\text{ pJ}}{6.5} = 162\text{ pJ}.$$

La energía después de haber introducido la lámina es menor por un factor de $1/\kappa_e$.

La energía "faltante" sería fácil de comprender, en principio, para la persona que haya introducido la lámina. El capacitor ejercería una fuerza sobre la lámina y realizaría trabajo sobre ella, en la cantidad de

$$W = U_i - U_f = 1055\text{ pJ} - 162\text{ pJ} = 893\text{ pJ}.$$

Si la lámina se introdujera sin ningún esfuerzo y si no existiera fricción, la lámina oscilaría de un lado al otro entre las placas. El sistema que consta del capacitor + lámina tiene una energía constante de 1055 pJ; la energía cambia alternativamente de una forma a otra entre la energía cinética de la lámina en movimiento y la energía almacenada del campo eléctrico. En el instante en que la lámina oscilante llene el espacio entre las placas, su energía cinética sería de 893 pJ.

31-6 DIELÉCTRICOS: UN EXAMEN ATÓMICO

Buscamos ahora entender, en términos atómicos, qué sucede cuando colocamos un dieléctrico en un campo eléctrico. Existen dos posibilidades. Las moléculas de ciertos dieléctricos, como el agua (véase la Fig. 18 del capítulo 28), tienen momentos dipolares eléctricos permanentes. En tales materiales (llamados *dieléctricos polares*) los momentos dipolares eléctricos **p** tienden a alinearse por sí mismos con un campo eléctrico externo, como en la figura 12. Puesto que las moléculas están en constante agitación térmica, el grado de alineamiento no es completo sino que aumenta conforme aumenta el campo eléctrico aplicado o a medida que disminuya la temperatura. En ausencia de un campo aplicado, los dipolos se orientan aleatoriamente.

En los *dieléctricos no polares*, las moléculas carecen de momentos dipolares eléctricos permanentes, pero pueden adquirirlos por *inducción* cuando se colocan en un campo eléctrico. En la sección 30-6 (véase la Fig. 11 del capítulo 30), vemos que el campo eléctrico externo tiende a separar la carga positiva de la negativa en el átomo o en la molécula. Este *momento dipolar eléctrico inducido* está presente sólo cuando el campo eléctrico está presente. Es

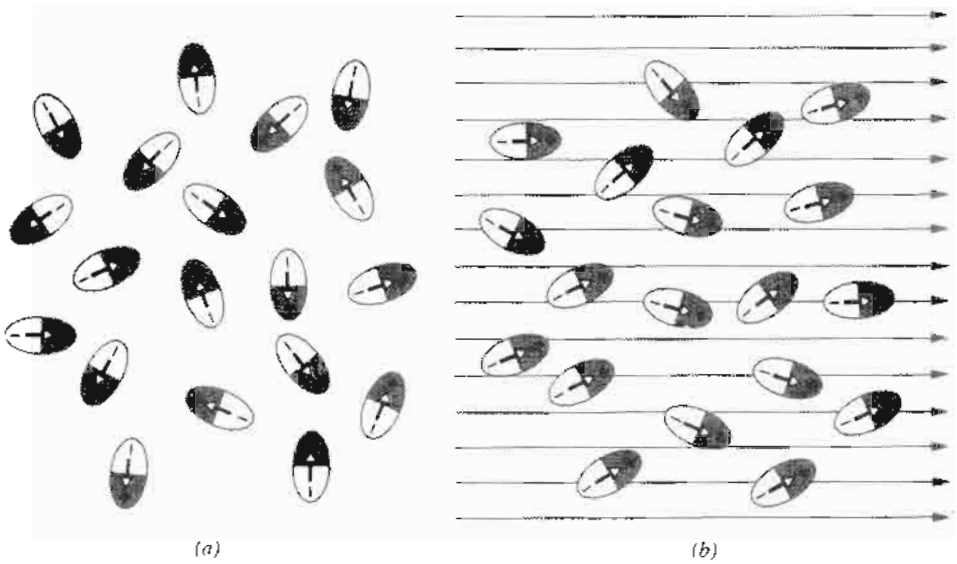


Figura 12 (*a*) Conjunto de moléculas con momentos dipolares eléctricos permanentes. Cuando no existe un campo eléctrico externo, las moléculas están orientadas aleatoriamente. (*b*) Un campo eléctrico externo produce un alineamiento parcial de los dipolos. La agitación térmica impide un alineamiento completo.

proporcional al campo eléctrico (para intensidades de campo normales) y se crea ya alineado con el campo eléctrico como lo sugiere la figura 11 del capítulo 30. Los dieléctricos polares pueden también adquirir momentos dipolares eléctricos inducidos en campos externos.

Usemos un capacitor de placas paralelas, que contiene una carga fija q y no está conectado a una batería, para proveer un campo eléctrico externo uniforme $\mathbf{E}_0$ dentro del cual colocamos una lámina dieléctrica (Fig. 13*a*). El efecto total del alineamiento y de la inducción es separar ligeramente el centro de la carga positiva de toda la lámina del centro de la carga negativa. Si bien la totalidad de la lámina permanece eléctricamente neutra, resulta *polarizada*, como lo indica la figura 13*b*. El efecto neto es una acumulación de carga positiva sobre la cara derecha de la lámina, y de carga negativa sobre la cara izquierda; dentro de la lámina no aparece ninguna carga en exceso en ningún elemento de volumen dado.

Puesto que la lámina permanece neutra en su totalidad, la *carga superficial inducida* positiva debe ser de igual magnitud a la carga superficial inducida negativa. Nótese que, en este proceso, los electrones del dieléctrico se

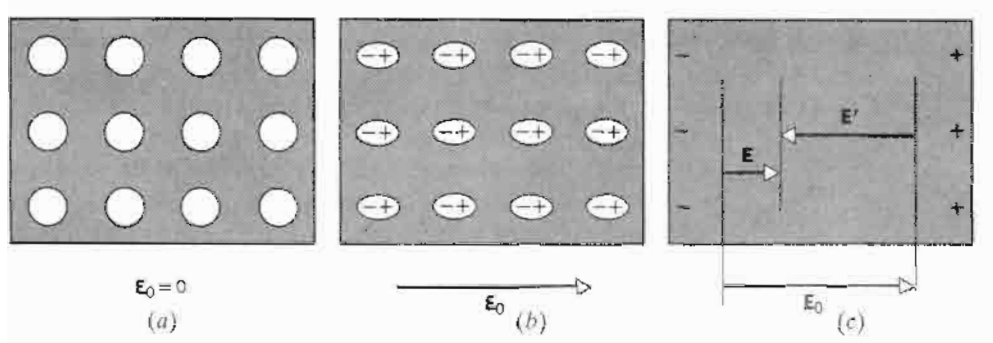


Figura 13 (*a*) Una lámina dieléctrica. Los círculos sugieren la forma esférica de los átomos neutros dentro de la lámina. (*b*) Un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_0$ separa a las cargas positivas y negativas del átomo. Un elemento de volumen en el interior de la lámina no contiene una carga neta, pero existe una carga superficial neta inducida en la lámina, negativa en el lado izquierdo y positiva en el derecho. (*c*) Las cargas superficiales netas inducidas crean un campo eléctrico inducido $\mathbf{E}'$, el cual es de dirección opuesta al campo aplicado $\mathbf{E}_0$. En el interior de la lámina, el campo neto $\mathbf{E}$ es la suma vectorial de $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$.

desplazan de sus posiciones de equilibrio a distancias que son considerablemente menores que un diámetro atómico. No existe una transferencia de carga en distancias macroscópicas como ocurre cuando hay una corriente en un conductor.

La figura 13c muestra que las cargas superficiales inducidas aparecen siempre de modo tal que el campo eléctrico $\mathbf{E}'$ generado *por ellas* se opone al campo eléctrico externo $\mathbf{E}_0$. El campo $\mathbf{E}$ *resultante* en el dieléctrico es la suma vectorial de $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$. Apunta en la misma dirección que $\mathbf{E}_0$ pero es menor. *Si situamos a un dieléctrico en un campo eléctrico, aparecen cargas superficiales inducidas que tienden a debilitar el campo original dentro del dieléctrico.*

Este debilitamiento del campo eléctrico se presenta en la figura 11 como una reducción de la diferencia de potencial entre las placas de un capacitor aislado cargado cuando se introduce un dieléctrico entre las placas. La relación $V = Ed$ para un capacitor de placas paralelas (véase la Ec. 6) se cumple ya sea que el dieléctrico esté presente o no y demuestra que la reducción en V descrita en la figura 11 se relaciona directamente con la reducción en E descrita en la figura 13. Tanto E como V se reducen en un factor κ_e. (Nótese que esto se cumple sólo cuando la batería ya no está conectada. Si la batería permaneciera conectada, V sería constante pero q aumentaría. El campo eléctrico aumentado a partir de esta carga adicional sobre el capacitor sería opuesto por el campo $\mathbf{E}'$ en el dieléctrico, y el resultado sería un E constante.)

La carga inducida es la explicación de la atracción a una barra cargada de trozos no cargados de un material no conductor como el papel. La figura 14 muestra un trozo de papel en el campo de una barra cargada. Sobre el papel aparecen cargas superficiales como se muestra. El extremo del papel cargado negativamente experimenta una atracción hacia la barra, y el extremo cargado positivamente es repelido. Estas dos fuerzas no tienen la misma magnitud porque el extremo negativo, por estar más cerca de la barra, está en un campo más intenso y experimenta una fuerza más intensa. El efecto neto es una atracción. Si un objeto dieléctrico se coloca en un campo eléctrico *uniforme*, aparecen las cargas superficiales inducidas pero el objeto no experimenta ninguna fuerza neta.

En el problema muestra 8 indicamos que, si insertamos una lámina dieléctrica dentro de un capacitor de placas paralelas que contenga una carga fija q, actúa una fuerza sobre la lámina que la atrae hacia el capacitor. Esta fuerza la proporciona la atracción electrostática entre las cargas $\pm q$ en las placas del capacitor y las cargas superficiales inducidas $\pm q'$ en la lámina dieléctrica. Cuando la lámina no está por completo dentro del capacitor, ni q ni q' se distribuyen uniformemente. (Véase la pregunta 26.)

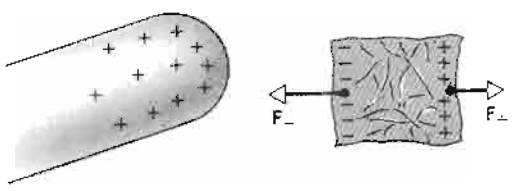


Figura 14 Una barra cargada atrae un trozo de papel descargado porque existen fuerzas no balanceadas que actúan sobre las cargas superficiales inducidas.

31-7 LOS DIELÉCTRICOS Y LA LEY DE GAUSS

Hasta ahora, nuestro uso de la ley de Gauss se ha limitado a situaciones en las que no se encuentra un dieléctrico presente. Apliquemos ahora esta ley a un capacitor de placas paralelas lleno de un material de constante dieléctrica κ_e.

La figura 15 muestra al capacitor con y sin el dieléctrico. Suponemos que la carga q en las placas es la misma en cada caso. Las superficies gaussianas se han dibujado como en la figura 3.

Si no existe un dieléctrico presente (Fig. 15*a*), la ley de Gauss da

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 E_0 A = q$$

o sea

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}. \tag{33}$$

Si el dieléctrico está presente (Fig. 15*b*), la ley de Gauss da

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 EA = q - q'$$

o sea

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}, \tag{34}$$

donde $-q'$, la *carga superficial inducida*, debe distinguirse de q, la *carga libre* en las placas. Estas dos cargas $+q$ y $-q'$, las cuales se encuentran dentro de la superficie gaussiana, son de signo opuesto; la carga *neta* dentro de la superficie gaussiana es de $q + (-q') = q - q'$.

El dieléctrico reduce el campo eléctrico por el factor κ_e, y así

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A}. \tag{35}$$

Al sustituir esto en la ecuación 34 da

$$\frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

o sea

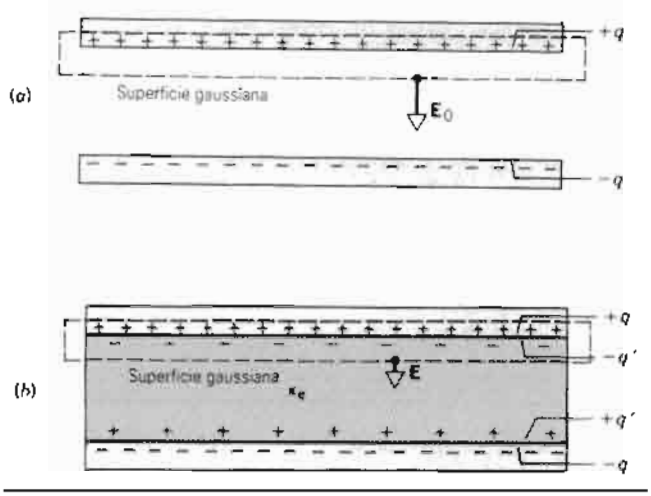


Figura 15 (*a*) Capacitor de placas paralelas. (*b*) Se inserta una lámina dieléctrica, mientras que la carga q en las placas permanece constante. En la superficie de la lámina dieléctrica aparece una carga inducida q'.

$$q' = q\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right). \tag{36}$$

Esto demuestra que la carga superficial inducida q' es siempre de menor magnitud que la carga libre q y es igual a cero si no hay un dieléctrico presente, es decir, si $\kappa_e = 1$.

Ahora escribiremos la ley de Gauss para el caso de la figura 15*b* en la forma

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q - q', \tag{37}$$

siendo de nuevo $q - q'$ la carga neta dentro de la superficie gaussiana. Si se sustituye de la ecuación 36 para q' se obtiene, después de reordenar

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q. \tag{38}$$

Esta importante relación, si bien obtenida para un capacitor de placas paralelas, es generalmente válida y es la forma en la cual suele escribirse la ley de Gauss cuando interviene la presencia de dieléctricos. Obsérvese lo siguiente:

1. La integral del flujo ahora contiene el factor $\kappa_e\mathbf{E}$ en lugar de $\mathbf{E}$. Esto es consistente con la *reducción* de E en un dieléctrico por el factor κ_e, porque $\kappa_e\mathbf{E}$ (dieléctrico presente) es igual a $\mathbf{E}_0$ (sin el dieléctrico). Con fines de generalizar, permitimos la posibilidad de que κ_e no sea constante al ponerla dentro de la integral.

2. Se considera que la carga q contenida dentro de la superficie gaussiana es *la carga libre únicamente*. En el miembro derecho de la ecuación 38 se omite deliberadamente la carga superficial inducida, que se tomó en cuenta al introducir κ_e en el miembro izquierdo. Las ecuaciones 37 y 38 son formulaciones completamente equivalentes.

Problema muestra 9 La figura 16 muestra un capacitor de placas paralelas de área A de la placa y separación d entre placas. Entre ellas se aplica una diferencia de potencial V_0. Entonces se desconecta la batería, y se coloca una lámina dieléctrica de espesor b y constante dieléctrica κ_e entre las placas, como se muestra. Suponga que

$$A = 115\ \text{cm}^2, \quad d = 1.24\ \text{cm}, \quad b = 0.78\ \text{cm},$$
$$\kappa_e = 2.61, \quad V_0 = 85.5\ \text{V}.$$

(*a*) ¿Cuál es la capacitancia C_0 antes de insertar la lámina? (*b*) ¿Qué carga libre aparece en las placas? (*c*) ¿Cuál es el campo eléctrico E_0 en los espacios entre las placas y la lámina dieléctrica? (*d*) Calcule el campo eléctrico E en la lámina dieléctrica. (*e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas después de haber introducido la lámina? (*f*) ¿Cuál es la capacitancia con la lámina en su lugar?

Solución (*a*) De la ecuación 7 tenemos

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.55\times10^{-12}\ \text{F/m})(115\times10^{-4}\ \text{m}^2)}{1.24\times10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 8.21\times10^{-12}\ \text{F} = 8.21\ \text{pF}.$$

(*b*) La carga libre en las placas puede determinarse de la ecuación 1,

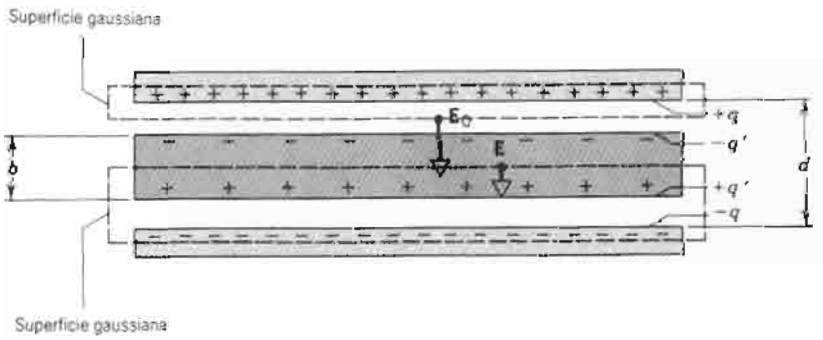


Figura 16 Problema muestra 9. Un capacitor de placas paralelas contiene un dieléctrico que llena sólo parcialmente el espacio entre las placas.

$$q = C_0 V_0 = (8.21 \times 10^{-12}\ \text{F})(85.5\ \text{V})$$
$$= 7.02 \times 10^{-10}\ \text{C} = 702\ \text{pC}.$$

Puesto que la batería de carga se desconectó antes de introducir la lámina, la carga libre permanece sin cambio cuando la lámina se pone en posición.

(*c*) Apliquemos la ley de Gauss en la forma dada en la ecuación 38 a la superficie gaussiana de arriba en la figura 16, la cual comprende sólo la carga libre en la placa superior del capacitor. Tenemos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0(1) E_0 A = q$$

o sea

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}$$
$$= 6900\ \text{V/m} = 6{,}90\ \text{kV/m}.$$

Nótese que ponemos $\kappa_e = 1$ en esta ecuación porque la superficie gaussiana, sobre la cual se integró la ley de Gauss, no pasa a través de ningún dieléctrico. Adviértase también que el valor de E_0 permanece sin cambio cuando se introduce la lámina. Sólo depende de la carga libre en las placas.

(*d*) Aplicamos una vez más la ecuación 38, esta vez a la superficie gaussiana inferior de la figura 16 e incluyendo únicamente la carga libre $-q$. Hallamos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\epsilon_0 \kappa_e E A = -q$$

o sea

$$E = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{6.90\ \text{kV/m}}{2.61} = 2.64\ \text{kV/m}.$$

El signo menos aparece cuando evaluamos el producto punto $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ porque $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{A}$ están en direcciones opuestas, estando $d\mathbf{A}$ siempre en la dirección de la normal *hacia afuera* de la superficie gaussiana cerrada.

(*e*) Para determinar la diferencia de potencial, usamos la ecuación 6

TABLA 2 RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA MUESTRA 9

Cantidad		*Sin lámina*	*Lámina parcial*	*Lámina completa*
C	pF	8.21	13.4	21.4
q	pC	702	702	702
q'	pC	—	433	433
V	V	85.5	52.3	32.8
E_0	kV/m	6.90	6.90	6.90[a]
E	kV/m	—	2.64	2.64

[a] Se supone que existe un espacio sin ocupar muy pequeño.

$$V = \int_+^- E\, ds = E_0(d - b) + Eb$$
$$= (6900\ \text{V/m})(0.0124\ \text{m} - 0.0078\ \text{m})$$
$$+ (2640\ \text{V/m})(0.0078\ \text{m})$$
$$= 52.3\ \text{V}.$$

Esto contrasta con la diferencia de potencial, aplicada inicialmente, de 85.5 V.

(*f*) De la ecuación 1, la capacitancia con la lámina en posición es de

$$C = \frac{q}{V} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{52.3\ \text{V}}$$
$$= 1.34 \times 10^{-11}\ \text{F} = 13.4\ \text{pF}.$$

La tabla 2 resume los resultados de este problema muestra e incluye también los resultados que se habrían deducido si la lámina dieléctrica hubiese llenado completamente el espacio entre las placas.

PREGUNTAS

1. Un capacitor está conectado a una batería. (*a*) ¿Por qué cada placa recibe una carga de la misma magnitud exactamente? (*b*) ¿Es esto cierto aun cuando las placas son de tamaños diferentes?
2. Se dan dos capacitores, C_1 y C_2, en donde $C_1 > C_2$. ¿Cómo podrían disponerse las cosas de modo que C_2 pudiera contener más carga que C_1?
3. La relación $\sigma \propto 1/R$, en que σ es la densidad superficial de carga y R es el radio de curvatura (véase la Ec. 33 del capítulo 30) indica que la carga puesta en un conductor aislado se concentra en las puntas y evita las superficies planas, en donde $R = \infty$. ¿Cómo compaginamos esto con la figura 3, donde la carga está definitivamente en la superficie plana de cada placa?
4. En relación con la ecuación 1 ($q = CV$) decimos que C es una constante. Sin embargo hemos señalado (véase la Ec. 7) que depende de la geometría (y también, como lo veremos más adelante, del medio). Si C es realmente una constante, ¿con respecto a qué variables permanece constante?
5. En la figura 1, supongamos que a y b no son conductores, estando la carga arbitrariamente distribuida sobre sus superficies. (*a*) ¿Se cumpliría la ecuación 1 ($q = CV$), si C fuese independiente de la distribución de las cargas? (*b*) ¿Cómo definiría V en este caso?
6. Tenemos a un capacitor de placas paralelas cuadradas de área A y separación d, en el vacío. ¿Cuál es el efecto cualitativo de cada uno de los casos siguientes sobre su

capacitancia? (*a*) Si d se reduce. (*b*) Si se coloca una lámina de cobre entre las placas, pero sin que toque a ninguna de ellas. (*c*) Si se duplica el área de ambas placas. (*d*) Si se duplica el área de una placa solamente. (*e*) Si se desliza a las placas paralelamente entre sí de modo que el área de traslape sea del 50%. (*f*) Si se duplica la diferencia de potencial entre las placas. (*g*) Si se inclina a una placa de modo que la separación permanezca, siendo d en un extremo pero $\frac{1}{2}d$ en el otro.

7. Tenemos a dos conductores aislados, cada uno de ellos con determinada capacitancia; véase la figura 17. Si unimos a estos conductores por medio de un alambre fino, ¿cómo calcularía la capacitancia de la combinación? Al unirlos con el alambre, ¿los ha conectado en serie o en paralelo?

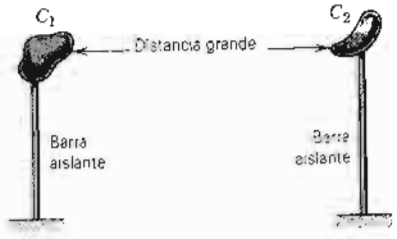


Figura 17 Pregunta 7.

8. La capacitancia de un conductor es afectada por la presencia de un segundo conductor que no tiene carga y está eléctricamente aislado. ¿Por qué?
9. Entre las placas de un capacitor como el de la figura 18 se coloca una lámina delgada de aluminio de espesor despreciable. ¿Qué efecto tiene sobre la capacitancia si (*a*) la hoja está aislada eléctricamente y (*b*) si la hoja está conectada a la placa de arriba?

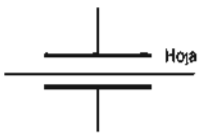


Figura 18 Pregunta 9.

10. Los capacitores se almacenan a menudo con un alambre conectado entre sus terminales. ¿Por qué se hace esto?
11. Si no despreciásemos el efecto de borde de las líneas del campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas, ¿se calcularía una capacitancia mayor o menor?
12. Dos discos circulares de cobre están encarados y separados por cierta distancia entre sí. ¿De qué manera podría reducirse la capacitancia de esta combinación?
13. ¿Esperaría usted que la constante dieléctrica de un material varíe con la temperatura? De ser así, ¿cómo? ¿Importa aquí que las moléculas tengan momentos dipolares permanentes o no?
14. Analice las semejanzas y diferencias cuando se inserta (*a*) una lámina de dieléctrico y (*b*) una lámina conductora entre las placas de un capacitor de placas paralelas. Suponga que los espesores de la lámina son de la mitad de la separación entre placas.
15. Un capacitor de placas paralelas, con dieléctrico de aceite, se ha diseñado para que tenga una capacitancia C y para que opere con seguridad igual o menor que cierta diferencia de potencial V_m máxima sin que se forme un arco. Sin embargo, el diseñador no hizo un buen trabajo y el capacitor se arquea de vez en cuando. ¿Qué puede hacerse para rediseñar el capacitor, manteniendo a C y V_m sin cambio y usando el mismo dieléctrico?
16. Demuestre que la constante dieléctrica de un conductor puede considerarse como infinitamente grande.
17. Para una diferencia de potencial dada, ¿almacena un capacitor más o menos carga con un dieléctrico que sin él (en el vacío)? Explíquelo en términos microscópicos de la situación.
18. Un campo eléctrico puede polarizar a los gases de varias maneras: distorsionando las nubes de los electrones de las moléculas; orientando a las moléculas polares; flexionando o estirando los enlaces en las moléculas polares. ¿En qué se difierencia esto de la polarización de las moléculas de los líquidos y los sólidos?
19. Un objeto dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme experimenta una fuerza neta. ¿Por qué no existe una fuerza neta si el campo es uniforme?
20. Una corriente de agua de la llave puede ser desviada si cerca de ella se coloca una barra cargada. Explique detalladamente cómo sucede esto.
21. El agua tiene una constante dieléctrica elevada (véase la tabla 1). ¿Por qué no se emplea ordinariamente como material dieléctrico en los capacitores?
22. La figura 19 muestra un capacitor real 1-F disponible para el uso en laboratorios de estudiantes. Tiene únicamente unos cuantos centrímetros de diámetro. Considerando el resultado del problema muestra 2, ¿cómo puede estar construido uno de estos capacitores?
23. Una lámina dieléctrica se inserta en un extremo de un capacitor de placas paralelas cargado (siendo las placas horizontales y habiendo sido desconectada la batería de carga) y luego se retira. Describa qué sucede. Desprecie la fricción.
24. Un capacitor de placas paralelas se carga mediante una batería, la cual después se desconecta. Entonces se desliza una lámina de material dieléctrico entre las placas. Describa cualitativamente lo que le sucede a la carga, a la capacitancia, a la diferencia de potencial, al campo eléctrico y a la energía almacenada.
25. Un material eléctrico se desliza entre las placas de un capacitor de placas paralelas mientras permanece conectado a una batería. Describa cualitativamente qué le sucede a la carga, a la capacitancia, a la diferencia de potencial, al campo eléctrico y a la energía almacenada. ¿Se requiere trabajo para insertar el material?
26. Imagine una lámina de material dieléctrico, de anchura igual a la separación entre placas, insertada únicamente a

Figura 19 Pregunta 22.

la mitad entre las placas de un capacitor de placas paralelas que contiene una carga fija q. Dibuje cualitativamente la distribución de la carga q en las placas y la carga inducida q' en la lámina.

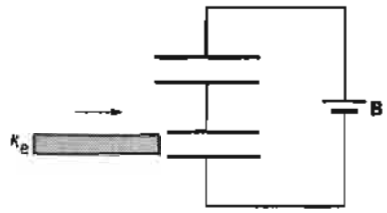


Figura 20 Pregunta 27.

27. Dos capacitores idénticos están conectados como se muestra en la figura 20. Entre las placas de un capacitor se desliza una lámina de material dieléctrico, permaneciendo conectada la batería. Describa cualitativamente qué le sucede a la carga, a la capacitancia, a la diferencia de potencial, al campo eléctrico y a la energía almacenada por cada capacitor.
28. En este capítulo hemos supuesto condiciones electrostáticas; o sea, la diferencia de potencial V entre las placas del capacitor permanece constante. Sin embargo, supongamos que, como a menudo sucede en la práctica, V varíe senoidalmente con el tiempo con una frecuencia angular ω. ¿Cabe esperar que la constante dieléctrica κ_e varíe con ω?

PROBLEMAS

Sección 31-1 Capacitancia

1. El electrómetro es un aparato que sirve para medir la carga estática. Se coloca una carga desconocida en las placas de un capacitor y se mide la diferencia de potencial. ¿Cuál es la carga mínima que puede medirse con un electrómetro con una capacitancia de 50 pF y una sensibilidad de voltaje de 0.15 V?
2. Los dos objetos de metal de la figura 21 tienen cargas netas de +73.0 pC y -73.0 pC, dando como resultado una diferencia de potencial de 19.2 V entre ellos. (*a*) ¿Cuál es la capacitancia del sistema? (*b*) Si las cargas se cambian a +210 pC y -210 pC, ¿cuál es la capacitancia resultante? (*c*) ¿Cuál será la diferencia de potencial?

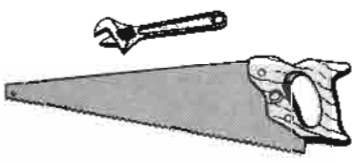


Figura 21 Problema 2.

3. El capacitor de la figura 22 tiene una capacitancia de 26.0 μF e inicialmente está descargado. La batería suministra 125 V. Después de haber cerrado el interruptor S durante un periodo largo, ¿cuánta carga habrá pasado por la batería B?

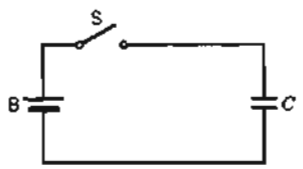


Figura 22 Problema 3.

Sección 31-2 Cálculo de la capacitancia

4. Un capacitor de placas paralelas tiene placas circulares de 8.22 cm de radio y 1.31 cm de separación. (*a*) Calcule la capacitancia. (*b*) ¿Qué carga aparecerá en las placas si se aplica una diferencia de potencial de 116 V?
5. La placa y el cátodo de un diodo de tubo al vacío tienen la forma de dos cilindros concéntricos, siendo el cátodo el cilindro central. El diámetro del cátodo es de 1.62 mm y el de la placa es de 18.3 mm, teniendo ambos elementos una longitud de 2.38 cm. Calcule la capacitancia del diodo.
6. Dos láminas de hoja de aluminio tienen una separación de 1.20 mm, una capacitancia de 9.70 pF, y están cargadas a

13.0 V. (*a*) Calcule el área de la placa. (*b*) La separación disminuye ahora en 0.10 mm manteniéndose la carga constante. Determine la nueva capacitancia. (*c*) ¿En cuánto cambia la diferencia de potencial? Explique cómo podría construirse un micrófono utilizando este principio.

7. Las placas de un capacitor esférico tienen radios de 38.0 mm y 40.0 mm. (*a*) Calcule la capacitancia. (*b*) ¿Cuál debe ser el área de la placa de un capacitor de placas paralelas con la misma separación entre placas y la misma capacitancia?
8. Supongamos que las dos esferas huecas de un capacitor esférico tienen sus radios aproximadamente iguales. En estas condiciones el dispositivo se aproxima a un capacitor de placas paralelas siendo $b - a = d$. Demuestre que la ecuación 13, para el capacitor esférico, se reduce realmente a la ecuación 7 para el capacitor de placas paralelas en este caso.
9. En la sección 31-2 se calculó la capacitancia de un capacitor cilíndrico. Mediante la aproximación (véase el apéndice H) $\ln(1 + x) \approx x$ para $x \ll 1$, demuestre que la capacitancia tiende a la de un capacitor de placas paralelas cuando el espaciamiento entre los dos cilindros es pequeño.
10. Un capacitor va a diseñarse para operar, con una capacitancia constante, en un medio de temperatura fluctuante. Como se muestra en la figura 23, el capacitor es del tipo de placas paralelas con "espaciadores" de plástico para mantener a las placas alineadas. (*a*) Demuestre que la rapidez de cambio de la capacitancia C con la temperatura T está dada por

$$\frac{dC}{dT} = C\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\right),$$

donde A es el área de la placa y x la separación entre las placas. (*b*) Si las placas son de aluminio, ¿cuál deberá ser el coeficiente de dilatación térmica de los espaciadores a fin de que la capacitancia no varíe con la temperatura? (No considere el efecto que los espaciadores tienen sobre la capacitancia.)

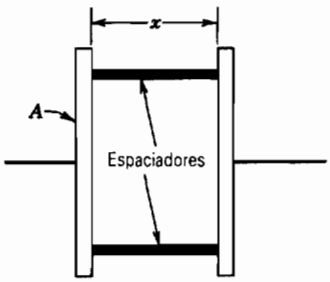


Figura 23 Problema 10.

Sección 31-3 Capacitores en serie y en paralelo

11. ¿Cuántos capacitores de 1.00 μF deben conectarse en paralelo para almacenar una carga de 1.00 C con un potencial de 110 V entre los capacitores?
12. En la figura 24 halle la capacitancia equivalente de la combinación. Suponga que $C_1 = 10.3\ \mu$F, $C_2 = 4.80\ \mu$F y $C_3 = 3.90\ \mu$F.

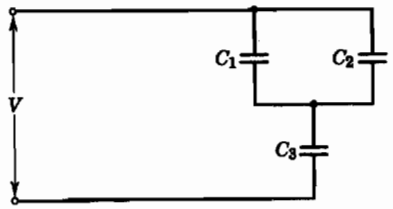


Figura 24 Problemas 12, 19 y 36.

13. En la figura 25 halle la capacitancia equivalente de la combinación. Suponga que $C_1 = 10.3\ \mu$F, $C_2 = 4.80\ \mu$F y $C_3 = 3.90\ \mu$F.

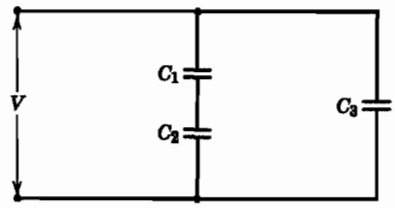


Figura 25 Problema 13.

14. Cada uno de los capacitores sin carga de la figura 26 tiene una capacitancia de 25.0 μF. Cuando se cierra el interruptor S se establece una diferencia de potencial de 4200 V. ¿Cuánta carga pasa entonces por el medidor A?

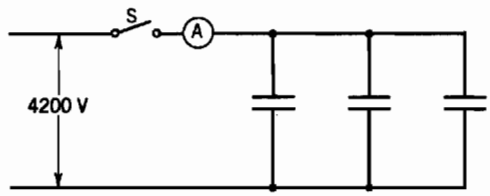


Figura 26 Problema 14.

15. Un capacitor de 6.0 μF está conectado en serie con un capacitor de 4.0 μF, estando aplicada una diferencia de potencial de 200 V a través del par. (*a*) Calcule la capacitancia equivalente. (*b*) ¿Cuál es la carga en cada capacitor? (*c*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor?
16. Resuelva el problema 15 para los mismos dos capacitores en paralelo.
17. (*a*) Tres capacitores están conectados en paralelo. Cada uno tiene un área de placa A y un espaciamiento entre placas d. ¿Cuál debe ser el espaciamiento de un solo capacitor de área de placa A si su capacitancia es igual a la de la combinación en paralelo? (*b*) ¿Cuál debe ser el espaciamiento cuando los tres capacitores están conectados en serie?
18. En la figura 27 se muestra un capacitor variable de aire del tipo empleado para sintonizar aparatos de radio. Están conectadas entre sí placas alternadas, un grupo fijo en

posición y el otro grupo con posibilidad de rotación. Considere un grupo de n placas de polaridad alterna, cada una de ellas con un área A y separadas de las placas contiguas por una distancia d. Demuestre que este capacitor tiene una capacitancia máxima de

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 A}{d}.$$

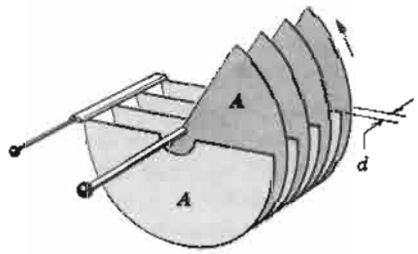


Figura 27 Problema 18.

19. En la figura 24 supóngase que el capacitor C_3 se perfora eléctricamente, resultando equivalente a una trayectoria conductora. ¿Qué *cambios* ocurren en (*a*) la carga y (*b*) la diferencia de potencial en el capacitor C_1? Suponga que $V = 115$ V.
20. Se tienen varios capacitores de 2.0 μF, cada uno capaz de soportar 200 V sin perforarse. ¿Cómo armaría usted una combinación que tenga una capacitancia equivalente de (*a*) 0.40 μF o de (*b*) 1.2 μF, siendo cada combinación capaz de soportar 1000 V?
21. La figura 28 muestra dos capacitores en serie, siendo la sección rígida central de longitud b móvil verticalmente. Demuestre que la capacitancia equivalente de la combinación en serie es independiente de la posición de la sección central y está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a-b}.$$

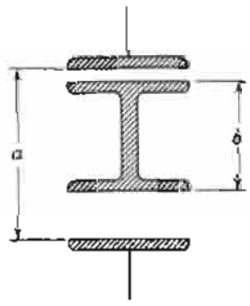


Figura 28 Problema 21.

22. Un capacitor de 108 pF se carga a una diferencia de potencial de 52.4 V, y luego la batería de carga se desconecta. En seguida el capacitor se conecta en paralelo con el segundo capacitor, inicialmente descargado. La diferencia de potencial es entonces de 35.8 V. Encuentre la capacitancia del segundo capacitor.
23. En la figura 29, los capacitores $C_1 = 1.16$ μF y $C_2 = 3.22$ μF están cada uno de ellos cargados a un potencial de $V = 96.6$ V pero con polaridad opuesta, de modo que los puntos a y c están en el lado de las placas positivas respectivas de C_1 y C_2, y los puntos b y d están en el lado de las placas negativas respectivas. Ahora los interruptores S_1 y S_2 se cierran. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos e y f? (*b*) ¿Cuál es la carga en C_1? (*c*) ¿Cuál es la carga en C_2?

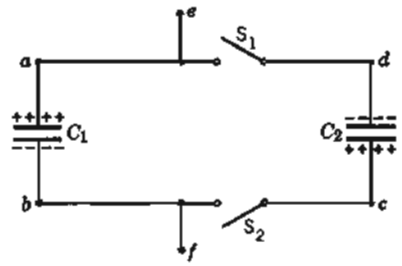


Figura 29 Problema 23.

24. Cuando el interruptor S se mueve hacia la derecha (Fig. 30) las placas del capacitor C_1 adquieren una diferencia de potencial de V_0. C_2 y C_3 están descargados inicialmente. Ahora el interruptor se mueve hacia la izquierda. ¿Cuáles son las cargas finales q_1, q_2 y q_3 de los capacitores correspondientes?

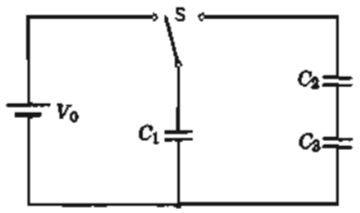


Figura 30 Problema 24.

25. La figura 31 muestra dos capacitores idénticos de capacitancia C en un circuito con dos diodos (ideales) D. Una batería de 100 V se conecta a las terminales de entrada, (*a*) primero a la terminal a positiva y (*b*) más tarde a la terminal b positiva. En cada caso, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las terminales de salida? (El diodo ideal tiene la propiedad de que la carga positiva fluye por él sólo en la dirección de la flecha y la carga negativa fluye por él sólo en la dirección opuesta.)
26. Un capacitor tiene placas cuadradas, cada una de lado a, formando un ángulo θ entre sí como se muestra en la figura 32. Demuestre que, para θ pequeño, la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right).$$

(*Sugerencia*: El capacitor puede dividirse en tiras diferenciales que estén efectivamente en paralelo.)

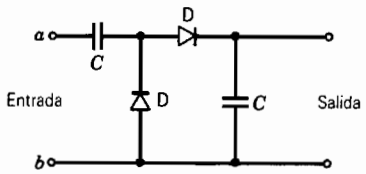


Figura 31 Problema 25.

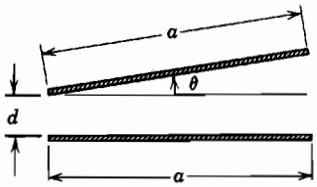


Figura 32 Problema 26.

27. En la figura 33 la batería suministra 12 V. (*a*) Halle la carga sobre cada capacitor cuando el interruptor S_1 se cierra y (*b*) cuando (más tarde) el interruptor S_2 también se cierra. Considere $C_1 = 1.0\ \mu F$, $C_2 = 2.0\ \mu F$, $C_3 = 3.0\ \mu F$ y $C_4 = 4.0\ \mu F$.

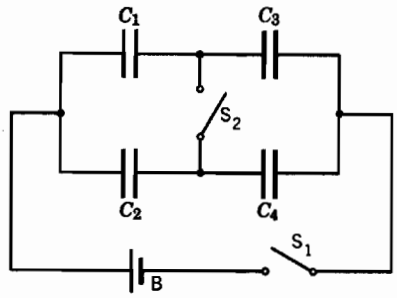


Figura 33 Problema 27.

28. Halle la capacitancia equivalente entre los puntos *x* y *y* en la figura 34. Suponga que $C_2 = 10\ \mu F$ y que los otros capacitores son todos de $4.0\ \mu F$. (*Sugerencia*: Aplique una diferencia de potencial *V* entre *x* y *y*, y escriba todas las relaciones que contengan a las cargas y las diferencias de potencial en cada uno de los capacitores.)

Sección 31-4 Almacenamiento de energía en un campo eléctrico

29. ¿Cuánta energía hay almacenada en $2.0\ m^3$ de aire debido al campo eléctrico "de buen tiempo" de 150 V/m de intensidad?
30. Los intentos de construir un reactor de fusión termonuclear controlada, que, de ser un hecho, abastecería al mundo con un gran suministro de energía partiendo del hidrógeno pesado del agua de mar, requieren, por lo general, de enormes corrientes eléctricas durante periodos breves en los devanados del campo magnético. Por ejemplo, el ZT-40 de Los Alamos National Laboratory tiene salas repletas de capacitores. Uno de los bancos de capacitores proporciona 61.0 mF a 10.0 kV. Calcule la energía almacenada (*a*) en joules y (*b*) en kW · h.

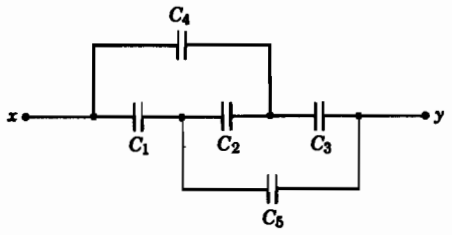


Figura 34 Problema 28.

31. Un capacitor de placas paralelas en aire que tiene un área de $42.0\ cm^2$ y un espaciamiento de 1.30 mm se carga a una diferencia de potencial de 625 V. Halle (*a*) la capacitancia, (*b*) la magnitud de la carga en cada placa, (*c*) la energía almacenada, (*d*) el campo eléctrico entre las placas y (*e*) la densidad de energía entre las placas.
32. Dos capacitores, de $2.12\ \mu F$ y $3.88\ \mu F$, están conectados en serie por una diferencia de potencial de 328 V. Calcule la energía total almacenada.
33. Una esfera de metal aislada cuyo diámetro es de 12.6 cm tiene un potencial de 8150 V. Calcule la densidad de energía en el campo eléctrico cerca de la superficie de la esfera.
34. Un banco de 2100 capacitores de $5.0\ \mu F$ conectados en paralelo se usa para almacenar energía eléctrica. ¿Cuánto cuesta cargar este banco a 55 kV, suponiendo una tarifa de 3.0 ¢/kW · h?
35. Un capacitor se carga hasta que su energía almacenada es de 4.0 J, y luego se retira la batería de carga. Entonces se conecta en paralelo un segundo capacitor descargado. (*a*) Si la carga se distribuye igualmente, ¿cuál es ahora la energía total almacenada en los campos eléctricos? (*b*) ¿A dónde se fue el exceso de energía?
36. En la figura 24 encuentre (*a*) la carga, (*b*) la diferencia de potencial y (*c*) la energía almacenada en cada capacitor. Suponga los valores numéricos del problema 12, con $V = 112$ V.
37. Un capacitor de placas paralelas tiene placas de área *A* y separación *d* y se carga a una diferencia de potencial *V*. Luego se desconecta la batería de carga y las placas se alejan hasta que su separación sea de 2*d*. Deduzca expresiones en términos de *A*, *d* y *V* para (*a*) la nueva diferencia de potencial, (*b*) la energía almacenada inicial y final, y (*c*) el trabajo necesario para separar las placas.
38. Un capacitor cilíndrico tiene radios *a* y *b* como en la figura 4. Demuestre que la mitad de la energía potencial eléctrica almacenada se encuentra dentro de un cilindro cuyo radio es

$$r = \sqrt{ab}.$$

39. (*a*) Calcule la densidad de la energía del campo eléctrico a una distancia *r* de un electrón (que se presume es una partícula) en reposo. (*b*) Suponga ahora que el electrón no es un punto sino una esfera de radio *R*; sobre su superficie

está distribuida uniformemente la carga de electrones. Determine la energía asociada con el campo eléctrico externo en el vacío del electrón en función de R. (*c*) Si ahora asociamos a esta energía con la masa del electrón, podemos, usando $E_0 = mc^2$, calcular un valor para R. Evalúe este radio numéricamente; a menudo se le llama el *radio clásico* del electrón.

40. Demuestre que las placas de un capacitor de placas paralelas se atraen entre sí con una fuerza dada por

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

Pruebe esto calculando el trabajo necesario para aumentar la separación de las placas desde x hasta $x + dx$, permaneciendo la carga q constante.

41. Usando el resultado del problema 40, demuestre que la fuerza por unidad de área (el *esfuerzo electrostático*) que actúa sobre cada placa del capacitor está dada por $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. Realmente, este resultado es cierto, en general, para un conductor de *cualquier* forma con un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en su superficie.

42. A una burbuja de jabón de radio R_0 se le da lentamente una carga q. A causa de la repulsión mutua de las cargas superficiales, el radio aumenta ligeramente hasta R. La presión de aire dentro de la burbuja cae, a causa de la expansión, a $p(V_0/V)$, donde p es la presión atmosférica, V_0 es el volumen inicial, y V es el volumen final. Demuestre que

$$q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 pR(R^3 - R_0^3).$$

(*Sugerencia*: Considere las fuerzas que actúan sobre una pequeña área de la burbuja cargada. Éstas se deben a (*i*) la presión del gas, (*ii*) la presión atmosférica, (*iii*) el esfuerzo electrostático; véase el problema 41.)

Sección 31-5 Capacitor con dieléctrico

43. Un capacitor de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de 1.32 pF. La separación de las placas se duplica y entre ellas se inserta cera. La nueva capacitancia es de 2.57 pF. Determine la constante dieléctrica de la cera.

44. Dado un capacitor de aire de 7.40 pF, se le pide a usted diseñar un capacitor para almacenar hasta 6.61 μJ con una diferencia máxima de potencial de 630 V. ¿Qué dieléctrico de los de la tabla 1 usaría para llenar el espacio del capacitor de aire si no se le permite ningún margen de error?

45. Se dispone de dos placas de cobre, una lámina de mica (espesor = 0.10 mm, $\kappa_e = 5.4$), una lámina de vidrio (espesor = 0.20 mm, $\kappa_e = 7.0$), y una lámina de parafina (espesor = 1.0 cm, $\kappa_e = 2.0$) para hacer un capacitor de placas paralelas. Para obtener la máxima capacitancia, ¿qué material colocaría usted entre las placas de cobre?

46. Un capacitor de aire de placas paralelas tiene una capacitancia de 51.3 pF. (*a*) Si sus placas tienen un área de 0.350 m² cada una, ¿cuál es su separación? (*b*) Si la región entre las placas se llena ahora con un material que tiene una constante dieléctrica de 5.60, ¿cuál es la capacitancia?

47. Un cable coaxial usado en una línea de transmisión responde como una capacitancia "distribuida" al circuito que alimenta. Calcule la capacitancia de 1.00 km de un cable que tenga un radio interno de 0.110 mm y un radio externo de 0.588 mm. Suponga que el espacio entre los conductores esté lleno con poliestireno.

48. Cierta sustancia tiene una constante dieléctrica de 2.80 y una resistencia o rigidez dieléctrica de 18.2 MV/m. Si se emplea como material dieléctrico en un capacitor de placas paralelas, ¿qué área mínima deben tener las placas del capacitor con objeto de que la capacitancia sea de 68.4 nF y que el capacitor sea capaz de soportar una diferencia de potencial de 4.13 kV?

49. Se le pide a usted construir un capacitor que tenga una capacitancia cercana a 1.0 nF y un potencial de perforación en exceso de 10 kV. Usted piensa emplear las paredes de un vaso de beber alto (de Pyrex), revestir el interior y el exterior con hoja de aluminio (despreciando el efecto de los extremos). ¿Cuáles son (*a*) la capacitancia y (*b*) el potencial de perforación? El vaso que usted emplea tiene 15 cm de altura, un radio interno de 3.6 cm y un radio externo de 3.8 cm.

50. Se le pide a usted que diseñe un capacitor transportable que pueda almacenar 250 kJ de energía. Usted escoge un tipo de placas paralelas con dieléctrico. (*a*) ¿Cuál es el volumen mínimo posible del capacitor usando un dieléctrico elegido de entre los mostrados en la tabla 1, la cual presenta los valores de la resistencia o rigidez dieléctrica? (*b*) Los capacitores modernos de alto desempeño que pueden almacenar 250 kJ tienen volúmenes de 0.087 m³. Si se supone que el dieléctrico empleado tiene la misma resistencia dieléctrica que en (*a*), ¿cuál debe ser su constante dieléctrica?

51. Una lámina de cobre de espesor b se coloca dentro de un capacitor de placas paralelas como se muestra en la figura 35. (*a*) ¿Cuál es la capacitancia después de haber colocado la lámina? (*b*) Si se mantiene una carga q en las placas, halle la razón entre la energía almacenada antes de insertar la lámina y después. (*c*) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre la lámina cuando se inserta? ¿Se tira de la lámina o tiene ésta que ser empujada?

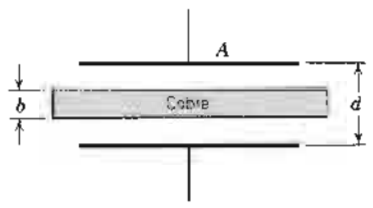


Figura 35 Problema 51.

52. Reconsidere el problema 51 suponiendo que la diferencia de potencial V, en lugar de la carga, se mantiene constante.

53. Una cámara de ionización cilíndrica tiene un ánodo central de alambre de 0.180 mm de radio y un cátodo cilíndrico coaxial de 11.00 mm de radio. Está llena con un gas cuya resistencia o rigidez dieléctrica es de 2.20 MV/m. Encuen-

tre la máxima diferencia de potencial que deberá aplicarse entre el ánodo y el cátodo si se quiere evitar la disrupción eléctrica en el gas antes de que la radiación penetre por la ventana de la cámara.

54. Un capacitor de placas paralelas está lleno con dos dieléctricos como se muestra en la figura 36. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}}{2}\right).$$

Compruebe esta fórmula para todos los casos limitantes que pueda imaginarse. (*Sugerencia*: ¿Puede justificar el ver este arreglo como si se tratara de dos capacitores en paralelo?)

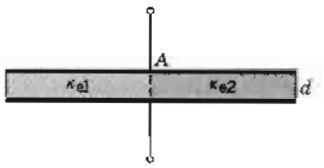


Figura 36 Problema 54.

55. Un capacitor de placas paralelas está lleno con dos dieléctricos como en la figura 37. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}}\right).$$

Compruebe esta fórmula para todos los casos limitantes que pueda imaginarse. (*Sugerencia*: ¿Puede justificar el ver este arreglo como si se tratara de dos capacitores en serie?)

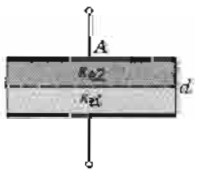


Figura 37 Problema 55.

56. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor de la figura 38?

Sección 31-7 Los dieléctricos y la ley de Gauss

57. Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 112 pF, un área de placa de 96.5 cm², y un dieléctrico de mica (κ_e = 5.40). Para una diferencia de potencial de 55.0 V, calcule (*a*) la intensidad del campo eléctrico en la mica, (*b*) la magnitud de la carga libre en las placas y (*c*) la magnitud de la carga superficial inducida.

58. En el problema muestra 9, supóngase que la batería permanece conectada durante el tiempo en que se está introduciendo el material dieléctrico. Calcule (*a*) la capacitancia, (*b*) la carga en las placas del capacitor, (*c*) el campo eléctrico en el claro y (*d*) el campo eléctrico en el material, después de haberlo introducido.

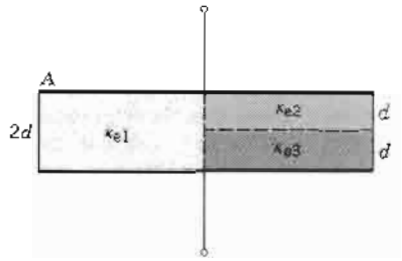


Figura 38 Problema 56.

59. A dos placas paralelas de 110 cm² de área se les da a cada una cargas iguales pero opuestas de 890 nC. El campo eléctrico dentro del material dieléctrico, que llena el espacio entre las placas, es de 1.40 MV/m. (*a*) Calcule la constante dieléctrica del material. (*b*) Determine la magnitud de la carga inducida sobre cada superficie dieléctrica.

60. En el capacitor del problema muestra 9 (Fig. 16), (*a*) ¿qué fracción de la energía se almacena en los espacios de aire? (*b*) ¿Qué fracción se almacena en el material dieléctrico?

61. Un capacitor de placas paralelas tiene placas de 0.118 m² de área y una separación de 1.22 cm. Una batería carga a las placas a una diferencia de potencial de 120 V y luego se desconecta. Una lámina de material dieléctrico de 4.30 mm de espesor y constante dieléctrica 4.80 se coloca después, simétricamente entre las placas. (*a*) Determine la capacitancia antes de insertar la lámina. (*b*) ¿Cuál es la capacitancia con la lámina en su lugar? (*c*) ¿Cuál es la carga libre q antes y después de haber insertado la lámina? (*d*) Determine el campo eléctrico en el espacio entre las placas y el dieléctrico. (*e*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el dieléctrico? (*f*) Con la lámina en posición, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas? (*g*) ¿Cuánto trabajo externo se realiza durante el proceso de insertar la lámina?

62. Una lámina de material dieléctrico de espesor b se inserta entre las placas de un capacitor de placas paralelas con una separación d entre ellas. Demuestre que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{\kappa_e d - b(\kappa_e - 1)}.$$

(*Sugerencia*: Deduzca la fórmula siguiendo como modelo el problema muestra 9.) ¿Predice esta fórmula el resultado numérico correcto del problema muestra 9? Verifique que la fórmula da resultados razonables para los casos especiales de $b = 0$, $\kappa_e = 1$ y $b = d$.

CAPÍTULO 32

CORRIENTE Y RESISTENCIA

Los cinco capítulos anteriores trataron sobre la electrostática, *o sea, sobre las cargas en reposo. Con este capítulo iniciamos el estudio de las* corrientes eléctricas, *es decir, de las cargas en movimiento.*

Los ejemplos de las corrientes eléctricas abundan, yendo desde las grandes corrientes que constituyen los relámpagos hasta las diminutas corrientes nerviosas que regulan nuestra actividad muscular. Estamos familiarizados con las corrientes como consecuencia de las cargas que fluyen por los conductores sólidos (en el alambrado doméstico o en un foco eléctrico), por los semiconductores (en los circuitos integrados), por los gases (en las lámparas fluorescentes), por ciertos líquidos (en las baterías de los automóviles), e incluso por espacios al vacío (los tubos de imagen de TV).

En escala global, las partículas cargadas atrapadas en los cinturones de radiación de Van Allen se mueven como oleadas de un lado a otro en la atmósfera entre los polos magnéticos Norte y Sur. En la escala del sistema solar, corrientes enormes de protones, electrones y iones salen radialmente hacia afuera del Sol como viento solar. En la escala galáctica, los rayos cósmicos, que son en su mayor parte protones energéticos, fluyen por la galaxia.

32-1 CORRIENTE ELÉCTRICA

Los electrones libres en un conductor metálico aislado, como la longitud de alambre ilustrada en la figura 1*a*, se hallan en movimiento aleatorio al igual que las moléculas de un gas confinado en un recipiente. No tienen un movimiento neto dirigido a lo largo del alambre. Si hacemos pasar un plano hipotético a través del alambre, la velocidad a la que los electrones cruzan ese plano en una dirección es igual a la velocidad a la que cruzan en la otra dirección; la velocidad *neta* es cero. (Aquí suponemos que el tiempo de observación es lo suficientemente largo de modo que las pequeñas fluctuaciones estadísticas en el número de electrones que cruzan el plano promedian cero. En algunos casos, las fluctuaciones pueden ser importantes. Por ejemplo, contribuyen al ruido eléctrico en los circuitos.)

Ya sea que el conductor de la figura 1*a* esté cargado o descargado, no existe ningún flujo neto de carga en su interior. En ausencia de un campo aplicado externamente, no existe un campo eléctrico dentro del volumen del conductor o paralelo a su superficie. Aun cuando un gran número de electrones de conducción se halla disponible, no existe fuerza alguna sobre los electrones ni tampoco un flujo neto de carga.

En la figura 1*b*, se ha conectado una batería entre los extremos del conductor. Si la batería mantiene una diferencia de potencial V y el alambre tiene una longitud L, entonces se forma un campo eléctrico de magnitud V/L en el conductor. Este campo eléctrico **E** actúa sobre los electrones y les da un movimiento neto en el sentido opuesto a **E**. Si la batería pudiera mantener la diferencia de potencial, entonces las cargas continuarían circulando indefinidamente. En realidad, una batería puede mantener la corriente sólo en tanto pueda convertir la energía química en energía eléctrica; con el tiempo la fuente de energía de la batería se agota, y la diferencia de potencial no puede mantenerse.

La existencia de un campo eléctrico dentro de un conductor no contradice lo dicho en la sección 29-4, donde afirmamos que **E** es igual a cero dentro de un conductor. En esa sección, que trata de un estado en que todo movimiento neto de carga se ha detenido (electrostática), suponíamos que el conductor estaba aislado y que no se mantenía una diferencia de potencial deliberadamente entre dos puntos cualesquiera de él, como por la batería. En el presente capítulo, que versa sobre las cargas en movimiento, no incluimos esta restricción.

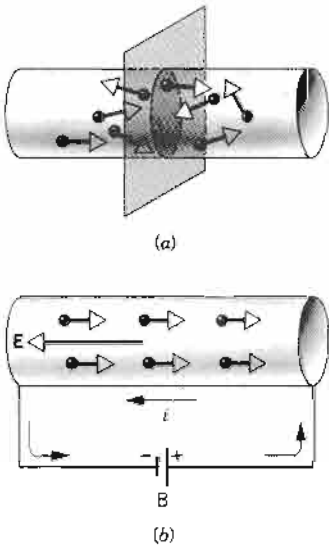


Figura 1 (*a*) En un conductor aislado, los electrones poseen un movimiento aleatorio. El flujo de carga neto a través de un plano arbitario es cero. (*b*) Una batería B conectada en paralelo al conductor crea un campo eléctrico **E**, y los electrones adquieren un movimiento neto a causa del campo.

Si a través de cualquier superficie pasa una carga *neta* dq en un intervalo de tiempo dt, decimos que se ha establecido una *corriente eléctrica* i, en donde

$$i = dq/dt. \tag{1}$$

Para la corriente en un alambre, denotemos con dq a la carga que pasa por una sección transversal en el tiempo dt.

Nótese que requerimos que fluya una carga *neta* dq para que se establezca una corriente. En la figura 1*a*, fluyen igual número de electrones en ambas direcciones a través del plano; aunque pueda haber un número considerable de elctrones fluyendo a través del plano, la corriente es cero. Otro ejemplo es el flujo de agua en una manguera de jardín que no da lugar a una corriente eléctrica de acuerdo con la definición porque las moléculas eléctricamente neutras que fluyen a través de cualquier superficie contienen cargas positivas y negativas iguales; por lo tanto, el flujo de carga neto es cero.

La unidad de la corriente en el SI es el *ampere* (abreviatura A). De acuerdo con la ecuación 1, tenemos

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb/segundo}.$$

Se recordará de la sección 27-4 que la ecuación 1 proporciona la definición del coulomb, ya que el ampere es una unidad base en el SI (véase el apéndice A). La determinación de esta cantidad fundamental se explicará en la sección 35-4.

La carga neta que pasa a través de la superficie en cualquier intervalo de tiempo se halla al integrar la corriente:

$$q = \int i\,dt. \tag{2}$$

Si la corriente es constante en el tiempo, entonces la carga q que fluye en el tiempo t determina la corriente i, de acuerdo con

$$i = q/t. \tag{3}$$

En este capítulo consideramos únicamente las corrientes que son constantes en el tiempo; las corrientes que varían con el tiempo se considerarán en el capítulo 33. Si bien existen muchas y distintas clases de corrientes (algunas de las cuales se mencionaron en la introducción), en este capítulo limitaremos nuestro estudio a los electrones que se mueven a través de conductores sólidos.

Suponemos que, en condiciones estables (permanentes), la carga no se reúne ni se escapa de cualquier punto en nuestro alambre idealizado. En el texto de la sección 18-2, no se habla de fuentes ni sumideros de carga en el alambre. Cuando asumíamos esta hipótesis en nuestro estudio de los fluidos incompresibles, concluíamos que la razón a la que el fluido fluye al pasar por cualquier sección transversal de una tubería es la misma aun cuando la sección transversal varíe. El fluido fluye más rápidamente en donde la tubería es más pequeña y más lentamente en donde es más grande, pero la razón volumétrica de flujo, medida quizás en litros/segundo, permanece constante. De igual forma, *la corriente eléctrica i es la misma en todas las secciones transversales de un conductor, aun cuando el área de la sección transversal pueda ser diferente en diferentes puntos.*

Si bien en los metales los portadores de carga son los electrones, en los electrólitos o en los conductores gaseosos (plasmas) los portadores también pueden ser iones positivos o negativos, o ambos. Necesitamos una convención para designar el sentido de la corriente, pues las cargas de signo opuesto se mueven en sentidos opuestos en un campo dado. Una carga positiva que se mueve en determinada dirección es equivalente en casi todos los efectos externos a una carga negativa que se mueve en la dirección opuesta. Por lo tanto, por simplicidad y consistencia algebraica, adoptamos la siguiente convención:

> *La dirección de la corriente es la dirección en que se moverían las cargas positivas, aun cuando los mismos portadores de carga sean negativos.*

Si los portadores de carga son negativos, simplemente se mueven en la dirección opuesta a la dirección de la flecha de la corriente (véase la Fig. 1*b*).

En la mayor parte de las circunstancias, analizamos los circuitos eléctricos basados en una dirección supuesta para la corriente, sin tomar en cuenta si los mismos portadores de carga son positivos o negativos. En casos raros (véase, por ejemplo, el efecto Hall en la Sec.

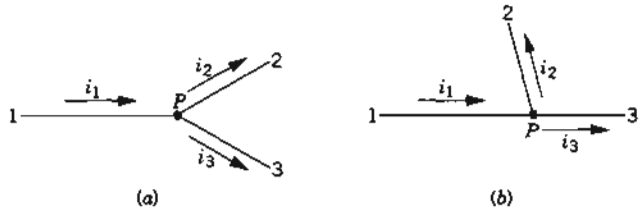


Figura 2 (*a*) En el punto *P*, la corriente i_1 se divide en las corrientes i_2 y i_3, de modo que $i_1 = i_2 + i_3$. (*b*) Cambiar la dirección de los alambres no cambia el modo en que se suman las corrientes, ilustrando ello que las corrientes se suman como escalares, no como vectores.

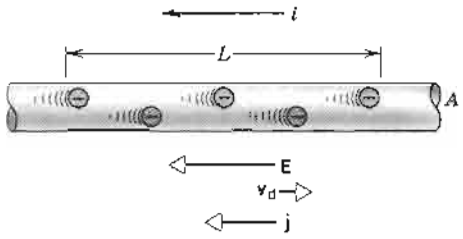


Figura 3 El campo eléctrico causa que los electrones se muevan hacia la derecha. La corriente convencional (la dirección hipotética del flujo de la carga positiva) es hacia la izquierda. La densidad de corriente **j** se traza igualmente como si los portadores de carga fuesen positivos, de modo que **j** y **E** están en la misma dirección.

34-4) debemos tomar en cuenta el signo de los portadores de la carga.

Aun cuando le asignemos una dirección, la corriente es un escalar y no un vector. La flecha que trazamos para indicar la dirección de la corriente simplemente muestra el sentido del flujo de la carga por el alambre y *no* debe considerarse como un vector. La corriente no obedece las leyes de adición de vectores, como podemos ver en la figura 2. La corriente i_1 en el alambre 1 se divide en dos ramas i_2 e i_3 en los alambres 2 y 3, de modo que $i_1 = i_2 + i_3$. Si se cambian las direcciones de los alambres no cambia el modo en que se sumaron las corrientes, como sucedería si fuesen sumadas como vectores.

32-2 DENSIDAD DE CORRIENTE

La corriente i es una característica de un conductor en particular. Es una cantidad macroscópica, al igual que la masa de un objeto, el volumen de un objeto, o la longitud de una barra. Una cantidad microscópica relacionada es la *densidad de corriente* **j**. Es un vector, y es característica de un punto dentro de un conductor y no de todo el conductor. Si la corriente se distribuye uniformemente en un conductor de área de sección transversal A, como en la figura 3, la magnitud de la densidad de corriente para todos los puntos en esa sección transversal es

$$j = i/A. \tag{4}$$

El vector **j** en cualquier punto está orientado en la dirección en que se movería un portador de carga positiva en ese punto. Un electrón en ese punto se mueve en dirección $-\mathbf{j}$. En la figura 3, **j** es un vector constante y apunta hacia la izquierda; los electrones se arrastran hacia la derecha.

En general, para una superficie en particular (que no necesita ser plana) que corte de un lado al otro un conductor, i es el flujo del vector **j** sobre esa superficie, o sea

$$i = \int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{A}, \tag{5}$$

donde $d\mathbf{A}$ es un elemento de área superficial y la integral se lleva a cabo sobre la superficie en cuestión. Se considera que el vector $d\mathbf{A}$ es perpendicular al elemento de superficie, de modo que $\mathbf{j}\cdot d\mathbf{A}$ es positiva, dando una corriente positiva i. La ecuación 4 (escrita como $i = jA$) es un caso especial de la ecuación 5 en que la superficie de la integración es una sección transversal plana del conductor, y en donde **j** es constante sobre esta superficie y forma un ángulo recto con ella. Sin embargo, podemos aplicar la ecuación 5 a *toda* superficie a través de la cual deseemos conocer la corriente. La ecuación 5 muestra claramente que i es un escalar porque el integrando $\mathbf{j}\cdot d\mathbf{A}$ es un escalar.

El campo eléctrico ejerce una fuerza ($= -e\mathbf{E}$) sobre los electrones en un conductor pero esta fuerza no produce una aceleración *neta* porque los electrones siguen chocando con los átomos o los iones que forman el conductor. Esta ordenación de los iones, acoplados entre sí por intensas fuerzas de origen electromagnético, que actúan como resortes, recibe el nombre de *red* (véase la Fig. 11 del capítulo 14). El efecto total de los choques es transferir energía cinética de los electrones en aceleración a la energía de vibración de la red. Los electrones adquieren una *velocidad de arrastre* v_d constante promedio en la dirección $-\mathbf{E}$. Existe una estrecha analogía con una bola que cae en un campo gravitatorio uniforme **g** a una velocidad terminal constante por un fluido viscoso. La fuerza gravitatoria ($m\mathbf{g}$) que actúa sobre la bola al caer no aumenta la energía cinética de la bola (la cual es constante); en cambio, se transfiere energía al fluido a causa de los choques moleculares y se produce una pequeña elevación de temperatura.

Podemos calcular la velocidad de arrastre v_d de los portadores de carga en un conductor a partir de la densidad de corriente j. La figura 3 muestra los electrones de conducción en un conductor, los cuales se mueven hacia la derecha a una velocidad de arrastre v_d que se supone constante. El número de electrones de conducción en una longitud L del conductor es nAL, en donde n es el número

de electrones de conducción por unidad de volumen y AL es el volumen de la longitud L del conductor. Una carga de magnitud

$$q = (nAL)e$$

sale de este segmento del alambre, a través de su extremo derecho, en un tiempo t dado por

$$t = \frac{L}{v_d}.$$

La corriente i es

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L/v_d} = nAev_d.$$

Al despejar v_d y recordando que $j = i/A$ (Ec. 4), obtenemos

$$v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{j}{ne}. \qquad (6)$$

Puesto que, tanto v_d como j son vectores, podemos reescribir la ecuación 6 como una ecuación vectorial. Seguimos nuestra convención adoptada para la densidad de corriente positiva, lo cual significa que debemos considerar que la dirección de **j** es opuesta a la de $\mathbf{v}_d$. El vector equivalente de la ecuación 6 es, por lo tanto,

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_d. \qquad (7)$$

La figura 3 muestra que, para los electrones, estos vectores tienen realmente sentidos opuestos.

Como lo ilustran los siguientes problemas muestra, la velocidad de arrastre en los conductores típicos es realmente pequeña, a menudo del orden de cm/s. En contraste, el movimiento térmico aleatorio de los electrones de conducción en un metal ocurren con velocidades típicas de 10^6 m/s.

Problema muestra 1 El extremo de un alambre de aluminio cuyo diámetro es de 2.5 mm está soldado al extremo de un alambre de cobre cuyo diámetro es de 1.8 mm. Por el alambre compuesto fluye una corriente estable i de 1.3 A. ¿Cuál es la densidad de corriente en cada alambre?

Solución Podemos considerar la densidad de corriente como una constante (diferente) dentro de cada alambre, excepto en los puntos cerca de la unión. La densidad de corriente está dada por la ecuación 4,

$$j = \frac{i}{A}.$$

El área de la sección transversal A del alambre de aluminio es

$$A_{Al} = \frac{1}{4}\pi d^2 = (\pi/4)(2.5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 4.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

de modo que

$$j_{Al} = \frac{1.3\ \text{A}}{4.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 2.6 \times 10^5\ \text{A/m}^2 = 26\ \text{A/cm}^2.$$

Como puede verificarse, el área de la sección transversal del alambre de cobre es de 2.54×10^{-6} m^2, de modo que

$$j_{Cu} = \frac{1.3\ \text{A}}{2.54 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 5.1 \times 10^5\ \text{A/m}^2 = 51\ \text{A/cm}^2.$$

El hecho de que los alambres sean de materiales diferentes no interviene aquí.

Problema muestra 2 ¿Cuál es la velocidad de arrastre de los electrones de conducción en el alambre de cobre del problema muestra 1?

Solución La velocidad de arrastre está dada por la ecuación 6,

$$v_d = \frac{j}{ne}.$$

En el cobre, existe aproximadamente un electrón de conducción por átomo en promedio. El número n de electrones por unidad de volumen es, por lo tanto, el mismo que el número de átomos por unidad de volumen y está dado por

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho_m}{M} \quad \text{o} \quad \frac{\text{átomos/m}^3}{\text{átomos/mol}} = \frac{\text{masa/m}^3}{\text{masa/mol}}.$$

Aquí ρ_m es la densidad (masa) del cobre, N_A es la constante de Avogadro, y M es la masa molar del cobre.* Entonces

$$n = \frac{N_A\rho_m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{electrones/mol})(8.96 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)}{63.5 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}$$
$$= 8.49 \times 10^{28}\ \text{electrones/m}^3.$$

Tenemos entonces que

$$v_d = \frac{5.1 \times 10^5\ \text{A/m}^2}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{electrones/m}^3)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C/electrón})}$$
$$= 3.8 \times 10^{-5}\ \text{m/s} = 14\ \text{cm/h}.$$

Usted deber poder demostrar que, para el alambre de aluminio, $v_d = 2.7 \times 10^{-5}$ m/s = 9.7 cm/h. ¿Puede explicar, en términos físicos, por qué la velocidad de arrastre es menor en el aluminio que en el cobre, aunque por los dos alambres fluye la misma corriente?

Si los electrones se desplazan a una velocidad tan baja, ¿por qué los efectos eléctricos parecen ocurrir inmediatamente cuando se activa un interruptor, en forma parecida a como cuando encendemos las luces de la sala? La confusión sobre este punto se deriva de no distinguir entre la velocidad de arrastre de los electrones y la velocidad a la cual *cambia* la configuración del campo eléctrico al recorrer los alambres. Esta última velocidad se acerca a la de la luz. Similarmente, cuando usted gira la espita de su manguera de jardín, con la manguera llena de agua, una onda de presión viaja a lo largo de la manguera con la velocidad del sonido en el agua. La velocidad en la que se mueve el agua por la manguera —medida quizás con un colorante como trazador— es mucho más baja.

Problema muestra 3 Por una tira de silicio, de ancho w = 3.2 mm y espesor d = 250 μm, fluye una corriente i de 190 mA.

---

* Usamos el subíndice m para dejar claro que la densidad a la que nos referimos aquí es una densidad de masa (kg/m^3), no una densidad de carga (C/m^3).

El silicio es un *semiconductor de tipo n*, que ha sido contaminado (dopado) con una cantidad controlada de impurezas de fósforo. La contaminación tiene el efecto de aumentar enormemente a n, el número de portadores de carga (electrones, en este caso) por unidad de volumen, en comparación con el valor para el silicio puro. En este caso, $n = 8.0 \times 10^{21}\ \mathrm{m^{-3}}$. (*a*) ¿Cuál es la densidad de la corriente en la tira? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de arrastre?

Solución (*a*) A partir de la ecuación 4,

$$j = \frac{i}{wd} = \frac{190 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}}{(3.2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})(250 \times 10^{-6}\ \mathrm{m})} = 2.4 \times 10^{5}\ \mathrm{A/m^2}.$$

(*b*) A partir de la ecuación 6,

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{2.4 \times 10^{5}\ \mathrm{A/m^2}}{(8.0 \times 10^{21}\ \mathrm{m^{-3}})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})} = 190\ \mathrm{m/s}.$$

La velocidad de arrastre (190 m/s) de los electrones en el semiconductor de silicio es mucho mayor que la velocidad de arrastre (3.8×10^{-5} m/s) de los electrones de conducción en el conductor metálico de cobre del problema muestra 2, aun cuando las densidades de corriente son semejantes. El número de portadores de carga en este semiconductor ($8.0 \times 10^{21}\ \mathrm{m^{-3}}$) es mucho menor que el número de portadores de carga en el conductor de cobre ($8.49 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$). Un número más pequeño de portadores de carga debe moverse más rápidamente en el semiconductor para establecer la misma densidad de corriente que el mayor número de portadores de carga establece en el cobre.

32-3 RESISTENCIA, RESISTIVIDAD Y CONDUCTIVIDAD

Si aplicamos la misma diferencia de potencial entre los extremos de barras de cobre y de madera geométricamente similares, las corrientes resultantes son muy diferentes. La característica del conductor que interviene aquí es su *resistencia*. Determinamos la resistencia de un conductor entre dos puntos aplicando una diferencia de potencial V entre dichos puntos y midiendo la corriente i que resulta. La resistencia R es, entonces,

$$R = V/i. \tag{8}$$

Si V está en volts y i está en amperes, la resistencia R está en volts/ampere, a los cuales se les da el nombre de *ohms* (abreviatura Ω), de modo que

$$1\ \text{ohm} = 1\ \text{volt/ampere}.$$

Un conductor cuya función en un circuito sea proporcionar determinada resistencia especificada de llama *resistor* (símbolo -\/\/\/-).

El flujo de carga a través de un conductor es a menudo comparado con el flujo de agua a través de una tubería como resultado de una diferencia de presión entre los extremos del tubo, establecida quizás por una bomba. La diferencia de presión es análoga a la diferencia de potencial entre los extremos de un conductor, establecida quizás por una batería. La velocidad del flujo de agua (digamos en litros/segundo) es análoga a la velocidad del flujo de carga (en coulombs/segundo, o en amperes). La velocidad del flujo de agua para una diferencia de presión dada está determinada por la naturaleza de la tubería: su longitud, su sección transversal, y los impedimentos interiores sólidos (por ejemplo, grava en la tubería). Estas características de la tubería son análogas a la resistencia de un conductor.

El ohm no es una unidad base en el SI (véase el apéndice A); no se tiene ni se sigue ningún estándar primario del ohm. Sin embargo, la resistencia es una cantidad tan importante en la ciencia y la tecnología que se mantiene un *estándar práctico de referencia* en el National Institute of Standards and Technology. Desde el 1o. de enero de 1990, esta *representación del ohm* (como se le conoce) se ha basado en el *efecto Hall cuántico* (véase la Sec. 34-4), un fenómeno cuántico preciso y altamente reproducible que es independiente de las propiedades de cualquier material en particular.

Relacionada con la resistencia está la *resistividad* ρ, la cual es una característica de un material más bien que de un tipo de material en particular; se define como

$$\rho = \frac{E}{j}. \tag{9}$$

Las unidades de ρ son las de E(V/m) dividido entre j(A/m²), lo cual es equivalente a Ω · m. La figura 3 indica que E y j son vectores, y podemos escribir la ecuación 9 en forma vectorial como:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}. \tag{10}$$

Las ecuaciones 9 y 10 son válidas sólo para materiales *isotrópicos*, lo cual quiere decir que sus propiedades eléctricas son las mismas en todas las direcciones.

La resistividad del cobre es de $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$; la del cuarzo fundido es de alrededor de $10^{16}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$. Pocas propiedades físicas son medibles dentro de tal gama de valores. La tabla 1 muestra las resistividades de algunos materiales comunes.

Algunas sustancias no pueden ser clasificadas fácilmente como conductores o como aisladores. Los plásticos tienen generalmente resistividades grandes que nos conducirían a clasificarlos junto con los aisladores. Por ejemplo, en el alambrado eléctrico doméstico se emplea normalmente el plástico como aislante. Sin embargo, al contaminar a los plásticos con ciertos productos químicos, su conductividad puede igualar a la del cobre.*

* Véase "Plastics that Conduct Electricity", por Richard B. Kaner y Alan G. MacDiarmid, *Scientific American*, febrero de 1988, pág. 106.

TABLA 1 LA RESISTIVIDAD DE ALGUNOS MATERIALES A LA TEMPERATURA AMBIENTE (20°C)

Material	*Resistividad,* ρ ($\Omega \cdot$ m)	*Coeficiente de temperatura de la resistividad* α (por C°)
Materiales típicos		
Plata	1.62×10^{-8}	4.1×10^{-3}
Cobre	1.69×10^{-8}	4.3×10^{-3}
Aluminio	2.75×10^{-8}	4.4×10^{-3}
Tungsteno	5.25×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Hierro	9.68×10^{-8}	6.5×10^{-3}
Platino	10.6×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Manganina[a]	48.2×10^{-8}	0.002×10^{-3}
Semiconductores típicos		
Silicio puro	2.5×10^{3}	-70×10^{3}
Silicio tipo *n*[b]	8.7×10^{-4}	
Silicio tipo *p*[c]	2.8×10^{-3}	
Aislantes típicos		
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Poliestireno	$>10^{14}$	
Cuarzo fundido	$\sim 10^{16}$	

[a] Una aleación diseñada específicamente para que tenga un pequeño valor de α.

[b] Silicio puro dopado con impurezas de fósforo a una densidad de portadores de carga de 10^{23} m^{-3}.

[c] Silicio puro dopado con impurezas de aluminio a una densidad de portadores de carga de 10^{23} m^{-3}.

A veces, preferimos hablar de la *conductividad* σ de un material más bien que de su resistividad. Estas cantidades son recíprocas, relacionadas por

$$\sigma = 1/\rho. \tag{11}$$

Las unidades de σ en el SI son ($\Omega \cdot$ m^{-1}). La ecuación 10 puede expresarse en términos de la conductividad como:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{12}$$

Si conocemos la resistividad ρ de un material, deberíamos ser capaces de calcular la resistencia R de un pedazo en particular del material. Consideremos un conductor cilíndrico, con un área A de sección transversal y longitud L por el cual fluye una corriente estable i con una diferencia de potencial V entre sus extremos (véase la Fig. 4). Si las secciones transversales del cilindro en cada extremo son superficies equipotenciales, el campo eléctrico y la densidad de la corriente son constantes para todos los puntos en el cilindro y tienen los valores

$$E = \frac{V}{L} \quad \text{y} \quad j = \frac{i}{A}.$$

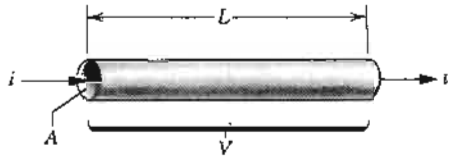


Figura 4 A través de un conductor cilíndrico de longitud L y área A de sección transversal se aplica una diferencia de potencial V, estableciendo una corriente i.

La resistividad ρ es

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{V/L}{i/A}.$$

Pero V/i es la resistencia R, por lo cual

$$R = \rho \frac{L}{A}. \tag{13}$$

Recalcamos que la ecuación 13 se aplica únicamente a un conductor homogéneo e isotrópico de sección transversal uniforme sometido a un campo eléctrico uniforme.

Problema muestra 4 Un bloque rectangular de hierro tiene las dimensiones de 1.2 cm × 1.2 cm × 15 cm. (*a*) ¿Cuál es la resistencia del bloque medida entre los dos extremos cuadrados? (*b*) ¿Cuál es la resistencia entre dos caras rectangulares opuestas? La resistividad del hierro a la temperatura ambiente es de $9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m.

Solución (*a*) El área del extremo cuadrado es de $(1.2 \times 10^{-2}$ m$)^2$ o sea 1.44×10^{-4} m^2. Partiendo de la ecuación 13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(0.15\ \text{m})}{1.44 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}$$
$$= 1.0 \times 10^{-4}\ \Omega = 100\ \mu\Omega.$$

(*b*) El área de la cara rectangular es de $(1.2 \times 10^{-2}$ m$)(0.15$ m), o sea, 1.80×10^{-3} m^2. Partiendo de la ecuación 13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1.2 \times 10^{-2}\ \text{m})}{1.80 \times 10^{-3}\ \text{m}^2}$$
$$= 6.5 \times 10^{-7}\ \Omega = 0.65\ \mu\Omega.$$

Suponemos en cada caso que la diferencia de potencial está aplicada al bloque de tal modo que las superficies entre las que se desea la resistencia son equipotenciales. De otro modo, la ecuación 13 no sería válida.

Cantidades microscópicas y macroscópicas *(Opcional)*

V, i, y R son cantidades *macroscópicas*, que se aplican a un cuerpo o región extensa en particular. Las cantidades *microscópicas* equivalentes son $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$, y ρ (o σ); tienen valores en todos los puntos de un cuerpo. Las cantidades macroscópicas se relacionan según la ecuación 8 ($V = iR$) y las cantidades microscópicas por las ecuaciones 9, 10 y 12.

Las cantidades macroscópicas pueden calcularse al integrar sobre las cantidades microscópicas, usando las relaciones ya dadas, especialmente,

$$i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

y

$$V_{ab} = -V_{ba} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

La integral de la corriente es una integral de superficie, evaluada sobre cualquier sección transversal del conductor. La integral del campo es una integral de línea evaluada a lo largo de una línea arbitraria trazada a lo largo del conductor, que conecta a dos superficies equipotenciales cualesquiera, identificadas por a y b. En un alambre largo conectado a una batería la superficie equipotencial a podría elegirse como una sección transversal del alambre cerca del terminal positivo de la batería, y b podría ser una sección transversal cerca del terminal negativo.

Podemos expresar la resistencia de un conductor entre a y b en términos microscópicos dividiendo las dos ecuaciones:

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}}.$$

Si el conductor es un cilindro largo de sección transversal A y longitud L, y si los puntos a y b son sus extremos, la ecuación de arriba para R se reduce a

$$R = \frac{EL}{jA} = \rho \frac{L}{A},$$

la cual es la ecuación 13.

Las cantidades macroscópicas V, i, y R son de interés primordial cuando estamos realizando mediciones eléctricas en objetos conductores reales. Son las cantidades cuyos valores están indicados en medidores. Las cantidades microscópicas $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$ y ρ son de importancia primordial cuando nos ocupamos del comportamiento fundamental de la materia (más bien que de muestras de la materia), ya que usualmente estamos en el área de investigación de la física del *estado sólido* (o *materia condensada*). De acuerdo con esto, la sección 32-5 trata del punto de vista atómico de la *resistividad* de un metal y no de la *resistencia* de la muestra metálica. Las cantidades microscópicas son también importantes cuando estamos interesados en el comportamiento interno de objetos conductores de forma irregular. ■

Variación de la resistividad con la temperatura *(Opcional)*

La figura 5 muestra un resumen de algunas mediciones experimentales de la resistividad del cobre a temperaturas diferentes. Para darle un uso práctico a esta información, sería provechoso expresarlo en forma de ecuación. Dentro de una gama de temperaturas limitada, la relación entre la resistividad y la temperatura es casi lineal. Podemos acomodar una línea recta en cualquier región seleccionada de la figura 5, usando dos puntos para determinar la pendiente de la línea. Al escoger un punto de referencia, como los denotados por T_0, ρ_0 en la figura, podemos expresar la resistividad ρ a una temperatura arbitraria T de la ecuación empírica de la línea recta en la figura 5, la cual es

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \bar{\alpha}(T - T_0). \tag{14}$$

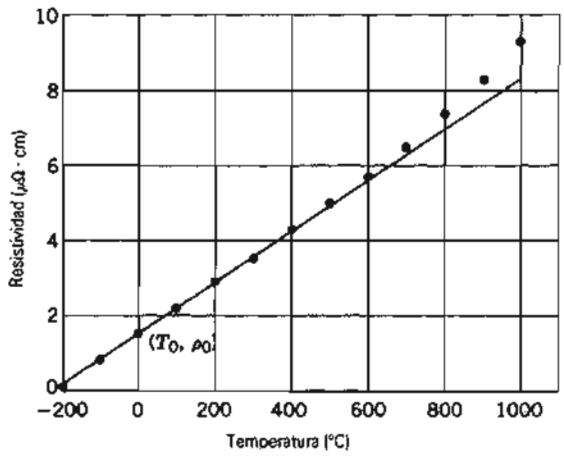


Figura 5 Los puntos muestran mediciones seleccionadas de la resistividad del cobre a diferentes temperaturas. Dentro de cualquier intervalo de temperatura dado, la variación en la resistividad con T puede aproximarse por una línea recta; por ejemplo, la línea mostrada comprende los datos desde unos −100°C hasta 400°C.

[Esta expresión es muy parecida a aquélla de la dilatación térmica lineal ($\Delta L = \alpha L \, \Delta T$), la cual presentamos en la sección 22-5.] Hemos escrito la pendiente de esta línea como $\rho_0 \bar{\alpha}$. Si resolvemos la ecuación 14 para $\bar{\alpha}$, obtenemos

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0}. \tag{15}$$

La cantidad $\bar{\alpha}$ es el *coeficiente medio (o promedio) de temperatura de la resistividad* dentro de la región de temperaturas entre los dos puntos utilizados para determinar la pendiente de la línea. Este coeficiente lo podemos definir de manera más general como

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \tag{16}$$

que es el cambio fraccionario en la resistividad $d\rho/\rho$ por cambio en la temperatura dT. Esto es, $\bar{\alpha}$ da la dependencia de la resistividad con la temperatura *a una temperatura en particular*, mientras que $\bar{\alpha}$ da la dependencia promedio *dentro de un intervalo en particular*. El coeficiente α es, en general, dependiente de la temperatura.

Para propósitos prácticos, sobre todo, la ecuación 14 da resultados que están dentro de los límites de precisión aceptable. En la tabla 1 se dan valores típicos de $\bar{\alpha}$. Para trabajos más precisos, como el uso del termómetro de resistencia de platino para medir la temperatura (véase la Sec. 22-3), la aproximación lineal no es suficiente. En este caso podemos agregar términos en $(T - T_0)^2$ y $(T - T_0)^3$ al miembro derecho de la ecuación 14 para mejorar la precisión. Los coeficientes de estos términos adicionales deben determinarse empíricamente, en analogía con el coeficiente $\bar{\alpha}$ de la ecuación 14. ■

32-4 LA LEY DE OHM

Seleccionemos una muestra de material conductor en particular, apliquemos una diferencia de potencial unifor-

me entre sus extremos, y midamos la corriente resultante. Repetimos la medición para varios valores de la diferencia de potencial y graficamos los resultados, como en la figura 6*a*. Los puntos experimentales caen claramente a lo largo de una línea recta, lo cual indica que la razón V/i (el inverso de la pendiente de la línea) es una constante. La resistencia de este dispositivo es una constante, independientemente de la diferencia de potencial a lo largo de él o de la corriente que fluye por él. Nótese que la línea se extiende a las diferencias de potencial y corrientes negativas.

En este caso, decimos que el material obedece a la *ley de Ohm*:

> *Un dispositivo conductor obedece la ley de Ohm si la resistencia entre cualquier par de puntos es independiente de la magnitud y polaridad de la diferencia de potencial aplicada.*

El material o elemento de un circuito que obedece a la ley de Ohm se llama *óhmico*.

Los circuitos electrónicos modernos dependen también de dispositivos que *no* obedecen la ley de Ohm. En la figura 6*b* se muestra un ejemplo de la relación corriente-voltaje de un dispositivo no óhmico (un diodo de unión *pn*). Nótese que la corriente no aumenta linealmente con el voltaje, y también adviértase que el dispositivo se comporta para diferencias de potencial negativas de modo muy diferente a como se comporta para las positivas.

Recalcamos que la relación $V = iR$ *no* es un enunciado de la ley de Ohm. Un conductor obedece a la ley de Ohm sólo si su gráfica V contra i es lineal, es decir, si R es independiente de V y de i. La relación $R = V/i$ sigue siendo una definición general de la resistencia de un conductor ya sea que obedezca la ley de Ohm o no.

El equivalente microscópico de la relación $V = iR$ es la ecuación 10, $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j}$. Se dice que un material conductor obedece la ley de Ohm si la gráfica de E contra j es lineal, o sea, si la resistividad ρ es independiente de E y de j. La ley de Ohm es una propiedad específica de ciertos materiales y no es una ley general del electromagnetismo como la ley de Gauss, por ejemplo.

Analogía entre la corriente y el flujo de calor *(Opcional)*

Existe una analogía estrecha entre el flujo de carga creado por una diferencia de potencial y el flujo de calor creado por una diferencia de temperaturas. Consideremos una lámina gruesa eléctricamente conductora de Δx de grosor y área A. Sea ΔV la diferencia de potencial mantenida entre caras opuestas. La corriente i está dada por las ecuaciones 8 ($i = V/R$) y 13 ($R = \rho L/A$), o sea

$$i = \frac{V_a - V_b}{R} = \frac{(V_a - V_b)A}{\rho L} = -\frac{(V_b - V_a)A}{\rho \Delta x}.$$

En el caso límite de una lámina gruesa de dx de ancho se obtiene

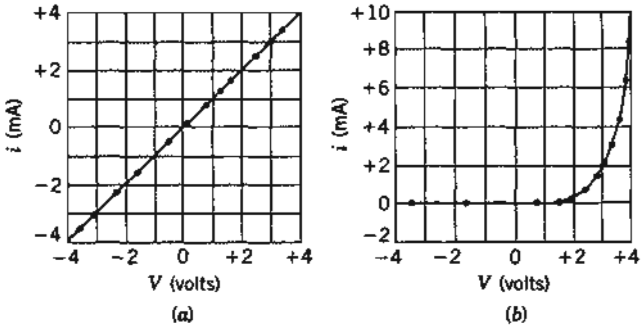


Figura 6 (*a*) Gráfica corriente-voltaje de un material que obedece la ley de Ohm, en este caso un resistor de 1000 Ω. (*b*) Gráfica corriente-voltaje de un material que no obedece a la ley de Ohm, en este caso un diodo de unión *pn*.

$$i = -\rho^{-1}A\frac{dV}{dx}$$

o, reemplazando el inverso de la resistividad por la conductividad σ,

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma A\frac{dV}{dx}. \tag{17}$$

El signo menos en la ecuación 17 indica que la carga positiva fluye en la dirección de V decreciente; es decir, dq/dt es positiva cuando dV/dx es negativa.

La ecuación análoga para el flujo de calor (véase la Sec. 25-7) es

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx}, \tag{18}$$

que muestra que k, la conductividad térmica, corresponde a σ, y dT/dx, el gradiente de la temperatura, corresponde a dV/dx, el gradiente del potencial. Para los metales puros existe una analogía matemática más que formal entre las ecuaciones 17 y 18. Tanto la energía térmica como la carga son transportadas por los electrones libres de tales metales; empíricamente, un buen conductor eléctrico (digamos, la plata) es también un buen conductor térmico, y la conductividad eléctrica σ se relaciona directamente con la conductividad térmica k. ■

32-5 LA LEY DE OHM: UNA VISIÓN MICROSCÓPICA

Como ya dijimos, la ley de Ohm no es una ley fundamental del electromagnetismo porque depende de las propiedades del medio de conducción. La ley tiene una forma muy sencilla, y resulta curioso que muchos materiales la obedezcan tan bien, mientras que otros materiales no la obedecen en absoluto. Veamos si podemos entender por qué los metales obedecen la ley de Ohm, la cual escribiremos (véase la Ec. 10) en la forma microscópica $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j}$.

En un metal, los electrones de valencia no están ligados a los átomos individuales sino que tienen libertad de

moverse dentro de la red y se llaman *electrones de conducción*. En el cobre existe uno de estos electrones por átomo, permaneciendo los otros 28 ligados al núcleo de cobre para formar corazas iónicas.

La teoría de la conducción eléctrica en los metales se basa a menudo en el *modelo del electrón libre*, en el cual (como una primera aproximación) se asume que los electrones de conducción se mueven libremente por el material conductor, en forma parecida a como se mueven las moléculas de gas dentro de un recipiente cerrado. De hecho, el conjunto de electrones de conducción suele llamarse *gas de electrones*. Sin embargo, como veremos, no podemos olvidar el efecto de las corazas iónicas sobre este "gas".

La clásica distribución maxwelliana de velocidades (véase la Sec. 24-3) del gas de electrones indicaría que los electrones de conducción tienen una distribución amplia de velocidades desde cero hasta el infinito, con un promedio bien definido. Sin embargo, al considerar a los electrones no podemos hacer a un lado a la mecánica cuántica, la cual ofrece un punto de vista muy diferente. En la distribución cuántica (véase la Fig. 16 del capítulo 24) los electrones que contribuyen sin dificultad a la conducción eléctrica están concentrados en un intervalo muy estrecho de energías cinéticas y, por lo tanto, de velocidades. Con una buena aproximación, podemos suponer que los electrones se mueven a una velocidad promedio uniforme. En el caso del cobre, esta velocidad es de alrededor de $\bar{v} = 1.6 \times 10^6$ m/s. Además, mientras la velocidad maxwelliana promedio depende mucho de la temperatura, la velocidad efectiva obtenida de la distribución cuántica es casi independiente de la temperatura.

En ausencia de un campo eléctrico, los electrones se mueven aleatoriamente, otra vez al igual que las moléculas de gas dentro de un recipiente cerrado. Ocasionalmente, un electrón choca con una coraza iónica de la red, sufriendo un cambio súbito de dirección en el proceso. Así como lo hicimos en el caso de las colisiones entre las moléculas de un gas, podemos asociar una trayectoria libre media λ y un tiempo libre medio τ a la distancia y tiempo promedio entre las colisiones. (Las colisiones entre los propios electrones son muy poco probables y no afectan a las propiedades eléctricas del conductor.)

En un cristal metálico ideal (que no contenga defectos ni impurezas) a 0 K, no ocurrirían colisiones electrón-red, de acuerdo con las predicciones de la física cuántica; esto es, $\lambda \to \infty$ como $T \to 0$ K en los cristales ideales. Las colisiones ocurren en los cristales propiamente dichos porque (1) las corazas iónicas a cualquier temperatura T están vibrando alrededor de sus posiciones de equilibrio de modo aleatorio; (2) pueden estar presentes impurezas, o sea, átomos extraños; y (3) el cristal puede contener imperfecciones de la red, como átomos faltantes y átomos desplazados. Por consiguiente, la resistividad de un metal puede incrementarse (1) si se eleva su temperatura, (2) si se agregan pequeñas cantidades de impurezas, y (3) sometiéndolo a un gran esfuerzo, como al hacerlo pasar por un dado o molde, para aumentar el número de imperfecciones de la red.

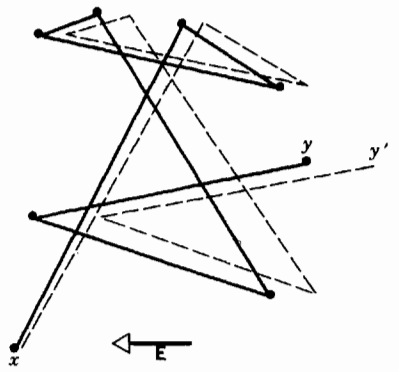


Figura 7 Los segmentos de línea sólida muestran un electrón que se mueve de x a y, experimentando seis colisiones en su camino. Las líneas de trazos muestran lo que *hubiera* sido su trayectoria en presencia de un campo eléctrico aplicado **E**. Nótese el arrastre gradual pero uniforme en la dirección de $-\mathbf{E}$. (En realidad, las líneas de trazos deberían estar ligeramente curvas para representar las trayectorias parabólicas que los electrones describen entre sus colisiones.)

Cuando aplicamos un campo eléctrico a un metal, los electrones modifican su movimiento aleatorio de tal manera que se arrastran lentamente, en la dirección opuesta a la del campo, con una velocidad de arrastre promedio v_d. Esta velocidad de arrastre es mucho menor (por un factor de algo como 10^{10}; véase el problema muestra 2) que la velocidad promedio efectiva $\bar{v}$. La figura 7 da un indicio de la relación entre estas dos velocidades. Las líneas sólidas sugieren una trayectoria aleatoria posible seguida por un electrón en ausencia de un campo aplicado; el electrón continúa de x a y, experimentando seis colisiones en el camino. Las líneas de trazos muestran cómo *hubiera* ocurrido este mismo proceso si se hubiese aplicado un campo eléctrico **E**. Nótese que el electrón se arrastra uniformemente hacia la derecha, terminando en y' más bien que en y. Al preparar la figura 7 se supuso que la velocidad de arrastre v_d es de 0.02 $\bar{v}$; en realidad, es más parecida a $10^{-10}\bar{v}$, de modo que el arrastre que se muestra en la figura está muy exagerado.

Podemos calcular la velocidad de arrastre v_d en términos del campo eléctrico aplicado E y de $\bar{v}$ y λ. Cuando se aplica un campo a un electrón en el metal, éste experimenta una fuerza eE, que le imprime una aceleración a dada por la segunda ley de Newton,

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Consideremos un electrón que acaba de chocar con una coraza de iones. La colisión, en general, destruye momen-

táneamente la tendencia a ir a la deriva, y el electrón tiene una dirección realmente aleatoria después de la colisión. Durante el intervalo de tiempo hasta la siguiente colisión, la velocidad del electrón cambia, en promedio, por una cantidad $a(\lambda/\bar{v})$, o sea $a\tau$, en donde τ es el tiempo medio entre colisiones. Identificamos a esto como la velocidad de arrastre v_d o sea*

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \tag{19}$$

Podemos también expresar a v_d en términos de la densidad de corriente (Ec. 6), lo cual da

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{eE\tau}{m}.$$

Combinando ésta con la ecuación 9 ($\rho E/j$), obtenemos finalmente

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}. \tag{20}$$

Nótese que en esta ecuación m, n, y e son constantes. De manera que la ecuación 20 puede considerarse como un enunciado de que los metales obedecen a la ley de Ohm si podemos demostrar que τ es una constante. En particular, debemos demostrar que τ no depende del campo eléctrico aplicado E. En este caso ρ no depende de E, lo cual (véase la Sec. 32-4) sigue el criterio del material que obedece la ley de Ohm. La cantidad τ depende de la distribución de velocidades de los electrones de conducción. Hemos visto que esta distribución es afectada sólo muy ligeramente al aplicar un campo eléctrico incluso relativamente grande, puesto que $\bar{v}$ es del orden de 10^6 m/s, y v_d (véase el problema muestra 2) es únicamente del orden de 10^{-4} m/s, una razón de 10^{10}. Cualquiera que sea el valor de τ (digamos, para el cobre a 20°C) en ausencia de un campo, permanece esencialmente sin cambio al aplicar el campo. Entonces el miembro derecho de la ecuación 20 es independiente de E (lo cual significa que ρ es independiente de E), y el material obedece a la ley de Ohm.

* Puede ser tentador escribir la ecuación 19 como $v_d = \frac{1}{2}a\tau$, razonando que $a\tau$ es la velocidad *final* del electrón, y por lo tanto, que su velocidad *promedio* es la mitad de dicho valor. El factor extra de $\frac{1}{2}$ sería correcto si siguiésemos a un electrón típico, tomando su velocidad de arrastre como el promedio de su velocidad dentro de su tiempo medio τ entre colisiones. Sin embargo, la velocidad de arrastre es proporcional a la densidad de corriente j y debe calcularse a partir de la velocidad promedio de *todos* los electrones tomada en un instante de tiempo. Para cada electrón, la velocidad en cualquier tiempo es at, en donde t es el tiempo desde la última colisión de ese electrón. Puesto que la aceleración a es la misma para todos los electrones, el valor promedio de at en un instante dado es $a\tau$, donde τ es el tiempo promedio desde la última colisión, que es el mismo que el tiempo medio entre colisiones. Para un estudio de este punto, véase *Electricity and Magnetism*, 2a. ed., por Edward Purcell (McGraw-Hill, 1985), sección 4.4. Véase también "Drift Speed and Collision Time", por Donald E. Tilley, *American Journal of Physics*, junio de 1976, pág. 597.

Problema muestra 5 (*a*) ¿Cuál es el tiempo libre medio τ entre colisiones en los electrones de conducción en el cobre? (*b*) ¿Cuál es la trayectoria libre media λ para estas colisiones? Suponga una rapidez efectiva $\bar{v}$ de 1.6×10^6 m/s.

Solución (*a*) De la ecuación 20 tenemos

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.48 \times 10^{-14}\ \text{s}.$$

El valor de n, el número de electrones de conducción por unidad de volumen en el cobre, se obtuvo del problema muestra 2; el valor de ρ proviene de la tabla 1.

(*b*) Definimos la trayectoria libre media a partir de

$$\lambda = \tau\bar{v} = (2.48 \times 10^{-14}\ \text{s})(1.6 \times 10^6\ \text{m/s})$$

$$= 4.0 \times 10^{-8}\ \text{m} = 40\ \text{nm}.$$

Esto es alrededor de 150 veces la distancia entre los iones vecinos más cercanos en una red de cobre. Un tratamiento completo basado en la física cuántica revela que no podemos ver una "colisión" como la interacción directa entre un electrón y un ion, sino más bien como una interacción entre un electrón y las vibraciones térmicas de la red, las imperfecciones de la red, o los átomos de impureza de la red. Un electrón puede pasar muy libremente a través de una red "ideal", esto es, una red geométricamente "perfecta" cerca del cero absoluto de temperatura. En tales condiciones se han observado trayectorias libres medias del orden de 10 cm.

32-6 TRANSFERENCIAS DE ENERGÍA EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO

La figura 8 muestra un circuito que consta de una batería B conectada a una "caja negra". Existe una corriente

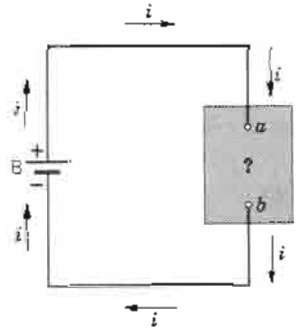


Figura 8 Una batería B crea una corriente i en un circuito que contiene una "caja negra", es decir, una caja cuyo contenido se desconoce.

estable i en los alambres de conexión, y existe una diferencia de potencial estable V_{ab} entre las terminales a y b. La caja puede contener un resistor, un motor, o un acumulador, entre otras cosas.

La terminal a, conectada a la terminal positiva de la batería, está a un potencial mayor que el de la terminal b. La energía potencial de una carga dq que se mueve a través de la caja de a a b disminuye en $dq\,V_{ab}$ (véase la Sec. 30-3). El principio de conservación de la energía nos indica que esta energía se transfiere en la caja de energía eléctrica a alguna otra forma. La forma de esta energía dependerá de lo que haya en la caja. En un tiempo dt la energía dU transferida dentro de la caja es, entonces,

$$dU = dq\,V_{ab} = i\,dt\,V_{ab}.$$

Hallamos la *cantidad* de energía transferida o la potencia P de acuerdo con

$$P = \frac{dU}{dt} = iV_{ab}. \tag{21}$$

Si el dispositivo que contiene la caja es un motor, la energía aparece en gran parte como trabajo mecánico realizado por el motor; si el dispositivo es un acumulador que esté siendo cargado, la energía aparece en gran parte como energía química almacenada en esta segunda batería.

Si el dispositivo es un resistor, la energía aparece en el resistor como una energía interna (asociada con el movimiento atómico y observada, quizás, como un aumento en la temperatura). Para ver esto, consideremos una piedra de masa m que cae desde una altura h. Su energía potencial gravitatoria disminuye en mgh. Si la piedra cae en el vacío o —para propósitos prácticos— en el aire, esta energía se transforma en energía cinética de la piedra. Sin embargo, si la piedra cae en las profundidades del océano, su velocidad con el tiempo será constante, lo cual significa que la energía cinética ya no aumenta. La energía potencial disponible en cada instante mientras cae la piedra aparece entonces como energía interna de la piedra y del agua circundante. Lo que hace que la piedra deje de acelerar es la resistencia viscosa, semejante a la fricción, del agua sobre la superficie de la piedra, y es en esta superficie donde ocurre la transformación en energía interna.

El recorrido de un electrón a través de un resistor es muy parecido al de la piedra a través del agua. En promedio, los electrones viajan a una velocidad de arrastre v_d constante, de modo que no ganan energía cinética. Pierden energía eléctrica en las colisiones con los átomos del resistor. Como resultado, las amplitudes de las vibraciones atómicas aumentan; en una escala macroscópica esto corresponde a un aumento de temperatura. Por consiguiente, puede haber un flujo de energía saliendo del resistor como calor, si el medio ambiente está a una temperatura menor que la del resistor.

Para un resistor podemos combinar las ecuaciones 8 ($R = V/i$) y 21 y obtener, ya sea

$$P = i^2R \tag{22}$$

o

$$P = \frac{V^2}{R}. \tag{23}$$

Nótese que la ecuación 21 se aplica a *toda* clase de transferencia de energía eléctrica; las ecuaciones 22 y 23 se aplican únicamente a la transferencia de energía eléctrica en energía interna en un resistor. Las ecuaciones 22 y 23 se conocen como la *ley de Joule*, y la energía correspondiente transferida al resistor o a sus alrededores se llama *calentamiento de Joule*. Esta ley es una manera particular de escribir el principio de conservación de la energía para el caso especial en que se transfiera energía eléctrica en energía interna en un resistor.

La unidad de potencia que se deduce de la ecuación 21 es el volt · ampere. Podemos demostrar que el volt · ampere es equivalente al watt como una unidad de potencia usando las definiciones del volt (joule/coulomb) y del ampere (coulomb/segundo):

$$1\ \text{volt}\cdot\text{ampere} = 1\ \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}\cdot\frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}}$$

$$= 1\ \frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = 1\ \text{watt}.$$

Ya hemos presentado anteriormente al watt como una unidad de potencia en la sección 7-5.

Problema muestra 6 Se nos ha dado una longitud de alambre de calefacción hecho de una aleación de níquel-cromo-hierro conocida como nicromel, y que tiene una resistencia R de 72 Ω. Va a ser conectada a una línea de 120 V. ¿En qué circunstancias el alambre disipará más calor: (*a*) cuando su longitud entera está conectada a la línea, o (*b*) el alambre se corta a la mitad y las dos mitades se conectan en paralelo a la línea?

Solución (*a*) La potencia P disipada por todo el alambre es, según la ecuación 23,

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120\ V)^2}{72\ \Omega} = 200\ \text{W}.$$

(*b*) La potencia para un alambre de la mitad de la longitud (y por tanto de la mitad de la resistencia) es

$$P' = \frac{V^2}{\frac{1}{2}R} = \frac{(120\ V)^2}{36\ \Omega} = 400\ \text{W}.$$

Existen dos mitades, así que la potencia obtenida de ambos es de 800 W, o cuatro veces la del alambre completo. Esto parece indicar que podemos comprar un alambre de calefactor, cortarlo por la mitad y reconectarlo para obtener cuatro veces la cantidad de calor. ¿Por qué este argumento no es una buena idea?

32-7 SEMICONDUCTORES *(Opcional)*

Una clase de materiales llamados *semiconductores* es intermedia entre los conductores y los aisladores en cuanto a su capa-

cidad de conducción de electricidad. Entre los elementos, el silicio y el germanio son ejemplos comunes de semiconductores a temperatura ambiente. Una propiedad importante de los semiconductores es que su capacidad de conducción puede cambiar extraordinariamente debido a factores externos, tales como los cambios de temperatura, el voltaje aplicado, o la luz incidente. En la tabla 1 puede verse que, si bien el silicio puro es un conductor relativamente pobre, una baja concentración de átomos de impureza (agregados al silicio puro al grado de un átomo de impureza por cada 10^6 átomos de silicio) puede cambiar la conductividad en seis o siete órdenes de magnitud. También puede verse que la conductividad del silicio es por lo menos de un orden de magnitud más sensible a los cambios de temperatura que la de un conductor común. Gracias a estas propiedades, los semiconductores han hallado aplicaciones amplias en dispositivos tales como los de conmutación y los circuitos de control, y hoy día son componentes esenciales de los circuitos integrados y de las memorias de computadora.

Para describir a nivel microscópico las propiedades de los conductores, los aisladores y los semiconductores se requiere la aplicación de los principios de la física cuántica. Sin embargo, podemos obtener una comprensión cualitativa de las diferencias entre los conductores, los aisladores y los semiconductores remitiéndonos a la figura 9, la cual muestra los estados de energía que pueden representar típicamente a los electrones en los conductores, los aisladores y los semiconductores. Los electrones tienen energías permitidas que son discretas o *cuantizadas* (véase la Sec. 8-8), pero que se agrupan en *bandas*. Dentro de las bandas, los estados de energía permitida, que están tan juntos entre sí que son virtualmente continuos, pueden estar *ocupados* (electrones que tienen la energía permitida) o *desocupados* (no hay electrones que tengan esa energía). Entre las bandas existe una *banda de energía*, la cual no contiene estados que un electrón individual pueda ocupar. Un electrón puede saltar de un estado ocupado a otro desocupado. A temperaturas ordinarias, la distribución de la energía interna proporciona la fuente de la energía necesaria para que los electrones salten a estados más elevados.

La figura 9*a* ilustra las bandas de energía que representan a un conductor. La banda de valencia, que es la banda más elevada ocupada por electrones, está ocupada sólo parcialmente, de modo que los electrones tienen muchos estados vacíos a los cuales pueden saltar fácilmente. Un campo eléctrico aplicado puede inducir a los electrones a realizar estos pequeños saltos y contribuir a una corriente en el material. Esta facilidad de movimiento de los electrones es lo que hace del material un conductor.

La figura 9*b* muestra las bandas que pueden caracterizar a un semiconductor, como el silicio. A una temperatura muy baja, la banda de valencia está completamente ocupada, y la banda de arriba (de conducción) está completamente vacía. A temperaturas ordinarias, existe una pequeña probabilidad de que un electrón de uno de los estados ocupados en la banda inferior tenga la energía suficiente para saltar la banda prohibida a uno de los estados vacíos en la banda superior. La probabilidad de tal salto depende de la distribución de energías, la cual, de acuerdo con la ecuación 27 del capítulo 24, incluye al factor $e^{-\Delta E/kT}$, en donde ΔE es la banda prohibida. Si $\Delta E = 0.7$ eV (típica del silicio) y $kT = 0.025$ eV a temperatura ambiente, el factor exponencial es de 7×10^{-13}. Si bien éste es un número pequeño, existen tantos electrones disponibles en un trozo de silicio (alrededor de 10^{23} por gramo) que un número razonable (quizás 10^{11} por gramo) están en la banda superior. En esta banda pueden moverse fácilmente desde el estado ocupado al estado vacío y contribuir a la capacidad de un semiconductor de transportar una carga eléctrica. (En el proceso de saltar a la banda de conducción, los electrones dejan lugares vacantes o *huecos* en la banda de valencia. Otros electrones en la banda de valencia pueden saltar a aquellos espacios vacantes, contribuyendo también, por lo tanto, a la conductividad.)

Otra diferencia entre los conductores y los semiconductores está en sus coeficientes de temperatura de la resistividad. Los metales no son conductores perfectos debido a las desviaciones de la estructura cristalina perfecta, como la que podría ser causada por la presencia de impurezas o defectos en la red. La vibración de las corazas de iones alrededor de sus posiciones de equilibrio en la red es un factor esencial en la resistividad de los metales. Puesto que este efecto aumenta con la temperatura, la resistividad de los metales aumenta con la temperatura. El mismo efecto naturalmente también ocurre en los semiconductores, pero queda aminorado por un efecto mucho mayor que *disminuye* la resistividad al aumentar la temperatura. Conforme

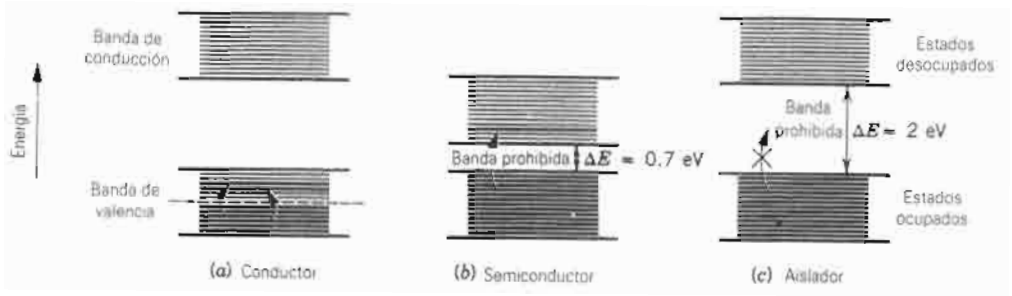


Figura 9 (*a*) Bandas de energía características de un conductor. Abajo de la línea de trazos, casi todos los estados de energía están ocupados, mientras que casi todos los estados por arriba de esta línea están vacíos. Los electrones pueden saltar fácilmente de los estados ocupados a los estados vacíos, como se indica por medio de las flechas. (*b*) En un semiconductor, la línea divisoria entre los estados ocupado y vacío se presenta en la banda prohibida. La conductividad eléctrica está determinada, en parte, por el número de electrones que saltan a ocupar estados en la banda de conducción. (*c*) Las bandas de energía en un aislador se parecen a las de un semiconductor; la diferencia principal está en el ancho de la banda prohibida de energía. A temperaturas ordinarias, no existe una probabilidad de que un electrón salte a los estados vacíos en la banda de conducción.

aumenta la temperatura, más electrones adquieren la energía suficiente para ser excitados a través de la banda prohibida de energías hacia la banda de conducción, aumentando, en consecuencia, la conductividad y disminuyendo la resistividad. Como lo muestra la tabla 1, el silicio (en contraste con los metales listados) tiene un coeficiente de temperatura de resistividad *negativo*.

La figura 9*c* muestra bandas de energía típicas de un aislador, tales como el cloruro de sodio. La estructura de bandas es muy parecida a la de un semiconductor, con la banda de valencia ocupada y la banda de conducción vacía. La diferencia principal radica en el ancho de la banda prohibida de energías, el cual es del orden de 2 eV o más en el caso de un aislador (comparado con quizás 0.7 eV en un semiconductor). Esta diferencia relativamente pequeña hace una diferencia enorme en el factor exponencial que da la probabilidad de que un electrón adquiera la energía suficiente para saltar a través de la banda prohibida. En un aislador a temperatura ambiente, el factor $e^{-\Delta E/kT}$ es típicamente de 2×10^{-35}, de modo que en un gramo de material (10^{23} átomos) existe una probabilidad insignificante a temperaturas ordinarias de que *incluso un solo electrón* esté en la banda de conducción en donde se movería libremente. Por lo tanto, en los aisladores todos los electrones están confinados en la banda de valencia, en donde no hay estados vacíos por ocupar y por consiguiente no están libres en absoluto de viajar por el material.

Nótese que la diferencia principal entre los semiconductores y los aisladores radica en la relación entre la banda prohibida de energías y kT. A temperatura muy baja, un semiconductor se convierte en aislador, mientras que a temperaturas lo suficientemente elevadas (que estén, sin embargo, por encima del punto en el cual el material se evapora), un aislador podría convertirse en un semiconductor.

Consideraremos más detalles de la aplicación de la teoría cuántica a la estructura de los semiconductores en el capítulo 53 de esta nueva versión ampliada. ■

32-8 SUPERCONDUCTIVIDAD *(Opcional)*

Cuando reducimos la temperatura de un conductor, la resistividad se reduce, como lo indica la figura 5. ¿Qué sucede cuando nos acercamos al cero absoluto de la escala de temperaturas?

La parte de la resistividad a causa de la dispersión de los electrones por los átomos que vibran alrededor de sus posiciones de equilibrio en la red disminuye cuando la temperatura disminuye, porque la amplitud de la vibración disminuye con la temperatura. De acuerdo con la teoría cuántica, los átomos retienen un cierto movimiento vibratorio mínimo, aun a la temperatura del cero absoluto. Además, las contribuciones de los defectos y de las impurezas a la resistividad permanecen conforme T disminuye a 0. Por lo tanto es de esperarse que la resistividad disminuya al disminuir la temperatura, pero que permanezca finita a las temperaturas más bajas. Muchos materiales muestran, de hecho, este tipo de comportamiento.

Sin embargo, un comportamiento muy diferente fue descubierto en 1911 por el físico holandés Kammerlingh Onnes, quien estaba estudiando la resistividad del mercurio a bajas temperaturas. Descubrió que, por debajo de una temperatura de unos 4 K, el mercurio perdía súbitamente toda su resistividad y se convertía en un conductor *perfecto*, es decir, se convertía en un *superconductor*. Éste no consistía en un cambio gradual, como lo sugieren la ecuación 14 y la figura 5, sino en una transición repentina, como lo indica la figura 10. La resistividad de un superconductor no es simplemente muy pequeña; ¡es de

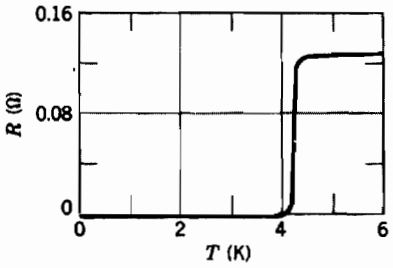


Figura 10 La resistividad del mercurio cae a cero a una temperatura de unos 4 K. El mercurio es un sólido a una temperatura tan baja.

cero! Si se establece una corriente en un material superconductor, persistiría para siempre, aun cuando no hubiese un campo eléctrico presente.

La disponibilidad de los materiales superconductores sugiere inmediatamente un número de aplicaciones. (1) La energía puede ser transportada y almacenada en alambres eléctricos sin pérdidas resistivas. Esto es, una compañía generadora de energía eléctrica puede producir energía eléctrica cuando la demanda es ligera, quizás durante la noche, y almacenar la corriente en un anillo de superconducción. La energía eléctrica puede entonces suministrarse durante las horas pico de demanda al día siguiente. Este tipo de anillo funciona hoy día en Tacoma, Washington, EUA, para almacenar 5 MW de potencia. En el laboratorio, en anillos de prueba más pequeños, se han almacenado corrientes durante varios años sin presentar ninguna reducción. (2) Los electroimanes superconductores pueden producir campos magnéticos mayores que los electroimanes convencionales. Como veremos en el capítulo 35, un alambre por el que fluye corriente genera un campo magnético en el espacio circundante, al igual que una carga eléctrica crea un campo eléctrico. Con alambres superconductores, pueden producirse corrientes más grandes y por lo tanto campos magnéticos más intensos. Entre las aplicaciones de esta tecnología se cuentan los trenes elevados magnéticamente y los imanes desviadores de haces de partículas en los grandes aceleradores como el Fermilab. (3) Los componentes superconductores en circuitos electrónicos no generarían un calentamiento Joule y permitirían una mayor miniaturización de los circuitos. Las computadoras centrales (*mainframe*) de la próxima generación emplearán componentes de superconducción.

El progreso en la aplicación de esta estimulante tecnología avanzó con lentitud durante los 75 años siguientes al descubrimiento de Kammerlingh Onnes por una razón: los elementos y compuestos que exhibían superconductividad lo hacían únicamente a temperaturas muy bajas, en la mayoría de los casos por abajo de los 20 K. Para lograr tales temperaturas, el material de superconducción se sumerge por lo general en un baño de helio líquido a 4 K. El helio líquido es costoso y así, en tanto que, por una parte ha habido numerosas aplicaciones científicas de la superconductividad, las aplicaciones comerciales fueron postergadas en virtud del alto costo del helio líquido.

A principios de 1986 se descubrió una serie de materiales cerámicos que continuaban actuando como superconductores a temperaturas relativamente elevadas. El primero de ellos mantuvo su superconductividad a una temperatura de 90 K. Mientras que ésta es todavía una temperatura baja según las normas ordinarias, marca un paso importante: puede mantenerse en un baño de nitrógeno líquido (77 K), el cual cuesta cerca de un orden de magnitud menos que el helio líquido, abriendo de esta

manera posibilidades comerciales que no habrían sido posibles con los materiales enfriados con helio líquido.*

La superconductividad no debe considerarse meramente como una mejora en la conductividad de los materiales que de por sí ya son buenos conductores. Los mejores conductores a temperatura ambiente (el cobre, la plata y el oro) no muestran superconductividad alguna en absoluto.

Una comprensión de esta distinción puede encontrarse en la base microscópica de la superconductividad. Los materiales ordinarios son buenos conductores si tienen electrones libres que puedan moverse fácilmente por la red. Los átomos del cobre, de la plata y del oro tienen un solo electrón de valencia débilmente ligado que participa en el gas de electrones que penetra por la red. De acuerdo con una de las teorías, los superconductores dependen del movimiento de *pares* de electrones altamente correlacionados. Puesto que los electrones, generalmente, no tienden a formar pares, se requiere una circunstancia especial: dos electrones interactúan fuertemente con la red y de este modo, entre sí. La situación es un tanto parecida a la de dos lanchas en un lago, donde el oleaje formado por el movimiento de una de las lanchas provoca que la otra se mueva, aun cuando la primera lancha no ejerciese fuerza alguna directamente sobre la segunda. Así pues, un buen conductor ordinario depende de que se tengan electrones que interactúen *débilmente* con la red, mientras que un superconductor parece requerir electrones que interactúan *fuertemente* con la red.

En el capítulo 53 de este mismo texto pueden encontrarse más detalles acerca de los superconductores y la aplicación de la teoría cuántica para la comprensión de sus propiedades. ■

* Véase "The New Superconductors: Prospects for Applications", por Alan M. Wolsky, Robert F. Giese y Edward J. Daniels, *Scientific American*, febrero de 1989, pág. 60, y "Superconductors Beyond 1-2-3," por Robert J. Cava, *Scientific American*, agosto de 1990, pág. 42.

PREGUNTAS

1. Nombre otras cantidades físicas que, al igual que la corriente, sean escalares y tengan un sentido representado por una flecha en un diagrama.
2. En nuestra convención de la dirección de las flechas de corriente, (*a*) ¿habría sido más conveniente, o incluso posible, haber supuesto que todos los portadores de carga fueran negativos? (*b*) ¿Habría sido más conveniente, o incluso posible, haber calificado al electrón como positivo, al protón como negativo, y así sucesivamente?
3. ¿Qué prueba experimental puede dar para demostrar que las cargas eléctricas en la corriente eléctrica y en la electrostática son idénticas?
4. Explique con sus propias palabras por qué tenemos $\mathbf{E} \neq 0$ en el interior de un conductor en este capítulo, mientras que en la sección 29-4 consideramos como un hecho que $\mathbf{E} = 0$?
5. Una corriente i entra por una esquina de una lámina cuadrada de cobre y sale por la esquina opuesta. Trace flechas en diversos puntos dentro del cuadrado que representen los valores relativos de la densidad de corriente $\mathbf{j}$. Se piden conjeturas intuitivas más bien que análisis matemáticos detallados.
6. ¿Puede apreciar alguna lógica tras la asignación de números de calibre a los alambres eléctricos de uso domestico? Véase el problema 6. Si no, ¿por qué se usa entonces este sistema?
7. Se aplica una diferencia de potencial V a un alambre de cobre de diámetro d y longitud L. ¿Cuál es el efecto en la velocidad de arrastre de los electrones (*a*) al duplicar V, (*b*) al duplicar L, y (*c*) al duplicar d?
8. ¿Por qué no es posible medir la velocidad de arrastre de los electrones tomándoles el tiempo de su viaje a lo largo de un conductor?
9. Describa brevemente algunos diseños posibles de resistores variables.
10. Se aplica una diferencia de potencial V a un cilindro circular de carbono sujetándolo entre electrodos circulares de cobre, como se muestra en la figura 11. Analice la dificultad de calcular la resistencia del cilindro de carbono usando la relación $R = \rho L/A$.

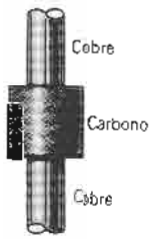


Figura 11 Pregunta 10.

11. Se tienen un cubo de aluminio y el acceso a las dos terminales de una batería. ¿Cómo conectaría usted las terminales al cubo para garantizar (*a*) una resistencia máxima y (*b*) una resistencia mínima?
12. ¿Cómo mediría la resistencia de un bloque de metal en forma de nudo? Proporcione detalles específicos que aclaren el concepto.
13. El deslizamiento de una persona sobre el asiento de un automóvil puede generar potenciales de varios miles de volts. ¿Por qué no se electrocuta la persona?
14. Analice las dificultades de probar si el filamento de un foco eléctrico obedece la ley de Ohm.
15. ¿Cambia la velocidad de arrastre de los electrones en un conductor por el cual fluye corriente cuando la temperatura del conductor aumenta? Explique.

16. Explique por qué el ímpetu que los electrones de conducción transfieren a los iones en un conductor metálico no origina una fuerza resultante en el conductor.
17. Una tabla que contenga las semejanzas y diferencias entre el flujo de carga a lo largo de un conductor, el flujo de agua a través de un tubo horizontal, y la conducción de calor a través de una placa. Considere ideas tales como qué causa el flujo, qué se opone a él, qué partículas participan (si alguna), y las unidades en las que puede medirse el flujo.
18. ¿Cómo se aplica la relación $V = iR$ a los resistores que *no* obedecen la ley de Ohm?
19. Una vaca y una persona están parados en un prado cuando cerca de ellos cae un rayo. ¿Por qué es más probable que resulte muerta la vaca que la persona? El fenómeno a que nos referimos se llama "voltaje en escalón".
20. Las líneas de la figura 7 deberían curvarse ligeramente. ¿Por qué?
21. En un circuito eléctrico, el fusible es un trozo de alambre diseñado para que se funda y, en consecuencia, para que se abra el circuito, si la corriente excede un valor predeterminado. ¿Cuáles son algunas características de un alambre de fusible ideal?
22. ¿Por qué, con el uso, disminuye la intensidad de un foco eléctrico incandescente?
23. El carácter y calidad de nuestra vida cotidiana están influidos en alto grado por aparatos que no obedecen a la ley de Ohm. ¿Qué puede usted decir para apoyar esta pretensión?
24. Tomado del trabajo de un estudiante: "La relación $R = V/i$ nos dice que la resistencia de un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial que se le aplica". ¿Qué piensa usted de esta propuesta?
25. El carbono tiene un coeficiente negativo de temperatura de la resistividad. Esto significa que la resistividad disminuye cuando aumenta su temperatura. ¿Desaparecería completamente la resistividad a cierta temperatura lo suficientemente elevada?
26. ¿Qué características especiales debe poseer un alambre calefactor?
27. La ecuación 22 ($P = i^2R$) parece indicar que el aumento de la energía interna en un resistor se reduce cuando la resistencia disminuye; la ecuación 23 ($P = V^2/R$) parece sugerir precisamente lo contrario. ¿Cómo reconcilia usted esta paradoja?
28. ¿Por qué las compañías de electricidad reducen el voltaje durante los tiempos de más demanda? ¿Qué se pretende ahorrar con esto?
29. ¿Es la resistencia del filamento más baja o más alta en un foco de 500 W que en otro de 100 W? Ambos están diseñados para operar a 120 V.
30. Cinco alambres de la misma longitud y diámetro se conectan uno a la vez entre dos puntos que se encuentran a una diferencia de potencial constante. ¿Se desarrollará la energía interna a una velocidad más rápida en el alambre de resistencia (*a*) menor o (*b*) mayor?
31. ¿Por qué es mejor enviar 10 MW de potencia eléctrica a largas distancias a 10 kV más bien que a 220 V?

PROBLEMAS

Sección 32-2 Densidad de corriente

1. En un resistor de 12.4 Ω existe una corriente de 4.82 A durante 4.60 minutos. ¿(*a*) Cuánta carga y (*b*) cuántos electrones pasan por cualquier sección transversal del resistor en este tiempo?
2. La corriente del haz de electrones de una pantalla de video típica es de 200 μA. ¿Cuántos electrones chocan con la pantalla cada minuto?
3. Supongamos que tenemos 2.10×10^8 iones positivos doblemente cargados por centímetro cúbico, todos moviéndose hacia el norte a una velocidad de 1.40×10^5 m/s. (*a*) Calcule la densidad de corriente, en magnitud y dirección. (*b*) ¿Puede usted calcular la corriente total en este haz de iones? Si no, ¿qué información adicional se necesita?
4. Una corriente pequeña pero mensurable de 123 pA existe en un alambre de cobre cuyo diámetro es de 2.46 mm. Calcule (*a*) la densidad de corriente y (*b*) la velocidad de arrastre de los electrones. Véase el problema muestra 2.
5. Supongamos que el material que compone a un fusible (véase la pregunta 21) se funde cuando la densidad de corriente llega a 440 A/cm^2. ¿Qué diámetro de alambre cilíndrico deberá usarse para que el fusible limite la corriente a 0.552 A?
6. Abajo se ofrece un fragmento del National Electric Code, (Código Eléctrico Nacional) de Estados Unidos, el cual fija las corrientes máximas seguras o no peligrosas para alambres de cobre aislados con hule, de diversos diámetros. Grafique la densidad de corriente segura en función del diámetro. ¿Qué calibre de alambre tiene la densidad de corriente máxima segura?

Calibre[a]	4	6	8	10	12	14	16	18
Diámetro (en mils)[b]	204	162	129	102	81	64	51	40
Corriente segura (A)	70	50	35	25	20	15	6	3

[a] Una manera de identificar el diámetro del alambre.
[b] 1 mil = 10^{-3} in.

7. Se establece una corriente en un tubo de descarga de gas cuando entre los dos electrodos del tubo se aplica una diferencia de potencial lo suficientemente elevada. El gas se ioniza; los electrones se mueven hacia la teminal positiva y los iones positivos, con una sola carga, hacia la terminal negativa. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la corriente en un tubo de descarga de hidrógeno por el

cual se mueven 3.1×10^{18} electrones y 1.1×10^{18} protones a través de la sección transversal del tubo en cada segundo?

8. Una unión *pn* está formada por dos materiales semiconductores diferentes en forma de cilindros idénticos de 0.165 mm de radio, como se representa en la figura 12. En una aplicación fluyen a través de la unión 3.50×10^{15} electrones por segundo del lado *n* al lado *p*, mientras que 2.25×10^{15} huecos por segundo fluyen del lado *p* al lado *n*. (Un hueco actúa como una partícula con carga $+1.6 \times 10^{-19}$ C.) Determine (*a*) la corriente total y (*b*) la densidad de corriente.

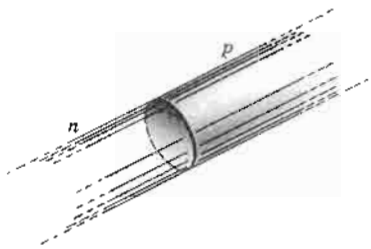


Figura 12 Problema 8.

9. Se tiene una esfera conductora aislada de 13 cm de radio. Por un alambre fluye una corriente de 1.0000020 A que entra a ella. Por otro alambre fluye una corriente de 1.0000000 A que sale de ella. ¿Cuánto tiempo le tomará a la esfera aumentar su potencial en 980 V?
10. La banda de un acelerador electrostático tiene 52.0 cm de anchura y viaja a 28.0 m/s. La banda introduce en la esfera una carga correspondiente a 95.0 μA. Calcule la densidad de carga superficial en la banda. Véase la sección 30-11.
11. Cerca de la Tierra, la densidad de protones en el viento solar es de 8.70 cm^{-3} y su velocidad es de 470 km/s. (*a*) Encuentre la densidad de corriente de estos protones. (*b*) Si el campo magnético de la Tierra no los desviara, los protones chocarían con ella. ¿Qué corriente total recibiría la Tierra?
12. En un laboratorio hipotético de investigación sobre fusión se ioniza completamente el gas helio a temperatura elevada, separándose cada átomo de helio en dos electrones libres y el núcleo que queda cargado positivamente (partícula alfa). Al aplicar un campo eléctrico las partículas alfa se arrastran hacia el este a 25 m/s mientras que los electrones se arrastran hacia el oeste a 88 m/s. La densidad de la partícula alfa es de 2.8×10^{15} cm^{-3}. Calcule la densidad de corriente neta; especifique la dirección de la corriente.
13. ¿Cuánto tiempo le toma a los electrones pasar desde la batería de un automóvil hasta el motor de arranque? Supóngase que la corriente es de 115 A y que los electrones viajan por un alambre de cobre de 31.2 mm^2 de área de sección transversal y 85.5 cm de longitud. Véase el problema muestra 2.
14. Un haz estacionario de partículas alfa ($q = 2e$) que viajan con una energía cinética de 22.4 MeV carga una corriente de 250 nA. (*a*) Si el haz se dirige perpendicularmente a una superficie plana, ¿cuántas partículas alfa chocan con la superficie en 2.90 s? (*b*) En cualquier instante, ¿cuántas partículas alfa existen en una longitud del haz dada de 18.0 cm? (*c*) ¿Con qué diferencia de potencial fue necesario acelerar cada partícula alfa desde el reposo hasta llevarla a una energía de 22.4 MeV?
15. En los dos anillos de almacenamiento intersecantes de 950 m de circunferencia en CERN, protones de 28.0 GeV de energía cinética forman haces de 30.0 A de corriente cada uno. (*a*) Halle la carga total portada por los protones en cada anillo. Asuma que los protones viajan a la velocidad de la luz. (*b*) De uno de los anillos un haz se desvía hacia un bloque de cobre de 43.5 kg. ¿A cuánto se eleva la temperatura del bloque?
16. (*a*) La densidad de corriente por un conductor cilíndrico de radio *R* varía de acuerdo con la ecuación

$$j = j_0(1 - r/R),$$

donde *r* es la distancia desde el eje. Entonces, la densidad de corriente es una j_0 máxima en el eje $r = 0$ y disminuye linealmente a cero en la superficie $r = R$. Calcule la corriente en términos de j_0 y del área de sección transversal $A = \pi R^2$ del conductor. (*b*) Supóngase que, en lugar de esto, la densidad de corriente es una j_0 máxima en la superficie y que decrece linealmente a cero en el eje, de modo que

$$j = j_0 r/R.$$

Calcule la corriente. ¿Por qué este resultado es diferente al de (*a*)?

Sección 32-3 Resistencia, resistividad y conductividad

17. El riel de acero de un tranvía eléctrico tiene un área de 56 cm^2 de sección transversal. ¿Cuál es la resistencia de 11 km de riel? La resistividad del acero es de $3.0 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot m$.
18. Un ser humano puede electrocutarse si una corriente tan pequeña como 50 mA pasa cerca del corazón. El electricista que trabaja con manos sudorosas hace un buen contacto cuando sostiene dos conductores, uno en cada mano. Si la resistencia del electricista es de 1800 Ω, ¿cuál podría ser el voltaje fatal? (Los electricistas suelen trabajar con alambres "vivos", llamados la fase.)
19. Un alambre de 4.0 m de largo y 6.0 mm de diámetro tiene una resistencia de 15 mΩ. Se aplica una diferencia de potencial de 23 V entre sus extremos. (*a*) ¿Cuál es la corriente en el alambre? (*b*) Calcule la densidad de corriente. (*c*) Calcule la resistividad del material del alambre. ¿Puede identificiar este material? Véase la tabla 1.
20. Un fluido con una resistividad de $9.40\ \Omega \cdot m$ se filtra (hacia adentro) en el espacio entre las placas de un capacitor de aire de placas paralelas de 110 pF. Cuando el espacio está completamente lleno, ¿cuál es la resistencia entre las placas?
21. Demuestre que si se pudieran despreciar los cambios en las dimensiones de un conductor al variar la temperatura, entonces la resistencia variaría con la temperatura de acuerdo con $R - R_0 = \bar{\alpha} R_0 (T - T_0)$.

22. De la pendiente de la línea en la figura 5, calcule aproximadamente el coeficiente de temperatura de la resistividad promedio del cobre a temperatura ambiente y compárelo con el valor dado en la tabla 1.

23. (a) ¿A qué temperatura se duplicaría la resistencia de un conductor de cobre que está a 20°C? (Considere 20°C como el punto de referencia en la Ec. 14; compare su respuesta con la Fig. 5.) (*b*) ¿Se mantiene la misma temperatura para todos los conductores de cobre, de cualquier tamaño o forma?

24. Los devanados de cobre de un motor tienen una resistencia de 50 Ω a 20°C cuando el motor está sin carga. Después de funcionar durante varias horas la resistencia se eleva a 58 Ω. ¿Cuál es la temperatura de los devanados? No considere los cambios en las dimensiones de los devanados. Véase la tabla 1.

25. Una oruga de 4.0 cm de longitud se arrastra en la dirección del movimiento de los electrones a lo largo de un alambre de cobre desnudo de 5.2 mm de diámetro por el cual fluye una corriente de 12 A. (*a*) Encuentre la diferencia de potencial entre los dos extremos de la oruga. (*b*) ¿Es su cola positiva o negativa con respecto a su cabeza? (*c*) ¿Cuánto tiempo le podría tomar a la oruga arrastrarse 1.0 cm y todavía mantenerse al mismo paso que los electrones en el alambre?

26. Una bobina se forma devanando 250 vueltas de alambre de cobre de calibre 8 (véase el problema 6), aislado, en una sola capa sobre una forma cilíndrica cuyo radio es de 12.2 cm. Determine la resistencia de la bobina. Desprecie el grosor del aislamiento. Véase la tabla 1.

27. Un alambre con una resistencia de 6.0 Ω se estira en un dado de modo que su nueva longitud es tres veces mayor que su longitud inicial. Halle la resistencia del alambre más largo, suponiendo que la resistividad y la densidad del material no hayan cambiado durante el proceso de estirado.

28. ¿Cuál debe ser el diámetro de un alambre de hierro si ha de tener la misma resistencia que un alambre de cobre de 1.19 mm de diámetro, siendo ambos alambres de la misma longitud?

29. Dos conductores están hechos del mismo material y tienen la misma longitud. El conductor A es un alambre sólido de diámetro D. El conductor B es un tubo hueco de diámetro exterior $2D$ y diámetro interior D. Encuentre la razón de resistencias, R_A/R_B, medidas entre sus extremos.

30. Un alambre de cobre y un alambre de hierro de la misma longitud tienen la misma diferencia de potencial aplicada a ellos. (*a*) ¿Cuál debe ser la razón de sus radios si la corriente ha de ser la misma? (*b*) ¿Puede hacerse que la densidad de corriente sea la misma eligiendo apropiadamente los radios?

31. Un cable eléctrico consta de 125 hilos de alambre fino, cada uno de los cuales tiene una resistencia de 2.65 μΩ. Se aplica la misma diferencia de potencial entre los extremos de cada hilo y la corriente resultante total es de 750 mA. (*a*) ¿Cuál es la corriente en cada hilo? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada? (*c*) ¿Cuál es la resistencia del cable?

32. El foco de una linterna eléctrica (de bolsillo) común está especificado a 310 mA y 2.90 V, siendo los valores de la corriente y del voltaje en las condiciones de operación. Si la resistencia del filamento del foco es de 1.12 Ω cuando está frío (T_0 = 20°C), calcule la temperatura del filamento cuando el foco está encendido. El filamento está hecho de tungsteno. Suponga que la ecuación 14 se cumple dentro de los límites de temperaturas encontradas.

33. Cuando se aplican 115 V entre los extremos de un alambre de 9.66 m de longitud, la densidad de corriente es de 1.42 A/cm². Calcule la conductividad del material del alambre.

34. Un bloque de forma sólida rectangular tiene un área de sección transversal de 3.50 cm², una longitud de 15.8 cm y una resistencia de 935 Ω. El material del que está hecho el bloque tiene 5.33×10^{22} electrones de conducción por metro cúbico. Se mantiene entre sus extremos una diferencia de potencial de 35.8 V. (*a*) Calcule la corriente en el bloque. (*b*) Suponiendo que la densidad de la corriente sea uniforme, ¿cuál es su valor? Calcule (*c*) la velocidad de arrastre de los electrones de conducción y (*d*) el campo eléctrico en el bloque.

35. Están siendo considerados el cobre y el aluminio para una línea de transmisión de alto voltaje por la cual debe fluir una corriente de 62.3 A. La resistencia por unidad de longitud ha de ser de 0.152 Ω/km. Calcule, para cada elección del material del cable, (*a*) la densidad de la corriente y (*b*) la masa de 1.00 m de cable. Las densidades del cobre y del aluminio son de 8960 y 2700 kg/m³, respectivamente.

36. En la atmósfera inferior de la Tierra existen iones negativos y positivos, creados por elementos radiactivos en el suelo y en los rayos cósmicos del espacio. En cierta región, la intensidad del campo eléctrico atmosférico es de 120 V/m, dirigida verticalmente hacia abajo. Debido a este campo, los iones con una sola carga positiva, 620 por cm³, se dirigen hacia abajo, y los iones con una sola carga negativa, 550 por cm³, se dirigen hacia arriba; véase la figura 13. La conductividad medida es de $2.70 \times 10^{-14}/\Omega \cdot m$. Calcule (*a*) la velocidad de arrastre de los iones, suponiendo que es la misma para los iones positivos y negativos, y (*b*) la densidad de la corriente.

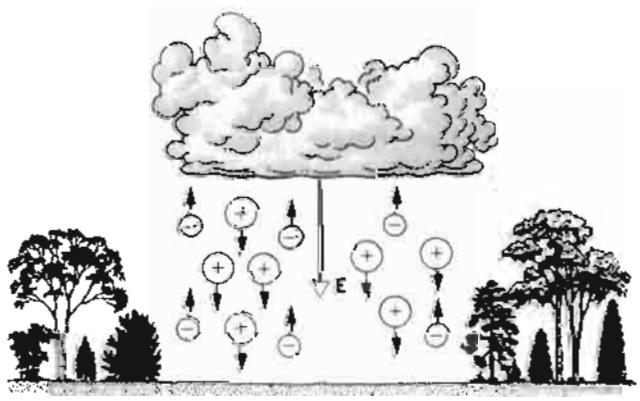


Figura 13 Problema 36.

37. Una barra de determinado metal tiene 1.6 m de longitud y 5.5 mm de diámetro. La resistencia entre sus extremos (a 20°C) es de $1.09 \times 10^{-3}\ \Omega$. De este mismo material se forma un disco redondo, de 2.14 cm de diámetro y 1.35 mm de grosor, (*a*) ¿Cuál es el material? (*b*) ¿Cuál es la resistencia entre las caras redondas opuestas, suponiendo que sean superficies equipotenciales?
38. Cuando una barra de metal se calienta, no sólo cambia su resistencia sino también su longitud y su área de sección transversal. La relación $R = \rho L/A$ indica que los tres factores deberían tomarse en cuenta al medir ρ a varias temperaturas. (*a*) Si la temperatura cambia en 1.0 C°, ¿qué cambios fraccionarios en R, L y A ocurren para un conductor de cobre? (*b*) ¿A qué conclusión se llega? El coeficiente de dilatación lineal es de $1.7 \times 10^{-5}/\text{C}°$.
39. Se desea hacer un conductor cilíndrico largo cuyo coeficiente de temperatura de la resistividad, a 20°C, esté cerca de cero. Si tal conductor se hace ensamblando discos alternados de hierro y de carbono, halle la razón entre los espesores de un disco de carbono y los de un disco de hierro. (Para el carbono, $\rho = 3500 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ y $\alpha = -0.50 \times 10^{-3}/\text{C}°$.)
40. Un resistor tiene la forma de un cono circular recto truncado (Fig. 14). Los radios de los extremos son a y b, y la altura es L. Si el ahusamiento es pequeño, podemos suponer que la densidad de la corriente es uniforme en cualquier sección transversal. (*a*) Calcule la resistencia de este objeto. (*b*) Demuestre que su respuesta se reduce a $\rho L/A$ para el caso especial de un ahusamiento nulo ($a = b$).

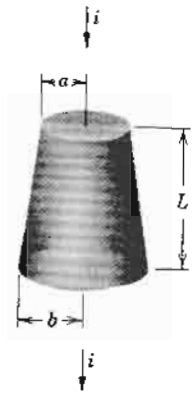


Figura 14 Problema 40.

Sección 32-4 La ley de Ohm

41. En un dispositivo electrónico hipotético, la diferencia de potencial V en volts, medida entre sus extremos, se relaciona con la corriente i en mA según $V = 3.55\ i^2$. (*a*) Determine la resistencia cuando la corriente es 2.40 mA. (*b*) ¿A qué valor de la corriente es la resistencia igual a 16.0 Ω?
42. Usando los datos de la figura 6*b*, trace la resistencia del diodo de unión *pn* en función de la diferencia de potencial aplicada.

Sección 32-5 La ley de Ohm: una visión microscópica

43. Calcule el tiempo libre medio entre colisiones de los electrones de conducción en el aluminio a 20°C. Cada átomo de aluminio contribuye con tres electrones de conducción. Obtenga los datos necesarios de la tabla 1 y del apéndice D. Véase también al problema muestra 2.
44. Demuestre que, de acuerdo con el modelo del electrón libre de la conducción eléctrica en los metales y en la física clásica, la resistividad de los metales sería proporcional a $\sqrt{T}$, en donde T es la temperatura absoluta. (*Sugerencia*: Considere a los electrones como un gas ideal.)

Sección 32-6 Transferencias de energía en un circuito eléctrico

45. El radio portátil, 9.0 V y 7.5 W, de un estudiante se quedó encendido entre las 9:00 p.m. y las 3.00 a.m. ¿Cuánta carga pasó por los conductores?
46. Los fanales de un automóvil en movimiento consumen 9.7 A del alternador de 12 V, el cual es impulsado por el motor. Suponga que el alternador tiene una eficiencia del 82% y calcule la potencia (caballos de potencia) que debe suministrar el motor para operar los fanales.
47. Un calefactor que opera en una línea de 120 V tiene una resistencia en caliente de 14.0 Ω. (*a*) ¿A qué velocidad se transfiere la energía eléctrica en energía interna? (*b*) A razón de 5.22¢/kW · h, ¿cuánto cuesta operar el dispositivo durante 6 h 25 min?
48. La Oficina Nacional de Aseguradores contra Incendios, de Estados Unidos, ha fijado las capacidades para conducir corriente con seguridad en varios tamaños y tipos de alambre. Para el alambre de cobre del #10 recubierto de hule (diámetro = 0.10 in.) la corriente máxima segura es de 25 A. Para esta corriente, calcule (*a*) la densidad de corriente, (*b*) el campo eléctrico, (*c*) la diferencia de potencial en 1000 ft de alambre, y (*d*) la velocidad con que se genera la energía interna en 1000 ft de alambre.
49. Un foco eléctrico de 100 W se conecta en un tomacorrientes normal de 120 V. (*a*) ¿Cuánto cuesta por mes (de 31 días) dejarlo encendido? Suponga que el costo de la energía eléctrica es de 6¢/kW · h. (*b*) ¿Cuál es la resistencia del foco? (*c*) ¿Cuál es la corriente en el foco? (*d*) ¿Es la resistencia diferente cuando se apaga el foco?
50. Un calefactor de nicromel disipa 500 W cuando la diferencia de potencial aplicada es de 110 V y el alambre está a una temperatura de 800°C. ¿Cuánta potencia se disiparía si la temperatura del alambre se mantuviese a 200°C por inmersión en un baño de aceite enfriante? La diferencia de potencial aplicada permanece la misma; α para el nicromel a 800°C es de $4.0 \times 10^{-4}/\text{°C}$.
51. Un acelerador lineal de electrones produce un haz pulsado de electrones. La corriente de pulsación es de 485 mA y la duración de la pulsación es de 95.0 ns. (*a*) ¿Cuántos electrones son acelerados en cada pulsación? (*b*) Halle la corriente promedio de una máquina que opera a 520 pulsaciones/s. (*c*) Si los electrones se aceleran a una energía de 47.7 MeV, ¿cuáles son los valores de las salidas de potencia promedio y pico del acelerador?

52. Un resistor cilíndrico de 5.12 mm de radio y 1.96 cm de longitud está hecho de un material que tiene una resistividad de $3.50 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot$ m. ¿Cuáles son (*a*) la densidad de la corriente y (*b*) la diferencia de potencial cuando la disipación de potencia es de 1.55 W?

53. Un elemento calefactor está hecho para mantener una diferencia de potencial de 75 V a lo largo de un tramo de alambre de nicromel con una sección transversal de 2.6 mm^2 y una resistividad de $5.0 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot$ m. (*a*) Si el elemento disipa 4.8 kW, ¿cuál es su longitud? (*b*) Si se emplea una diferencia de potencial de 110 V para obtener la misma salida de potencia, ¿cuál sería la longitud?

54. Una bobina conductora de corriente hecha de alambre de nicromel está inmersa en un líquido contenido en un calorímetro. Cuando la diferencia de potencial entre los extremos de la bobina es de 12 V y la corriente por ella es de 5.2 A, el líquido hierve a una rapidez constante, evaporándose a razón de 21 mg/s. Calcule el calor de vaporización del líquido.

55. Una bobina de resistencia, conectada a una batería externa, está situada dentro de un cilindro adiabático equipado con un émbolo sin fricción y que contiene un gas ideal. Por la bobina, la cual tiene una resistencia de $R = 550\ \Omega$, fluye una corriente $i = 240$ mA. ¿A qué velocidad debe moverse hacia arriba el émbolo, de masa $m = 11.8$ kg, para que la temperatura del gas no cambie? Véase la figura 15.

56. Un calefactor eléctrico de inmersión emplea normalmente 93.5 min para llevar el agua fría, contenida en un recipiente bien aislado, hasta una cierta temperatura, después de lo cual un termostato apaga al calefactor. Un día el voltaje de la línea se reduce en un 6.20% a causa de una sobrecarga en el laboratorio. ¿Cuánto tiempo le tomará ahora para calentar el agua? Suponga que la resistencia del elemento calefactor es la misma en cada uno de estos dos modos de operación.

57. Dos esferas conductoras aisladas, cada una de 14.0 cm de radio, se cargan a potenciales de 240 y 440 V y luego se conectan por medio de un alambre delgado. Calcule la energía interna generada en el alambre.

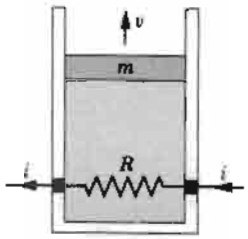


Figura 15 Problema 55.

58. La corriente de un haz de electrones en un tubo de rayos catódicos en particular es de 4.14 mA. La velocidad de los electrones es de 2.82×10^7 m/s y el haz recorre una distancia de 31.5 cm para llegar a la pantalla. (*a*) ¿Cuántos electrones hay en el haz en cualquier instante? (*b*) Halle la potencia disipada en la pantalla. (No considere los efectos relativistas.)

59. Un calefactor de inmersión de 420 W se coloca en un recipiente que contiene 2.10 litros de agua a 18.5°C. (*a*) ¿Cuánto tiempo le tomará para llevar el agua a la temperatura de ebullición, suponiendo que el 77.0% de la energía disponible la absorba el agua? (*b*) ¿Cuánto tiempo más le tomará hacer hervir el agua hasta que sólo quede la mitad en el recipiente?

60. Un capacitor de 32 μF está conectado a una fuente de alimentación programada. Durante el intervalo desde $t = 0$ hasta $t = 3$ s el voltaje de entrega de la fuente está dado por $V(t) = 6 + 4t - 2t^2$ volts. Para $t = 0.50$ s determine (*a*) la carga en el capacitor, (*b*) la corriente dentro del capacitor, y (*c*) la entrega de potencia de la fuente de alimentación.

61. A un alambre de área A de sección transversal, longitud L y conductividad σ se le aplica una diferencia de potencial V. Se desea cambiar la diferencia de potencial aplicada y estirar el alambre de modo que la potencia disipada aumente en un factor de 30 y la corriente aumente en un factor de 4. ¿Cuáles serían los nuevos valores de (*a*) la longitud y (*b*) el área de sección transversal?

CAPÍTULO 33

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

En el capítulo anterior estudiamos algunas propiedades generales de la corriente y la resistencia. En este capítulo iniciamos el estudio del comportamiento de circuitos eléctricos específicos que comprenden elementos resistivos, los cuales pueden ser resistores individuales o bien resistencias internas de elementos del circuito, como baterías o conductores.

Nos limitamos ahora al estudio de los circuitos de corriente continua *(CC), en los que la dirección de la corriente no cambia con el tiempo. En los circuitos de CC que contienen sólo baterías y resistores, la magnitud de la corriente no varía con el tiempo, mientras que en los que contienen capacitores, la magnitud de la corriente dependerá del tiempo. Los circuitos de corriente alterna (CA), en los que la corriente cambia periódicamente de dirección, se considerarán en el capítulo 39.*

33-1 FUERZA ELECTROMOTRIZ

En la mayoría de los circuitos se requiere una fuente de energía externa para mover cargas dentro del circuito. Por lo tanto, el circuito debe incluir un dispositivo que mantenga una diferencia de potencial entre dos puntos del mismo, al igual que un fluido circulante requiere de un dispositivo análogo (una bomba) que mantenga una diferencia de *presión* entre dos puntos.

Cualquier aparato que lleve a cabo esta tarea en un circuito eléctrico recibe el nombre de fuente de *fuerza electromotriz* (símbolo $\mathcal{E}$; abreviatura fem). A veces es útil considerar una fuente de fem como un mecanismo que crea una "colina" de potencial moviendo la carga "cuesta arriba", y desde donde fluye luego "cuesta abajo" por el resto del circuito. Una fuente común de fem es la batería ordinaria; otra es el generador eléctrico que se halla en las centrales eléctricas. Las celdas solares son fuentes de fem que se emplean tanto en vehículos espaciales como en las calculadoras de bolsillo. Otras fuentes de fem menos comunes son las celdas de combustible que impulsan a un vehículo espacial) y las termopilas. Los sistemas biológicos, incluyendo el corazón humano, funcionan también como fuentes de fem.

La figura 1*a* muestra una fuente de fem $\mathcal{E}$, que podemos considerar como una batería, conectada a un resistor R. La fuente de fem mantiene su terminal superior a un potencial alto y su terminal inferior a un potencial bajo, como lo indican los signos + y −. En el circuito externo, los portadores de carga positiva se moverán en la dirección mostrada por las flechas marcadas con i. En otras palabras, en el circuito de la figura 1*a* se produce una corriente en el sentido de las manecillas del reloj.

Una fem se representa mediante una flecha situada cerca de la fuente y que apunta en la dirección en que la fem, de actuar sola, causaría que un portador de carga positiva se moviera en el circuito externo. Trazamos un pequeño círculo en la cola de la flecha que representa a la fem con el fin de que no se confunda con la flecha que representa a una corriente.

La fuente de fem debe ser capaz de realizar trabajo sobre los portadores de carga que entren en ella. En su interior, la fuente actúa para mover cargas positivas desde un punto de potencial bajo (la terminal negativa) en la fuente hasta un punto de potencial alto (la terminal positiva). Las cargas se mueven entonces por el circuito externo, disipando energía en el proceso, y retornan a la terminal negativa, desde donde la fem las eleva a la terminal positiva nuevamente y el ciclo continúa. (Nótese que, de acuerdo con nuestra convención usual, analizamos el circuito como si la carga positiva estuviese fluyendo. El movimiento real de los electrones es en la dirección opuesta.)

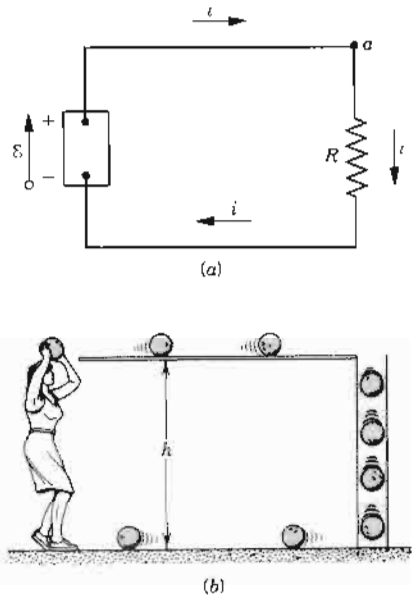


Figura 1 (*a*) Un circuito eléctrico sencillo, donde la fem $\mathscr{E}$ realiza trabajo sobre los portadores de carga y mantiene una corriente uniforme en el resistor. (*b*) Analogía gravitatoria, en la que el trabajo realizado por una persona mantiene un flujo uniforme de bolas de boliche en un medio viscoso.

Cuando se ha establecido una corriente uniforme en el circuito de la figura 1*a*, una carga *dq* pasa por *cualquier* sección transversal del circuito en el tiempo *dt*. En particular, esta carga entra a la fuente de fem $\mathscr{E}$ por su extremo de potencial bajo y sale por el extremo de potencial alto. La fuente debe realizar una cantidad de trabajo *dW* sobre los portadores de carga (positiva) para forzarlos a ir hacia el punto de potencial más alto. La fem $\mathscr{E}$ de la fuente se define como el trabajo por unidad de carga, o sea

$$\mathscr{E} = dW/dq. \qquad (1)$$

La unidad de fem es el joule/coulomb, que es el *volt* (abreviatura V):

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb}.$$

Nótese en la ecuación 1 que la fuerza electromotriz no es realmente una fuerza; es decir, no la medimos en newtons. Su nombre se debe a que así se consideraba en sus primeros tiempos.

El trabajo realizado por una fuente de fem sobre los portadores de la carga en su interior debe provenir de una fuente de energía dentro de ella. La fuente de energía puede ser química (como en una batería o en una celda de combustible), mecánica (un generador), térmica (una termopila), o radiante (una celda solar). Podemos describir a una fuente de fem como un dispositivo por el que alguna otra forma de energía se transforma en energía eléctrica. La energía suministrada por la fuente de fem en la figura 1*a* está almacenada en campos eléctricos y magnéticos* que rodean al circuito. Esta energía almacenada no aumenta porque se convierte en energía interna en el resistor y se disipa como calentamiento de Joule, a la misma velocidad con que se abastece. Los campos eléctricos y magnéticos desempeñan el papel de intermediarios en el proceso de transferencia de energía, actuando como depósitos de almacenamiento.

La figura 1*b* muestra una analogía gravitatoria de la figura 1*a*. En la ilustración superior la fuente de fem realiza un trabajo sobre los partadores de la carga. Esta energía almacenada en el trayecto como energía del campo electromagnético, aparece luego como energía interna en el resistor *R*. En la parte inferior de la figura la persona, al levantar las bolas de boliche desde el piso hasta la estantería, efectúa un trabajo sobre ellas. Esta energía se almacena en el trayecto como energía del campo gravitatorio. Las bolas ruedan lenta y uniformemente a lo largo de la estantería, cayendo por el extremo derecho dentro de un cilindro lleno de aceite viscoso. Se hunden hasta el fondo con una velocidad esencialmente constante, salen por un mecanismo que no se ilustra aquí, ruedan de regreso a lo largo del suelo hacia la izquierda. La energía proporcionada al sistema por la persona aparece al final como energía interna en el fluido viscoso, dando como resultado una elevación de la temperatura. La energía abastecida por la persona proviene de la energía interna (química). La circulación de las cargas en la figura 1*a* cesa con el tiempo si la fuente de fem agota su energía; la circulación de las bolas de boliche en la figura 1*b* se detiene si a la persona se le agota su energía.

La figura 2*a* muestra un circuito que contiene dos baterías ideales (sin resistencia) A y B, un resistor de resistencia *R* y un motor eléctrico ideal M empleado para levantar un peso. Las baterías están conectadas de modo que tienden a enviar cargas alrededor del circuito en direcciones opuestas; la dirección real de la corriente está determinada por la batería B, la cual tiene la fem mayor. La figura 2*b* muestra las transferencias de energía en este circuito. La energía química en la batería B se agota uniformemente, apareciendo esta energía en las tres formas mostradas a la derecha. La batería A está siendo cargada mientras que la batería B está siendo descargada. Una vez más, los campos eléctrico y magnético que rodean al circuito actúan como un intermediario.

Reversibilidad *(Opcional)*

Al menos en principio, es parte de la definición de una fem ideal que el proceso de transferencia de la energía sea *reversible*. Recordemos que un proceso reversible es aquel que pasa por

* La corriente en un conductor está rodeada por un campo magnético y este campo, al igual que el campo eléctrico, puede también considerarse una fuente de energía almacenada (véase la Sec. 38-4).

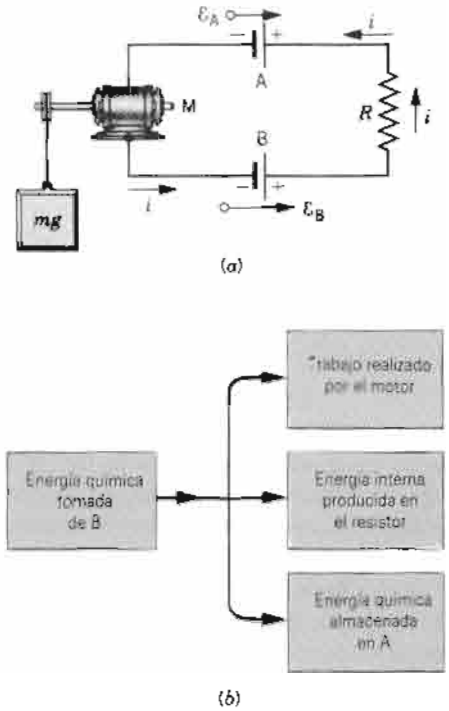


Figura 2 (*a*) $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$, de modo que la batería B determina la dirección de la corriente en este circuito de una sola malla. (*b*) En este circuito la energía se transfiere.

estados de equilibrio; su curso puede invertirse al realizar un cambio infinitesimal en el entorno del sistema (véase la Sec. 26-1). Por ejemplo, una batería puede cargarse o descargarse; un generador puede ser impulsado mecánicamente produciendo energía eléctrica o puede operarse a la inversa como un motor. Aquí, las transferencias (reversibles) de energía son

$$\text{eléctricas} \rightleftarrows \text{químicas}$$

y

$$\text{eléctricas} \rightleftarrows \text{mecánicas}$$

La energía que se transfiere de energía eléctrica a energía interna no es reversible. Podemos elevar fácilmente la temperatura de un conductor al suministrarle energía eléctrica, pero *no* es posible generar una corriente en una malla de cobre cerrada elevando su temperatura uniformemente. A causa de esta falta de reversibilidad, no asociamos a una fem con el efecto Joule, esto es, con transferencias de energía asociadas con el calentamiento de Joule en los conductores o en los elementos del circuito. ■

33-2 CÁLCULO DE LA CORRIENTE EN UN CIRCUITO CERRADO SIMPLE

Consideremos un circuito de una sola malla, como el de la figura 1*a*, que contenga una fuente de fem $\mathcal{E}$ y un resistor R. En un tiempo dt aparece en el resistor una cantidad de energía, dada por $i^2R\,dt$, en el resistor como energía interna (véase la Ec. 22 del capítulo 32). Durante este mismo tiempo se mueve por la fuente de la fem una carga dq ($= i\,dt$) y la fuente realiza un trabajo sobre esta carga (véase la Ec. 1) dado por

$$dW = \mathcal{E}\,dq = \mathcal{E}i\,dt.$$

Partiendo del principio de conservación de la energía, el trabajo efectuado por la fuente debe ser igual a la energía interna depositada en el resistor, o sea

$$\mathcal{E}i\,dt = i^2R\,dt.$$

Al despejar i, obtenemos

$$i = \mathcal{E}/R. \qquad (2)$$

Podemos también deducir la ecuación 2 al considerar que, si el potencial eléctrico ha de tener algún significado, un punto dado puede tener sólo un valor de potencial en cualquier tiempo dado. Si comenzamos en cualquier punto del circuito de la figura 1*a* y vamos alrededor del circuito en cualquier dirección, al sumar algebraicamente los cambios en el potencial que encontremos debemos hallar el mismo potencial cuando retornemos a nuestro punto de inicio. Resumimos esta regla como sigue:

> *La suma algebraica de los cambios en el potencial encontrado en un recorrido completo de cualquier circuito cerrado es cero.*

Este enunciado constituye la *segunda regla de Kirchhoff*; en aras de la brevedad la llamamos también *regla del circuito cerrado*. Esta regla es un modo particular de expresar la ley de la conservación de la energía para un portador de carga que recorra un circuito cerrado.

En la figura 1*a*, comencemos en un punto a, cuyo potencial es V_a, y recorramos el circuito en el sentido de las manecillas del reloj. (El valor numérico de V_a no es importante porque, como en la mayoría de las situaciones de un circuito eléctrico, aquí nos preocupan las *diferencias* de potencial.) Al pasar por el resistor, hay un cambio de $-iR$ en el potencial. El signo menos muestra que la parte superior del resistor tiene un potencial más alto que el de la parte inferior, lo cual debe ser así, porque los portadores de carga positiva se mueven por sí mismos desde un potencial alto a uno bajo. Según recorremos la batería de abajo arriba, existe un *incremento* de potencial igual a $+\mathcal{E}$, porque la batería realiza un trabajo (positivo) sobre los portadores de carga; es decir, los mueve desde un punto de potencial bajo a otro de potencial alto. Al realizar la suma algebraica de los cambios de potencial hasta el punto del potencial inicial V_a debe darnos el valor final idéntico a V_a, o sea

$$V_a - iR + \mathcal{E} = V_a.$$

Escribimos esto así:

$$-iR + \mathcal{E} = 0,$$

lo cual es independiente del valor de V_a y afirma explícitamente que la suma algebraica de los cambios del potencial en el recorrido completo del circuito es cero. Esta relación conduce directamente a la ecuación 2.

Estas dos maneras de determinar la corriente en circuitos de una sola malla, una basada en la conservación de la energía y la otra en el concepto de potencial, son completamente equivalentes, porque las diferencias de potencial están definidas en términos del trabajo y de la energía (véase la Sec. 30-3).

Con el fin de prepararnos para el estudio de circuitos más complejos, examinaremos las reglas para hallar las diferencias de potencial; estas reglas se deducen del análisis anterior. No se pretende que el estudiante las aprenda de memoria, sino que las entienda a fondo, de modo que le resulte trivial deducirlas en cada aplicación.

1. Si un resistor se recorre en la dirección de la corriente, el cambio en el potencial es $-iR$; en la dirección opuesta es $+iR$.

2. Si una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (la dirección de la flecha, o de la terminal negativa a la terminal positiva), el cambio en el potencial es $+\mathcal{E}$; en la dirección opuesta es $-\mathcal{E}$.

Por último, recuerde que siempre nos referiremos a la dirección de la corriente como la dirección del flujo de las cargas positivas, opuesto a la dirección real del flujo de los electrones.

Resistencia interna de una fuente de fem

La figura 3*a* muestra un circuito de una sola malla, el cual pone de relieve que todas las fuentes de fem tienen una *resistencia interna r* intrínseca. Esta resistencia no puede suprimirse (aunque por lo general nos gustaría hacerlo) porque es una parte inherente al sistema. En la figura se muestra la resistencia interna r y la fem por separado, si bien ocupan realmente la misma región del espacio.

Podemos aplicar las reglas del circuito cerrado comenzando en cualquier punto del circuito. Comenzando en b y yendo en el sentido de las manecillas del reloj, obtenemos

$$V_b + \mathcal{E} - ir - iR = V_b$$

o sea

$$+\mathcal{E} - ir - iR = 0.$$

Compárense estas ecuaciones con la figura 3*b*, la cual muestra gráficamente los cambios en el potencial. Al escribir estas ecuaciones, nótese que hemos recorrido r y R en la dirección de la corriente y $\mathcal{E}$ en la dirección de la fem. Se tendrá la misma ecuación si comenzamos en cualquier otro punto del circuito o si recorremos el circuito en dirección contraria al sentido de giro de las manecillas del reloj. Al despejar para i obtenemos

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \tag{3}$$

Adviértase que la resistencia interna *r reduce* la corriente que la fem puede suministrar al circuito externo.

33-3 DIFERENCIAS DE POTENCIAL

A menudo deseamos determinar la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito. En la figura 3*a*, por

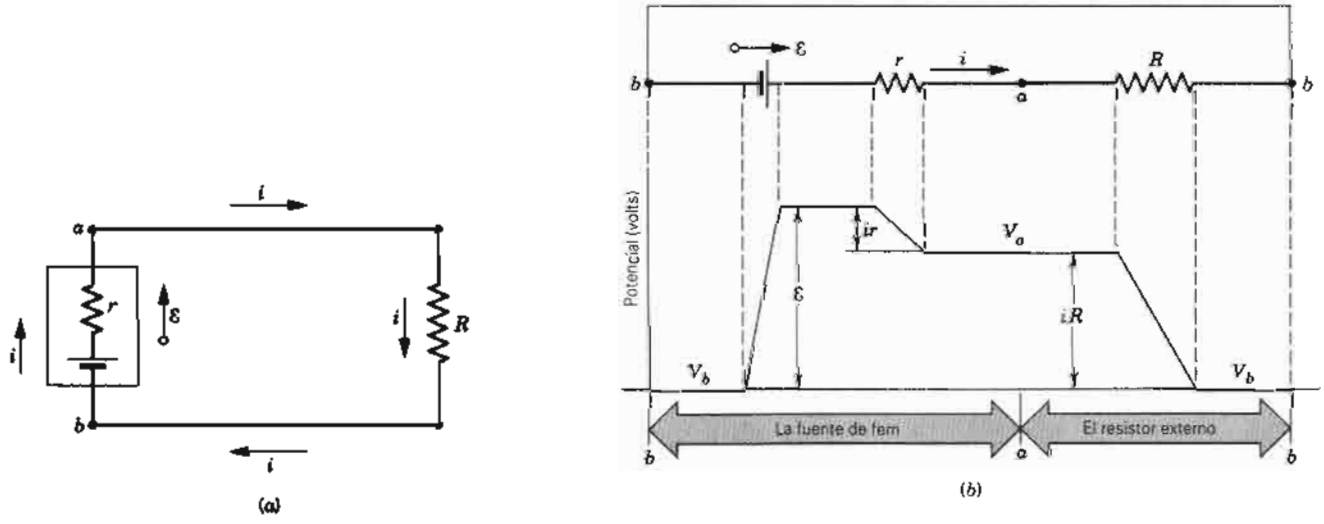


Figura 3 (*a*) Circuito de una sola malla, que contiene una fuente de fem con una resistencia interna r. (*b*) Se dibuja el circuito con las componentes a lo largo de una línea recta en la parte superior. En la parte inferior se muestran los cambios de potencial encontrados al recorrer el circuito en el sentido de las manecillas del reloj, comenzando en el punto b.

ejemplo, ¿cómo depende la diferencia de potencial V_{ab} ($= V_a - V_b$) entre los puntos b y a de los parámetros fijos del circuito $\mathcal{E}$, r y R? Para hallar sus relaciones, comencemos en el punto b y recorramos el circuito en el sentido contrario a las manecillas del reloj hasta el punto a, pasando por el resistor R. Si V_a y V_b son los potenciales en a y b respectivamente, tenemos

$$V_b + iR = V_a$$

porque experimentamos un aumento en el potencial al atravesar un resistor en dirección opuesta a la corriente. Reescribimos esta relación en términos de V_{ab}, diferencia de potencial entre a y b, como:

$$V_{ab} = V_a - V_b = +iR,$$

la cual nos dice que V_{ab} tiene la magnitud iR y que el punto a es más positivo que el punto b. Al combinar esta última ecuación con la ecuación 3 nos da

$$V_{ab} = \mathcal{E}\frac{R}{R+r}. \qquad (4)$$

En resumen, para hallar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un circuito, comenzamos en un punto, viajamos por el circuito hasta el otro y sumamos algebraicamente los cambios encontrados en el potencial. Esta suma algebraica es la diferencia de potencial entre los puntos. Este procedimiento es similar al de calcular la corriente en un circuito cerrado, excepto que aquí las diferencias de potencial están sumadas sólo en parte del circuito y no en todo el circuito.

Podemos recorrer *cualquier* trayecto por el circuito entre los dos puntos y se obtendrá el mismo valor de la diferencia de potencial porque la *independencia de la trayectoria* es una parte esencial de nuestro concepto de potencial. La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera puede tener sólo un valor; debemos obtener el mismo resultado para todas las trayectorias que unan a esos puntos. (Similarmente, si consideramos dos puntos en la ladera de una cima, la diferencia medida del potencial gravitatorio entre ellos es la misma independientemente de qué trayectoria se siga para ir de uno a otro.) En la figura 3*a*, calculemos de nuevo V_{ab}, usando una trayectoria que comience en a y vaya en sentido contrario a las manecillas del reloj por la fuente de fem. (Esto es equivalente a comenzar en a en la figura 3*b* y moverse hacia la izquierda al punto b.) Tenemos

$$V_a + ir - \mathcal{E} = V_b$$

o sea

$$V_{ab} = V_a - V_b = +\mathcal{E} - ir.$$

Combinar este resultado con la ecuación 3 conduce a la ecuación 4.

La cantidad V_{ab} es la diferencia de potencial entre las terminales de la batería. Vemos de la ecuación 4 que V_{ab} es igual a $\mathcal{E}$ únicamente si la batería no tiene resistencia interna ($r = 0$) o si el circuito externo está abierto ($R = \infty$).

Problema muestra 1 ¿Cuál es la corriente en el circuito de la figura 4*a*? Las fems y los resistores tienen los valores siguientes:

$$\mathcal{E}_1 = 2.1\ \text{V}, \qquad \mathcal{E}_2 = 4.4\ \text{V},$$
$$r_1 = 1.8\ \Omega, \qquad r_2 = 2.3\ \Omega, \qquad R = 5.5\ \Omega.$$

Solución Las dos fems están conectadas de modo que se oponen entre sí pero $\mathcal{E}_2$, por ser mayor que $\mathcal{E}_1$, controla la dirección de la corriente en el circuito, la cual es en sentido

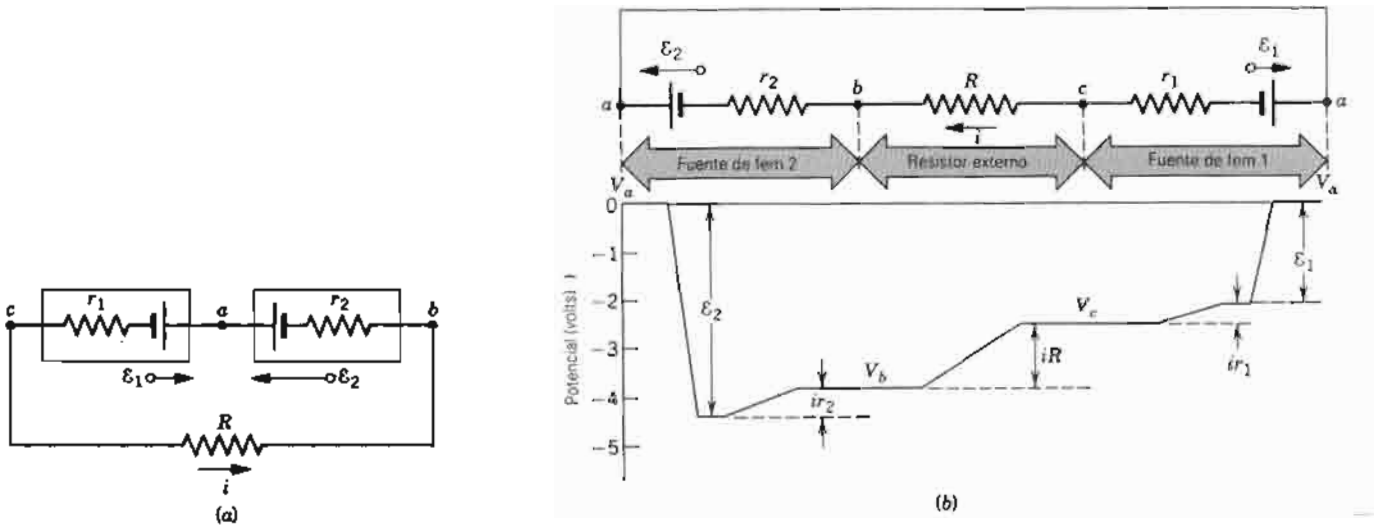


Figura 4 Problemas muestra 1 y 2. (*a*) Circuito de una sola malla que contiene dos fuentes de fem. (*b*) Los cambios en el potencial encontrados al recorrer el circuito en el sentido de las manecillas del reloj comenzando en el punto a.

contrario a las manecillas del reloj. La regla del circuito cerrado, aplicada en el sentido de las manecillas del reloj desde el punto a, da

$$-\mathcal{E}_2 + ir_2 + iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0.$$

Compruébese que la misma ecuación se obtiene si seguimos el sentido contrario de las manecillas del reloj que si comenzamos en algún otro punto distinto de a. Asimismo, compárese esta ecuación término por término con la figura 4*b*, la cual muestra los cambios de potencial gráficamente.

Al resolver para la corriente i, obtenemos

$$i = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2} = \frac{4.4\text{ V} - 2.1\text{ V}}{5.5\ \Omega + 1.8\ \Omega + 2.3\ \Omega} = 0.24\text{ A}.$$

No es necesario conocer de antemano la dirección de la corriente. Para demostrarlo, supongamos que la corriente en la figura 4*a*, circula en el sentido de las manecillas del reloj, esto es, opuesta a la dirección de la flecha de corriente de la figura 4*a*. La regla del circuito cerrado dará entonces (yendo en el sentido de las manecillas del reloj desde a)

$$-\mathcal{E}_2 - ir_2 - iR - ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0$$

o sea

$$i = -\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2}.$$

Al sustituir los valores numéricos se tiene $i = -0.24$ A para la corriente. El signo menos es una señal de que la corriente circula en la dirección opuesta a la que habíamos supuesto.

En circuitos más complejos que incluyan muchas mallas y ramas, a menudo es imposible conocer por anticipado las direcciones reales de las corrientes en todas las partes del circuito. Sin embargo, las direcciones de la corriente en cada rama pueden elegirse al azar. Si obtenemos una respuesta con un signo positivo para una corriente en particular, hemos elegido su dirección correctamente; si obtenemos el signo negativo, la corriente es opuesta a la dirección elegida. En cualquier caso, el valor numérico es correcto.

Problema muestra 2 (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b en la figura 4*a*? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y c en la figura 4*a*?

Solución (*a*) Esta diferencia de potencial es la diferencia de potencial terminal de la batería 2, la cual incluye a la fem $\mathcal{E}_2$ y a la resistencia interna r_2. Comencemos en el punto b y recorramos el circuito en sentido opuesto a las manecillas del reloj hasta el punto a, pasando directamente por la fuente de fem. Hallamos

$$V_b - ir_2 + \mathcal{E}_2 = V_a$$

o sea

$$V_a - V_b = -ir_2 + \mathcal{E}_2 = -(0.24\text{ A})(2.3\ \Omega) + 4.4\text{ V} = +3.8\text{ V}.$$

Vemos que a es más positivo que b y que la diferencia de potencial entre ellos (3.8 V) es *menor* que la fem (4.4 V); véase la figura 4*b*.

Podemos verificar este resultado comenzando en el punto b en la figura 4*a* y recorriendo el circuito en el sentido de las manecillas del reloj hasta el punto a. Para esta trayectoria diferente hallamos

$$V_b + iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a$$

o sea

$$V_a - V_b = iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 = (0.24\text{ A})(5.5\ \Omega + 1.8\ \Omega) + 2.1\text{ V} = +3.8\text{ V},$$

exactamente como antes. La diferencia de potencial entre dos puntos tiene el mismo valor para todas las trayectorias que conectan a esos puntos.

(*b*) Nótese que la diferencia de potencial entre a y c es la diferencia de potencial terminal de la batería 1, que consta de la fem $\mathcal{E}_1$ y la resistencia interna r_1. Comencemos en c y recorramos el circuito en el sentido de las manecillas del reloj hasta el punto a. Hallamos

$$V_c + ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a$$

o sea

$$V_a - V_c = ir_1 + \mathcal{E}_1 = (0.24\text{ A})(1.8\ \Omega) + 2.1\text{ V} = +2.5\text{ V}.$$

Esto nos dice que a está a un potencial más alto que c. La diferencia de potencial terminal (2.5 V) es en este caso *mayor* que la fem (2.1 V); véase la figura 4*b*. La carga está siendo forzada por $\mathcal{E}_1$ en una dirección opuesta a aquella en la cual enviaría carga si estuviese actuando por sí misma; si $\mathcal{E}_1$ fuese un acumulador estaría cargándose a costas de $\mathcal{E}_2$.

33-4 RESISTORES EN SERIE Y EN PARALELO

Al igual que en el caso de los capacitores (véase la Sec. 31-3), los resistores ocurren a menudo en los circuitos en varias combinaciones. Al analizar tales circuitos, es conveniente reemplazar la combinación de resistores con una sola *resistencia equivalente* R_{eq}, cuyo valor se elige de tal modo que la operación del circuito no cambie. Consideraremos dos modos en que los resistores pueden combinarse.

Resistores conectados en paralelo

Recordemos nuestra definición de combinación en paralelo de los elementos de un circuito de la sección 31-3; podemos recorrer la combinación cruzando *sólo uno* de los elementos; aparece la misma diferencia de potencial V entre cada elemento, y el flujo de carga se comparte entre los elementos.

La figura 5 muestra dos resistores conectados en paralelo. Buscamos la resistencia equivalente entre los puntos a y b. Supongamos que conectamos una batería (u otra fuente de fem) que mantenga una diferencia de potencial V entre los puntos a y b. La diferencia de potencial entre los extremos de cada resistor es V. La corriente en cada uno de los resistores es, según la ecuación 2,

$$i_1 = V/R_1 \qquad \text{e} \qquad i_2 = V/R_2. \tag{5}$$

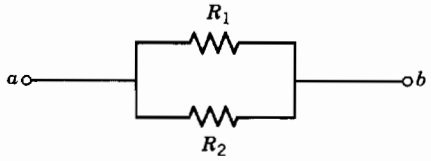


Figura 5 Dos resistores en paralelo.

De acuerdo con las propiedades de un circuito en paralelo, la corriente total i debe compartirse entre las ramas, de modo que

$$i = i_1 + i_2. \tag{6}$$

Si quisiéramos reemplazar la combinación en paralelo por una sola resistencia equivalente R_{eq}, debería fluir la misma cantidad de corriente i (porque el reemplazo no debe cambiar la operación del circuito). La corriente es, entonces,

$$i = V/R_{eq}. \tag{7}$$

Al sustituir las ecuaciones 5 y 7 en la ecuación 6, obtenemos

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

o sea

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{8}$$

Para hallar la resistencia equivalente de una combinación en paralelo de más de dos resistores, debemos primero encontrar la resistencia equivalente R_{12} de R_1 y R_2 usando la ecuación 8. Entonces, calculamos la resistencia equivalente de R_{12} y de la siguiente resistencia en paralelo, R_3, nuevamente usando la ecuación 8. Al continuar de esta manera, obtenemos una expresión general para la resistencia equivalente de una combinación en paralelo de cualquier número de resistores,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_n \frac{1}{R_n} \quad \text{(combinación en paralelo).} \tag{9}$$

Esto es, para hallar la resistencia equivalente de una combinación en paralelo, sumamos los recíprocos de las resistencias individuales y tomamos el recíproco de la suma resultante. Nótese que R_{eq} es siempre *menor* que la resistencia mínima en la combinación en paralelo —sumando más trayectorias para la corriente, obtenemos más corriente para la misma diferencia de potencial.

En el caso especial de dos resistores en paralelo, la ecuación 8 puede escribirse

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \tag{10}$$

o como el producto de las dos resistencias dividido entre su suma.

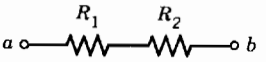


Figura 6 Dos resistores en serie.

Resistores conectados en serie

La figura 6 muestra dos resistores conectados en serie. Recordemos las propiedades de una combinación en serie de los elementos de un circuito (véase la Sec. 31-3): para viajar a través de la combinación, debemos recorrer *todos* los elementos en sucesión; una batería conectada entre la combinación da (en general) una caída de la diferencia de potencial en cada elemento diferente, y se mantiene la misma corriente en cada elemento.

Supongamos que una batería de diferencia de potencial V esté conectada entre los puntos a y b de la figura 6. Se crea una corriente i en la combinación y en cada uno de los resistores. Las diferencias de potencial en los resistores son

$$V_1 = iR_1 \qquad \text{y} \qquad V_2 = iR_2. \tag{11}$$

La suma de estas diferencias de potencial debe dar la diferencia de potencial entre los puntos a y b mantenida por la batería, o sea

$$V = V_1 + V_2. \tag{12}$$

Si reemplazamos la combinación por su resistencia equivalente R_{eq}, se establecerá la misma corriente i, de modo que

$$V = iR_{eq}. \tag{13}$$

Al combinar las ecuaciones 11, 12 y 13, obtenemos

$$iR_{eq} = iR_1 + iR_2,$$

o sea

$$R_{eq} = R_1 + R_2. \tag{14}$$

Extendiendo este resultado a una combinación en serie de cualquier número de resistores, obtenemos

$$R_{eq} = \sum_n R_n \quad \text{(combinación en serie).} \tag{15}$$

Esto es, para hallar la resistencia equivalente de una combinación en serie, hallamos la suma algebraica de los resistores individuales. Nótese que la resistencia equivalente de una combinación en serie es siempre *mayor* que la máxima resistencia en la serie —añadir más resistores en serie significa que se obtiene menos corriente para la misma diferencia de potencial.

Al comparar estos resultados con las ecuaciones 19 y 24 del capítulo 31 para las combinaciones de capacitores en serie y en paralelo, vemos que los resistores en paralelo se suman como los capacitores en serie, y que los resisto-

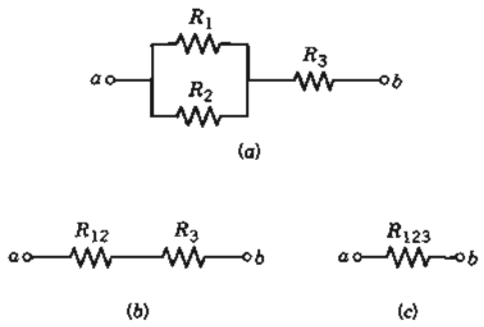


Figura 7 Problema muestra 3. (*a*) La combinación en paralelo de R_1 y R_2 está en serie con R_3. (*b*) La combinación en paralelo de R_1 y R_2 se ha reemplazado por su resistencia equivalente, R_{12}. (*c*) La combinación en serie de R_{12} y R_3 se ha reemplazado por su resistencia equivalente R_{123}.

res en serie se suman como los capacitores en paralelo. Esto tiene que ver con la manera diferente en que se definen las dos cantidades, siendo la resistencia = potencial/corriente y la capacitancia = carga/potencial.

En ocasiones, los resistores pueden aparecer en combinaciones que no están ni en paralelo ni en serie. En tal caso, la resistencia equivalente puede calcularse a veces descomponiendo el problema en unidades más pequeñas que puedan considerarse como conexiones en serie o en paralelo.

Problema muestra 3 (*a*) Halle la resistencia equivalente de la combinación mostrada en la figura 7*a*, usando los valores $R_1 = 4.6\ \Omega$, $R_2 = 3.5\ \Omega$, y $R_3 = 2.8\ \Omega$. (*b*) ¿Cuál es el valor de la corriente en R cuando se conecta una batería de 12.0 V entre los puntos *a* y *b*?

Solución (*a*) Debemos primero hallar la resistencia equivalente R_{12} de la combinación en paralelo de R_1 y R_2. Usando la ecuación 10 obtenemos

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(4.6\ \Omega)(3.5\ \Omega)}{4.6\ \Omega + 3.5\ \Omega} = 2.0\ \Omega.$$

R_{12} y R_3 están en serie, como lo muestra la figura 7*b*. Usando la ecuación 14, podemos hallar la resistencia equivalente R_{123} de esta combinación en serie, que es la resistencia equivalente de toda la combinación original:

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 2.0\ \Omega + 2.8\ \Omega = 4.8\ \Omega.$$

(*b*) Con una batería de 12.0 V conectada entre los puntos *a* y *b* en la figura 7*c*, la corriente resultante es

$$i = \frac{V}{R_{123}} = \frac{12.0\ \text{V}}{4.8\ \Omega} = 2.5\ \text{A}.$$

Con esta corriente en la combinación en serie de la figura 7*b*, la diferencia de potencial a través de R_{12} es

$$V_{12} = iR_{12} = (2.5\ \text{A})(2.0\ \Omega) = 5.0\ \text{V}.$$

En una combinación en paralelo, aparece la misma diferencia de potencial entre cada elemento (y a través de su combinación). La diferencia de potencial en R_1 (y de R_2) es, por lo tanto, de 5.0 V, y la corriente en R_1 es

$$i_1 = \frac{V_{12}}{R_1} = \frac{5.0\ \text{V}}{4.6\ \Omega} = 1.1\ \text{A}.$$

Problema muestra 4 La figura 8*a* muestra un cubo hecho de 12 resistores, cada uno de resistencia R. Determine R_{12}, la resistencia equivalente en una arista del cubo.

Solución Si bien este problema se muestra en principio sin esperanza de poderlo descomponer en subunidades en serie y en paralelo, la simetría de las conexiones da indicios del modo de hacerlo. La clave es darse cuenta de que, basados sólo en consideraciones de simetría, los puntos 3 y 6 deben estar al mismo potencial. También debe ocurrir lo mismo con los puntos 4 y 5.

Si dos puntos de un circuito tienen el mismo potencial, las corrientes en el circuito no cambian al conectar estos puntos con un conductor. No existe corriente en éste porque no existe una diferencia de potencial entre sus extremos. Los puntos 3 y 6 pueden, por tanto, conectarse por un alambre y pueden estar conectados similarmente los puntos 4 y 5.

Esto nos permite trazar de nuevo al cubo como en la figura 8*b*. Desde este punto, es simplemente cuestión de reducir el circuito entre las terminales de entrada a un solo resistor, usando las reglas para resistores en serie y en paralelo. En la figura 8*c*, comenzamos reemplazando cinco combinaciones de dos resistores en paralelo por sus equivalentes, cada uno de resistencia $\frac{1}{2}R$.

En la figura 8*d*, hemos sumado los tres resistores que están en serie en la malla en la parte derecha, obteniendo una sola resistencia equivalente de $2R$. En la figura 8*e*, hemos reemplazado a los dos resistores que forman ahora la malla en la parte derecha por un solo resistor de $\frac{2}{5}R$ equivalente. Al hacerlo, es útil recordar que la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo es igual a su producto dividido entre su suma (véase la Ec. 10).

En la figura 8*f*, hemos sumado los tres resistores en serie de la figura 8*e*, obteniendo $\frac{7}{5}R$, y en la figura 8*g* hemos reducido esta combinación en paralelo a la resistencia equivalente única que buscamos, es decir,

$$R_{12} = \tfrac{7}{12}R.$$

Se pueden usar también estos métodos para determinar R_{13}, la resistencia equivalente del cubo a través de la diagonal de una cara, y R_{17}, la resistencia equivalente a través de la diagonal entre esquinas opuestas del cubo (véase el problema 29).

33-5 CIRCUITOS DE MALLAS MÚLTIPLES

La figura 9 muestra un circuito que contiene más de una malla. Para simplificar, hemos despreciado las resistencias internas de las baterías. Cuando analizamos a tales circuitos es útil considerar sus *nodos* y *ramas*. En un circuito de mallas múltiples como el de la figura 9, el nodo es un punto del circuito en el que se reúnen tres o más

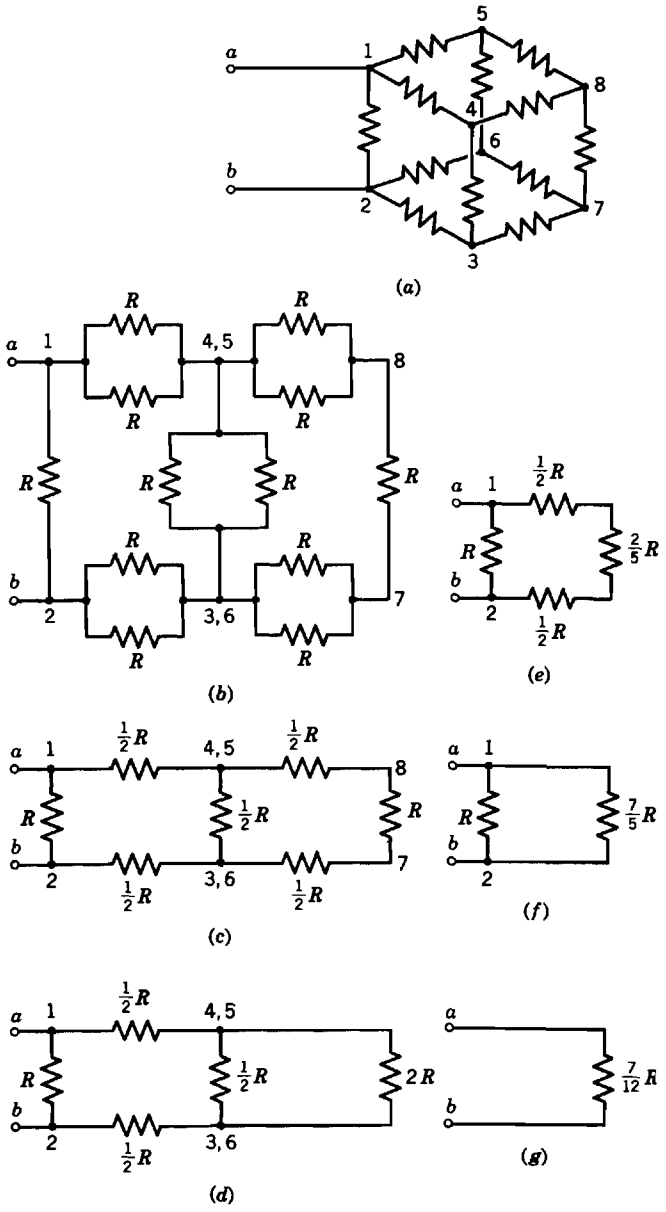


Figura 8 Problema muestra 4. (*a*) Un cubo formado por 12 resistores idénticos. (*b*)-(*g*) La reducción paso por paso del cubo a una sola resistencia equivalente.

segmentos de alambre. Existen dos nodos en el circuito de la figura 9, en *b* y *d*. (Los puntos *a* y *c* en la figura 9 *no* son nodos, porque sólo se reúnen dos segmentos de alambre en esos puntos.)

Una rama es cualquier trayectoria del circuito que comienza en un nodo y continúa a lo largo del circuito hasta el siguiente nodo. Existen tres ramas en el circuito de la figura 9; esto es, existen tres trayectorias que conectan a los nodos *b* y *d*: la rama izquierda *bad*, la rama derecha *bcd* y la rama central *bd*.

En circuitos de una sola malla, como los de las figuras 3 y 4, existe únicamente una corriente por determinar. Sin

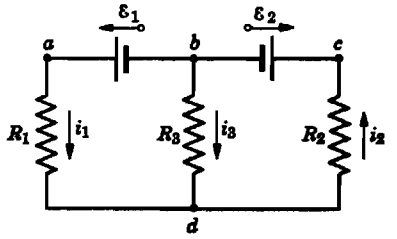


Figura 9 Circuito de dos mallas. Dadas las fems y las resistencias, queremos determinar las tres corrientes.

embargo, en circuitos de mallas múltiples cada rama tiene su propia corriente individual, la cual debe determinarse mediante el análisis del circuito. En el circuito de la figura 9, las tres corrientes (desconocidas) están representadas por i_1 (para la rama *bad*), i_2 (para la rama *bcd*) e i_3 (para la rama *bd*). Las direcciones de las corrientes se han elegido al azar. Si uno lo observa cuidadosamente, notará que i_3 debe apuntar en una dirección opuesta a la que se ha mostrado. La hemos trazado deliberadamente en el sentido equivocado para demostrar cómo los procedimientos matemáticos formales corrigen siempre tales conjeturas incorrectas.

Nótese que no podemos analizar al circuito de la figura 9 en términos de conjuntos de resistores en serie o en paralelo. Si revisamos los criterios que definieron a las combinaciones en serie y en paralelo, llegaremos a la conclusión de que no es posible considerar que alguna combinación de R_1, R_2 y R_3 está en serie o en paralelo.

Las tres corrientes i_1, i_2, e i_3 transportan cargas ya sea hacia el nodo *d* o alejándose de él. La carga no se acumula en el nodo *d* porque el circuito está en una condición de estado estacionario; la carga debe ser retirada del nodo por las corrientes al mismo ritmo que ha sido traída al nodo. En el nodo *d* de la figura 9, la cantidad total a la que la carga entra al nodo está dada por $i_1 + i_3$, y la cantidad a la cual sale la carga está dada por i_2. Al igualar las corrientes que entran y salen del nodo, obtenemos

$$i_1 + i_3 = i_2. \tag{16}$$

Esta ecuación sugiere un principio general para la solución de circuitos de mallas múltiples:

> *En cualquier nodo, la suma de las corrientes que salen del nodo (aquéllas con las flechas apuntando hacia afuera del nodo) es igual a la suma de las corrientes que entran al nodo (aquélllas con las flechas apuntando hacia el nodo).*

Esta *regla de los nodos*, conocida también como la *primera regla de Kirchhoff*, es simplemente un enunciado de la conservación de la energía. Nuestras herramientas básicas para analizar los circuitos son (1) la conservación de la energía (la regla del circuito cerrado —véase la

Sección 33-2) y (2) la conservación de la carga (la regla de los nodos).

En el circuito de la figura 9, la regla del nodo da únicamente una relación entre las tres incógnitas. Aplicando la regla al nodo b nos conduce exactamente a la misma ecuación, como puede verificarse fácilmente. A fin de resolver para las tres incógnitas, necesitamos dos ecuaciones independientes más, que se pueden hallar a partir de la regla del circuito cerrado (una sola malla).

En los circuitos de una sola malla existe sólo un conductor alrededor del cual aplicar la regla del circuito cerrado y la corriente es la misma en todas las partes de este circuito. En los circuitos de mallas múltiples existe más de un anillo y la corriente *no* es, en general, la misma en todas las partes de cualquier anillo dado.

Si recorremos la malla izquierda de la figura 9 en sentido contrario a las manecillas del reloj, comenzando y terminando en el punto b, la regla del circuito cerrado da

$$\mathcal{E}_1 - i_1R_1 + i_3R_3 = 0. \tag{17}$$

La malla derecha da (una vez más yendo en sentido contrario a las manecillas del reloj a partir de b)

$$-i_3R_3 - i_2R_2 - \mathcal{E}_2 = 0. \tag{18}$$

Estas dos ecuaciones, junto con la relación encontrada primero con la regla del nodo (Ec. 16), son las tres ecuaciones simultáneas necesarias para resolver para las i_1, i_2 e i_3 incógnitas. Al resolver (usted deberá proporcionar los pasos faltantes), hallamos

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) - \mathcal{E}_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}, \tag{19}$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_1R_3 - \mathcal{E}_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}, \tag{20}$$

$$i_3 = \frac{-\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}. \tag{21}$$

La ecuación 21 muestra que sin importar qué valores numéricos se den a las fems y a las resistencias, la corriente i_3 siempre tiene un valor negativo. Esto significa que siempre apunta hacia arriba en la figura 9 en lugar de hacia abajo, como lo supusimos. Las corrientes i_1 e i_2 deben estar en cualquier dirección, dependiendo de los valores numéricos de las fems y las resistencias.

Para comprobar estos resultados, verifiquemos que las ecuaciones 19 a 21 se reducen a conclusiones correctas en casos especiales. Para $R_3 = \infty$, por ejemplo, hallamos

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{e} \qquad i_3 = 0.$$

¿A qué se reducen estas ecuaciones cuando $R_2 = \infty$?

El teorema del circuito cerrado puede aplicarse a la malla grande que consta de todo el circuito *abcda* de la figura 9. Este hecho podría sugerir que existen más ecuaciones de las que necesitamos, ya que existen sólo tres incógnitas y tenemos ya tres ecuaciones escritas en tales términos. Sin embargo, la regla del circuito cerrado da, para este circuito,

$$-i_1R_1 - i_2R_2 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 = 0,$$

lo cual no es más que la suma de las ecuaciones 17 y 18. La malla grande no produce otra ecuación *independiente*. En los circuitos de mallas múltiples, el número de ecuaciones independientes debe ser igual al número de ramas (o al número de corrientes diferentes). El número de ecuaciones *del nodo* independientes es de una menos que el número de nodos (una ecuación en el caso del circuito de la figura 9, que tiene dos nodos). Las ecuaciones restantes deben ser ecuaciones *del circuito cerrado*.

Problema muestra 5 La figura 10 muestra un circuito cuyos elementos tienen los valores siguientes:

$$\mathcal{E}_1 = 2.1\ \text{V}, \qquad \mathcal{E}_2 = 6.3\ \text{V},$$
$$R_1 = 1.7\ \Omega, \qquad R_2 = 3.5\ \Omega.$$

Encuentre las corrientes en las tres ramas del circuito.

Solución Tracemos y denotemos las corrientes como se muestra en la figura, eligiendo arbitrariamente las direcciones de la corriente. Si se aplica la regla del nodo en a, hallamos

$$i_1 + i_2 = i_3. \tag{22}$$

Comencemos ahora en el punto a y recorramos la malla del lado izquierdo en dirección contraria a las manecillas del reloj. Hallamos

$$-i_1R_1 - \mathcal{E}_1 - i_1R_1 + \mathcal{E}_2 + i_2R_2 = 0$$

o sea

$$2i_1R_1 - i_2R_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1. \tag{23}$$

Si recorremos la malla del lado derecho en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj a partir del punto a, encontramos

$$+i_3R_1 - \mathcal{E}_2 + i_3R_1 + \mathcal{E}_2 + i_2R_2 = 0$$

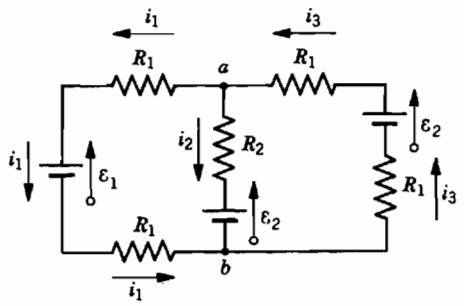


Figura 10 Problemas muestra 5 y 6. Un circuito de dos mallas.

o sea

$$i_2R_2 + 2i_3R_1 = 0. \qquad (24)$$

Las ecuaciones 22, 23, y 24 son tres ecuaciones simultáneas independientes en donde intervienen las tres variables i_1, i_2 e i_3. Podemos resolver estas ecuaciones para estas variables, obteniendo, después de un poco de álgebra,

$$i_1 = \frac{(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)(2R_1 + R_2)}{4R_1(R_1 + R_2)}$$
$$= \frac{(6.3\text{ V} - 2.1\text{ V})(2 \times 1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)}{(4)(1.7\ \Omega)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)} = 0.82\text{ A},$$

$$i_2 = -\frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{2(R_1 + R_2)}$$
$$= -\frac{6.3\text{ V} - 2.1\text{ V}}{(2)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)} = -0.40\text{ A},$$

$$i_3 = \frac{(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)R_2}{4R_1(R_1 + R_2)}$$
$$= \frac{(6.3\text{ V} - 2.1\text{ V})(3.5\ \Omega)}{(4)(1.7\ \Omega)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)} = 0.42\text{ A}.$$

Los signos de las corrientes nos dicen que hemos supuesto correctamente con respecto a las direcciones de i_1 e i_3, pero que nos hemos equivocado con respecto a la dirección de i_2; debería de apuntar hacia arriba, y no hacia abajo, en la rama central del circuito de la figura 10.

Nótese que, habiendo descubierto que la corriente i_2 está apuntando en la dirección equivocada, no necesitamos cambiarla en la figura 10. Podemos dejarla en la figura como está, siempre que sustituyamos i_2 por un valor numérico negativo en todos los cálculos posteriores en que intervenga esa corriente.

Problema muestra 6 ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b en el circuito de la figura 10?

Solución Para la diferencia de potencial entre a y b, tenemos, recorriendo la rama ab en la figura 10 y suponiendo las direcciones mostradas de la corriente,

$$V_a - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = V_b,$$

o sea

$$V_a - V_b = \mathscr{E}_2 + i_2R_2$$
$$= 6.3\text{ V} + (-0.40\text{ A})(3.5\ \Omega) = +4.9\text{ V}.$$

El signo positivo nos dice que a es más positivo en potencial que b. Deberíamos esperar este resultado al observar el diagrama del circuito, porque las tres baterías tienen sus terminales positivas en el lado de arriba de la figura.

33-6 INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Varios instrumentos de medición eléctrica comprenden circuitos que pueden analizarse por los métodos de este capítulo. Veamos tres de ellos.

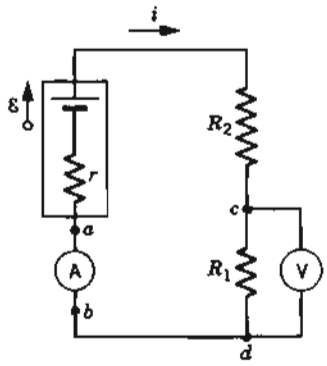


Figura 11 Circuito de una sola malla que ilustra la conexión de un amperímetro A, con el cual se mide la corriente i, y un voltímetro V, con el cual se mide la diferencia de potencial entre los puntos c y d.

El amperímetro

El instrumento usado para medir las corrientes se llama *amperímetro*. Para medir la corriente en un conductor, usualmente tenemos que abrirlo o cortarlo e insertar el amperímetro de modo que la corriente a medir pase por el medidor; véase la figura 11.

Es esencial que la resistencia R_A del amperímetro sea muy pequeña (cero, idealmente) en comparación con las demás resistencias del circuito. De otra manera, la simple presencia del medidor cambiaría la corriente que se desea medir. En el circuito de una sola malla de la figura 11, la condición requerida, suponiendo que no estuviese conectado el voltímetro, es

$$R_A \ll r + R_1 + R_2.$$

El amperímetro puede también emplearse como *ohmímetro* para medir una resistencia desconocida; véase el problema 40.

El voltímetro

Al instrumento que sirve para medir las diferencias de potencial se le llama *voltímetro*. Para hallar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en el circuito, se conectan las terminales del voltímetro entre dichos puntos, sin abrir el circuito; véase la figura 11.

Es esencial que la resistencia R_V de un voltímetro sea muy grande (infinita, idealmente) comparada con cualquier elemento del circuito al cual esté conectado el voltímetro. De otra manera, pasarían corrientes significativas por el medidor, cambiando la corriente en el elemento del circuito en paralelo con el medidor y, por consiguiente, cambiando también la diferencia de potencial que va a medirse. En la figura 11, la condición necesaria es que

$$R_V \gg R_1.$$

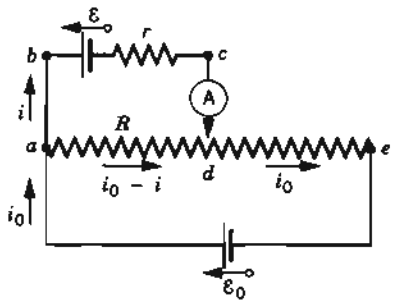


Figura 12 Los elementos básicos de un potenciómetro empleado para comparar las fem.

A menudo se empaca una sola unidad de modo que, mediante un interruptor externo, pueda servir ya sea como amperímetro, como voltímetro o como ohmímetro. Esta versátil unidad recibe el nombre de *multímetro*. Las lecturas que proporciona suelen indicarse mediante una aguja que se mueve sobre una escala o mediante una pantalla digital.

El potenciómetro

Éste es un aparato para medir una fem $\mathcal{E}_x$ desconocida comparándola con una fem $\mathcal{E}_s$ estándar conocida. La figura 12 muestra sus elementos básicos. El resistor que se extiende desde *a* hasta *e* es un resistor de precisión cuidadosamente fabricado con un contacto deslizante que se muestra con posición en *d*. La resistencia *R* en la figura es la resistencia entre los puntos *a* y *d*.

Cuando se usa el instrumento, $\mathcal{E}_s$ se coloca primero en la posición $\mathcal{E}$, y el contacto deslizante se ajusta hasta que la corriente *i* sea cero, lo cual se percibe en el sensible amperímetro A. Se dice entonces que el potenciómetro está *balanceado*, siendo R_s el valor de *R* en equilibrio. En esta condición de balance tenemos, considerando la malla *abcda*,

$$\mathcal{E}_s = i_0 R_s. \tag{25}$$

Ya que $i = 0$ en la rama *abcd*, la resistencia interna *r* de la fuente patrón de fem (o del amperímetro) no interviene.

Ahora se repite el proceso con $\mathcal{E}_x$ sustituida por $\mathcal{E}_s$, siendo balanceado el potenciómetro una vez más. La corriente i_0 permanece sin cambio (porque $i = 0$) y la nueva condición de balance es

$$\mathcal{E}_x = i_0 R_x. \tag{26}$$

De las ecuaciones 25 y 26 tenemos, entonces,

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_s \frac{R_x}{R_s}. \tag{27}$$

La fem desconocida puede hallarse en términos de la fem conocida llevando a cabo dos ajustes del resistor de precisión. Nótese que este resultado es independiente del valor de $\mathcal{E}_0$.

En el pasado, el potenciómetro hacía las veces de patrón secundario del voltaje, permitiendo al investigador determinar en cualquier laboratorio una fem desconocida comparándola con la de una *celda estándar* (un aparato electroquímico similar a una batería) calibrada cuidadosamente. Hoy día, el volt se define en términos de un estándar cuántico más preciso que es relativamente fácil de reproducir en el laboratorio: las etapas cuantizadas del voltaje de un sandwich que consta de dos superconductores separados por una delgada capa aislante, llamada *conexión Josephson*.*

El potenciómetro es el ejemplo de un *indicador de nulos*, el cual permite una medición de precisión mediante el ajuste del valor de un elemento del circuito hasta que en el medidor se lea cero. En este caso, una lectura de cero nos permite medir $\mathcal{E}_x$ cuando no pasa corriente por él y así nuestra medición es independiente de la resistencia interna *r* de la fuente de fem. Otro instrumento de nulos es el puente de Wheatstone; véase el problema 46.

33-7 CIRCUITOS *RC*

Las secciones precedentes trataron sobre circuitos que contienen sólo resistores, en los que las corrientes no variaban con el tiempo. Aquí introducimos al capacitor como un elemento del circuito, lo cual nos conduce al estudio de las corrientes variables en el tiempo.

Supongamos que cargamos al capacitor en la figura 13 al poner el interruptor S en la posición *a*. (Más adelante consideraremos la conexión en la posición *b*.) ¿Qué corriente se crea en el circuito cerrado resultante? Apliquemos los principios de la conservación de la energía.

En el tiempo *dt* una carga *dq* (= *i dt*) pasa a través de cualquier sección transversal del circuito. El trabajo (= $\mathcal{E}\,dq$; véase la Ec. 1) efectuado por la fuente de fem debe ser igual a la energía interna (= $i^2R\,dt$) producida en el resistor durante el tiempo *dt*, más el incremento *dU* en la cantidad de energía *U* (= $q^2/2C$; véase la Ec. 26 del capítulo 31) que está almacenada en el capacitor. La conservación de la energía da

$$\mathcal{E}\,dq = i^2R\,dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

o sea

$$\mathcal{E}\,dq = i^2R\,dt + \frac{q}{C}\,dq.$$

* Brian Josephson, físico inglés, era un estudiante de posgrado de 22 años de edad cuando descubrió las propiedades de esta conexión, por lo que se le concedió el Premio Nobel de física en 1973.

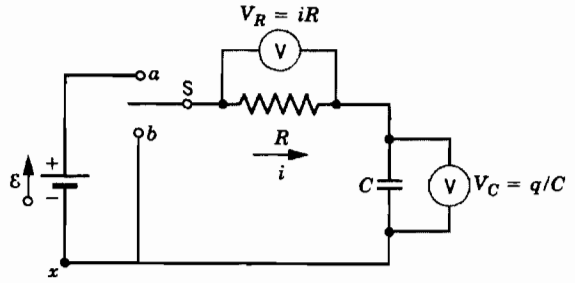


Figura 13 Cuando el interruptor S se conecta con *a*, el capacitor *C* se carga por la fem $\mathcal{E}$ mediante el resistor *R*. Cuando el capacitor está cargado, el interruptor se cambia a *b* y el capacitor se descarga mediante *R*. Un voltímetro conectado entre los extremos de *R* mide la diferencia de potencial V_R (= *iR*) en el resistor y entonces determina la corriente *i*. Un voltímetro conectado entre los extremos del capacitor mide la diferencia de potencial V_C (= *q*/*C*) en el capacitor y así determina la carga *q*.

Al dividir entre *dt* se tiene

$$\mathcal{E}\frac{dq}{dt} = i^2R + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}.$$

Puesto que *q* es la carga en la placa superior, la *i* positiva significa *dq*/*dt* positiva. Con $i = dq/dt$, esta ecuación se convierte en

$$\mathcal{E} = iR + \frac{q}{C}. \tag{28}$$

La ecuación 28 se deduce también del teorema del circuito cerrado, como debe ser, puesto que el teorema del circuito cerrado se obtuvo a partir del principio de conservación de la energía. Comenzando desde el punto *x* y rodeando al circuito en el sentido de las manecillas del reloj, experimentamos un aumento en potencial al pasar por la fuente de fem y una disminución en potencial al pasar por el resistor y el capacitor, o sea

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0,$$

la cual es idéntica a la ecuación 28.

Para resolver la ecuación 28, sustituimos primero *i* por *dq*/*dt*, lo cual da

$$\mathcal{E} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}. \tag{29}$$

Podemos reescribir la ecuación 29 así:

$$\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{RC}. \tag{30}$$

Si se integra este resultado para el caso en que $q = 0$ en $t = 0$, obtenemos (después de despejar *q*),

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}). \tag{31}$$

Podemos comprobar que esta función *q*(*t*) es realmente una solución de la ecuación 29 sustituyéndola en dicha ecuación y viendo si se obtiene una identidad. Al derivar la ecuación 31 con respecto al tiempo da

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}. \tag{32}$$

Sustituyendo *q* (Ec. 31) y *dq*/*dt* (Ec. 32) en la ecuación 29 se tiene una identidad, lo cual le recomendamos al estudiante que verifique. La ecuación 31 es, por lo tanto, una solución de la ecuación 29.

En el laboratorio podemos determinar *i* y *q* convenientemente midiendo cantidades que sean proporcionales a ellas, por ejemplo, la diferencia de potencial V_R (= *iR*) en el resistor y la diferencia de potencial V_C (= *q*/*C*) en el capacitor. Tales mediciones pueden llevarse a cabo sin dificultad, como se ilustró en la figura 13, conectando voltímetros (o las puntas de un osciloscopio) en el resistor y el capacitor. La figura 14 muestra las gráficas resultantes de V_R y V_C. Nótese lo siguiente: (1) Cuando $t = 0$, $V_R = \mathcal{E}$ (toda la diferencia de potencial aparece en los extremos de *R*), y $V_C = 0$ (el capacitor no está cargado). (2) Cuando $t \to \infty$, $V_C \to \mathcal{E}$ (el capacitor se carga por completo), y $V_R \to 0$ (la corriente cesa). (3) Para todos los tiempos, $V_R + V_C = \mathcal{E}$, como lo requiere la ecuación 29.

En las ecuaciones 31 y 32, la cantidad *RC* tiene las dimensiones de tiempo (porque el exponente debe ser adimensional) y se llama *constante capacitiva de tiempo* τ_C del circuito:

$$\tau_C = RC. \tag{33}$$

Es el tiempo en que ha aumentado la carga en el capacitor en un factor de $1 - e^{-1}$ (≈ 63%) de su valor final $C\mathcal{E}$. Para demostrar esto, ponemos $t = \tau_C = RC$ en la ecuación 31 para obtener

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0.63C\mathcal{E}.$$

La figura 14*a* muestra que si en un circuito se incluye una resistencia junto con un capacitor que está siendo cargado, el aumento de carga en el capacitor hacia su valor límite se *retrasa* durante un tiempo caracterizado por la constante de tiempo *RC*. Sin un resistor presente ($RC = 0$), la carga llegaría inmediatamente hasta su valor límite. Si bien hemos demostrado que este retraso de tiempo se deduce de la aplicación del teorema del circuito cerrado a los circuitos *RC*, es importante lograr una comprensión física de las causas del retraso.

Cuando, en la figura 13, el interruptor S se cierra en *a*, la carga inicial en el capacitor es cero, de modo que la diferencia de potencial inicial en el capacitor es cero. En este momento, la ecuación 28 muestra que $\mathcal{E} = iR$, y así $i = \mathcal{E}/R$ en $t = 0$. A causa de esta corriente, la carga fluye hacia el capacitor y la diferencia de potencial en el capacitor aumenta con el tiempo. La ecuación 28 muestra ahora que, a causa de que la fem $\mathcal{E}$ es una constante,

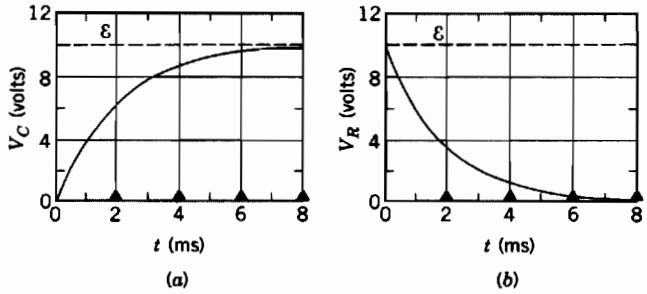


Figura 14 (*a*) Como se indica por la diferencia de potencial V_C, la carga del capacitor aumenta con el tiempo durante el proceso de carga y V_C tiende al valor de la fem $\mathcal{E}$. El tiempo se mide en el momento en que el interruptor se conecta en *a* para $t = 0$. (*b*) La diferencia de potencial en el resistor disminuye con el tiempo, tendiendo a 0 en tiempos posteriores porque la corriente cae a cero una vez que el capacitor está totalmente cargado. Las curvas se dibujaron para $\mathcal{E} = 10$ V, $R = 2000\ \Omega$, y $C = 1\ \mu$F. Los triángulos negros representan las constantes de tiempo sucesivas.

cualquier aumento en la diferencia de potencial en el capacitor debe balancearse por una *disminución* correspondiente en la diferencia de potencial en el resistor, con una disminución similar en la corriente. Esta disminución en la corriente significa que la carga en el capacitor aumenta más lentamente. Este proceso continúa hasta que la corriente disminuye hasta cero, en cuyo momento no existe una caída de potencial en el resistor. Toda la diferencia de potencial de la fem aparece ahora en el capacitor, el cual se carga totalmente ($q = C\mathcal{E}$). A no ser que se hagan cambios en el circuito, no existe un flujo de carga posterior. Se recomienda al estudiante revisar las deducciones de las ecuaciones 31 y 32 y estudiar la figura 14 sin perder de vista los argumentos cualitativos de este párrafo.

Problema muestra 7 Un resistor R (= 6.2 M Ω) y un capacitor C (= 2.4 μF) están conectados en serie, y a través de esta combinación se conecta una batería de 12 V de resistencia interna insignificante. (*a*) ¿Cuál es la constante capacitiva de tiempo de este circuito? (*b*) ¿En qué tiempo, después de haber conectado la batería, la diferencia de potencial en el capacitor es igual a 5.6 V?

Solución (*a*) De la ecuación 33,

$$\tau_C = RC = (6.2 \times 10^6\ \Omega)(2.4 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 15\ \text{s}.$$

(*b*) La diferencia de potencial en el capacitor es de $V_C = q/C$, lo cual, de acuerdo con la ecuación 31, puede escribirse

$$V_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}).$$

Al despejar t, obtenemos (usando $\tau_C = RC$)

$$t = -\tau_C \ln\left(1 - \frac{V_C}{\mathcal{E}}\right)$$
$$= -(15\ \text{s}) \ln\left(1 - \frac{5.6\ \text{V}}{12\ \text{V}}\right) = 9.4\ \text{s}.$$

Como vemos antes, después de un tiempo τ_C (= 15 s), la diferencia de potencial en el capacitor es de $0.63\mathcal{E} = 7.6$ V. Resulta razonable que, en el tiempo más breve de 9.4 s, la diferencia de potencial en el capacitor alcance el menor valor de 5.6 V.

Descarga de un capacitor

Supongamos ahora que el interruptor S en la Figura 13 ha estado en la posición *a* durante un tiempo que es mucho mayor que RC. Para propósitos prácticos, el capacitor está totalmente cargado, y no fluye ninguna carga. El interruptor S se pone entonces en la posición *b*. ¿Cómo varían con el tiempo la carga del capacitor y la corriente?

Con el interruptor S cerrado en *b*, el capacitor se descarga por el resistor. No existe una fem en el circuito y la ecuación 28 para el circuito, siendo $\mathcal{E} = 0$, se obtiene simplemente

$$iR + \frac{q}{C} = 0. \tag{34}$$

Si $i = dq/dt$ podemos escribir la ecuación del circuito (compárese con la Ec. 29)

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{35}$$

La solución es, como puede obtenerse fácilmente por integración (después de escribir $dq/q = -dt/RC$) y verificarse por sustitución,

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C}, \tag{36}$$

siendo q_0 la carga inicial en el capacitor ($= \mathcal{E}C$, en nuestro caso). La constante capacitiva de tiempo τ_C ($= RC$) aparece en esta expresión tanto para un capacitor cuando descarga como para cuando se carga (Ec. 31). Vemos que en el tiempo $t = \tau_C = RC$, la carga del capacitor se reduce a $q_0 e^{-1}$, lo cual es de alrededor del 37% de la carga inicial q_0.

Al derivar la ecuación 36, hallamos la corriente durante la descarga,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau_C}. \tag{37}$$

El signo negativo demuestra que la corriente fluye en dirección opuesta a la mostrada en la figura 13. Esto es como debería ser, puesto que el capacitor se está descargando en lugar de cargarse. Puesto que $q_0 = C\mathcal{E}$, podemos escribir la ecuación 37 como

$$i = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_C}. \tag{38}$$

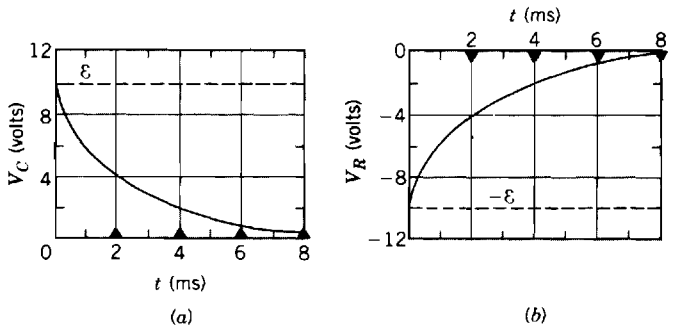


Figura 15 (*a*) Después de que el capacitor se ha cargado completamente, el interruptor en la figura 13 se mueve de *a* a *b*, lo cual determina un nuevo $t = 0$. La diferencia de potencial en el capacitor disminuye exponencialmente hasta cero cuando el capacitor se descarga. (*b*) Cuando el interruptor se conecta en la posición *b*, la diferencia de potencial en el resistor es negativa comparada con su valor durante el proceso de carga mostrado en la figura 14. Cuando el capacitor se descarga, la magnitud de la corriente disminuye exponencialmente a cero, y la caída de potencial en el resistor tiende también a cero.

La corriente inicial, determinada para $t = 0$ en la ecuación 38, es $-\mathcal{E}/R$. Esto es razonable porque la diferencia de potencial inicial en el resistor es de $\mathcal{E}$.

Las diferencias de potencial en R y C, las cuales son proporcionales a i y q respectivamente, pueden medirse de nuevo como se indicó en la figura 13. En la figura 15 se muestran los resultados típicos. Nótese que, como se sugiere por la ecuación 36, V_C (= q/C) cae exponencialmente desde su valor máximo, el cual se presenta en $t = 0$, mientras que V_R (= iR) es negativo y se eleva exponencialmente a cero. Nótese también que $V_C + V_R = 0$, como lo requiere la ecuación 34.

Problema muestra 8 Un capacitor C se descarga a través de un resistor R. (*a*) ¿Después de cuántas constantes de tiempo disminuye su carga a la mitad de su valor inicial? (*b*) ¿Después de cuántas constantes de tiempo la energía almacenada disminuye a la mitad de su valor inicial?

Solución (*a*) La carga en el capacitor varía de acuerdo con la ecuación 36,

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C},$$

donde q_0 es la carga inicial. Buscamos el tiempo t al cual $q = \frac{1}{2}q_0$, o sea

$$\tfrac{1}{2}q_0 = q_0 e^{-t/\tau_C}.$$

Al cancelar a q_0 y considerar el logaritmo natural de cada lado, hallamos

$$-\ln 2 = -2t/\tau_C$$

o sea

$$t = \tau_C \frac{\ln 2}{2} = 0.35\tau_C.$$

La carga cae a la mital de su valor inicial después de 0.69 constantes de tiempo.

(*b*) La energía del capacitor es

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2t/\tau_C} = U_0 e^{-2t/\tau_C},$$

donde U_0 es la energía almacenada inicial. El tiempo al cual $U = \frac{1}{2}U_0$ se halla a partir de

$$\tfrac{1}{2}U_0 = U_0 e^{-2t/\tau_C}.$$

Al cancelar U_0 y considerar el logaritmo de cada lado, obtenemos

$$-\ln 2 = -2t/\tau_C$$

o sea

$$t = \tau_C \frac{\ln 2}{2} = 0.35\tau_C.$$

La energía almacenada cae a la mitad de su valor inicial después de transcurridas 0.35 constantes de tiempo. Esto sigue siendo así independientemente de cuál haya sido la energía almacenada inicialmente. El tiempo ($0.69\tau_C$) necesario para que la *carga* caiga a la mitad de su valor inicial es mayor que el tiempo ($0.35\ \tau_C$) necesario para que la *energía* caiga a la mitad de su valor inicial. ¿Por qué?

PREGUNTAS

1. ¿La dirección de la fem suministrada por una batería depende de la dirección del flujo de la corriente en la batería?
2. En la figura 2, analice qué cambios ocurrirían si aumentamos la masa m en una cantidad tal que el "motor" invierta su dirección y se convierta en un "generador", es decir, en una fuente de fem.
3. Explique en detalle la afirmación de que los métodos de la energía y de la regla del circuito cerrado para resolver circuitos son perfectamente equivalentes.
4. Idee un método para medir la fem y la resistencia interna de una batería.
5. ¿Cuál es el origen de la resistencia interna de una batería? ¿Depende de la edad o del tamaño de la batería?
6. La corriente que pasa por una batería de fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r se hace que disminuya por ciertos medios externos. ¿Disminuye o aumenta necesariamente la diferencia de potencial entre las terminales de la batería? Explique.

7. ¿Cómo podría calcularse V_{ab} en la figura 3*a* siguiendo una trayectoria de *a* a *b* que no esté en el circuito conductor?
8. Un foco de 25 W y 120 V alumbra con la brillantez normal cuando se conecta a un banco de baterías. Un foco de 500 W y 120 V alumbra sólo débilmente cuando se conecta al mismo banco. ¿Cómo pudo suceder esto?
9. ¿En qué circunstancias puede la diferencia potencial terminal de una batería ser mayor que su fem?
10. Los automóviles emplean generalmente un sistema eléctrico de 12 V. Hace años se empleaba un sistema de 6 V. ¿Por qué el cambio? ¿Por qué no 24 V?
11. La regla del circuito cerrado se basa en el principio de la conservación de la energía; la regla del nodo se basa en el principio de la conservación de la carga. Explique precisamente cómo se basan reglas en dichos principios.
12. ¿En qué circunstancias desearía conectar baterías en paralelo? ¿Y en serie?
13. Compare y contraste las fórmulas de los valores equivalentes de combinaciones en serie y en paralelo de (*a*) capacitores y (*b*) resistores.
14. ¿En qué condiciones desearía usted conectar resistores en paralelo? ¿Y en serie?
15. ¿Cuál es la diferencia entre una fem y una diferencia de potencial?
16. Refiriéndose a la figura 9, use un argumento cualitativo para convencerse de que i_3 tiene una dirección incorrecta.
17. Dé su opinión de por qué la resistencia de un amperímetro debe ser muy pequeña mientras que la de un voltímetro debe ser muy grande.
18. ¿Se aplican las reglas del nodo y del circuito cerrado a un circuito que contenga un capacitor?
19. Demuestre que el producto *RC* en las ecuaciones 31 y 32 tiene las dimensiones de tiempo, es decir, que 1 segundo = 1 ohm × 1 farad.
20. Un capacitor, un resistor y una batería están conectados en serie. La carga que almacena el capacitor no es afectada por la resistencia del resistor. ¿Cuál es, entonces, el propósito del resistor?
21. Explique por qué, en el problema muestra 8, la energía cae a la mitad de su valor inicial más rápidamente de lo que lo hace la carga.
22. El destello de luz en una cámara fotográfica se produce por la descarga de un capacitor a través de la lámpara. ¿Por qué no simplemente conectamos la lámpara de destello directamente a la fuente de alimentación usada para cargar el capacitor?
23. ¿El tiempo necesario para cargar un capacitor en un circuito *RC* con el fin de aumentarlo a una fracción dada de su valor final depende del valor de la fem aplicada? ¿Depende de la fem aplicada el tiempo necesario para que la carga cambie en determinada cantidad?
24. Un capacitor se conecta a las terminales de una batería. ¿La carga que va entrando a las placas del capacitor depende del valor de la resistencia interna de la batería?
25. Idee un método por el cual pueda usarse un circuito *RC* para medir resistencias muy grandes.
26. En la figura 13, supóngase que el interruptor S se conecta a *a*. Explique por qué (en vista de que la terminal negativa de la batería no está conectada a la resistencia *R*) la corriente en *R* debería ser $\mathcal{E}/R$, como lo predice la ecuación 32.
27. En la figura 13, supóngase que el interruptor S se conecta a *a*. ¿Por qué la carga del capacitor *C* no se eleva instantáneamente a $q = C\mathcal{E}$? Después de todo, la terminal positiva de la batería está conectada a una placa del capacitor y la negativa a la otra.

PROBLEMAS

Sección 33-1 Fuerza electromotriz

1. Se crea una corriente de 5.12 A en un circuito externo por medio de una batería de 6.00 V durante 5.75 min. ¿En cuánto se reduce la energía química de la batería?
2. (*a*) ¿Cuánto trabajo efectúa una fuente de fem de 12.0 V sobre un electrón que pase de la terminal positiva a la negativa? (*b*) Si en cada segundo pasan 3.40×10^{18} electrones, ¿cuál es la salida de potencia de la fuente?
3. Cierta batería de 12 V de un automóvil tiene una carga inicial de 125 A · h. Si se supone que el potencial entre las terminales permanece constante hasta que la batería se descarga por completo, ¿cuánto tiempo puede entregar energía, a razón de 110 W?
4. La batería de una lámpara de mano normal puede entregar unos 2.0 W · h de energía antes de que se agote. (*a*) Si una batería cuesta 80 centavos, ¿cuál es el costo de operar una lámpara de 100 W durante 8.0 h usando baterías? (*b*) ¿Cuál es el costo si se emplea la energía suministrada por la compañía de luz, a razón de 12 centavos por kW · h?

Sección 33-3 Diferencias de potencial

5. En la figura 16 el potencial en el punto *P* es de 100 V. ¿Cuál es el potencial en el punto *Q*?
6. En la figura 17 se muestra esquemáticamente un medidor de gasolina para automóvil. El indicador (en el tablero) tiene una resistencia de 10 Ω. La unidad en el tanque es simplemente un flotador conectado a un reóstato que tiene una resistencia de 140 Ω cuando el tanque esta vacío, 20 Ω cuando está lleno, y varía linealmente con el volumen de gasolina. Halle la corriente en el circuito cuando el tanque está (*a*) vacío, (*b*) medio lleno y (*c*) totalmente lleno.
7. (*a*) En la figura 18, ¿qué valor debe tener *R* si se quiere que la corriente en el circuito sea de 50 mA? Considere

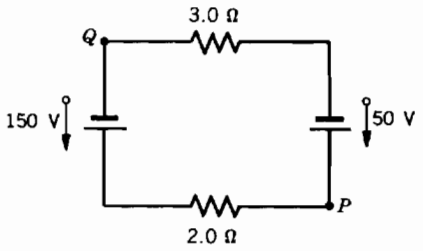


Figura 16 Problema 5.

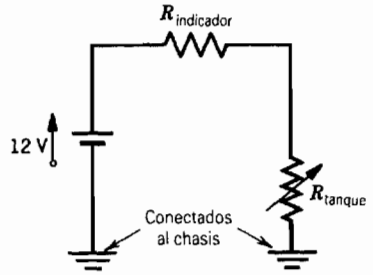


Figura 17 Problema 6.

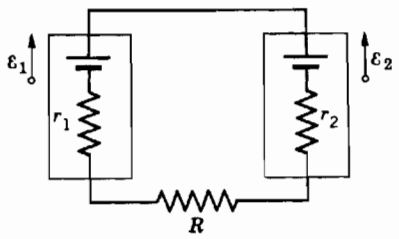


Figura 18 Problema 7.

que $\mathcal{E}_1 = 2.0$ V, $\mathcal{E}_2 = 3.0$ V, y $r_1 = r_2 = 3.0\ \Omega$. (*b*) ¿Cuál es la velocidad con que aparece la energía interna en *R*?

8. La corriente en el circuito de una sola malla es de 5.0 A. Cuando se inserta en serie otra resistencia adicional de 2.0 Ω la corriente cae a 4.0 A. ¿Cuál era la resistencia en el circuito original?
9. La sección del circuito *AB* (véase la Fig. 19) absorbe 53.0 W de potencia cuando una corriente $i = 1.20$ A pasa por ella en la dirección indicada. (*a*) Halle la diferencia de potencial entre *A* y *B*. (*b*) Si el elemento *C* no tiene una resistencia interna, ¿cuál es su fem? (*c*) ¿Cuál terminal es positiva, la derecha o la izquierda?

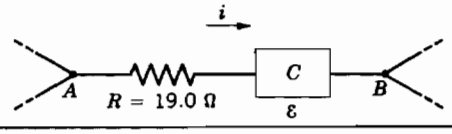


Figura 19 Problema 9.

10. Se desea generar energía interna en un resistor de 108 mΩ a razón de 9.88 W conectándolo a una batería cuya fem es de 1.50 V. (*a*) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? (*b*) ¿Qué diferencia de potencial existe en los extremos del resistor?
11. El motor de arranque de un automóvil gira lentamente y el mecánico tiene que decidir si reemplaza el motor, el cable o la batería. El manual del fabricante dice que la batería de 12 V no puede tener una resistencia mayor de 0.020 Ω, y el cable una resistencia no mayor de 0.040 Ω. El mecánico pone a funcionar el motor y mide 11.4 V en las terminales de la batería, 3.0 V en el cable, y una corriente de 50 A. ¿Qué pieza está defectuosa?
12. Dos baterías, con la misma fem $\mathcal{E}$ pero distintas resistencias internas de r_1 y r_2 ($r_1 > r_2$) están conectadas en serie con una resistencia externa *R*. (*a*) Determine el valor de *R* que anule la diferencia de potencial entre las terminales de una batería. (*b*) ¿Cuál batería es?
13. Una celda solar genera una diferencia de potencial de 0.10 V cuando un resistor de 500 Ω se conecta en sus terminales y una diferencia de potencial de 0.16 V cuando se sustituye por un resistor de 1000 Ω. ¿Cuáles son (*a*) la resistencia interna y (*b*) la fem de la celda solar? (*c*) El área de la celda es de 5.0 cm² y la intensidad de la luz que incide es de 2.0 mW/cm². ¿Cuál es la eficiencia de la celda para convertir energía lumínica en energía interna en el resistor externo de 1000 Ω?
14. (*a*) En el circuito de la figura 3*a*, demuestre que la potencia entregada a *R* como energía interna es máxima cuando *R* es igual a la resistencia interna *r* de la batería. (*b*) Demuestre que esta potencia máxima es $P = \mathcal{E}^2/4r$.
15. Una batería de fem $\mathcal{E} = 2.0$ V y resistencia interna $r = 0.50\ \Omega$ impulsa a un motor. Éste levanta un objeto de 2.0 N a una velocidad constante de $v = 0.50$ m/s. Si se supone que no se tienen pérdidas de potencia, halle (*a*) la corriente *i* en el circuito y (*b*) la diferencia de potencial *V* entre las terminales del motor. (*c*) Analice el hecho de que existan dos soluciones a este problema.

Sección 33-4 Resistores en serie y en paralelo

16. Cuatro resistores de 18 Ω están conectados en paralelo y a una batería de 27 V. ¿Cuál es la corriente en la batería?
17. Con sólo dos resistores —de uno en uno, en serie, o en paralelo— es posible obtener resistencias de 3.0, 4.0, 12, y 16 Ω. ¿Cuáles son las resistencias de cada uno de los resistores?
18. En la figura 20, encuentre la resistencia equivalente entre los puntos (*a*) *A* y *B*, (*b*) *A* y *C* y (*c*) *B* y *C*.

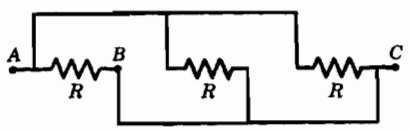


Figura 20 Problema 18.

19. En la figura 21 se muestra un circuito que contiene cinco resistores conectados a una batería de 12 V. Halle la caída de potencial en el resistor de 5.0 Ω.

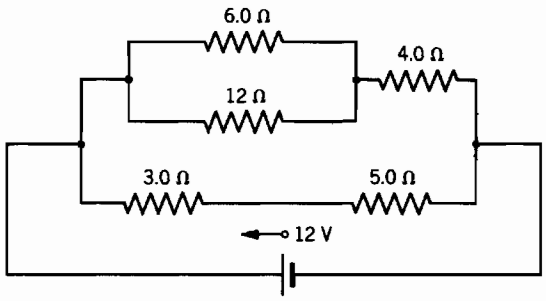


Figura 21 Problema 19.

20. Una línea de energía de 120 V está protegida por un fusible de 15 A. ¿Cuál es el número máximo de lámparas de 500 W que pueden funcionar simultáneamente en paralelo en esta línea?
21. Dos resistores R_1 y R_2 deben conectarse ya sea en serie o en paralelo a una batería (carente de resistencia) con una fem $\mathcal{E}$. Deseamos que la rapidez de transferencia de energía interna en la combinación en paralelo sea de cinco veces, más que aquélla de la combinación en serie. Si $R_1 = 100\ \Omega$, ¿cuál es R_2?
22. Se le da un número de resistores de 10 Ω, cada uno capaz de disipar 1.0 W únicamente. ¿Cuál es el número mínimo de tales resistores que se necesita para combinarlos en serie o en paralelo de tal modo que un resistor de 10 Ω sea capaz de disipar 5.0 W por lo menos?
23. Un foco o bombilla de tres vías, de 120 V, especificado para 100-200-300 W, quema un filamento. Después de eso, el foco funciona a la misma intensidad en sus posiciones de interrupción mínima y máxima pero no funciona en absoluto en la posición media. (*a*) ¿Cómo están alambrados los dos filamentos dentro del foco? (*b*) Calcule las resistencias de los filamentos.
24. (*a*) En la figura 22, halle la resistencia equivalente de la red mostrada. (*b*) Calcule la corriente en cada resistor. Tenga en cuenta que $R_1 = 112\ \Omega$, $R_2 = 42.0\ \Omega$, $R_3 = 61.6\ \Omega$, $R_4 = 75.0\ \Omega$ y $\mathcal{E} = 6.22$ V.

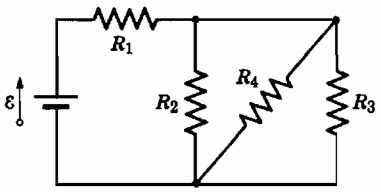


Figura 22 Problema 24.

25. Dos rieles conductores *A* y *B* que tienen longitudes iguales de 42.6 m y un área de sección transversal de 91.0 cm², están conectados en serie. Entre los puntos terminales de los rieles conectados se aplica un potencial de 630 V. Las resistencias de los rieles son de 76.2 y 35.0 μΩ. Determine (*a*) las resistividades de los rieles, (*b*) la densidad de la corriente en cada riel, (*c*) la intensidad del campo eléctrico en cada riel, y (*d*) la diferencia de potencial a través de cada riel.
26. En el circuito de la figura 23, $\mathcal{E}$, R_1, y R_2 tienen valores constantes pero R puede variar. Halle una expresión para R tal que el calentamiento sea máximo en ese resistor.

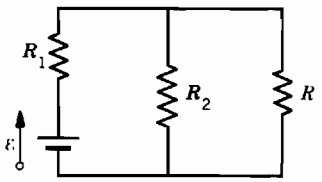


Figura 23 Problema 26.

27. En la figura 24, halle la resistencia equivalente entre los puntos (*a*) *F* y *H* y (*b*) *F* y *G*.

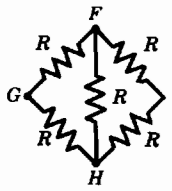


Figura 24 Problema 27.

28. Halle la resistencia equivalente entre los puntos *x* y *y* mostrados en la figura 25. Cuatro de los resistores tienen igual resistencia *R*, como se muestra; el resistor "de en medio" tiene un valor $r \neq R$. (Compare con el problema 28 del capítulo 31.)

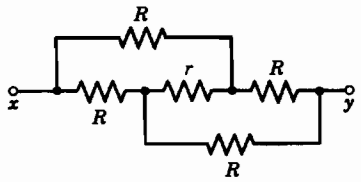


Figura 25 Problema 28.

29. Doce resistores, cada uno de *R* ohms de resistencia, forman un cubo (véase la Fig. 8*a*). (*a*) Halle R_{13}, la resistencia equivalente de la diagonal de una cara. (*b*) Halle R_{17}, la resistencia equivalente de una diagonal del cuerpo. Véase el problema muestra 4.

Sección 33-5 Circuitos de mallas múltiples

30. En la figura 26 halle (*a*) la corriente en cada resistor, y (*b*) la diferencia de potencial entre *a* y *b*. Considere que $\mathcal{E}_1 = 6.0$ V, $\mathcal{E}_2 = 5.0$ V, $\mathcal{E}_3 = 4.0$ V, $R_1 = 100\ \Omega$ y $R_2 = 50\ \Omega$.
31. Dos focos de alumbrado, uno de resistencia R_1 y el otro de resistencia R_2 ($< R_1$) están conectados (*a*) en paralelo y (*b*) en serie. ¿Qué foco es más brillante en cada caso?

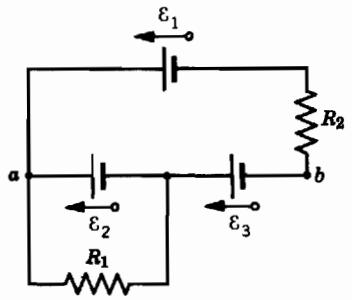


Figura 26 Problema 30.

32. En la figura 9 calcule la diferencia de potencial $V_c - V_d$ entre los puntos c y d en tantas trayectorias como sea posible. Suponga que $\mathcal{E}_1 = 4.22$ V, $\mathcal{E}_2 = 1.13$ V, $R_1 = 9.77\ \Omega$, $R_2 = 11.6\ \Omega$ y $R_3 = 5.40\ \Omega$.

33. ¿Qué corriente, en términos de $\mathcal{E}$ y R indicará el amperímetro A de la figura 27? Suponga que A tiene una resistencia nula.

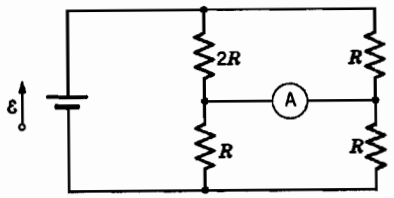


Figura 27 Problema 33.

34. Cuando las luces de un automóvil se encienden, un amperímetro en serie con ellas indica 10.0 A y un voltímetro conectado entre ellas indica 12.0 V. Véase la figura 28. Cuando se pone en marcha el motor de arranque, la lectura cae a 8.00 A y las luces se acentúan. Si la resistencia interna de la batería es de 50.0 mΩ y la del amperímetro es insignificante, ¿cuáles son (*a*) la fem de la batería y (*b*) la corriente en el motor de arranque cuando las luces están encendidas?

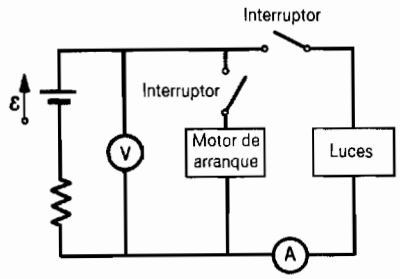


Figura 28 Problema 34.

35. La figura 29 muestra una batería conectada en los extremos de un resistor uniforme R_0. Un contacto deslizable puede moverse a lo largo del resistor desde $x = 0$ a la izquierda hasta $x = 10$ cm a la derecha. Encuentre una expresión para la potencia disipada en el resistor R en función de x. Trace una gráfica de la función para $\mathcal{E} = 50$ V, $R = 2000\ \Omega$, y $R_0 = 100\ \Omega$.

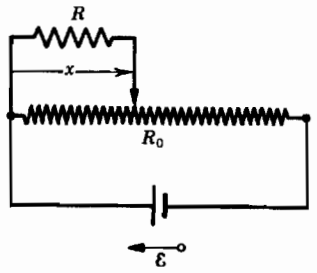
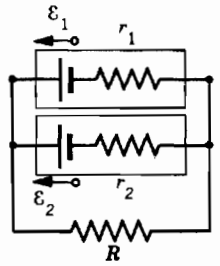
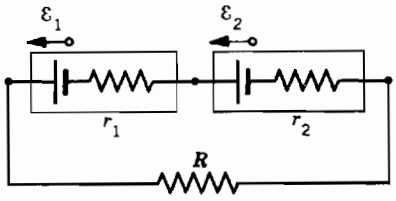


Figura 29 Problema 35.

36. Se le dan a usted dos baterías de valores de fem $\mathcal{E}_1$ y de $\mathcal{E}_2$, y resistencias internas r_1 y r_2. Deben conectarse ya sea en (*a*) paralelo o (*b*) en serie y se usarán para crear una corriente por un resistor R, como se muestra en la figura 30. Deduzca expresiones para la corriente en R para ambos métodos de conexión.



(*a*)



(*b*)

Figura 30 Problema 36.

37. (*a*) Calcule la corriente por cada fuente de fem en la figura 31. (*b*) Calcule $V_b - V_a$. Suponga que $R_1 = 1.20\ \Omega$, $R_2 = 2.30\ \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 2.00$ V, $\mathcal{E}_2 = 3.80$ V y $\mathcal{E}_3 = 5.00$ V.

38. Una batería de fem $\mathcal{E}_1$ y resistencia interna $r_1 = 140\ \Omega$ se usa para operar un aparato con una resistencia $R = 34\ \Omega$. Sin embargo, la fem $\mathcal{E}_1$ fluctúa entre 25 y 27 V; por lo tanto, la corriente en R también fluctúa. Para estabilizar la corriente que pasa por R, una segunda batería, con resistencia interna $r_2 = 0.11\ \Omega$, se introduce en paralelo con la primera batería. Esta segunda batería es de fem estable. Véase la figura 32. Halle el cambio en la corriente

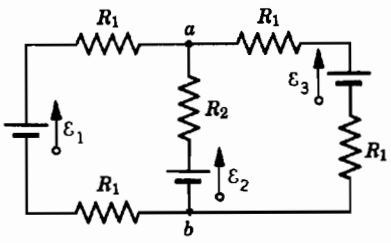


Figura 31 Problema 37.

a través de R cuando $\mathcal{E}_1$ varía (*a*) antes y (*b*) después de que la segunda batería se intercaló en el circuito. (*c*) ¿Cuál sería el valor de $\mathcal{E}_2$ de modo que la corriente promedio en R, calculada con $\mathcal{E}_1 = 26$ V (su valor promedio), no cambie debido a la introducción de la segunda batería?

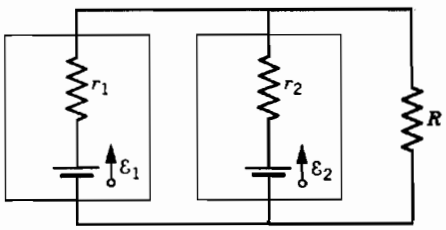


Figura 32 Problema 38.

39. En la figura 33 imagine un amperímetro insertado en la rama que contiene a R_3. (*a*) ¿Cuál será la lectura, suponiendo que $\mathcal{E} = 5.0$ V, $R_1 = 2.0\ \Omega$, $R_2 = 4.0\ \Omega$, y $R_3 = 6.0\ \Omega$? (*b*) El amperímetro y la fuente de fem se intercambian ahora físicamente. Demuestre que la lectura del amperímetro permanece inalterada.

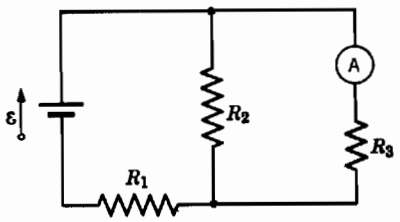


Figura 33 Problema 39.

Sección 33-6 Instrumentos de medición

40. Un ohmímetro sencillo se confecciona conectando una pila de 1.50 V de linterna en serie con un resistor R y un amperímetro de 1.00 mA, como se muestra en la figura 34. R se ajusta de modo que cuando las terminales del circuito se conectan entre sí, la aguja del medidor se desvía a su valor de escala completa de 1.00 mA. ¿Qué resistencia externa entre las terminales da como resultado una desviación de (*a*) 10%, (*b*) 50% y (*c*) 90% de la escala total? (*d*) Si el amperímetro tiene una resistencia de 18.5 Ω y la resistencia interna de la pila es despreciable, ¿cuál es el valor de R?

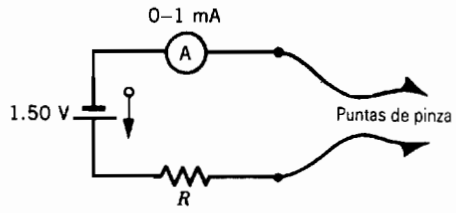


Figura 34 Problema 40.

41. En la figura 11 suponga que $\mathcal{E} = 5.0$ V, $r = 2.0\ \Omega$, $R_1 = 5.0\ \Omega$ y $R_2 = 4.0\ \Omega$. Si $R_A = 0.10\ \Omega$, ¿en qué porcentaje de error se incurre al leer la corriente? Suponga que el voltímetro no está presente.

42. En la figura 11, suponga que $\mathcal{E} = 3.0$ V, $r = 100\ \Omega$, $R_1 = 250\ \Omega$ y $R_2 = 300\ \Omega$. Si $R_V = 5.0$ kΩ, ¿en qué porcentaje de error se incurre al leer la diferencia de potencial entre los extremos de R_1? No tome en cuenta la presencia del amperímetro.

43. Un voltímetro (resistencia R_V) y un amperímetro (resistencia R_A) están conectados para medir una resistencia R, como en la figura 35*a*. La resistencia está dada por $R = V/i$, en donde V es la lectura del voltímetro e i es la corriente en el resistor R. Parte de la corriente registrada por el amperímetro (i') pasa por el voltímetro de modo que la razón de las lecturas en el amperímetro ($= V/i'$) da únicamente una lectura *aparente* de la resistencia R'. Demuestre que R y R' se relacionan según

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_V}.$$

Nótese que cuando $R_V \to \infty$, $R' \to R$.

44. Si los medidores se emplean para medir la resistencia, también pueden estar conectados como se ve en la figura 35*b*. Otra vez, la razón de las lecturas del medidor da sólo una resistencia de R'. Demuestre que R' se relaciona con R según

$$R = R' - R_A,$$

en donde R_A es la resistencia del amperímetro. Nótese que cuando $R_A \to 0$, $R' \to R$.

45. En la figura 35 las resistencias del amperímetro y del voltímetro son de 3.00 Ω y 300 Ω, respectivamente. (*a*) Si $R = 85.0\ \Omega$, ¿cuáles serán las lecturas en los medidores para las dos diferentes conexiones? (*b*) ¿Qué lectura de resistencia R' se calculará en cada caso? Considere que $\mathcal{E} = 12.0$ V y $R_0 = 100\ \Omega$.

46. En la figura 36 R_s se ajustará en valor hasta que los puntos *a* y *b* se lleven exactamente al mismo potencial. (Esta condición se comprueba al conectar momentáneamente un amperímetro sensible entre *a* y *b*; si estos puntos están al mismo potencial, la aguja del amperímetro no se desviará). Demuestre que cuando se hace este ajuste, se cumple la relación siguiente:

$$R_x = R_s(R_2/R_1).$$

Con este aparato, que se llama puente de Wheatstone, es posible medir una resistencia desconocida (R_x) en función de otra estándar (R_s).

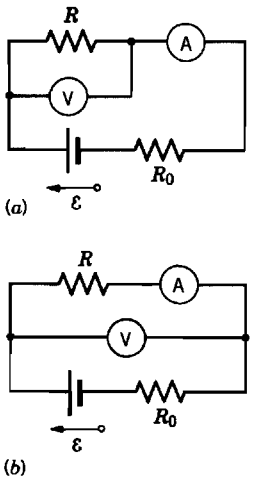


Figura 35 Problemas 43, 44 y 45.

47. Si los puntos *a* y *b* de la figura 36 están conectados por un alambre de resistencia *r*, demuestre que la corriente en el alambre es

$$i = \frac{\mathcal{E}(R_s - R_x)}{(R + 2r)(R_s + R_x) + 2R_sR_x},$$

donde $\mathcal{E}$ es la fem de la batería. Suponga que R_1 y R_2 son iguales ($R_1 = R_2 = R$) y que R_0 es igual a cero. ¿Es esta fórmula consistente con el resultado del problema 46?

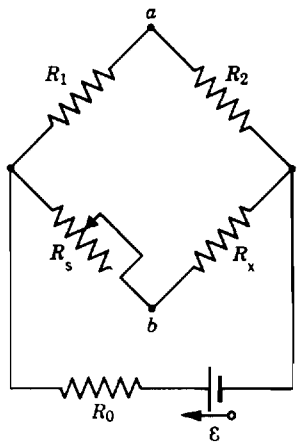


Figura 36 Problemas 46 y 47.

Sección 33-7 Circuitos RC

48. En un circuito *RC* en serie, $\mathcal{E} = 11.0$ V, $R = 1.42$ MΩ y $C = 1.80$ μF. (*a*) Calcule la constante de tiempo. (*b*) Halle la carga máxima que aparecerá en el capacitor durante la carga. (*c*) ¿Cuánto tiempo le toma a la carga llegar a 15.5 μC?

49. ¿Cuántas constantes de tiempo deben transcurrir antes de que el capacitor de un circuito *RC* se cargue hasta dentro del 1.00% de su carga de equilibrio?

50. Un resistor de 15.2 kΩ y un capacitor están conectados en serie y súbitamente se aplica un potencial de 13.0 V. El potencial en el capacitor se eleva a 5.00 V en 1.28 μs. (*a*) Calcule la constante de tiempo. (*b*) Halle la capacitancia del capacitor.

51. Un circuito *RC* se descarga al cerrar un interruptor en el tiempo $t = 0$. La diferencia de potencial inicial en el capacitor es de 100 V. Si la diferencia de potencial disminuyó a 1.06 V después de 10.0 s, (*a*) calcule la constante de tiempo del circuito. (*b*) ¿Cuál será la diferencia de potencial en $t = 17$ s?

52. Un controlador en un salón de juegos electrónicos consta de un resistor variable conectado entre las placas de un capacitor de 220 nF. El capacitor se carga a 5.00 V, luego se descarga por el resistor. El tiempo para que la diferencia de potencial entre las placas disminuya a 800 mV se mide por un reloj interno. Si la gama de tiempos de descarga que puede medirse se encuentra entre 10.0 μs y 6.00 ms, ¿cuál sería el margen de resistencia del resistor?

53. La figura 37 muestra el circuito de una lámpara de destellos, como las que se colocan sobre toneles en los lugares de construcción de carreteras. La lámpara fluorescente L está conectada en paralelo al capacitor *C* de un circuito *RC*. La corriente pasa por la lámpara sólo cuando el potencial entre sus extremos alcanza el voltaje de disrupción V_L; en este caso, el capacitor se descarga por la lámpara y destella durante un tiempo breve. Supongamos que se necesitan dos destellos por segundo. Si se usa una lámpara con un voltaje de disrupción $V_L = 72$ V, una batería de 95 V y un capacitor de 0.15 μF, ¿cuál deberá ser la resistencia *R* del resistor?

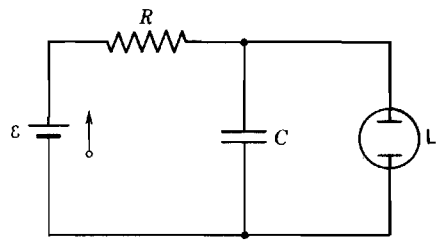


Figura 37 Problema 53.

54. Un capacitor de 1.0 μF con una energía almacenada inicial de 0.50 J se descarga por un resistor de 1.0 MΩ. (*a*) ¿Cuál es la carga inicial en el capacitor? (*b*) ¿Cuál es la corriente por el resistor cuando comienza la descarga? (*c*) Determine V_C, el voltaje en el capacitor y V_R, el voltaje en los extremos del resistor, en función del tiempo. (*d*) Exprese la cantidad de generación de energía interna en el resistor en función del tiempo.

55. Un resistor de 3.0 MΩ y un capacitor de 1.0 μF están conectados en un circuito de una sola malla con una fuente de fem con $\mathcal{E} = 4.0$ V. En 1.0 s después hecha la conexión, ¿cuáles son las cantidades en que (*a*) crece la carga del capacitor, (*b*) se almacena la energía en el capacitor, (*c*) aparece la energía interna en el resistor, y (*d*) la fuente de fem entrega energía?

56. (*a*) Lleve a cabo los pasos omitidos para obtener la ecuación 31 a partir de la ecuación 30. (*b*) De manera similar,

obtenga la ecuación 36 a partir de la ecuación 35. Nótese que $q = q_0$ (capacitor cargado) en $t = 0$.

57. Demuestre que cuando el interruptor S en la figura 13 se conecta de *a* a *b*, toda la energía almacenada en el capacitor se transforma en energía interna en el resistor. Suponga que el capacitor está totalmente cargado antes de cambiar la posición del interruptor.

58. Un capacitor C inicialmente descargado se carga totalmente por una fem $\mathcal{E}$ constante en serie con un resistor R. (*a*) Demuestre que la energía final almacenada en el capacitor es la mitad de la energía suministrada por la fem. (*b*) Por integración directa de i^2R en el tiempo de carga, demuestre que la energía interna disipada por el resistor es también la mitad de la energía suministrada por la fem.

CAPÍTULO 34

EL CAMPO MAGNÉTICO

La ciencia del magnetismo *tuvo su origen en la antigüedad. Se desarrolló a partir de la observación de que ciertas piedras en estado natural se atraían entre sí y también atraían a pequeños trozos de un metal, el hierro, pero no de otros metales, como el oro o la plata. La palabra "magnetismo" proviene del nombre de cierta región del Asia Menor (Magnesia), lugar donde se encontraron estas piedras.*

Hoy día se le ha dado a este descubrimiento un gran uso práctico, desde los pequeños imanes "de refrigerador" hasta la cinta magnética para grabar y los discos de computadora. El magnetismo de los núcleos atómicos individuales lo emplean los físicos para formar imágenes de los órganos que se encuentran dentro del cuerpo humano. Las naves espaciales han medido el magnetismo de la Tierra y de los otros planetas para saber acerca de su estructura interna.

En este capítulo iniciamos nuestro estudio del magnetismo considerando el campo magnético y sus efectos sobre una carga eléctrica en movimiento. En el capítulo siguiente, consideraremos la generación de campos magnéticos por medio de corrientes eléctricas. En capítulos posteriores continuaremos explorando la estrecha relación entre la electricidad y el magnetismo, los cuales se enlazan entre sí bajo la designación común de electromagnetismo.

34-1 EL CAMPO MAGNÉTICO B

Al igual que en la antigüedad, todavía se emplean pequeños trozos de hierro para revelar la presencia de los efectos magnéticos. La figura 1 muestra la distribución de limaduras de hierro en el espacio cercano a un pequeño *imán permanente*, en este caso una barra corta de hierro. La figura 2 muestra una distribución correspondiente en un alambre que conduce corriente.

Describimos al espacio alrededor de un imán permanente o de un conductor que conduce corriente como el lugar ocupado por un *campo magnético*, precisamente como hemos descrito al espacio alrededor de un objeto cargado como el lugar ocupado por un campo eléctrico. La magnitud y dirección del campo magnético, al que definiremos en la siguiente sección, se indica por medio del vector **B**.* La figura 3 muestra un electroimán, el cual puede utilizarse para producir campos magnéticos intensos en el laboratorio.

En electrostática, representamos simbólicamente la relación entre campo eléctrico y carga eléctrica por

$$\text{carga eléctrica} \rightleftarrows \mathbf{E} \rightleftarrows \text{carga eléctrica}. \qquad (1)$$

Esto es, las cargas eléctricas establecen un campo eléctrico, el que a su vez puede ejercer una fuerza de origen eléctrico sobre otras cargas.

Resulta tentador tratar de explotar la simetría entre los campos eléctrico y magnético escribiendo

$$\text{carga magnética} \rightleftarrows \mathbf{B} \rightleftarrows \text{carga magnética}. \qquad (2)$$

Sin embargo, las cargas magnéticas individuales, llamadas *monopolos magnéticos* (véase la Sec. 37-1) o bien no existen o son tan sumamente raras que tal relación no tiene valor práctico. La relación más útil es

$$\begin{matrix}\text{carga eléctrica}\\ \text{en movimiento}\end{matrix} \leftrightarrow \mathbf{B} \leftrightarrow \begin{matrix}\text{carga eléctrica}\\ \text{en movimiento},\end{matrix} \qquad (3)$$

* En magnetismo no existe un acuerdo general sobre la denominación de los vectores del campo. **B** puede llamarse *inducción magnética* o *densidad del flujo magnético*, mientras que otro vector de campo, simbolizado por **H**, puede llamarse el campo magnético. Nosotros vemos a **B** como la cantidad más fundamental y, por lo tanto, le llamamos el campo magnético.

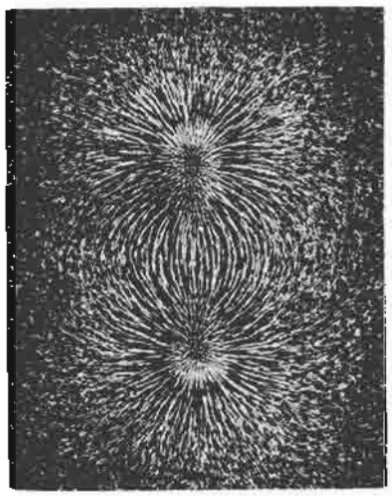


Figura 1 Limaduras de hierro esparcidas sobre una hoja de papel que cubre a un imán de barra. La distribución de las limaduras indica el patrón de las líneas del campo magnético.

la cual puede escribirse también como

$$\text{corriente eléctrica} \rightleftarrows \mathbf{B} \rightleftarrows \text{corriente eléctrica.} \quad (4)$$

Una carga eléctrica en movimiento o una corriente eléctrica generan un campo magnético, el cual puede entonces ejercer una fuerza magnética sobre otras cargas o corrientes *en movimiento*. Ciertamente existe una simetría entre la ecuación 1 para el campo eléctrico y las ecuaciones 3 o 4 para el campo magnético.

Otra semejanza entre **E** y **B** es que representamos a ambas con líneas de campo. Como fue el caso con las líneas del campo eléctrico, las líneas de **B** se trazan de modo que la tangente a cualquier línea da la dirección de **B** en ese punto, y el número de líneas que cruzan cualquier área en particular en ángulo recto da una medida de la magnitud de **B**. Es decir, las líneas están muy próximas entre sí cuando B es grande, y muy separadas cuando B es pequeño. Sin embargo, existe una diferencia muy importante entre los dos casos: la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada es siempre paralela a las líneas de **E** pero, como veremos, la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento es siempre perpendicular a las líneas de **B**. Se sugiere una diferencia de esta clase por una comparación de las ecuaciones 1 y 3: en la ecuación 1 interviene sólo un vector (**E**) mientras que en la ecuación 3 intervienen dos vectores (**B** y **v**). La fuerza magnética sobre una carga en movimiento es, entonces, más compleja que la fuerza eléctrica sobre una carga estática. Otra diferencia, como veremos, es que las líneas de **E** siempre comienzan y terminan en cargas, mientras que las líneas de **B** siempre forman anillos cerrados.

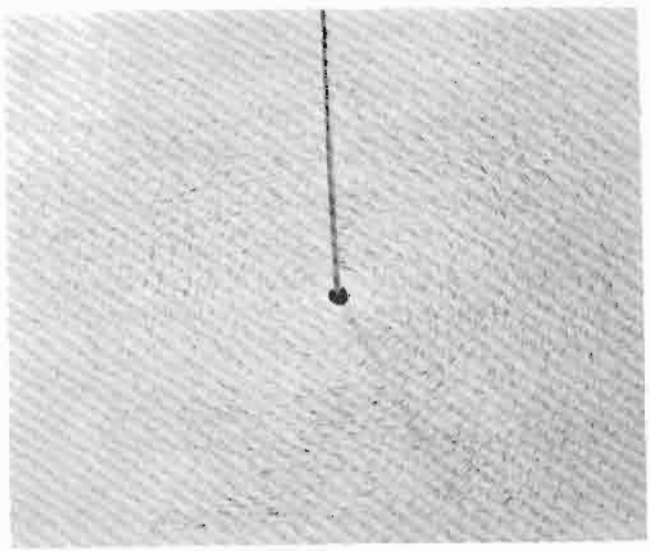


Figura 2 Limaduras de hierro sobre una hoja de papel a través de la que pasa un alambre conduciendo una corriente. El patrón indica las líneas del campo magnético.

34-2 LA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

En este capítulo, nuestro objetivo es establecer un conjunto de procedimientos para determinar si hay un campo magnético presente en una cierta región del espacio (como entre los polos del electroimán de la Fig. 3) y estudiar sus efectos en términos de la fuerza de origen magnético ejercida sobre objetos, como cargas móviles, que se encuentren en dicha región. En el capítulo siguiente consideraremos la fuente del campo **B** y el cálculo de su magnitud y dirección.

Consideremos por tanto un conjunto de mediciones que, al menos en principio, pudieran llevarse a cabo para estudiar la fuerza magnética que actúa sobre una carga eléctrica. (En estos experimentos, consideraremos únicamente las fuerzas eléctricas o magnéticas; suponemos que los experimentos se realizan en un entorno en el que otras fuerzas, como la gravedad, pueden despreciarse.)

1. Primero probamos la presencia de una fuerza *eléctrica* colocando una pequeña carga de prueba en reposo en varios puntos. Más tarde podemos restar la fuerza eléctrica (de existir alguna) de la fuerza total, lo cual presumiblemente nos deja sólo la fuerza magnética. Suponemos que esto se ha hecho, de modo que de ahora en adelante podamos dejar de considerar cualquier fuerza eléctrica que actúe sobre la carga.

2. Seguidamente proyectamos a la carga de prueba q a través de un punto P en particular con una velocidad **v**. Hallamos que la fuerza magnética **F**, de estar presente,

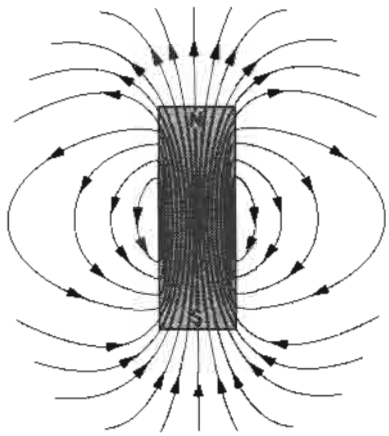


Figura 3 Electroimán de laboratorio, que consta de dos bobinas *C* de alrededor de 1 m de diámetro y dos piezas polares de hierro, *P*, todo sobre un marco rígido *F*. Se crea un campo magnético intenso, en este caso horizontal, en el entrehierro de pocos centímetros entre las piezas polares.

actúa siempre lateralmente, esto es, en ángulo recto a la dirección de **v**. Podemos repetir el experimento proyectando la carga a través de *P* en direcciones diferentes; hallamos que, no importa cuál sea la dirección de **v**, la fuerza magnética siempre está en ángulo recto con esa dirección.

3. Mientras variamos la dirección de **v** a través del punto *P*, también hallamos que la magnitud de *F* cambia desde cero, cuando **v** tiene una cierta dirección, hasta un máximo, cuando está en ángulo recto con esa dirección. En ángulos intermedios, la magnitud de *F* varía según el seno del ángulo ϕ que el vector de velocidad forma con esa dirección en particular. (Nótese que existen realmente dos direcciones de **v** para las cuales **F** es cero; estas direcciones se oponen entre sí, esto es, $\phi = 0°$ o $180°$.)

4. Al variar la magnitud de la velocidad, hallamos que la magnitud de *F* varía en proporción directa.

5. Hallamos también que *F* es proporcional a la magnitud de la carga de prueba *q*, y que **F** invierte su dirección cuando *q* cambia de signo.

Definiremos ahora el campo magnético **B** de la manera siguiente, basados en estas observaciones: la dirección de **B** en el punto *P* es la misma que una de las direcciones de **v** (la cual será especificada en breve) donde la fuerza es cero; y la magnitud de **B** se determina a partir de la magnitud de $F_\perp$ de la fuerza máxima ejercida cuando la carga en reposo se proyecta perpendicularmente a la dirección de **B**; o sea,

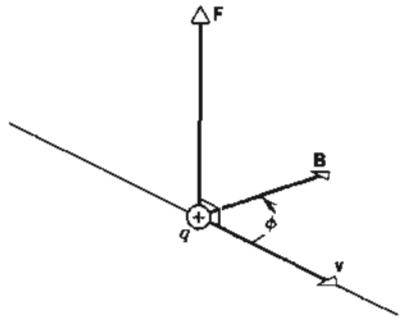


Figura 4 Una partícula de carga positiva *q* que se mueve con velocidad **v** por un campo magnético **B** experimenta una fuerza magnética **F** desviadora.

$$B = \frac{F_\perp}{qv}. \tag{5}$$

En ángulos arbitrarios, nuestras observaciones se resumen por medio de la fórmula

$$F = qvB \operatorname{sen} \phi, \tag{6}$$

donde ϕ es el ángulo más pequeño entre **v** y **B**. A causa de que *F*, *v* y *B* son vectores, la ecuación 6 puede ser escrita como un producto vectorial:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{7}$$

Al escribir $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en lugar de $\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ en la ecuación 7, hemos especificado cuál de las dos direcciones posibles de **B** queremos usar.

La figura 4 muestra la relación geométrica entre los vectores **F**, **v** y **B**. Nótese que, como es siempre el caso en un producto vectorial, **F** es perpendicular a **v**, y la fuerza magnética es siempre una fuerza deflectora lateralmente. Nótese también que **F** se vuelve cero cuando **v** es o bien paralela o bien antiparalela a la dirección de **B** (en cuyo caso $\phi = 0°$ o $180°$, y $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$), y que **F** tiene su magnitud máxima, igual a qvB, cuando **v** forma un ángulo recto con **B**.

Ya que la fuerza magnética siempre es perpendicular a **v**, no puede cambiar la magnitud de **v**, únicamente su dirección. En forma equivalente, la fuerza forma siempre un ángulo recto con el desplazamiento de la partícula y no puede realizar trabajo sobre ella. Así pues, un campo magnético constante no puede cambiar la energía cinética de una partícula cargada en movimiento. (En el capítulo 36 consideraremos los campos magnéticos que varían con el tiempo, los cuales *pueden* cambiar la energía cinética de una partícula. En este capítulo, tratamos únicamente con campos magnéticos que no varían con el tiempo.)

La ecuación 7, que sirve como la definición del campo magnético **B**, indica tanto su magnitud como su dirección. Definimos al campo eléctrico similarmente por medio de una ecuación, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, de modo que al medir la fuerza eléctrica podamos determinar la magnitud y *también* la

TABLA 1 VALORES TÍPICOS DE ALGUNOS CAMPOS MAGNÉTICOS[a]

Ubicación	*Campo magnético* (T)
En la superficie de una estrella de neutrones (calculado)	10^8
Cerca de un imán superconductor	5
Cerca de un electroimán grande	1
Cerca de un pequeño imán de barra	10^{-2}
En la superficie de la Tierra	10^{-4}
En el espacio interestelar	10^{-10}
En una sala blindada magnéticamente	10^{-14}

[a] Valores aproximados.

dirección del campo eléctrico. Los campos magnéticos no pueden determinarse tan fácilmente con una simple medición. Como lo sugiere la figura 4, medir a **F** para una sola **v** no es suficiente para determinar **B**, porque la dirección de **F** no indica la dirección de **B**. Debemos primero hallar la dirección de **B** (por ejemplo, hallando las direcciones de **v** para las que no exista una fuerza), y entonces con una sola medición más puede determinarse su magnitud.

La unidad de **B** en el SI es el *tesla* (abreviatura T). Se deduce de la ecuación 5 que

$$1 \text{ tesla} = 1 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb} \cdot \text{metro/segundo}} = 1 \frac{\text{newton}}{\text{ampere} \cdot \text{metro}}.$$

Una unidad más antigua (no del SI) para **B**, todavía en uso, es el *gauss*, relacionada con el tesla según

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}.$$

La tabla 1 da algunos valores típicos de campos magnéticos.

La figura 5 (véase también la Fig. 1) muestra las líneas de **B** de un imán de barra. Nótese que las líneas de **B** pasan por el imán, formando anillos cerrados. Partiendo de la agrupación de las líneas del campo fuera del imán cerca de sus extremos, inferimos que el campo magnético tiene su mayor magnitud allí. Estos extremos se llaman los *polos* del imán, con las designaciones *norte* y *sur* dadas a los polos en donde las líneas emergen y entran, respectivamente.

Los polos magnéticos opuestos se atraen entre sí (así pues, el polo norte de un imán de barra atrae al polo sur de otro) y los polos magnéticos iguales se repelen entre sí. Una brújula magnética ordinaria no es sino un imán suspendido, cuyo extremo norte apunta en la dirección general del Norte geográfico. Así pues, el polo magnético de la Tierra en la región del Ártico debe ser un polo magnético *sur*, y el polo magnético en el Antártico debe ser un polo magnético *norte*. Cerca del Ecuador las líneas del campo magnético son casi paralelas a la superficie y se dirigen desde el Sur geográfico al Norte (como puede el lector deducirlo al voltear la figura 5 al revés).

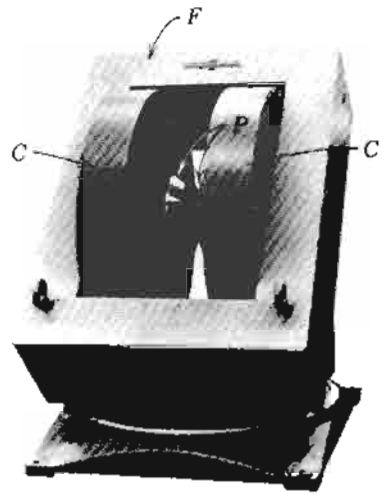


Figura 5 Las líneas del campo magnético de un imán de barra. Las líneas forman anillos cerrados, dejando al imán en su polo norte y entrando por su polo sur.

Problema muestra 1 Un campo magnético uniforme **B**, con magnitud 1.2 mT, apunta verticalmente hacia arriba a lo largo del volumen del salón en que usted está sentado. Un protón de 5.3 MeV se mueve horizontalmente de sur a norte a través de cierto punto en el salón. ¿Qué fuerza magnética deflectora actúa sobre el protón cuando pasa por este punto? La masa del protón es de 1.67×10^{-27} kg.

Solución La fuerza magnética deflectora depende de la velocidad del protón, la cual hallamos a partir de $K = \frac{1}{2}mv^2$. Al despejar v, hallamos

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5.3 \text{ MeV})(1.60 \times 10^{-13} \text{ J/MeV})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$= 3.2 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

La ecuación 6 da, entonces,

$$F = qvB \operatorname{sen} \phi$$
$$= (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(3.2 \times 10^7 \text{ m/s})(1.2 \times 10^{-3} \text{ T})(\operatorname{sen} 90°)$$
$$= 6.1 \times 10^{-15} \text{ N}.$$

Esta fuerza puede parecer pequeña, pero actúa sobre una partícula de masa pequeña, produciendo una aceleración grande, es decir,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{6.1 \times 10^{-15} \text{ N}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.7 \times 10^{12} \text{ m/s}^2.$$

Falta por hallar la dirección de **F** cuando, como en la figura 6, **v** apunta horizontalmente de sur a norte, y **B** apunta verticalmente hacia arriba. Usando la ecuación 7 y la regla de la mano derecha para la dirección de los productos vectoriales (véase la Sec. 3-5), concluimos que la fuerza deflectora **F** debe

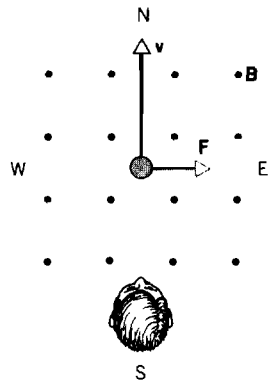


Figura 6 Problema muestra 1. Una vista (desde arriba) de un estudiante sentado en un salón en donde un campo magnético dirigido verticalmente hacia arriba desvía a un protón que se mueve hacia el este. (Los puntos, que representan puntas de flecha, simbolizan a los vectores que apuntan hacia afuera de la página.)

apuntar horizontalmente de oeste a este, como lo muestra la figura 6.

Si la carga de la partícula hubiera sido negativa, la fuerza magnética deflectora habría apuntado en la dirección opuesta, esto es, horizontalmente de este a oeste. Esto se predice automáticamente por la ecuación 7, si sustituimos a $-q$ por q.

En este cálculo, usamos la expresión clásica (aproximada) ($K = \frac{1}{2}mv^2$) para la energía cinética del protón en lugar de la expresión relativista (exacta) (véase la Ec. 25 del capítulo 7). El criterio para usar con seguridad la expresión clásica es $K \ll mc^2$, en donde mc^2 es la energía en reposo de la partícula. En este caso $K = 5.3$ MeV, y la energía en reposo de un protón (véase el apéndice F) es de 938 MeV. Este protón pasa la prueba, y nos justificamos al usar la fórmula clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$ de la energía cinética. Debemos estar siempre alerta acerca de este punto al tratar con partículas energéticas.

La fuerza de Lorentz

Si tanto un campo eléctrico **E** como un campo magnético **B** actúan sobre una partícula cargada, la fuerza total sobre ella puede expresarse como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{8}$$

Esta fuerza se llama la *fuerza de Lorentz*. La fuerza de Lorentz no es una clase nueva de fuerza: simplemente es la suma de las fuerzas eléctrica y magnética que pueden actuar simultáneamente sobre una partícula cargada. La parte eléctrica de esta fuerza actúa sobre cualquier partícula cargada, ya sea que esté en reposo o en movimiento; la parte magnética actúa únicamente sobre partículas cargadas en movimiento.

Una aplicación común de la fuerza de Lorentz ocurre cuando un haz de partículas cargadas pasan por una región en donde los campos **E** y **B** son perpendiculares entre sí y al vector velocidad de las partículas. Si **E**, **B** y **v** están

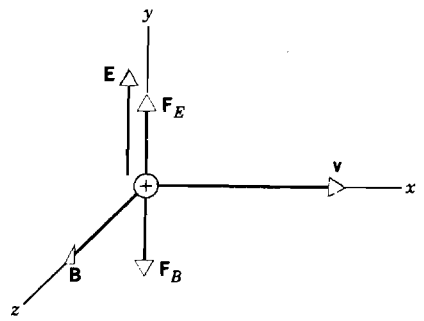


Figura 7 Una partícula cargada positivamente, que se mueve por una región en la que existen campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí, experimenta fuerzas eléctrica $\mathbf{F}_E$ y magnética $\mathbf{F}_B$ opuestas.

orientadas como se muestra en la figura 7, entonces la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ está en la dirección opuesta a la fuerza magnética $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Podemos ajustar los campos magnético y eléctrico hasta que las magnitudes de las fuerzas sean iguales, en cuyo caso la fuerza de Lorentz es cero. En términos escalares,

$$qE = qvB \tag{9}$$

o sea

$$v = \frac{E}{B}. \tag{10}$$

Los campos cruzados **E** y **B** sirven, por tanto, como un *selector de velocidad*: únicamente partículas con velocidad $v = E/B$ pasan por la región sin ser afectadas por los dos campos, mientras que las partículas con otras velocidades se desvían. Este valor de v es independiente de la carga o de la masa de las partículas.

A menudo se obtienen haces de partículas cargadas usando métodos que den una distribución de velocidades (por ejemplo, una distribución térmica como la de la Fig. 11 del capítulo 24). Usando un selector de velocidad podemos aislar partículas con una velocidad determinada del haz. Este principio fue aplicado en 1897 por J. J. Thomson en su descubrimiento del electrón y de la medición de su razón carga/masa. La figura 8 muestra una versión moderna de su aparato. Thomson midió primero la desviación vertical y del haz cuando sólo estaba presente el campo eléctrico. Según el problema muestra 6 del capítulo 28, la desviación es

$$y = -\frac{qEL^2}{2mv^2}. \tag{11}$$

En esta expresión, como en la figura 8, consideramos que la dirección positiva de y es hacia arriba, y E es la *magnitud* del campo eléctrico. La desviación y de una partícula cargada negativamente es positiva en la ecuación 11 y la figura 8.

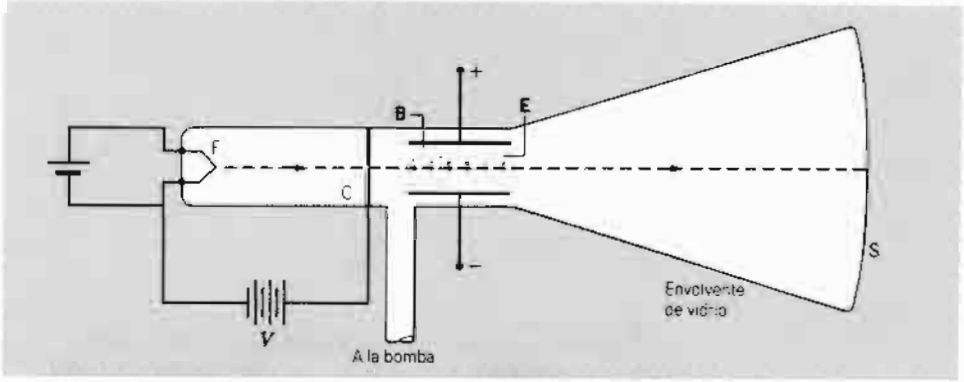


Figura 8 Versión moderna del aparato de J. J. Thomson para medir la razón carga/masa del electrón. El filamento F produce un haz de electrones con una distribución de velocidades. El campo eléctrico **E** se crea al conectar una batería a las terminales de la placa. El campo magnético **B** se genera por medio de bobinas portadoras de corrientes (no mostradas). El haz forma un punto visible cuando choca contra la pantalla S. (Las cruces, que representan colas de flecha, simbolizan a los vectores **B** apuntando hacia adentro de la página.)

Luego, se giró el campo magnético y se ajustó hasta que la desviación del haz fue de cero (equivalente a lo medido cuando no hay campos presentes). En este caso $v = E/B$, y resolviendo para la razón carga/masa con $q = -e$ da

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{B^2L^2}. \qquad (12)$$

El valor que Thomson determinó para e/m (expresado en unidades modernas) fue 1.7×10^{11} C/kg, en buena concordancia con el actual valor de $1.75881962 \times 10^{11}$ C/kg.

Otra aplicación del selector de velocidad es el espectrómetro de masas, un aparato para separar los iones por su masa (véase la Sec. 1-5). En este caso un haz de iones, incluyendo quizá especies de masas diferentes, puede obtenerse de un vapor del material calentado en un horno (véase la Fig. 9) Un selector de velocidad sólo deja pasar iones de una velocidad en particular, y cuando el haz resultante pasa entonces a través de otro campo magnético, las trayectorias de las partículas son arcos circulares (como demostraremos en la sección siguiente) cuyos radios están determinados por el ímpetu o momento de las partículas. Puesto que todas las partículas tienen la misma velocidad, el radio de la trayectoria está determinado por la masa, y cada componente de masa diferente contenido en el haz sigue una trayectoria de un radio diferente. Estos átomos pueden colectarse y medirse, o bien formar con ellos un haz para experimentos posteriores. Véanse los problemas 17 y 22 a 24 para otros detalles sobre la separación de iones por sus masas.

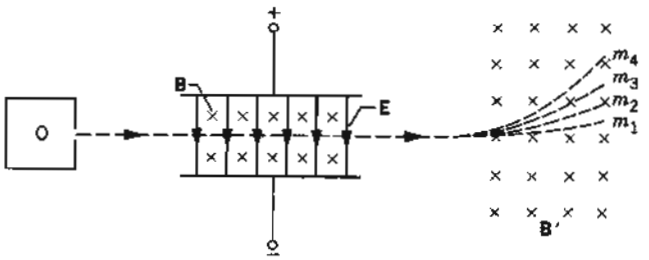


Figura 9 Diagrama esquemático de un espectrómetro de masas. Un haz de átomos ionizados que tiene una mezcla de masas diferentes sale de un horno O y entra a una región de campos **E** y **B** perpendiculares. Únicamente aquellos átomos con velocidades $v = E/B$ pasan a través de la región sin desviarse. Otro campo magnético **B'** desvía a los átomos a lo largo de trayectorias circulares cuyos radios están determinados por las masas de los átomos.

34-3 CARGAS CIRCULANTES

La figura 10 muestra un haz de electrones que viaja a través de una cámara al vacío en la que existe un campo magnético uniforme **B** fuera del plano de la figura. La fuerza magnética deflectora es la única fuerza importante que actúa sobre los electrones. El haz sigue claramente una trayectoria circular en el plano de la figura. Veamos cómo podemos entender este comportamiento.

La fuerza magnética deflectora tiene dos propiedades que afectan a las trayectorias de las partículas cargadas: (1) no cambia la velocidad de las partículas, y (2) siempre actúa perpendicularmente a la velocidad de las partículas. Éstas son exactamente las características que necesitamos para que una partícula se mueva en círculo a velocidad constante, como en el caso de los electrones en la figura 10.

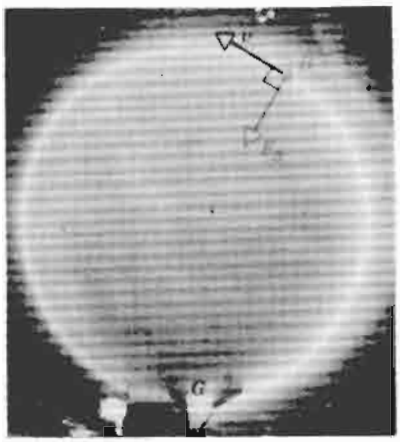


Figura 10 Electrones circulando en una cámara que contiene un gas a baja presión. El haz se hace visible por las colisiones con los átomos del gas. Un campo magnético uniforme **B**, que apunta hacia afuera del plano de la figura en ángulo recto con ella, llena la cámara. La fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ está dirigida radialmente hacia adentro.

Puesto que **B** es perpendicular a **v**, la magnitud de la fuerza magnética puede escribirse $|q|vB$, y la segunda ley de Newton da, con una aceleración centrípeta de v^2/r,

$$|q|vB = m\frac{v^2}{r} \tag{13}$$

o sea

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{p}{|q|B}. \tag{14}$$

Así, el radio de la trayectoria está determinado por el ímpetu p de las partículas, por su carga y por la intensidad del campo magnético. Si, en la figura 10, la fuente de electrones los hubiera proyectado con una rapidez menor, su trayectoria sería en un círculo de radio más pequeño.

La velocidad angular del movimiento circular es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m}, \tag{15}$$

y la frecuencia correspondientes es

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m}. \tag{16}$$

Nótese que la frecuencia asociada con el movimiento circular no depende de la velocidad de la partícula (siempre que $v \ll c$, como lo veremos luego). Entonces, si los electrones en la figura 10 fuesen proyectados a una rapidez menor, requerirían el mismo tiempo para completar el círculo más pequeño que los electrones más rápidos requieren para completar el círculo más grande. La frecuencia dada por la ecuación 16 se llama la *frecuencia ciclotrón*, porque las partículas circulan a esta frecuencia en un ciclotrón. La frecuencia es característica de una partícula determinada que se mueve en un campo magnético determinado, al igual que el péndulo oscilante o el sistema masa-resorte tienen su frecuencia característica.

El ciclotrón

El ciclotrón (Fig. 11) es un acelerador que produce haces de partículas cargadas energéticamente, las que pueden emplearse en experimentos de reacciones nucleares. La figura 12 muestra una vista esquemática de un ciclotrón. Consta de dos objetos metálicos huecos en forma de D llamados *des*. Las "des" están hechas de un material conductor como láminas de cobre y están abiertas a lo largo de sus bordes rectos. Están conectadas a un oscilador eléctrico, el cual crea una diferencia de potencial oscilante entre las des. Un campo magnético es perpendicular al plano de las des. En el centro del instrumento hay una fuente que emite los iones que deseamos acelerar.

Cuando los iones están en el entrehierro entre las des, son acelerados por la diferencia de potencial entre las des. Entonces, entran a una de las des, en donde no experimentan un campo eléctrico (por ser cero el campo eléctrico dentro de un conductor), pero el campo magnético (que no está blindado por las des de cobre) desvía su trayectoria en un semicírculo. Cuando las partículas entran después al entrehierro, el oscilador ha invertido la dirección del campo eléctrico, y las partículas se aceleran de nuevo al cruzar el entrehierro. Con mayor velocidad, recorren una trayectoria de mayor radio, como lo requiere la ecuación 14. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación 16, *les toma exactamente la misma cantidad de tiempo recorrer el semicírculo más grande*; ésta es la característica crítica de la operación del ciclotrón. La frecuencia del oscilador eléctrico debe ser ajustada para ser igual a la frecuencia ciclotrón (determinada por el campo magnético y la carga y masa de la partícula que va a ser acelerada); esta igualdad de frecuencias se llama *condición de resonancia*. Si la condición de resonancia se satisface, las partículas continúan acelerándose en el entrehierro y "navegan" alrededor de los semicírculos, adquiriendo un pequeño incremento de energía en cada circuito, hasta que son desviadas afuera del acelerador.

La velocidad final de las partículas está determinada por el radio R en el que las partículas dejan el acelerador. Según la ecuación 14,

$$v = \frac{|q|BR}{m}, \tag{17}$$

y la energía cinética (no relativista) correspondiente de las partículas es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \tag{18}$$

Los ciclotrones típicos producen haces de protones con energías máximas en el orden de 10 MeV. Para una masa

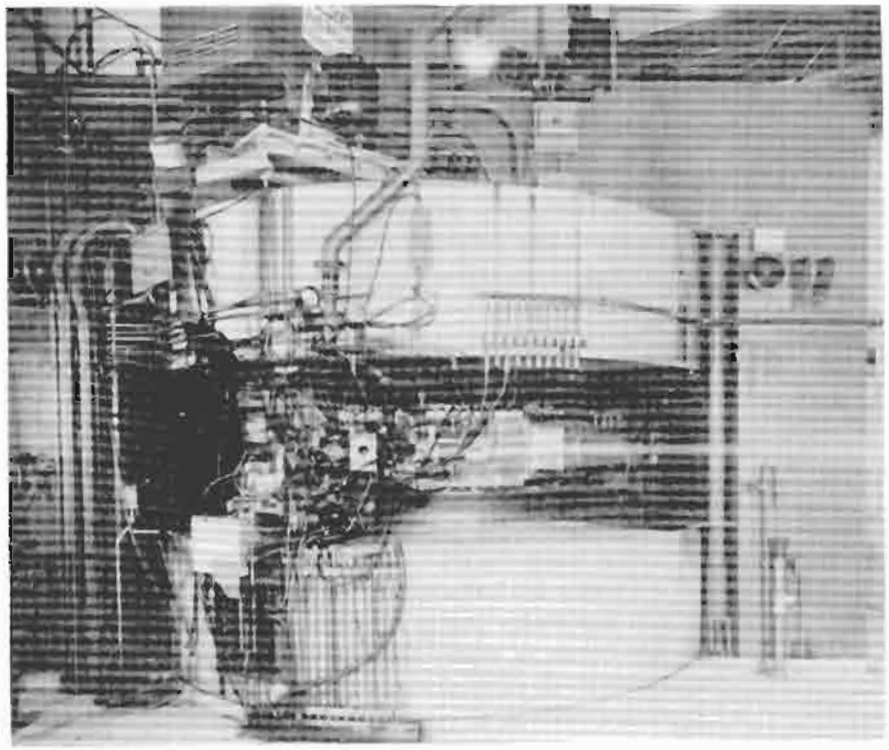


Figura 11 Un acelerador ciclotrón. Los imanes están en las cámaras grandes de arriba y de abajo. El haz es visible cuando emerge del acelerador porque, al igual que el haz de electrones de la figura 10, ioniza las moléculas de aire en las colisiones.

dada, los iones con cargas eléctricas mayores salen con energías que aumentan según el cuadrado de la carga.

Es un tanto sorprendente que, en la ecuación 18, la energía dependa del campo magnético, el cual no participa en la aceleración de las partículas, pero no depende de la diferencia de potencial eléctrico que causa la aceleración. Una diferencia de potencial más grande da a las partículas un "impulso" mayor en cada ciclo; el radio aumenta más rápidamente, y las partículas ejecutan menos ciclos antes de salir del acelerador. Con una diferencia menor, las partículas ejecutan más círculos pero reciben un "impulso" cada vez menor. Así, la energía de las partículas es independiente de la diferencia de potencial.

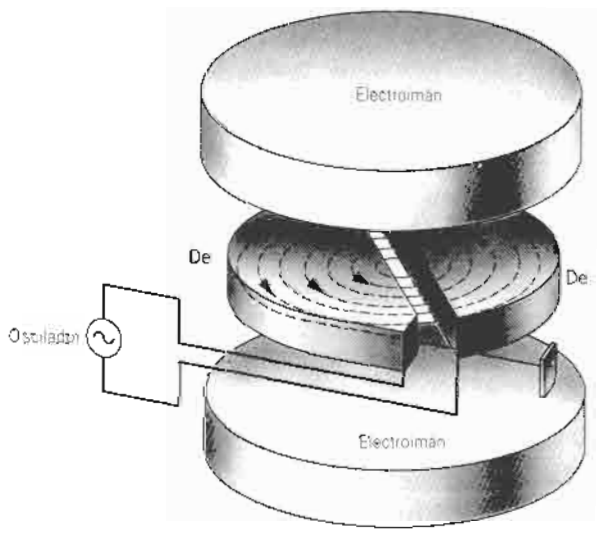


Figura 12 Los elementos de un ciclotrón, mostrando la fuente de iones S y las des. Los electroimanes suministran un campo magnético vertical uniforme. Las partículas se mueven en espiral hacia afuera, dentro de las des huecas, captando energía cada vez que cruzan el entrehierro entre las des.

El sincrotrón

En principio, deberíamos ser capaces de aumentar la energía del haz de partículas en un ciclotrón al aumentar el radio. Sin embargo, por arriba de unos 50 MeV, la condición de resonancia se pierde. Para comprender este efecto debemos regresar a la ecuación 14, en la que usamos el ímpetu clásico mv. Aun para un protón de 50 MeV de energía cinética, $v/c = 0.3$; entonces, la expresión clásica mv no debería utilizarse. No obstante, la expresión $r = p/|q|B$ es correcta, si usamos la expresión relativista para el ímpetu, $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (véase la Ec. 22 del capitulo 9), y así la ecuación 16 se convierte en

$$\nu = \frac{|q|B\sqrt{1 - v^2/c^2}}{2\pi m}. \qquad (19)$$

En este caso, la frecuencia ν ya no es constante (como lo era en la Ec. 16) sino que ahora depende de la velocidad v. La resonancia entre la frecuencia circulante y la frecuencia del oscilador ya no ocurre más.

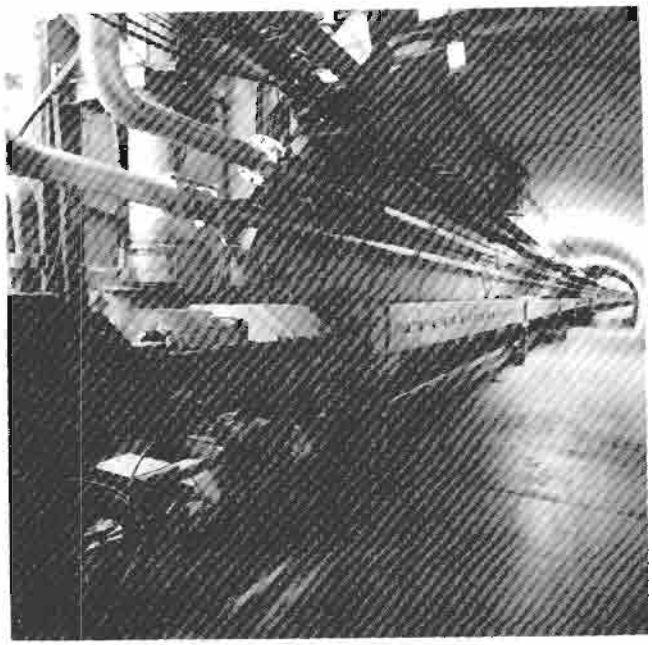


Figura 13 Vista a lo largo del túnel del laboratorio Fermi. El haz acelerado pasa por muchas secciones de imanes individuales, de sección transversal rectangular y de unos 2 m de longitud, varios de los cuales pueden observarse aquí.

Esta dificultad puede superarse al ajustar el campo magnético de tal modo que aumente para radios mayores. Los ciclotrones que operan basados en este principio incluyen a los aceleradores de protones de 500 MeV en los laboratorios de física nuclear que se encuentran cerca de Vancouver, Canadá, y en Zurich, Suiza. El aumento continuo en la energía está limitado por el costo de construir imanes más grandes; ¡para alcanzar una energía de 500 GeV se requeriría un imán con un área de unos 1000 acres!

Las energías más elevadas se logran usando un acelerador con un diseño diferente, llamado *sincrotrón*. Un ejemplo es el sincrotrón de protones de 1000 GeV del Fermi National Accelerator Laboratory, cerca de Chicago (Fig. 13; véase también la Fig. 19 del capítulo 10). En lugar de un solo imán, un sincrotrón usa muchos imanes individuales (alrededor de 3000 en el laboratorio Fermi) a lo largo de la circunferencia de un círculo; cada imán desvía al haz en un ángulo pequeño (0.1°). En un entrehierro en el anillo, un campo eléctrico acelera las partículas. Las partículas se aceleran en ráfagas, y tanto la frecuencia del potencial de aceleración como la intensidad del campo magnético varían conforme se aceleran las partículas, manteniendo por tanto la resonancia para todas las energías y manteniendo constante al radio de la órbita. En el acelerador del laboratorio Fermi (*Fermilab*), los protones dan unas 400,000 revoluciones alrededor de la circunferencia de 4 millas para alcanzar su energía máxima. A las partículas les toma unos 10 s recorrer esta distancia a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, y así el acelerador produce una ráfaga cada 10 s.

Actualmente existen planes para construir un sincrotrón aún más grande, el Superconducting Supercollider (SSC). El anillo del SSC será 20 veces mayor y producirá partículas con 20 veces más energía que el acelerador del Fermilab.*

El espejo magnético

Para atrapar a una partícula cargada en una región del espacio puede usarse un campo magnético no uniforme. La figura 14 muestra una vista esquemática de la operación de un espejo magnético de esta clase. Las partículas cargadas tienden a moverse en círculos con respecto a la dirección del campo. Supongamos que también se estén desviando lateralmente, digamos hacia la derecha, en la figura 14. El movimiento es, por tanto, el de una hélice, como en un resorte helicoidal. El campo aumenta cerca de los extremos de la "botella magnética", y la fuerza tiene una pequeña componente apuntando hacia el centro de la región, la cual invierte la dirección del movimiento de las partículas y provoca que se muevan en espiral en la dirección opuesta, hasta que finalmente se reflejan desde el extremo opuesto. Las partículas continúan viajando de

* Véase "The Superconducting Supercollider", por J. David Jackson, Maury Tigner y Stanley Wojcicki, *Scientific American*, marzo de 1986, pág. 66.

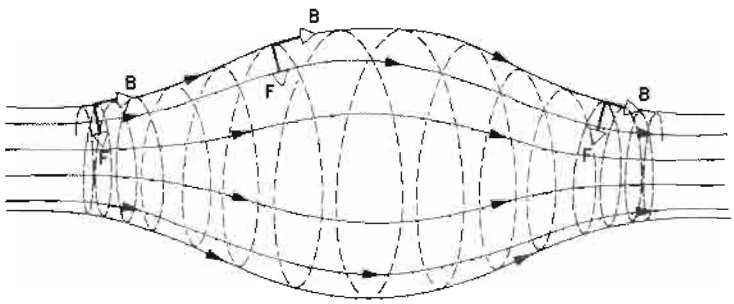


Figura 14 Una partícula cargada moviéndose en espiral en un campo magnético no uniforme. El campo es mayor en los extremos izquierdo y derecho que en la región del centro. Las partículas pueden ser atrapadas, formando una espiral de un lado al otro entre las regiones de campo intenso en los extremos. Nótese que los vectores de la fuerza magnética en cada extremo de esta "botella magnética" tienen componentes que apuntan hacia el centro; son estas componentes de la fuerza las que sirven para confinar a las partículas.

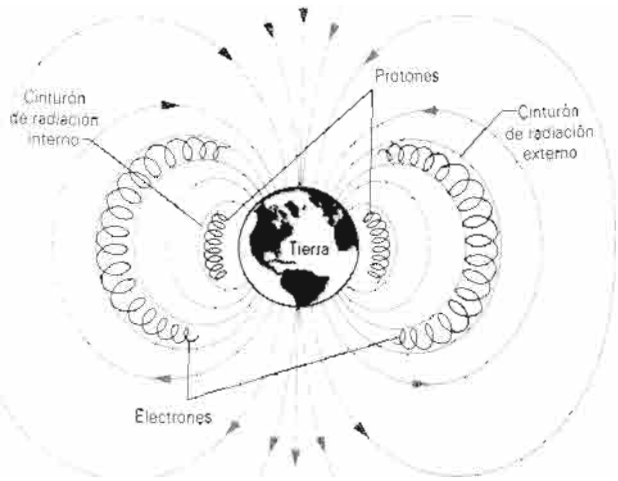


Figura 15 El campo magnético de la Tierra, mostrando a los protones y los electrones atrapados en los cinturones de radiación Van Allen.

un lado a otro, confinadas al espacio entre las regiones de campo intenso. Tal procedimiento se emplea para confinar a los gases calientes ionizados (llamados *plasmas*) que se emplean en las investigaciones sobre la fusión termonuclear controlada.

Un fenómeno similar ocurre en el campo magnético de la Tierra, como se muestra en la figura 15. Los electrones y los protones quedan atrapados en regiones diferentes del campo de la Tierra y se mueven de un lado al otro en espiral entre las regiones de campo intenso cerca de los polos en el tiempo de unos cuantos segundos. Estas partículas rápidas son las responsables de los llamados cinturones de radiación Van Allen que rodean a la Tierra.

Problema muestra 2 Un ciclotrón en particular está diseñado con des de radio $R = 75$ cm y con imanes que pueden proporcionar un campo de 1.5 T. (*a*) ¿A qué frecuencia deberá de fijarse el oscilador si se desea acelerar deuterones? (*b*) ¿Cuál es la energía máxima de los deuterones que puede lograrse?

Solución (*a*) Un deuterón es un núcleo de hidrógeno pesado, con una carga $q = +e$ y una masa de 3.34×10^{-27} kg, alrededor del doble de la masa del hidrógeno ordinario. Al usar la ecuación 16 podemos hallar la frecuencia:

$$\nu = \frac{|q|B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5\ \text{T})}{2\pi(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 1.1 \times 10^{7}\ \text{Hz} = 11\ \text{MHz}.$$

(*b*) La energía máxima ocurre cuando los deuterones salen con el radio máximo R. De acuerdo con la ecuación 18,

$$K = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.5\ \text{T})^2(0.75\ \text{m})^2}{2(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 4.85 \times 10^{-12}\ \text{J} = 30\ \text{MeV}.$$

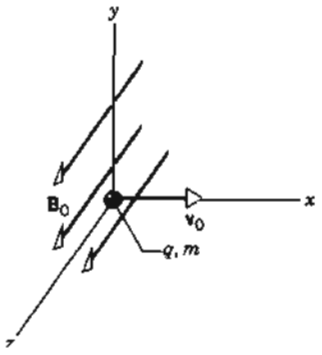


Figura 16 Una partícula de carga q y masa m pasa por el origen con velocidad $\mathbf{v}_0$ en la dirección x en una región en la que existe un campo uniforme $\mathbf{B}_0$ en la dirección z.

Los deuterones de esta energía tienen un alcance en el aire de unos cuantos metros, como lo indica la figura 11.

Cálculo numérico de la trayectoria *(Opcional)*

Consideremos una partícula de carga positiva q y masa m que pasa por el origen moviéndose con rapidez v_0 en la dirección x en $t = 0$ (Fig. 16). Un campo uniforme B_0 es paralelo a la dirección z. ¿Cuál es la trayectoria de la partícula?

Existen tres métodos mediante los cuales puede resolverse este problema: (1) el uso de la ecuación 14 para hallar la trayectoria, sabiendo que debe ser un círculo; (2) el uso de la ecuación 7 para hallar las componentes de la fuerza sobre la partícula y luego resolver las leyes de Newton analíticamente para obtener $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$; y (3) resolver las leyes de Newton numéricamente. Para demostrar una técnica general que pueda aplicarse aun cuando el campo no sea uniforme, elegimos el método 3. Los métodos 1 y 2 se considerarán en los problemas 34 y 35.

Comenzamos por escribir las componentes de la fuerza, usando la ecuación 7 y la expresión para las componentes del producto cruz (Ec. 17 del capítulo 3):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(v_yB_z - v_zB_y)\mathbf{i} + q(v_zB_x - v_xB_z)\mathbf{j} + q(v_xB_y - v_yB_x)\mathbf{k},$$

o bien, con $B_x = B_y = 0$ y $B_z = B_0$,

$$F_x = q(v_yB_z - v_zB_y) = qv_yB_0,$$
$$F_y = q(v_zB_x - v_xB_z) = -qv_xB_0,$$
$$F_z = q(v_xB_y - v_yB_x) = 0.$$

Si no hay fuerza alguna en la dirección z, no puede haber ninguna aceleración en esa dirección. La velocidad inicial no tiene una componente en z, y entonces $v_z = 0$ en todo momento. Por lo tanto, el movimiento está confinado al plano xy. Si sólo se consideran los movimientos x y y, la segunda ley de Newton se convierte en

$$\text{componente } x: \qquad F_x = qv_yB_0 = m\frac{dv_x}{dt},$$

$$\text{componente } y: \qquad F_y = -qv_xB_0 = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Resolvemos estas ecuaciones numéricamente, como lo hicimos en las secciones 6-6, 6-7 y 8-4. El movimiento se divide en

intervalos de tiempo δt que son lo suficientemente pequeños como para que la aceleración pueda considerarse como aproximadamente constante durante el intervalo. Reescribiremos las ecuaciones de arriba en una forma que dé los incrementos de velocidad δv_x y δv_y obtenidos en el intervalo δt:

$$\delta v_x = (qB_0/m)v_y\,\delta t,$$
$$\delta v_y = -(qB_0/m)v_x\,\delta t.$$

Comenzando con el primer intervalo ($t = 0$ a $t = \delta t$), en el que $v_x = v_0$ y $v_y = 0$, hallamos los incrementos de la velocidad y luego usamos las fórmulas de aceleración constante para hallar la posición y velocidad en el final del intervalo:

$$v_x = v_{0x} + \delta v_x$$
$$v_y = v_{0y} + \delta v_y$$
$$x = x_0 + \bar{v}_x\,\delta t = x_0 + \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x)\delta t$$
$$y = y_0 + \bar{v}_y\,\delta t = y_0 + \tfrac{1}{2}(v_{0y} + v_y)\delta t$$

donde $\bar{v}_x$ y $\bar{v}_y$ son las componentes de la velocidad promedio en el intervalo. Continuando con el segundo y los siguientes intervalos, podemos hallar a x y y en cualquier tiempo futuro. El apéndice I ofrece un programa de computadora en BASIC que arroja el cálculo. La figura 17*a* muestra el movimiento resultante, calculado para una partícula alfa que se mueve inicialmente a una velocidad de $v_0 = 3.0 \times 10^6$ m/s en un campo $B_0 = 0.15$ T. Por supuesto no debe sorprendernos que el movimiento siga una trayectoria circular.

La ventaja de este método es que puede adaptarse fácilmente a los casos en que el campo no sea uniforme. En tales casos, el movimiento no es circular, de modo que el método 1 no puede emplearse, y las leyes de Newton pueden no tener una solución analítica obvia, por lo que el método 2 no puede ser posible. El método 3 puede utilizarse cualquiera que sea la naturaleza del campo.

Por ejemplo, supongamos que el campo tiene, una vez más, una componente z únicamente en el plano xy, pero que aumenta con la distancia de la partícula desde el origen de acuerdo con

$$B = B_0\left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right),$$

donde R es el radio de la trayectoria de la partícula en el caso previo (correspondiente al campo B_0). Sólo es necesario un cambio menor en el programa de computadora (véase el apéndice I), y el movimiento resultante se muestra en la figura 17*b*. Este hermoso y simétrico modelo en forma de flor es un resultado sorprendente de este cálculo. Se llevan a cabo cálculos similares para diseñar los campos magnéticos no uniformes que se usan para confinar y enfocar haces de partículas cargadas en multitud de aplicaciones, como los aceleradores y los reactores de fusión. ■

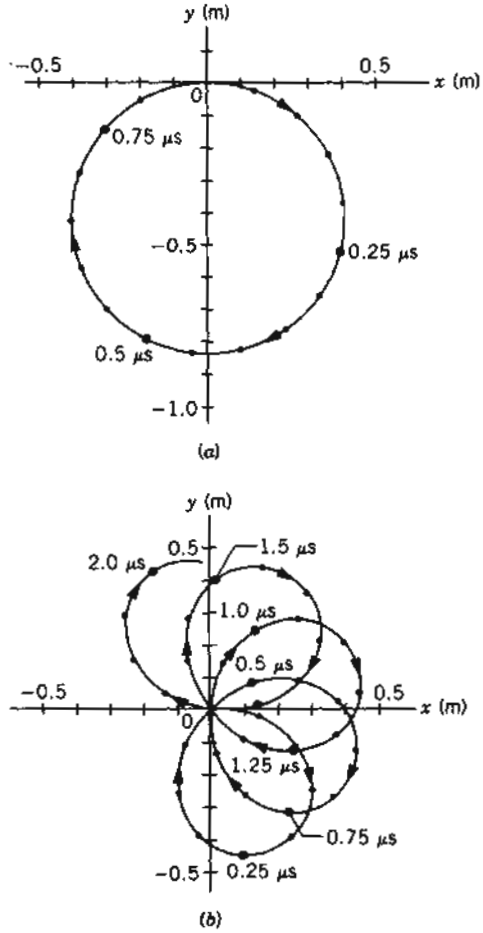


Figura 17 (*a*) La trayectoria de la partícula es un círculo si el campo es uniforme. Los puntos pequeños muestran las posiciones calculadas en intervalos de 0.05 μs. (*b*) La trayectoria de la partícula en el caso de un campo no uniforme en particular.

34-4 EL EFECTO HALL

En 1879, Edwin H. Hall* llevó a cabo un experimento que permitió la medición directa del signo y la densidad del número (número por unidad de volumen) de los portadores de carga en un conductor. El *efecto Hall* desempeña un papel crítico en nuestra comprensión de la conducción eléctrica en los metales y semiconductores.

Consideremos una cinta plana de material de anchura w por la cual fluye una corriente i, como se muestra en la figura 18. La dirección de la corriente i es la convencional, opuesta a la dirección del movimiento de los electrones. Se crea un campo magnético uniforme **B** perpendicular al plano de la cinta, como al situar la cinta entre los polos de un electroimán. Los portadores de carga (electrones, por ejemplo) experimentan una fuerza magnética de desviación $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, como se muestra en la figura, y se mueven hacia la derecha de la cinta. Nótese que las cargas positi-

* En los tiempos de su descubrimiento, Hall era un estudiante de posgrado, de 24 años de edad en la Universidad Johns Hopkins. Su supervisor de investigación era el profesor Henry A. Rowland, quien había demostrado pocos años atrás que una carga eléctrica en movimiento producía el mismo efecto magnético que una corriente eléctrica. Véase "Rowland's Physics", por John D. Miller, *Physics Today*, julio de 1976, pág. 39.

vas que se mueven en la dirección de i experimentan una fuerza de desviación en la *misma* dirección.

La acumulación de carga a lo largo del lado derecho de la cinta (y una correspondiente deficiencia de carga de ese signo en el lado opuesto de la cinta), lo cual constituye el efecto Hall, produce un campo eléctrico **E** en la cinta, como se muestra en la figura 18*b*. En forma equivalente, existe a lo largo de la cinta una diferencia de potencial $V = Ew$, llamada la *diferencia de potencial Hall* (o voltaje Hall). Podemos medir V conectando las puntas de un voltímetro a los puntos x y y de la figura 18. Como lo demostraremos abajo, el signo de V da el signo de los portadores de carga, y la magnitud de V da su densidad (número por unidad de volumen). Si los portadores de carga son electrones, por ejemplo, se forma un exceso de cargas negativas en el lado derecho de la cinta, y el punto y está a un potencial más bajo que el punto x. Esto puede parecer una conclusión obvia en el caso de los metales; sin embargo, deberá tenerse en cuenta que el trabajo de Hall se hizo casi 20 años antes del descubrimiento del electrón por Thomson, y la naturaleza de la conducción eléctrica en los metales no era en absoluto obvia en aquel tiempo.

Supongamos que la conducción en el material sea debida a los portadores de carga de un signo en particular (positivo o negativo) que se mueven a una velocidad de arrastre $\mathbf{v}_d$. Cuando los portadores de carga se mueven, la fuerza magnética los desvía hacia la derecha como se muestra en la figura 18. Conforme las cargas se van concentrando en el lado derecho, crean un campo eléctrico que actúa dentro del conductor para oponerse al movimiento lateral de los portadores de carga adicionales. Finalmente, se llega a un equilibrio, y el voltaje Hall alcanza su máximo; la fuerza magnética lateral ($q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$) es entonces balanceada por la fuerza eléctrica lateral ($q\mathbf{E}$). En términos vectoriales, la fuerza de Lorentz sobre los portadores de carga en estas circunstancias es cero:

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0, \tag{20}$$

o sea

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \tag{21}$$

Puesto que $\mathbf{v}_d$ y **B** forman un ángulo recto, podemos escribir la ecuación 21 en términos de las magnitudes como

$$E = v_d B. \tag{22}$$

Según la ecuación 6 del capítulo 32 podemos escribir la velocidad de arrastre como $v_d = j/ne$, donde j es la densidad de corriente en la cinta y n es la densidad de los portadores de carga. La densidad de corriente j es la corriente i por unidad de área A de sección transversal de la cinta. Si t es el espesor de la cinta, entonces su área A de sección transversal puede escribirse como wt. Al sustituir el campo eléctrico E por V/w, obtenemos

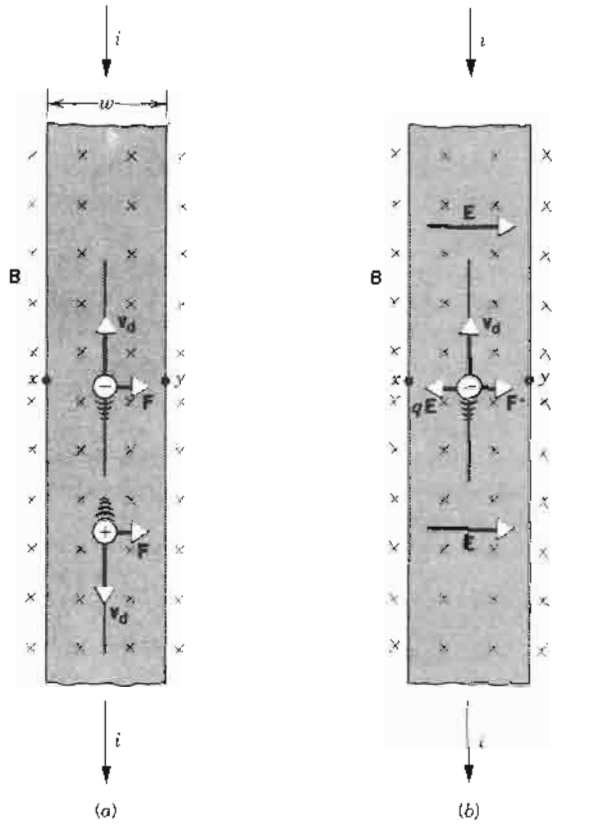


Figura 18 Por una cinta plana de cobre inmersa en un campo magnético **B** fluye una corriente i. (*a*) La situación inmediatamente después de que el campo magnético se activa, y (*b*) la situación en el equilibrio, la cual se deduce rápidamente. Nótese que las cargas negativas se concentran en el lado derecho de la cinta, dejando cargas positivas descompensadas en el lado izquierdo. El punto x está a un potencial más elevado que el punto y.

$$\frac{V}{w} = v_d B = \frac{j}{ne} B = \frac{i}{wtne} B$$

o, al despejar para la densidad de los portadores de carga,

$$n = \frac{iB}{etV}. \tag{23}$$

A partir de una medición de la magnitud de la diferencia V de potencial Hall podemos hallar la densidad del número de los portadores de carga. La tabla 2 muestra un resumen de datos del efecto Hall para varios metales y semiconductores. Para algunos metales monovalentes (Na, K, Cu, Ag) el efecto Hall indica que cada átomo contribuye, aproximadamente, con un electrón libre a la conducción. En otros metales, el número de electrones puede ser de más de uno por átomo (Al) de menos de uno por átomo (Sb). En algunos metales (Be, Zn), la diferencia de potencial Hall muestra que los portadores de carga tienen un signo *positivo*. En este caso la conducción es dominada por *huecos* o *agujeros*, niveles de energía des-

TABLA 2 RESULTADOS DEL EFECTO HALL EN MATERIALES SELECCIONADOS

Material	n (10^{28}/m^3)	*Signo de V*	*Número por átomo*[a]
Na	2.5	-	0.99
K	1.5	-	1.1
Cu	11	-	1.3
Ag	7.4	-	1.3
Al	21	-	3.5
Sb	0.31	-	0.09
Be	2.6	+	2.2
Zn	19	+	2.9
Si (puro)	1.5×10^{-12}	-	3×10^{-13}
Si (tipo n típico)	10^{-7}	-	2×10^{-8}

[a] El número de portadores de carga por átomo del material según se determinó a partir del número por unidad de volumen y la densidad y masa molar del material.

ocupados en la banda de valencia (véase la sección 32-7 y el capítulo 53 de este mismo texto). Los huecos corresponden a la ausencia de un electrón y entonces se comportan como portadores de carga positiva que se mueven a través del material. En algunos materiales, en particular los semiconductores, puede haber contribuciones sustanciales tanto de electrones como de huecos, y la simple interpretación del efecto Hall en términos de conducción libre por un tipo de portador de carga no es suficiente. En este caso debemos usar cálculos más detallados basados en la teoría cuántica.

Problema muestra 3 Una cinta plana de cobre de 150 μm de espesor está colocada en un campo magnético B = 0.65 T perpendicular al plano de la cinta, y por la cinta fluye una corriente i = 23 A. ¿Qué diferencia de potencial Hall V aparecería a lo ancho de la cinta de existir un portador de carga por átomo?

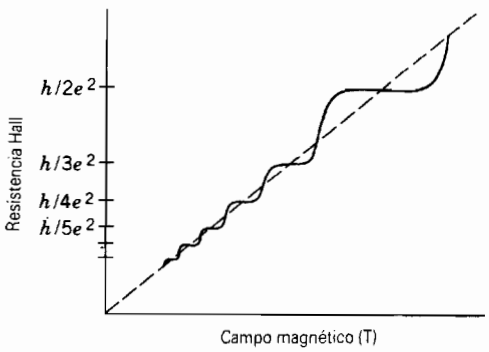


Figura 19 El efecto Hall cuantizado. La línea de trazos muestra el comportamiento clásico esperado. Los escalones muestran el comportamiento cuántico.

Solución En el problema muestra 2 del capítulo 32 calculamos el número de portadores de carga por unidad de volumen para el cobre, suponiendo que cada átomo contribuye con un electrón, y hallamos que

$$n = 8.49 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

Entonces, de la ecuación 23,

$$V = \frac{iB}{net} = \frac{(23 \text{ A})(0.65 \text{ T})}{(8.49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(150 \times 10^{-6} \text{ m})}$$

$$= 7.3 \times 10^{-6} \text{ V} = 7.3 \ \mu\text{V}.$$

Esta diferencia de potencial, aunque pequeña, es fácilmente mensurable.

El efecto Hall cuantizado* *(Opcional)*

Reescribamos la ecuación 23 como:

$$\frac{V}{i} = \frac{1}{etn} B. \tag{24}$$

La cantidad de la izquierda tiene la dimensión de una resistencia (voltaje dividido entre corriente), si bien no es una resistencia en el sentido convencional. Se le llama comúnmente *resistencia Hall*. Podemos determinar la resistencia Hall midiendo el voltaje Hall V en un material que porta una corriente i.

La ecuación 24 indica que se espera que la resistencia Hall aumente linealmente con el campo magnético B en una muestra de material en particular (en donde n y t son constantes). Una gráfica de la resistencia Hall contra B debe ser una línea recta.

En los experimentos llevados a cabo en 1980, el físico alemán Klaus von Klitzing descubrió que, en campos magnéticos elevados y temperaturas bajas (alrededor de 1 K), la resistencia Hall no aumentaba linealmente con el campo, sino que la gráfica mostraba una serie de "escalones", como se muestra en la figura 19. Esto ha llegado a conocerse como el *efecto Hall cuantizado*, y von Klitzing fue galardonado por su descubrimiento con el Premio Nobel de física en 1985.

La explicación de este efecto tiene que ver con las trayectorias circulares en las que los electrones están forzados a moverse por el campo. La mecánica cuántica impide que las órbitas de los electrones se traslapen. Al aumentar el campo, el radio orbital disminuye, permitiendo que se congreguen más órbitas en un lado del material. Puesto que el movimiento orbital de los electrones está cuantizado (permitiéndoseles sólo ciertas órbitas), los cambios en el movimiento orbital ocurren súbitamente y corresponden a los escalones de la figura 19. Una unidad de resistencia natural correspondiente al movimiento orbital es h/e^2, donde h es la constante de Planck, y los escalones de la figura 19 ocurren para resistencias Hall de $h/2e^2$, $h/3e^2$, $h/4e^2$ y así sucesivamente.

La resistencia Hall cuantizada h/e^2 tiene el valor de 25812.806 Ω y se conoce con una precisión de menos de 1 parte en 10^{10}, de modo que el efecto Hall cuantizado ha proporcionado un nuevo patrón para la resistencia. Este estándar, que puede reproducirse exactamente en los laboratorios alrededor del mundo, se convirtió en la nueva representación del ohm en 1990. ■

* Véase "The Quantized Hall Effect", por Bertrand I. Halperin, *Scientific American*, abril de 1986, pág. 52.

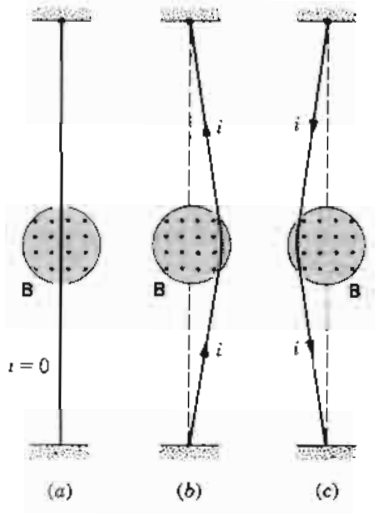


Figura 20 Un alambre flexible pasa entre los polos de un imán. (*a*) No existe corriente en el alambre. (*b*) En el alambre se crea una corriente. (*c*) La corriente se invierte.

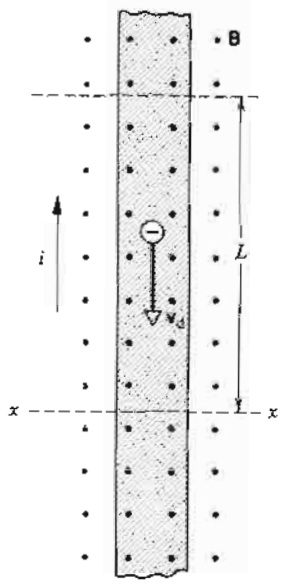


Figura 21 Una vista en acercamiento de una longitud L del alambre de la figura 20*b*. La dirección de la corriente es hacia arriba, lo cual significa que los electrones se mueven hacia abajo. Del plano de la figura sale un campo magnético, de modo que el alambre se desvía hacia la derecha.

34-5 LA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CORRIENTE

Una corriente es un conjunto de cargas en movimiento. Ya que un campo magnético ejerce una fuerza lateral sobre una carga en movimiento, también debe ejercer una fuerza lateral sobre un conductor por el cual fluya una corriente. Esto es, se ejerce una fuerza lateral sobre los electrones de conducción en el conductor, pero puesto que los electrones no pueden escapar lateralmente, la fuerza debe transmitirse al conductor mismo. La figura 20 muestra un conductor que pasa por una región en donde existe un campo magnético **B**. Cuando por el alambre no fluye corriente (Fig. 20*a*), no experimenta desviación. Cuando fluye corriente por el conductor, se desvía (Fig. 20*b*); y cuando la corriente se invierte (Fig. 20*c*), la desviación se invierte. La desviación se invierte también cuando el campo **B** se invierte.

Para entender este efecto, consideremos las cargas individuales que fluyen por el conductor (Fig. 21). Usamos el modelo del electrón libre (Sec. 32-5) para la corriente en un conductor, suponiendo que los electrones se muevan a velocidad constante, una velocidad de arrastre $\mathbf{v}_d$. La dirección real del movimiento de los electrones es, por supuesto, opuesta a la dirección que consideramos para la corriente i en el conductor.

El alambre pasa a través de una región en la que existe un campo uniforme **B**. La fuerza lateral sobre cada electrón (de carga $q = -e$) debida al campo magnético es de $-e\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$. Consideremos la fuerza lateral total sobre un segmento del alambre de longitud L. Sobre cada electrón en el segmento actúa la misma fuerza (en magnitud y dirección), y por lo tanto la fuerza total **F** sobre el segmento es igual al número N de electrones multiplicado por la fuerza sobre cada electrón:

$$\mathbf{F} = -Ne\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \tag{25}$$

¿Cuántos electrones están contenidos en ese segmento de alambre? Si n es la densidad del número (número por unidad de volumen) de electrones, entonces el número total N de electrones en el segmento es nAL, donde A es el área de la sección transversal del alambre. Al sustituir en la ecuación 25, obtenemos

$$\mathbf{F} = -nALe\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \tag{26}$$

La ecuación 6 del capítulo 32 ($v_d = i/nAe$) nos permite escribir la ecuación 26 en términos de la corriente i. Para preservar la relación vectorial de la ecuación 26, definimos que el vector **L** sea igual en magnitud a la longitud del segmento y que apunte en la dirección de la corriente (opuesta a la dirección del flujo de los electrones). Los vectores $\mathbf{v}_d$ y **L** tienen direcciones opuestas, y podemos escribir la relación escalar $nALev_d = iL$ usando vectores como

$$-nALe\mathbf{v}_d = i\mathbf{L}. \tag{27}$$

Si sustituimos la ecuación 27 en la ecuación 26, obtenemos una expresión para la fuerza sobre el segmento:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \tag{28}$$

La ecuación 28 es similar a la ecuación 7 ($\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$), en que cualquiera de ellas puede considerarse como la ecua-

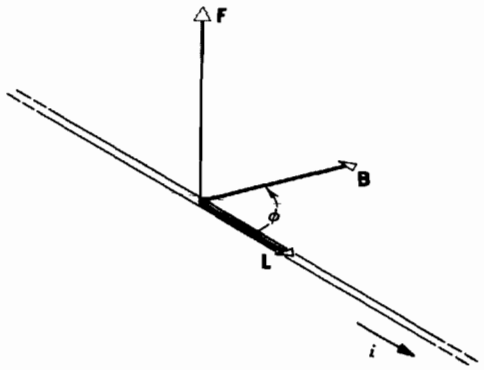


Figura 22 Un segmento de alambre **L** dirigido que forma un ángulo ϕ con un campo magnético. Compárese cuidadosamente con la figura 4.

ción que define al campo magnético. La figura 22 muestra la relación vectorial entre **F**, **L** y **B**; compárese con la figura 4 para ver las semejanzas entre las ecuaciones 28 y 7.

Si el segmento es perpendicular a la dirección del campo, la magnitud de la fuerza puede escribirse

$$F = iLB. \tag{29}$$

Si el alambre no es recto o el campo no es uniforme, podemos imaginar que el alambre está dividido en pequeños segmentos de longitud ds; hacemos a estos segmentos lo suficientemente pequeños como para que sean aproximadamente rectos y el campo sea aproximadamente uniforme. La fuerza sobre cada segmento puede entonces escribirse

$$d\mathbf{F} = i\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \tag{30}$$

Podemos hallar la fuerza total sobre el segmento de longitud L al llevar a cabo una integración apropiada para la longitud.

Problema muestra 4 Un segmento de alambre de cobre, recto y horizontal, porta una corriente i = 28 A. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético necesarias para "hacer flotar" el alambre, es decir, para equilibrar su peso? Su densidad lineal de masa es de 46.6 g/m.

Solución La figura 23 muestra el arreglo. Para una longitud L de alambre tenemos (véase la Ec. 29)

$$mg = iLB,$$

o sea

$$B = \frac{(m/L)g}{i} = \frac{(46.6 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(9.8\ \text{m/s}^2)}{28\ \text{A}}$$
$$= 1.6 \times 10^{-2}\ \text{T} = 16\ \text{mT}.$$

Esto es alrededor de 400 veces la intensidad del campo magnético de la Tierra.

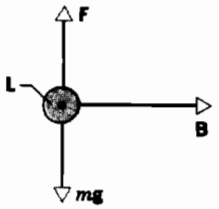


Figura 23 Problema muestra 4. Puede hacerse que un alambre (mostrado en sección transversal) "flote" en un campo magnético, con la fuerza magnética hacia arriba **F** equilibrando al jalón hacia abajo de la gravedad. La corriente en el alambre sale del papel.

Problema muestra 5 La figura 24 muestra un segmento de alambre situado en un campo magnético uniforme **B** que apunta hacia afuera del plano de la figura. Si por el segmento fluye una corriente i, ¿qué fuerza magnética resultante **F** actúa sobre él?

Solución De acuerdo con la ecuación 29, la fuerza magnética que actúa sobre cada sección recta tiene la magnitud

$$F_1 = F_3 = iLB$$

y apunta hacia abajo, como lo muestran las flechas en la figura. La fuerza dF que actúa sobre un segmento del arco de longitud $ds = R\,d\theta$ tiene la magnitud

$$dF = iB\,ds = iB(R\,d\theta)$$

y la dirección radialmente hacia O, el centro del arco. Nótese que sólo tiene efecto la componente hacia abajo ($d\mathbf{F}$ sen θ) de este elemento de fuerza. La componente horizontal ($d\mathbf{F}$ cos θ) se cancela por una componente horizontal dirigida en oposición debido a un segmento situado simétricamente en el extremo opuesto del arco.

La fuerza total sobre el arco central apunta hacia abajo y está dada por

$$F_2 = \int_0^{\pi} dF \operatorname{sen}\theta = \int_0^{\pi} (iBR\,d\theta) \operatorname{sen}\theta$$
$$= iBR \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2iBR.$$

La fuerza resultante sobre todo el alambre es, entonces, de

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = iLB + 2iBR + iLB$$
$$= iB(2L + 2R).$$

Nótese que esta fuerza es la misma que aquella que actuaría sobre un alambre recto de longitud $2L + 2R$. Esto sería así sin importar cuál sea la forma del segmento central, mostrado como un semicírculo en la figura 24. ¿Puede usted convencerse de que esto sea así?

Problema muestra 6 Una bobina rectangular de alambre (Fig. 25), que consta de nueve vueltas y tiene una anchura a = 0.103 m y una longitud b = 0.685 m está suspendida de uno de los platillos de una balanza. Una porción de la bobina pasa a través de una región en la cual existe un campo magnético uniforme de magnitud B perpendicular al plano de la bobina,

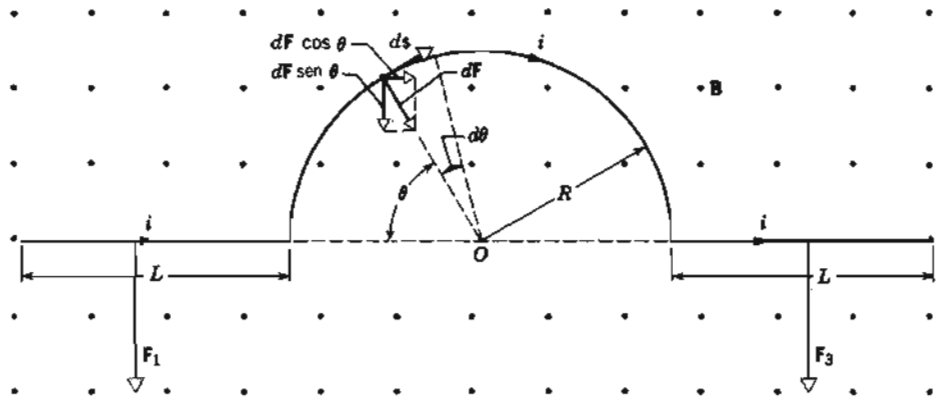


Figura 24 Problema muestra 5. Un segmento de alambre por el cual fluye una corriente i está inmerso en un campo magnético. La fuerza resultante sobre el alambre está dirigida hacia abajo.

como se muestra en la figura 25. El aparato se ajusta cuidadosamente para que el peso de la bobina esté balanceado por un peso igual (no mostrado) en el platillo opuesto. Se establece una corriente $i = 0.224$ A en el alambre, y se halla que para regresar a la balanza a su estado de equilibrio previo, debe añadirse una masa $m = 13.7$ g en el platillo derecho de la balanza. Encuentre la magnitud y la dirección del campo magnético.

Solución Ya sea que el campo vaya hacia adentro o hacia afuera del plano de la página de la figura 25, las fuerzas sobre las dos porciones inferiores de los costados largos de la bobina se cancelan. Por lo tanto consideramos sólo la fuerza F sobre la parte inferior de la bobina, la cual tiene una magnitud de iaB en cada uno de los nueve segmentos del extremo inferior de la bobina que atraviesan el campo. Puesto que fue necesario aumentar el peso al mismo platillo del que cuelga la bobina, la fuerza magnética sobre el segmento de abajo debe apuntar hacia arriba; la fuerza magnética hacia arriba F es balanceada por el peso adicional mg en ese lado. Para que la fuerza sea hacia arriba, el campo magnético debe apuntar hacia *adentro* del plano del papel (compruébese esto con la regla de la mano derecha para los productos vectoriales). La condición de equilibrio es

$$mg = F = 9(iaB)$$

o sea

$$B = \frac{mg}{9ia} = \frac{(0.0137 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{9(0.224 \text{ A})(0.103 \text{ m})} = 0.647 \text{ T}.$$

Puede emplearse un dispositivo que opere basado en este principio general para proporcionar mediciones exactas de campos magnéticos.

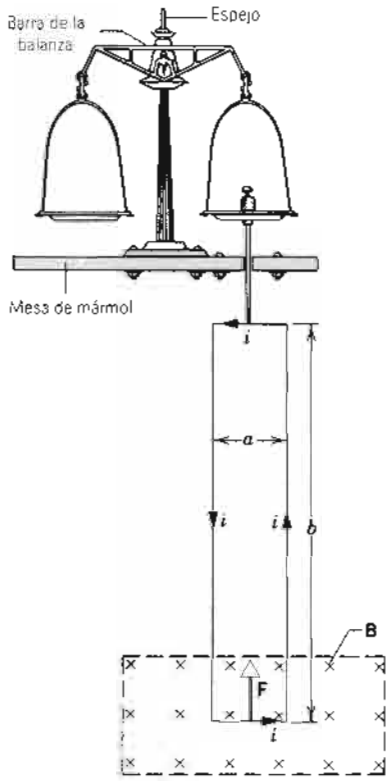


Figura 25 Problema muestra 6. Este aparato puede emplearse para medir **B**. Un haz de luz reflejado por el espejo en la barra de la balanza proporciona una indicación sensible de la desviación.

34-6 MOMENTO DE TORSIÓN EN UNA ESPIRA DE CORRIENTE

Cuando una espira de alambre que porta una corriente se coloca dentro de un campo magnético, esa espira puede experimentar un momento de torsión al cual tiende a hacerla girar alrededor de un eje en particular (el cual, por generalidad, podemos considerar que pasa por el centro de masa de la espira). Este principio es la base de la operación de los motores eléctricos, así como de los galvanómetros en los que se basan los medidores analógicos de corriente y de voltaje. En esta sección consideraremos este momento de torsión.

La figura 26 muestra una espira rectangular de alambre dentro de un campo magnético uniforme **B**. Para simplificar, sólo se muestra la espira; suponemos que los alambres que llevan la corriente a la espira y desde ésta están entrelazados de modo que no existe una fuerza magnética neta sobre ellos. Suponemos también que la espira está

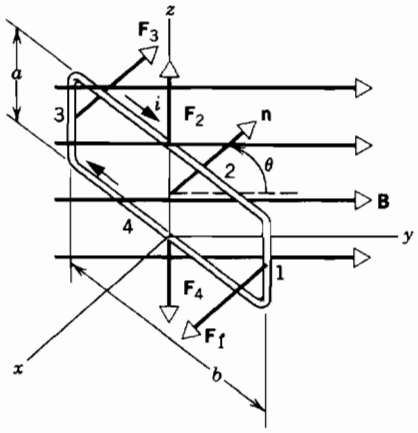


Figura 26 Una espira rectangular de alambre que porta una corriente i está situada dentro de un campo magnético uniforme. El vector unitario **n** es normal al plano de la espira y forma un ángulo θ con el campo. Un momento de torsión actúa para hacer girar a la espira alrededor del eje z de modo que **n** se alinie con **B**.

suspendida de tal forma que puede girar libremente alrededor de cualquier eje.

El campo uniforme **B** está en la dirección y del sistema de coordenadas de la figura 26. La espira está orientada de modo que el eje z se encuentra en su plano. En esta orientación, los lados 1 y 3 de la espira son perpendiculares a **B**. (En la sección siguiente consideraremos el caso más general en el que la espira tiene una orientación arbitraria). El plano de la espira está indicado por un vector unitario **n** que es perpendicular al plano; la dirección de **n** se determina mediante la regla de la mano derecha, de modo que si los dedos de su mano derecha indican la dirección de la corriente en la espira, el pulgar da la dirección de **n**. El vector **n** forma un ángulo θ con **B**.

La fuerza neta sobre espira puede determinarse usando la ecuación 28, $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$, para calcular la fuerza sobre cada uno de sus cuatro lados. (Si los lados de la espira no fuesen rectos, sería necesario emplear la ecuación 30 para hallar la fuerza magnética sobre ella.) Como se indicó en la figura 22, la fuerza sobre cada segmento debe ser perpendicular tanto a **B** como a la dirección de la corriente en el segmento. Así, la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_2$ en el lado 2 (de longitud b), es de

$$F_2 = ibB \operatorname{sen}(90° - \theta) = ibB \cos\theta. \qquad (31)$$

Esta fuerza apunta en la dirección z positiva. La fuerza $\mathbf{F}_4$ sobre el lado 4 tiene la magnitud

$$F_4 = ibB \operatorname{sen}(90° + \theta) = ibB \cos\theta, \qquad (32)$$

y apunta en la dirección z negativa. Estas fuerzas son iguales y opuestas, por lo que no contribuyen a la fuerza neta sobre la espira. Además, tienen la misma línea de acción, de modo que el momento de torsión neto ejercido por estas dos fuerzas es también cero.

Las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ tienen una magnitud común de iaB. Tienen direcciones opuestas paralela y antiparalela al eje x en la figura 26, de modo que tampoco contribuyen a la fuerza neta sobre la espira. La suma de las cuatro fuerzas da una resultante de cero, por lo que llegamos a la conclusión de que el centro de masa de la espira no se acelera bajo la influencia de la fuerza magnética neta.

Sin embargo, los momentos de torsión de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ *no* se cancelan, porque no tienen la misma línea de acción. Estas dos fuerzas tienden a hacer girar a la espira alrededor de un eje paralelo al eje z. *La dirección de la rotación tiende a llevar a* **n** *en alineación con* **B**. Esto es, en la situación que se muestra en la figura 26, la espira giraría en el sentido de las manecillas del reloj cuando se la ve desde el eje z positivo, reduciéndose por tanto el ángulo θ. Si se invierte la corriente en la espira, **n** tendría la dirección opuesta, y la espira giraría nuevamente a través del ángulo (igual a $\pi - \theta$ en la Fig. 26) necesario para llevar a **n** al alineamiento con **B**.

Las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ tienen brazos de palanca en torno al eje z de $(b/2)\operatorname{sen}\theta$, y así el momento de torsión total sobre la espira es

$$\tau = 2(iaB)(b/2)\operatorname{sen}\theta = iabB \operatorname{sen}\theta, \qquad (33)$$

donde el factor 2 entra puesto que ambas fuerzas contribuyen igualmente al momento de torsión. Nótese que si **n** ya es paralela a **B** (de modo que $\theta = 0$) no hay momento de torsión.

La ecuación 33 da el momento de torsión en una sola espira en el campo. Si tenemos una bobina de N vueltas (tal como se puede encontrar en un motor o en un galvanómetro), la ecuación 33 da el momento de torsión en cada vuelta, y el momento de torsión total en la bobina sería

$$\tau = NiAB \operatorname{sen}\theta, \qquad (34)$$

en donde hemos sustituido a A, el área del circuito cerrado rectangular, por el producto ab.

Se puede demostrar que la ecuación 34 se cumple, por lo general, *para toda espira plana de área A, sea o no rectangular*. Generalizaremos este resultado en la siguiente sección.

Problema muestra 7 Voltímetros y amperímetros analógicos, en los que la lectura se muestra por la desviación de una aguja sobre una escala, funcionan al medir el momento de torsión ejercido por un campo magnético en una espira de corriente. La figura 27 muestra los rudimentos de un *galvanómetro*, en los que se basan los amperímetros y voltímetros analógicos. La bobina tiene una altura de 2.1 cm de altura y 1.2 cm de ancho; tiene 250 vueltas y está montada de manera que pueda girar alrededor de su eje en un campo magnético radial uniforme con $B = 0.23$ T. Un resorte proporciona un contramomento de torsión que equilibra al momento de torsión

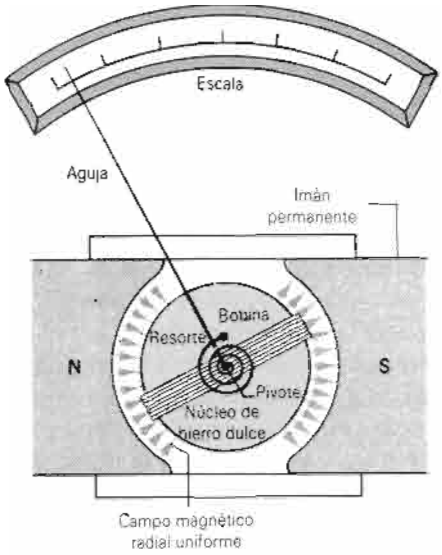


Figura 27 Problema muestra 7. Los rudimentos de un galvanómetro. Dependiendo del circuito externo, este aparato puede funcionar como voltímetro o como amperímetro.

magnético, resultando en una desviación angular uniforme ϕ que corresponde a una corriente estacionaria dada i en la espira. Si una corriente de 100 μA produce una desviación angular de 28° (= 0.49 rad), ¿cuál debe ser la constante de torsión κ del resorte?

Solución Al hacer que el momento de torsión magnético (Ec. 34) sea igual al momento de torsión restaurador $\kappa\phi$ del resorte tenemos que

$$\tau = NiAB \operatorname{sen}\theta = \kappa\phi,$$

donde ϕ es la desviación angular de la aguja y A (= 2.52×10^{-4} m^2) es el área de la espira. Nótese que la normal al plano de la espira (esto es, la aguja) forma siempre un ángulo recto con el campo magnético (radial) de modo que $\theta = 90°$ para todas las posiciones de la aguja.

Al despejar, κ obtenemos

$$\kappa = \frac{NiAB \operatorname{sen}\theta}{\phi}$$

$$= \frac{(250)(100 \times 10^{-6}\ \text{A})(2.52 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(0.23\ \text{T})(\operatorname{sen}90°)}{0.49\ \text{rad}}$$

$$= 3.0 \times 10^{-6}\ \text{N}\cdot\text{m/rad}.$$

Muchos amperímetros y voltímetros modernos son de tipo digital, de lectura directa, y funcionan de modo que no contienen una bobina móvil.

34-7 EL DIPOLO MAGNÉTICO

En la sección 28-7 consideramos el efecto de un campo *eléctrico* **E** sobre un dipolo eléctrico, que describimos como dos cargas iguales y opuestas separadas por una distancia. Al definir un momento dipolar eléctrico **p** de manera específica, hallamos (véase la Ec. 37 del capítulo 28) que el campo eléctrico ejercía un momento de torsión sobre el dipolo eléctrico que tendía a hacer girar al dipolo de modo que **p** se alineaba con **E**. Esta afirmación es muy similar a la expresada al final de la sección anterior con respecto al efecto de un campo magnético sobre una espira de corriente: el momento de torsión en la espira tiende a hacerla girar de modo que el vector normal **n** se alinea con **B**. Esta semejanza indica que podemos usar ecuaciones similares a las del dipolo eléctrico para analizar el efecto de un campo magnético sobre una espira de corriente. La semejanza entre las líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico (véanse las Figs. 8 y 9*b* del capítulo 28) y las líneas del campo magnético de un imán de barra, el cual es un ejemplo de un *dipolo magnético* nos lleva a plantear esta analogía (véanse las Figs. 1 y 5 de este capítulo).

El momento de torsión sobre un dipolo eléctrico es (Ec. 37 del capítulo 28)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \tag{35}$$

lo cual puede escribirse también en términos de magnitudes como $\tau = pE \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre **p** y **E**. La ecuación 34 de este capítulo da el momento de torsión sobre una bobina de un conductor por el cual fluye corriente como $\tau = NiAB \operatorname{sen}\theta$. La semejanza de estas dos expresiones es notable. Definamos, por analogía con el caso eléctrico, que el vector μ, el *momento dipolar magnético*, tiene una magnitud

$$\mu = NiA \tag{36}$$

y dirección paralela a **n** (Fig. 26). Esto es, con los dedos de la mano derecha en la dirección de la corriente, el pulgar da la dirección de μ. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 34 como $\tau = \mu B \operatorname{sen}\theta$ o, en forma vectorial, como

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \tag{37}$$

Si bien no lo hemos demostrado en general, la ecuación 37 da la descripción más general del momento de torsión ejercido sobre *cualquier* espira plana de corriente dentro de un campo magnético uniforme **B**; se cumple cualquiera que sea la forma de la espira (bobina) o el ángulo entre su plano y el campo.

Podemos continuar la analogía entre los campos eléctrico y magnético si consideramos el trabajo que debe realizarse para cambiar la orientación de un dipolo magnético dentro de un campo magnético y relacionamos ese trabajo con la energía potencial de un dipolo magnético dentro de un campo magnético. Podemos escribir la energía potencial como

$$U = -\mu B \cos\theta = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}, \tag{38}$$

para un dipolo magnético cuyo momento μ forme un ángulo θ con **B**. Esta ecuación es similar a la expresión correspondiente para un dipolo eléctrico, $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ (Ec. 42 del capítulo 28).

La fuerza magnética, como todas las fuerzas que dependen de la velocidad, es, en general, *no* conservativa y, por lo tanto, no puede generalmente representarse por una energía potencial. En este caso especial, en que el momento de torsión sobre un dipolo depende de su posición en relación con el campo, *es* posible definir una energía potencial para el *sistema* que consta del dipolo dentro del campo. Nótese que la energía potencial no es característica del campo únicamente, sino del dipolo *dentro* del campo. En general, no podemos definir una "energía potencial magnética" escalar de una carga puntual o un "potencial magnético" del campo mismo como lo hicimos para los campos eléctricos en el capítulo 30.

Una gran variedad de sistemas físicos presentan momentos dipolares magnéticos: la Tierra, los imanes de barra, las espiras de corriente, los átomos, los núcleos y las partículas elementales. La tabla 3 da algunos valores típicos y, además, en el capítulo 37 pueden hallarse más detalles sobre los momentos dipolares magnéticos.

Nótese que la ecuación 38 indica unidades para μ de energía dividida entre el campo magnético, o J/T. La ecuación 36 da unidades de corriente multiplicadas por el área, o $A \cdot m^2$. Podemos demostrar que estas dos unidades son equivalentes, y que la elección entre ellas es de simple conveniencia. Como se indicó en el ejemplo del nitrógeno, los momentos dipolares magnéticos nucleares son, típicamente, de tres a seis órdenes de magnitud menores que los momentos dipolares magnéticos atómicos. De esta observación se deducen inmediatamente varias conclusiones. (1) Los electrones no pueden ser constituyentes del núcleo; de otro modo los momentos dipolares magnéticos nucleares tendrían, típicamente, magnitudes casi iguales que la del electrón: (2) Los efectos magnéticos ordinarios en los materiales están determinados por el magnetismo *atómico*, más bien que por el magnetismo *nuclear*, mucho más débil. (3) Para ejercer un momento de torsión en particular, necesario para alinear a los dipolos nucleares se requiere un campo magnético de entre tres y seis órdenes de magnitud más grande que el necesario para alinear a los dipolos atómicos.

TABLA 3 VALORES SELECCIONADOS DE MOMENTOS DIPOLARES MAGNÉTICOS

Sistema	μ(J/T)
El núcleo del átomo de hidrógeno	2.0×10^{-28}
El protón	1.4×10^{-26}
El electrón	9.3×10^{-24}
El átomo de nitrógeno	2.8×10^{-23}
Una bobina pequeña típica[a]	5.4×10^{-6}
Un imán de barra pequeño	5
Una bobina superconductora	400
La Tierra	8.0×10^{22}

[a] La del problema muestra 8, por ejemplo.

Problema muestra 8 (*a*) ¿Cuál es el momento dipolar magnético de la bobina del problema muestra 7, suponiendo que por ésta fluye una corriente de 85 μA? (*b*) El momento dipolar magnético de la bobina se alinea con un campo magnético externo cuya intensidad es de 0.85 T. ¿Cuánto trabajo debe realizar un agente externo para hacer girar a la bobina en 180°?

Solución (*a*) La magnitud del momento dipolar magnético de la bobina, cuya área, A, es de 2.52×10^{-4} m^2, es

$$\begin{aligned}\mu &= NiA \\ &= (250)(85 \times 10^{-6}\ \text{A})(2.52 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \\ &= 5.36 \times 10^{-6}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 = 5.36 \times 10^{-6}\ \text{J/T}.\end{aligned}$$

La dirección de μ, como se muestra en la figura 27, debe ser la de la aguja. El lector puede verificarlo como sigue: Si suponemos que μ es la dirección de la aguja, el momento de torsión predicho por la ecuación 37 movería efectivamente a la aguja en sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la escala.

(*b*) El trabajo externo es igual al aumento en la energía potencial del sistema, el cual es

$$\begin{aligned}W = \Delta U &= -\mu B \cos 180° - (-\mu B \cos 0°) = 2\mu B \\ &= 2(5.36 \times 10^{-6}\ \text{J/T})(0.85\ \text{T}) = 9.1 \times 10^{-6}\ \text{J} = 9.1\ \mu\text{J}.\end{aligned}$$

Esto equivale aproximadamente al trabajo necesario para levantar una tableta de aspirina a una altura vertical de unos 3 mm.

PREGUNTAS

1. De los tres vectores en la ecuación $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, ¿cuáles pares forman siempre un ángulo recto? Cuáles pueden tener cualquier ángulo entre ellos?

2. ¿Por qué no definimos simplemente a la dirección del campo magnético **B** como la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre una carga en movimiento?

3. Imagínese que está sentado en un salón con su espalda contra la pared y que un haz de electrones, que viaja horizontalmente de la pared posterior a la del frente, se desvía a su derecha. ¿Cuál es la dirección del campo magnético uniforme que existe en el salón?
4. ¿Cómo podríamos descartar que las fuerzas entre dos imanes son fuerzas electrostáticas?
5. Si un electrón no se desvía al pasar por cierta región del espacio, ¿podemos estar seguros de que no existe un campo magnético en dicha región?
6. Si un electrón en movimiento se desvía lateralmente al pasar por cierta región del espacio, ¿podemos estar seguros de que existe un campo magnético en dicha región?
7. Un haz de electrones puede ser desviado ya sea por un campo eléctrico o por un campo magnético. ¿Es un método mejor que el otro? ¿Es más fácil en cualquier sentido?
8. Los campos eléctricos pueden representarse por mapas de superficies equipotenciales. ¿Puede hacerse lo mismo para los campos magnéticos? Explique.
9. ¿Una fuerza magnética es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta. ¿Podemos definir a la energía potencial magnética como definimos a la energía potencial eléctrica o a la energía potencial gravitatoria?
10. Una partícula cargada pasa a través de un campo magnético y se desvía. Esto significa que una fuerza actuó sobre ella y que cambió su ímpetu. Donde existe una fuerza debe haber también una fuerza de reacción. ¿Sobre qué objeto actúa ésta?
11. En el experimento de Thomson despreciábamos las desviaciones producidas por el campo gravitatorio y el campo magnético de la Tierra. ¿Qué errores introdujimos allí?
12. Imagine que el salón donde está usted sentado esté ocupado por un campo magnético uniforme que apunta verticalmente hacia abajo. Al centro del salón son proyectados súbitamente dos electrones a la misma velocidad inicial pero en direcciones opuestas. (*a*) Describa sus movimientos. (*b*) Describa sus movimientos si una partícula es un electrón y la otra un positrón, es decir, un electrón cargado positivamente. (Los electrones se volverán gradualmente más lentos al chocar con las moléculas de aire contenidas en el salón.)
13. La figura 28 muestra las trayectorias de dos electrones (e^-) y un positrón (e^+) en una cámara de burbujas. Un campo magnético ocupa la cámara, perpendicularmente al plano de la figura. ¿Por qué son las trayectorias espirales y no círculos? ¿Qué puede usted advertir acerca de las partículas a partir de sus trayectorias? ¿Cuál es la dirección del campo magnético?
14. ¿Cuáles son las funciones principales de (*a*) el campo eléctrico y (*b*) el campo magnético en el ciclotrón?
15. En un campo magnético determinado, ¿cuál tendría la mayor frecuencia de revolución, un protón o un electrón, viajando ambos a la misma velocidad? Considere los efectos relativistas.
16. ¿Qué hecho capital hace posible la operación de un ciclotrón convencional? No considere los efectos relativistas.
17. Un alambre de cobre desnudo sale de una de las paredes de un salón, cruza el salón, y sale por la pared opuesta. Se le indica a usted que existe una corriente estacionaria en el alambre. ¿Cómo puede determinar su dirección? Describa tantas maneras como pueda imaginarse. Puede usar cualquier pieza de equipo razonable, pero no puede cortar el alambre.

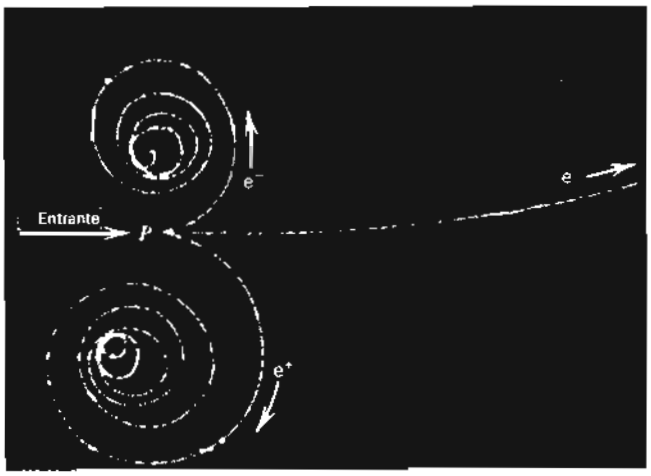


Figura 28 Pregunta 13.

18. Estudie la posibilidad de usar el efecto Hall para medir la intensidad B de un campo magnético.
19. (*a*) Al medir las diferencias de potencial Hall, ¿por qué debemos tener cuidado de que los puntos x y y de la figura 18 estén exactamente opuestos entre sí? (*b*) Si uno de los contactos puede moverse, ¿qué procedimiento podríamos seguir para ajustarlo y estar seguros de que los dos puntos están ubicados correctamente?
20. En la sección 34-5, afirmábamos que un campo magnético **B** ejerce una fuerza lateral sobre los electrones de conducción en, por ejemplo, un alambre de cobre que porte una corriente i. Tácitamente hemos supuesto que esta misma fuerza actúa sobre el conductor propiamente dicho. ¿Hay algunos pasos que faltan en este argumento? De ser así, diga cuáles son.
21. Un alambre recto de cobre portador de una corriente i está inmerso en un campo magnético **B**, formando con él un ángulo recto. Sabemos que **B** ejerce una fuerza lateral sobre los electrones libres (o de conducción). ¿Sucede lo mismo con los electrones ligados? Después de todo, no están en reposo. Analícelo.
22. ¿Se cumple la ecuación 28 ($\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$) para un alambre recto cuya sección transversal varíe irregularmente a lo largo de su longitud (un alambre "abultado")?
23. Una corriente dentro de un campo magnético experimenta una fuerza. Por lo tanto, sería posible bombear líquidos conductores enviando una corriente por el líquido (en la dirección apropiada) y haciéndolo pasar a través de un campo magnético. Diseñe esta clase de bomba. Este principio se emplea para bombear sodio líquido (un conductor, si bien altamente corrosivo) en algunos reactores nucleares, donde se le emplea como refrigerante. ¿Qué ventajas tendría tal bomba?

24. Un campo magnético uniforme ocupa cierta región cúbica del espacio. ¿Puede dispararse un electrón hacia este cubo desde el exterior de modo que viaje en una trayectoria circular cerrada adentro del cubo?
25. Un conductor tiene una carga neta nula aun cuando por él pase una corriente. Entonces, ¿por qué un campo magnético ejerce una fuerza sobre él?
26. Usted quiere modificar un galvanómetro (véase el problema muestra 7) para convertirlo en (*a*) un amperímetro y (*b*) en un voltímetro. ¿Qué necesitaría hacer en cada caso?
27. Una espira rectangular de corriente tiene una orientación arbitraria dentro de un campo magnético externo. ¿Cuánto trabajo se requiere para hacer girar a la espira alrededor de un eje perpendicular a su plano?
28. La ecuación 37 ($\tau = \mu \times \mathbf{B}$) muestra que no existe un momento de torsión sobre una espira de corriente dentro de un campo magnético externo cuando el ángulo entre el eje de la espira y el campo es (*a*) 0° o (*b*) 180°. Analice la naturaleza del equilibrio (es decir, si es estable, neutro o inestable) para esas dos posiciones.
29. En el problema muestra 8 demostramos que el trabajo necesario para hacer girar a una espira de corriente extremo por extremo dentro de un campo magnético externo es de $2\mu B$. ¿Se cumple este resultado independientemente de qué orientación inicial tenía la espira?
30. Imagínese que el salón en el que se encuentra usted sentado esté ocupado por un campo magnético uniforme y apunte verticalmente hacia arriba. Una espira circular de alambre tiene su plano horizontal. ¿Para qué dirección de la corriente en la espira, visto desde arriba, estará ésta en equilibrio estable con respecto a las fuerzas y momentos de torsión de origen magnético?
31. El momento de torsión que un campo magnético ejerce sobre un dipolo magnético puede emplearse para medir la intensidad de ese campo magnético. Para una medición exacta, ¿importa que el momento dipolar sea pequeño o no? Recuerde que, en el caso de la medición de un campo eléctrico, la carga de prueba tenía que ser tan pequeña como fuese posible para no perturbar la fuente del campo.
32. Se le da a usted una esfera carente de fricción del tamaño de una pelota de ping-pong y se le indica que ésta contiene un dipolo magnético. ¿Qué experimentos realizaría para hallar la magnitud y la dirección de su momento dipolar magnético?

PROBLEMAS

Sección 34-2 La fuerza magnética sobre una carga en movimiento

1. Cuatro partículas siguen las trayectorias mostradas en la figura 29 al pasar por el campo magnético que existe allí. ¿Qué puede uno concluir con respecto a la carga de cada partícula?

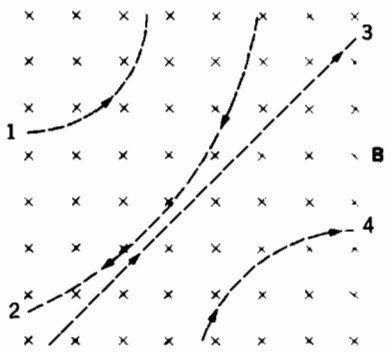


Figura 29 Problema 1.

2. Un electrón en el tubo de una cámara de TV se mueve a razón de 7.2×10^6 m/s dentro de un campo magnético de 83 mT de intensidad. (*a*) Sin conocer la dirección del campo, ¿cuáles serían las magnitudes mayor y menor de la fuerza que el electrón pudiera experimentar debido al campo? (*b*) En un punto, la aceleración del electrón es de 4.9×10^{16} m/s^2. ¿Cuál es el ángulo entre la velocidad del electrón y el campo magnético?
3. Un campo eléctrico de 1.5 kV/m y un campo magnético de 0.44 T actúan sobre un electrón en movimiento sin producir ninguna fuerza. (*a*) Calcule la velocidad mínima v del electrón. (*b*) Trace los vectores **E**, **B** y **v**.
4. Un protón que viaja a 23.0° con respecto a un campo magnético de 2.63 mT de intensidad experimenta una fuerza magnética de 6.48×10^{-17} N. Calcule (*a*) la rapidez y (*b*) la energía cinética, en eV, del protón.
5. Un protón de un rayo cósmico choca contra la Tierra cerca del Ecuador con una velocidad vertical de 2.8×10^7 m/s. Suponga que la componente horizontal del campo magnético de la Tierra en el Ecuador es de 30 μT. Calcule la razón de la fuerza magnética sobre el protón y la fuerza gravitatoria sobre él.
6. Un electrón se acelera por una diferencia de potencial de 1.0 kV y se dirige hacia una región entre dos placas paralelas separadas por 20 mm con una diferencia de potencial de 100 V entre ellas. Si el electrón entra moviéndose perpendicularmente al campo eléctrico entre las placas, ¿qué campo magnético es necesario, perpendicular tanto a la trayectoria del electrón como al campo eléctrico, para que el electrón viaje en línea recta?
7. Un electrón dentro de un campo magnético uniforme tiene una velocidad $\mathbf{v} = 40\mathbf{i} + 35\mathbf{j}$ km/s. Éste experimenta una fuerza $\mathbf{F} = -4.2\mathbf{i} + 4.8\mathbf{j}$ fN. Si $B_x = 0$, calcule el campo magnético.
8. Una fuente de iones está produciendo iones de ^{6}Li (masa = 6.01 u) portando cada uno una carga neta de $+e$. Los iones son acelerados por una diferencia de potencial de 10.8 kV y pasan horizontalmente por una región en la que

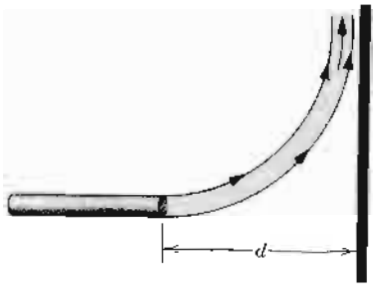


Figura 30 Problema 16.

existe un campo magnético vertical de $B = 1.22$ T. Calcule la intensidad del campo eléctrico horizontal que debe generarse en la misma región de tal forma que los iones de ^{6}Li pasen sin desviarse.

9. Los electrones en el haz de un tubo de televisión tienen una energía cinética de 12.0 keV. El tubo está orientado de modo que los electrones se mueven horizontalmente desde el sur magnético hacia el norte magnético. La componente vertical del campo magnético de la Tierra apunta hacia abajo y tiene una magnitud de 55.0 μT. (*a*) ¿En qué dirección se desviará el haz? (*b*) ¿Cuál es la aceleración de determinado electrón debida al campo magnético? (*c*) ¿Cuánto se desviará el haz al recorrer 20.0 cm dentro del tubo de televisión?
10. Un electrón tiene una velocidad inicial de $12.0\mathbf{j} + 15.0\mathbf{k}$ km/s y una aceleración constante de $(2.00 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2)\mathbf{i}$ en una región en la que están presentes campos eléctrico y magnético uniformes. Si $\mathbf{B} = 400\ \mathbf{i}\ \mu$T, halle el campo eléctrico **E**.

Sección 34-3 Cargas circulantes

11. (*a*) En un campo magnético con $B = 0.50$ T, ¿en qué radio de trayectoria circulará un electrón a 0.10 de la velocidad de la luz? (*b*) ¿Cuál será su energía cinética en eV? No considere los pequeños efectos relativistas.
12. Un electrón de 1.22 keV está circulando en un plano formando un ángulo recto con un campo magnético uniforme. El radio de la órbita es de 24.7 cm. Calcule (*a*) la velocidad del electrón, (*b*) el campo magnético, (*c*) la frecuencia de revolución y (*d*) el periodo del movimiento.
13. Un electrón se acelera desde el reposo por una diferencia de potencial de 350 V. Luego entra en un campo magnético uniforme de 200 mT de magnitud, con el que su velocidad forma un ángulo recto. Calcule (*a*) la velocidad del electrón y (*b*) el radio de su trayectoria dentro del campo magnético.
14. S. A. Goudsmit ideó un método para medir con exactitud las masas de iones pesados tomando el tiempo de sus periodos de revolución dentro de un campo magnético conocido. Un ion de iodo cargado efectúa 7.00 revoluciones en un campo de 45.0 mT en 1.29 ms. Calcule su masa, en unidades de masa atómica. En realidad, las mediciones de masa se llevan a cabo con mucha mayor exactitud de lo que estos datos aproximados indican.
15. Una partícula alfa ($q = +2e$, $m = 4.0$ u) viaja en una trayectoria circular de 4.5 cm de radio dentro de un campo magnético con $B = 1.2$ T. Calcule (*a*) su velocidad, (*b*) su periodo de revolución, (*c*) su energía cinética en eV y (*d*) la diferencia de potencial con la que tendría que ser acelerada para alcanzar esta energía.
16. Un haz de electrones cuya energía cinética es K sale de una "ventana" de lámina delgada en el extremo de un tubo acelerador. Existe una placa de metal a una distancia d de esta ventana y en ángulo recto con la dirección del haz que sale. Véase la figura 30. (*a*) Demuestre que podemos impedir que el haz choque contra la placa si aplicamos un campo magnético B tal que

$$B \geq \sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}},$$

donde m y e son la masa y la carga del electrón. (*b*) ¿Cómo debe estar orientado B?

17. El espectrómetro de masa Bainbridge, mostrado en la figura 31, separa los iones que tienen la misma velocidad. Los iones, después de entrar por las ranuras S_1 y S_2, pasan por un selector de velocidad compuesto de un campo eléctrico producido por las placas cargadas P y P', y un campo magnético **B** perpendicular al campo eléctrico y a la trayectoria del ion. Aquellos iones que pasan por los campos perpendiculares **E** y **B** sin desviarse entran a una región en donde existe un segundo campo magnético **B'**, y se doblan en trayectorias circulares. Una placa fotográfica registra su llegada. Demuestre que $q/m = E/rBB'$, en donde r es el radio de la órbita circular.

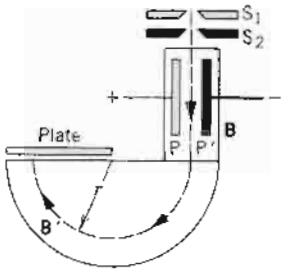


Figura 31 Problema 17.

18. Un físico está diseñando un ciclotrón para acelerar protones a $0.100c$. El imán empleado producirá un campo de 1.40 T. Calcule (*a*) el radio del ciclotrón y (*b*) la frecuencia correspondiente del oscilador. Las consideraciones de relatividad no son significativas.
19. En un experimento nuclear un protón con energía cinética K_p se mueve dentro de un campo magnético uniforme en una trayectoria circular. ¿Qué energía deben tener (*a*) una partícula alfa y (*b*) un deuterón para que describan la misma órbita? (Para un deuterón, $q = +e$, $m = 2.0$ u; para una partícula alfa, $q = +2e$, $m = 4.0$ u.)
20. Un protón, un deuterón y una partícula alfa, acelerados por la misma diferencia de potencial V, entran a una región de campo magnético uniforme, moviéndose en ángulo recto con **B**. (*a*) Halle sus energías cinéticas. Si el radio de

la trayectoria circular del protón es r_p, ¿cuáles son los radios de las trayectorias de (*b*) el deuterón y (*c*) la partícula alfa, en términos de r_p?

21. Un protón, un deuterón y una partícula alfa con la misma energía cinética entran a una región de campo magnético uniforme, moviéndose en ángulo recto con **B**. El protón se mueve en un círculo de radio r_p. En términos de r_p, ¿cuáles son los radios de (*a*) la trayectoria del deuterón y (*b*) la trayectoria de la partícula alfa?

22. La figura 32 muestra un dispositivo usado para medir las masas de los iones. Un ion de masa m y carga $+q$ se produce esencialmente en reposo en la fuente S, una cámara en la que se está produciendo la descarga de un gas. La diferencia de potencial V acelera al ion y se permite que entre a un campo magnético **B**. Dentro del campo éste se mueve en un semicírculo, chocando con una placa fotográfica a la distancia x de la rendija de entrada. Demuestre que la masa m del ion está dada por

$$m = \frac{B^2 q}{8V} x^2.$$

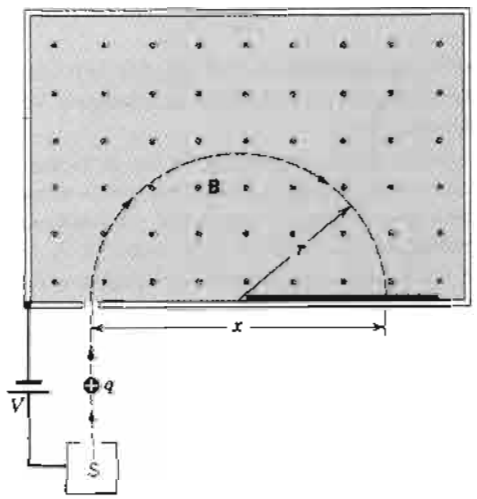


Figura 32 Problema 22.

23. Dos tipos de átomos ionizados una vez, que tienen la misma carga q y su masa difiere en una pequeña cantidad Δm, son introducidos en el espectrómetro de masas descrito en el problema 22. (*a*) Calcule la diferencia de masa en términos de V, q, m (de uno u otro), B, y la distancia Δx entre los puntos impresos en la placa fotográfica. (*b*) Calcule Δx para un haz de átomos de cloro ionizados una vez, de masas 35.0 y 37.0 u si $V = 7.33$ kV y $B = 520$ mT.

24. En un espectrómetro de masas (véase el problema 22) usado para propósitos comerciales, se encuentran separados de sus especies relacionadas átomos de uranio de 238 u de masa y $+2e$ de carga. Los iones son acelerados primero por una diferencia de potencial de 105 kV y luego pasan dentro de un campo magnético, en donde viajan en un arco de 180° de 97.3 cm de radio. Luego se colectan en una copa después de pasar por una rendija de 1.20 mm de ancho y 1.14 cm de altura. (*a*) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético (perpendicular) en el separador? Si el equipo está diseñado para separar 90.0 mg de material por hora, calcule (*b*) la corriente de los iones deseados en el equipo y (*c*) la energía interna disipada en la copa en 1.00 h.

25. Una partícula neutra está en reposo dentro de un campo magnético uniforme de magnitud B. En el tiempo $t = 0$ se desintegra en dos partículas cargadas de masa m cada una. (*a*) ¿Si la carga de una de las partículas es $+q$, ¿cuál es la carga de la otra? (*b*) Las dos partículas se mueven en trayectorias separadas, estando ambas en planos perpendiculares a **B**. Cierto tiempo después las partículas chocan. Exprese el tiempo desde la desintegración hasta la colisión en términos de m, B y q.

26. Un deuterón se mueve en un ciclotrón dentro de un campo magnético con un radio de órbita de 50 cm. A causa de una colisión rasante con un blanco, el deuterón se divide, con una pérdida despreciable de energía cinética, en un protón y un neutrón. Analice los movimientos subsiguientes de cada uno. Suponga que la energía del deuterón la comparten por igual el protón y el neutrón al momento de la división.

27. (*a*) ¿Qué velocidad necesitaría un protón para girar alrededor de la Tierra en el Ecuador, si el campo magnético de la Tierra es horizontal allí en todas partes y está dirigido a lo largo de líneas longitudinales? Deben tomarse en cuenta los efectos relativistas. Considere que la magnitud del campo magnético de la Tierra es de 41 μT en el Ecuador. (*b*) Trace los vectores de la velocidad y del campo magnético correspondientes a esta situación.

28. Calcule el radio de la trayectoria de un electrón de 10.0 MeV que se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 2.20 T. Use tanto la fórmula (*a*) clásica como la (*b*) relativista. (c) Calcule el periodo real del movimiento circular. ¿Es el resultado independiente de la velocidad del electrón?

29. Las mediciones de la ionización demuestran que una partícula nuclear en particular porta una carga doble ($= 2e$) y se está moviendo a una velocidad de $0.710c$. Sigue una trayectoria circular de 4.72 m de radio dentro de un campo magnético de 1.33 T. Halle la masa de la partícula e identifíquela.

30. El sincrotrón de protones en el laboratorio Fermi acelera a los protones a una energía cinética de 500 GeV. A esta energía, calcule (*a*) el parámetro de la velocidad y (*b*) el campo magnético en la órbita del protón que tiene un radio de curvatura de 750 m. (El protón tiene una energía en reposo de 938 MeV.)

31. Un positrón (electrón cargado positivamente) de 22.5 eV se proyecta dentro de un campo magnético uniforme $B = 455$ μT con su vector de velocidad formando un ángulo de 65.5° con **B**. Halle (*a*) el periodo, (*b*) el paso p y (*c*) el radio r de la trayectoria helicoidal. Véase la figura 33.

32. En la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno puede pensarse que el electrón se mueve en órbita circular de radio r alrededor del protón. Supóngase que tal átomo está situado en un campo magnético, con el plano de la órbita formando un ángulo recto con **B**. (*a*) Si el electrón está

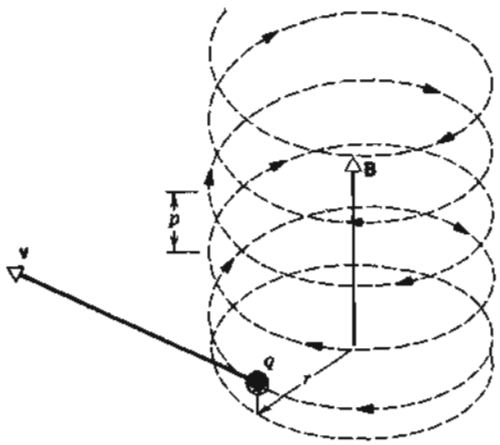


Figura 33 Problema 31.

circulando en el sentido de las manecillas del reloj, visto por un observador que mire a lo largo de **B**, ¿aumentará la frecuencia angular o disminuirá? (*b*) ¿Qué sucede si el electrón está circulando en el sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj? Suponga que el radio de la órbita no cambia. [*Sugerencia*: La fuerza centrípeta es ahora parcialmente eléctrica ($\mathbf{F}_E$) y parcialmente magnética ($\mathbf{F}_B$) en el origen.] (*c*) Demuestre que el cambio en la frecuencia de revolución causada por el campo magnético está dada aproximadamente por

$$\Delta\nu = \pm\frac{Be}{4\pi m}.$$

Tales cambios de frecuencia fueron observados por Zeeman en 1896. (*Sugerencia*: Calcule la frecuencia de revolución sin el campo magnético y también con él. Restar, teniendo en cuenta que, a causa de que el efecto del campo magnético es muy pequeño, algunos —pero no todos— los términos que contengan B pueden igualarse a cero con muy poco error.)

33. Calcule la longitud total de la trayectoria viajada por un deuterón en un ciclotrón durante el proceso de aceleración. Supóngase un potencial de aceleración entre las des de 80 kV, un radio de la de de 53 cm, y una frecuencia del oscilador de 12 MHz.

34. Considérese una partícula de masa m y carga q que se mueve en el plano xy bajo la influencia de un campo magnético uniforme **B** apuntando en la dirección $+z$. Escriba expresiones para las coordenadas $x(t)$ y $y(t)$ de la partícula en función del tiempo t, suponiendo que la partícula se mueve en un círculo de radio R centrado en el origen de las coordenadas.

35. Considérese la partícula del problema 34, pero esta vez *demuestre* (en lugar de *suponer*) que la partícula se mueve en trayectoria circular resolviendo la ley de Newton analíticamente. (*Sugerencia*: Resuelva la expresión de F_y para hallar a v_y y sustituya en la expresión de F_x para obtener una ecuación que pueda ser resuelta para v_x. Haga lo mismo para v_y sustituyendo en la ecuación F_y. Finalmente, obtenga $x(t)$ y $y(t)$ a partir de v_x y v_y.)

Sección 34-4 El efecto Hall

36. En un experimento del efecto Hall, una corriente de 3.2 A a lo largo de un conductor de 1.2 cm de anchura, 4.0 cm de largo y 9.5 μm de espesor produce un voltaje Hall transversal (a lo ancho) de 40 μV cuando un campo magnético de 1.4 T pasa perpendicularmente por el conductor delgado. A partir de estos datos, halle (*a*) la velocidad de arrastre de los portadores de la carga y (*b*) la densidad del número de portadores de carga. A partir de la tabla 2, identifique el conductor. (*c*) En un diagrama muestre la polaridad del voltaje Hall con una corriente y dirección del campo magnético dados, suponiendo que los portadores de la carga sean electrones (negativos).

37. Demuestre que, en términos del campo eléctrico Hall E y la densidad de corriente j, el número de portadores de carga por unidad de volumen está dado por

$$n = \frac{jB}{eE}.$$

38. (*a*) Demuestre que la razón entre el campo eléctrico Hall E y el campo eléctrico E_c responsable de la corriente es

$$\frac{E}{E_c} = \frac{B}{ne\rho},$$

donde ρ es la resistividad del material. (*b*) Calcule la razón numéricamente para el problema muestra 3. Véase la tabla 1 del capítulo 32.

39. Una cinta plana de metal de 6.5 cm de largo, 0.88 cm de ancho y 0.76 mm de espesor se mueve a velocidad constante **v** por un campo magnético B = 1.2 mT perpendicular a la cinta, como se muestra en la figura 34. Entre los puntos x y y a lo ancho de la cinta se mide una diferencia de potencial de 3.9 μV. Calcule la velocidad v.

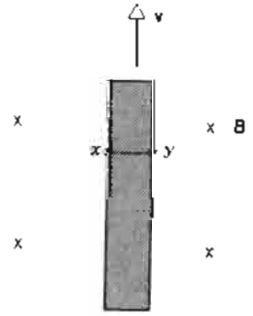


Figura 34 Problema 39.

Sección 34-5 La fuerza magnética sobre una corriente

40. Un conductor horizontal, en una línea de transmisión, porta una corriente de 5.12 kA de sur a norte. El campo magnético de la Tierra en la vecindad de la línea es 58.0 μT y está dirigido hacia el norte e inclinado hacia abajo a 70.0° con la horizontal. Halle la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre 100 m del conductor debido al campo de la Tierra.

41. Un alambre de 62.0 cm de longitud y 13.0 g de masa está suspendido por un par de puntas flexibles dentro de un campo

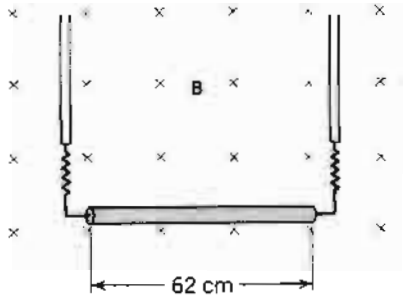


Figura 35 Problema 41.

magnético de 440 mT. Determine la magnitud y dirección de la corriente en el alambre necesaria para suprimir la tensión en los conductores de apoyo. Véase la figura 35.

42. Un alambre de metal de masa m se desliza sin fricción sobre dos rieles horizontales espaciados a una distancia d, como se muestra en la figura 36. La vía está dentro de un campo magnético vertical uniforme **B**. Una corriente constante i fluye desde el generador G a lo largo de un riel, a través del alambre, y de regreso al otro riel. Halle la velocidad (rapidez y dirección) del alambre en función del tiempo, suponiendo que está en reposo en $t = 0$.

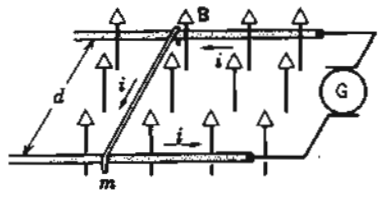


Figura 36 Problema 42.

43. Considere la posibilidad de un nuevo diseño para un tren eléctrico. El motor es impulsado por la fuerza debida a la componente vertical del campo magnético de la Tierra sobre un eje conductor. La corriente pasa por un riel, hacia una rueda conductora, por el eje, por la otra rueda conductora, y luego regresa a la fuente a través del otro riel. (*a*) ¿Qué corriente se necesita para proporcionar una modesta fuerza de 10 kN? Considere que la componente vertical del campo de la Tierra sea de 10 μT y que la longitud del eje sea de 3.0 m. (*b*) ¿Cuánta potencia se perdería por cada ohm de resistencia en los rieles? (*c*) ¿Es tal tren totalmente irrealista o sólo marginalmente irrealista?

44. La figura 37 muestra un alambre de forma arbitraria que porta una corriente i entre los puntos a y b. El alambre se encuentra en un plano en ángulo recto con un campo magnético uniforme **B**. Demuestre que la fuerza sobre el alambre es la misma que la fuerza sobre un alambre recto que porte una corriente i directamente desde a hasta b. (*Sugerencia*: Reemplace el alambre con una serie de "escalones" paralelos y perpendiculares a la línea recta que une a a con b.)

45. Un alambre en forma de U de masa m y longitud L está sumergido con sus dos extremos en mercurio (Fig. 38). El

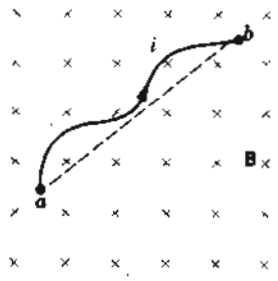


Figura 37 Problema 44.

alambre está dentro de un campo magnético homogéneo **B**. Si una carga, esto es, un impulso de corriente $q = \int i\,dt$, se envía por el alambre, el alambre brincará. Calcule, a partir de la altura h que el alambre alcanza, la magnitud de la carga o impulso de corriente, suponiendo que el tiempo del impulso de corriente es muy pequeño en comparación con el tiempo de vuelo. Haga uso del hecho de que el impulso de la fuerza es igual a $\int F\,dt$, lo cual es igual a mv. (*Sugerencia*: Relacione a $\int i\,dt$ con $\int F\,dt$.) Evalúe a q para $B = 0.12$ T, $m = 13$ g, $L = 20$ cm y $h = 3.1$ m.

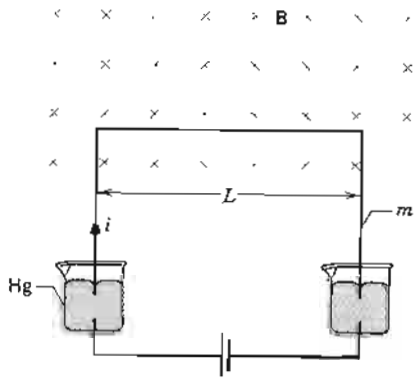


Figura 38 Problema 45.

46. Una barra de cobre de 1.15 kg descansa sobre dos rieles horizontales situados con una separación de 95.0 cm y porta una corriente de 53.2 A de un riel al otro. El coeficiente de fricción estática es de 0.58. Halle el campo magnético mínimo (no necesariamente vertical) que causaría que la barra se deslice.

47. Un conductor largo y rígido, que se encuentra a lo largo del eje x, porta una corriente de 5.0 A en la dirección $-x$. Está presente un campo magnético **B**, dado por $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 8x^2\mathbf{j}$, con x en metros y **B** en mT. Calcule la fuerza sobre el segmento de 2.0 m del conductor que se encuentra entre $x = 1.2$ m y $x = 3.2$ m.

Sección 34-6 Momento de torsión en una espira de corriente

48. La figura 39 muestra una bobina rectangular de 20 vueltas de alambre, de 12 cm por 5.0 cm. Porta una corriente de 0.10 A y está sujeta por un lado. Está montada con su plano

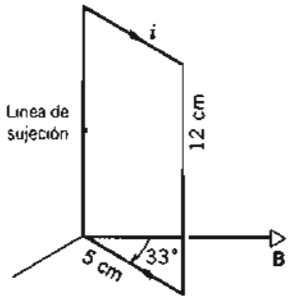


Figura 39 Problema 48.

formando un ángulo de 33° con la dirección de un campo magnético uniforme de 0.50 T. Calcule el momento de torsión alrededor de la línea del sujeción que actúa sobre la bobina.

49. Una espira de una sola vuelta, por la que fluye una corriente de 4.00 A, tiene la forma de un triángulo rectángulo, siendo sus lados de 50 cm, 120 cm y 130 cm. La espira está dentro de un campo magnético uniforme de 75.0 mT de magnitud cuya dirección es paralela a la corriente en el lado de 130 cm de la espira. (*a*) Halle la fuerza magnética sobre cada uno de los tres lados de la espira. (*b*) Demuestre que la fuerza magnética total en la espira es cero.

50. Un reloj circular de pared, estacionario, tiene una carátula con un radio de 15 cm. Alrededor de su perímetro están devanadas seis vueltas de alambre; por el alambre pasa una corriente de 2.0 A en la dirección de las manecillas del reloj. El reloj está situado donde existe un campo magnético externo uniforme y constante de 70 mT (pero aun así el reloj marca el tiempo perfectamente). Exactamente a la 1:00 p.m., la manecilla de las horas apunta en la dirección del campo magnético externo. (*a*) Después de cuántos minutos apuntará la manecilla de los minutos en la dirección del momento de torsión sobre el devanado debido al campo magnético? (*b*) ¿Cuál es la magnitud de este momento de torsión?

51. Por un alambre de longitud L pasa una corriente i. Demuestre que si el alambre tiene la forma de una bobina circular, el momento de torsión máximo en un campo magnético dado se desarrolla cuando la bobina tiene sólo una vuelta y el momento de torsión máximo tiene la magnitud

$$\tau = \frac{1}{4\pi} L^2 i B.$$

52. Demuestre que la relación $\tau = NiAB \operatorname{sen} \theta$ se cumple en las espiras cerradas de forma arbitraria y no sólo en espiras rectangulares como en la figura 26. (*Sugerencia*: Reemplace al circuito de forma arbitraria por un conjunto de espiras aproximadamente rectangulares, delgadas, largas y contiguas que sean casi equivalentes a ella en cuanto se refiere a la distribución de la corriente.)

53. La figura 40 muestra un anillo de alambre de radio a en ángulo recto con la dirección general de un campo magnético divergente radialmente simétrico. El campo magnético en el anillo es en todas partes de la misma magnitud B, y su dirección en el anillo está en todas partes a un ángulo θ con una normal al plano del anillo. Las puntas retorcidas del alambre no tienen ningún efecto sobre el problema. Halle la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce el campo sobre el anillo si por éste pasa una corriente i como se muestra en la figura.

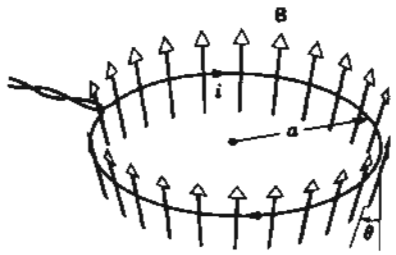


Figura 40 Problema 53.

54. Cierto galvanómetro tiene una resistencia de 75.3 Ω; su aguja experimenta una desviación de escala completa cuando pasa una corriente de 1.62 mA por su bobina. (*a*) Determine el valor de la resistencia auxiliar necesaria para convertir al galvanómetro en un voltímetro que indique 1.00 V cuando la desviación de la aguja es de la escala completa. ¿Cómo debe conectarse? (*b*) Determine el valor de la resistencia auxiliar necesaria para convertir el galvanómetro en un amperímetro que indique 50.0 mA con una desviación de toda la escala. ¿Cómo debe conectarse?

55. La figura 41 muestra un cilindro de madera con una masa $m = 262$ g y una longitud $L = 12.7$ cm, con $N = 13$ vueltas de alambre devanadas alrededor de él longitudinalmente, de tal modo que el plano de la espira de alambre contiene al eje del cilindro. ¿Cuál es la corriente mínima por la espira que impedirá que el cilindro ruede por un plano inclinado en un ángulo θ con la horizontal, en la presencia de un campo magnético uniforme y vertical de 477 mT, si el plano del devanado es paralelo al plano inclinado?

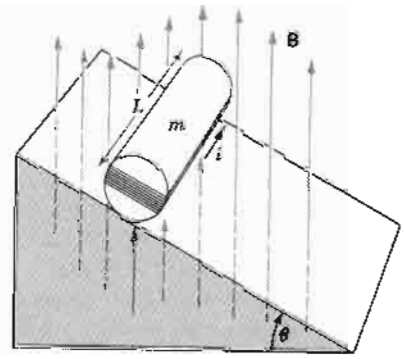


Figura 41 Problema 55.

Sección 34-7 El dipolo magnético

56. Una bobina circular de 160 vueltas tiene un radio de 1.93 cm. (*a*) Calcule la corriente que resulta en un momento magnético de 2.33 A · m². (*b*) Halle el momento de

torsión máximo que la bobina puede experimentar en un campo magnético uniforme de 34.6 mT al portar esta corriente.

57. El momento dipolar magnético de la Tierra es de 8.0×10^{22} J/T. Suponga que éste se produce por las cargas que fluyen en el núcleo exterior fundido de la Tierra. Si el radio de la trayectoria circular es de 3500 km, calcule la corriente requerida.

58. Por una espira circular de alambre cuyo radio es de 16.0 cm pasa una corriente de 2.58 A. Está colocada de tal modo que la normal a su plano forma un ángulo de 41.0° con un campo magnético uniforme de 1.20 T. (*a*) Calcule el momento dipolar magnético del anillo. (*b*) Determine el momento de torsión sobre la espira.

59. Dos anillos circulares concéntricos, de radios 20.0 y 30.0 cm, en el plano *xy*, portan cada uno de ellos una corriente de 7.00 A en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 42. (*a*) Halle el momento magnético neto de este sistema. (*b*) Repita para el caso en que la corriente en el anillo exterior se invierte.

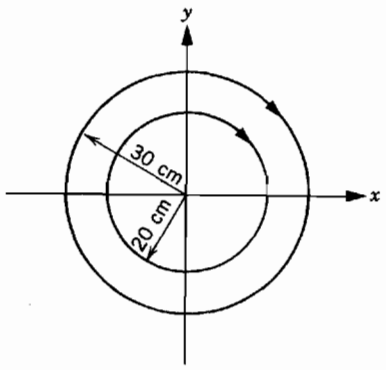


Figura 42 Problema 59.

60. Por un anillo circular de alambre que tiene un radio de 8.0 cm fluye una corriente de 0.20 A. Un vector unitario paralelo al momento dipolar μ del anillo está dado por $0.60\mathbf{i} - 0.80\mathbf{j}$. Si el anillo está colocado en un campo magnético dado en T por $\mathbf{B} = 0.25\mathbf{i} + 0.30\mathbf{k}$, calcule (*a*) el momento de torsión sobre el anillo y (*b*) la energía potencial magnética del anillo.

Proyectos para la computadora

61. Una partícula de carga $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 1.7 \times 10^{-27}$ kg se mueve dentro de un campo magnético uniforme de 1.1 T en la dirección *z* positiva. En el tiempo $t = 0$ está en el origen y tiene una velocidad de 6.0×10^5 m/s en la dirección *x* positiva. (*a*) Use el programa de computadora dado en el apéndice I para graficar la posición de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 6.5 \times 10^{-8}$ s. Use $\Delta t = 3 \times 10^{-11}$ s como el intervalo de integración. También, haga que el programa de la computadora calcule y exhiba la velocidad de la partícula cuando ésta exhibe su posición. (*b*) ¿Es la velocidad constante dentro de la exactitud del cálculo? Si las primeras dos cifras significativas de la veocidad calculada no son constantes, reduzca el valor de Δt y trate nuevamente. (*c*) Mida el radio de la órbita y compare el resultado con mv/qB.

62. El campo magnético en la vecindad del origen está en la dirección *z* positiva y su magnitud en teslas está dada por $B = 50r$, en donde *r* es la distancia en metros desde el eje *z*. Una partícula de carga 1.6×10^{-19} C y masa 1.7×10^{-27} kg se introduce dentro del campo a una velocidad de 6.0×10^5 m/s en la dirección *y* negativa a partir de un punto sobre el eje *x*. Si la distancia inicial desde el eje *z* obedece a $mv^2/r = qvB$ entonces la órbita será circular. (*a*) ¿Cuál es esta distancia? (*b*) Use un programa de computadora para graficar la órbita desde $t = 0$, cuando se introduce la partícula, hasta $t = 1.2 \times 10^{-7}$ s. Considere que las coordenadas iniciales sean $x = R$ y $y = 0$, en donde *R* es el valor de *r* que fue hallado en la parte (*a*). Considere que el intervalo de integración sea $\Delta t = 5 \times 10^{-11}$ s. También, haga que la computadora calcule la velocidad de la partícula en cada punto exhibido. ¿Es la velocidad constante? Si las primeras dos cifras significativas de la velocidad calculada no son constantes reduzca el valor de Δt. ¿Es la órbita circular? (*c*) Ahora haga que la partícula comience en $x = 0.5R$, $y = 0$ y grafique la órbita para el mismo intervalo de tiempo. ¿Es circular? ¿Es la velocidad constante?

63. (*a*) Considere un campo magnético en la dirección *z* positiva, con una magnitud en teslas dada por $B = 7.0 \times 10^{-3}/x$. Una partícula con carga $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C está inicialmente en $x = 5.0 \times 10^{-2}$ m, $y = 0$ y se mueve en la dirección *y* positiva a una velocidad de 7.0×10^5 m/s. Use un programa de computadora para graficar la órbita desde $t = 0$ hasta $t = 2.5 \times 10^{-6}$ s. Use $\Delta t = 2.5 \times 10^{-10}$ s para el intervalo de integración. Haga también que la computadora calcule la velocidad para cada punto exhibido. ¿Es ésta constante? Si las primeras dos cifras significativas de la velocidad no son constantes, reduzca los valores de Δt. ¿Es la órbita circular? (*b*) Supóngase ahora que la carga comience en el mismo punto pero con una velocidad de 7.0×10^5 m/s en la dirección *y* negativa. Use el programa para graficar su órbita desde $t = 0$ hasta $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. Utilice un intervalo de integración de $\Delta t = 8 \times 10^{-11}$ s. Compruebe la constancia de la velocidad para ver si Δt necesita de algún ajuste. (*c*) Nótese que en ambos casos la carga se mueve en la dirección *y* negativa al seguir una espiral dentro del campo. Use su conocimiento del movimiento dentro de un campo uniforme para explicar cualitativamente las formas de las dos órbitas. (*d*) ¿Cómo pueden cambiarse las condiciones iniciales de modo que la carga se mueva (derive) en la dirección *y positiva*?

64. Un campo magnético uniforme de 1.2 T está en la dirección *z* positiva y un campo eléctrico uniforme está en la dirección *x* negativa. Una partícula con carga $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 1.7 \times 10^{-26}$ kg comienza en el origen con velocidad 5.0×10^4 m/s, en la dirección *y* positiva. Para cada una de las siguientes magnitudes del campo eléctrico, use un programa de computadora para graficar la órbita desde $t = 0$ hasta $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. Considere a $\Delta t = 1 \times 10^{-9}$ s como intervalo de integración. (*a*) 1.0×10^4 V/m. (*b*) 3.0×10^4 V/m. (*c*) 6.0×10^4 V/m. (*d*) 9.0×10^4 V/m.

CAPÍTULO 35

LA LEY DE AMPÈRE

En el capítulo anterior estudiamos el efecto de un campo magnético sobre una carga en movimiento. Ahora nos concentraremos en la fuente misma del campo, y en el presente capítulo estudiaremos el campo magnético producido por un conductor por el cual fluye corriente. Presentaremos dos métodos para calcular **B**: *uno basado en una técnica directa, análoga a la ley de Coulomb para el cálculo de los campos eléctricos, y otro basado en argumentos de simetría, análogos a la ley de Gauss para los campos eléctricos.*

En analogía con nuestro estudio previo de los campos eléctricos de algunas distribuciones de carga sencillas, investigaremos en este capítulo los campos magnéticos producidos por algunas distribuciones de corriente sencillas: alambres rectos y anillos circulares. Describiremos también el campo dipolar magnético, similar al campo dipolar eléctrico y, por último, demostraremos que la relación entre los campos eléctrico y magnético es mucho más profunda que la que existe en una simple semejanza de las ecuaciones; la relación se extiende a la transformación de los campos uno dentro del otro cuando las distribuciones de carga o de corriente son observadas desde marcos inerciales diferentes.

35-1 LA LEY DE BIOT-SAVART

El descubrimiento de que las corrientes producen campos magnéticos lo observó Hans Christian Oersted en 1820. Oersted observó que, como se ilustra en la figura 1, cuando se coloca una brújula cerca de un alambre recto por el pasa una corriente, la aguja se alinea siempre perpendicularmente al alambre (despreciando la influencia del campo magnético de la Tierra sobre la brújula). Esto fue el primer vínculo experimental entre la electricidad y el magnetismo, y proporcionó el comienzo del desarrollo de una teoría formal del electromagnetismo. En términos modernos, analizamos el experimento de Oersted diciendo que la corriente en el alambre crea un campo magnético, que ejerce un momento de torsión sobre la aguja de la brújula y la alinea con el campo.

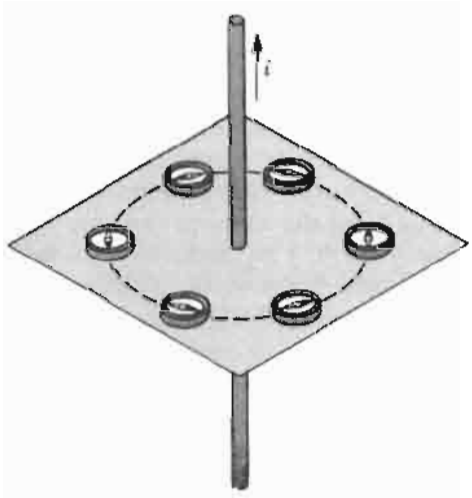


Figura 1 El experimento de Oersted. La dirección de la aguja de la brújula es siempre perpendicular a la dirección de la corriente en el alambre.

Desarrollemos ahora un procedimiento para calcular el campo magnético debido a una distribución de corriente especificada y, antes de considerar el campo magnético, repasemos primero el procedimiento análogo para calcular los campos eléctricos.

La figura 2 muestra dos distribuciones de carga q_1 y q_2 de magnitud y forma arbitrarias. Consideramos los elementos de carga dq_1 y dq_2 en las dos distribuciones. El campo eléctrico $d\mathbf{E}_1$ creado por dq_1 en la ubicación de dq_2 está dado por

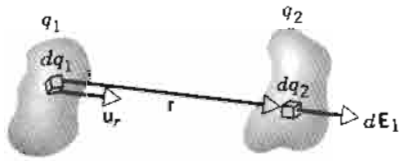


Figura 2 Dos distribuciones de carga q_1 y q_2 arbitrarias. Un elemento de carga dq_1 genera un campo eléctrico $d\mathbf{E}_1$ en la ubicacion de dq_2.

$$d\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq_1}{r^2}\mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq_1}{r^3}\mathbf{r}, \tag{1}$$

en donde $\mathbf{r}$ es el vector de dq_1 a dq_2 (Fig. 2), r es su magnitud, y $\mathbf{u}_r$ (= $\mathbf{r}/r$) es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$. Para hallar el campo eléctrico total $\mathbf{E}_1$ que actúa en dq_2 debido a toda la distribución q_1, integramos sobre q_1:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq_1}{r^2}\mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq_1}{r^3}\mathbf{r}. \tag{2}$$

La fuerza $d\mathbf{F}_{21}$ que actúa sobre dq_2 debida a la distribución de la carga q_1 puede entonces escribirse:

$$d\mathbf{F}_{21} = \mathbf{E}_1\, dq_2. \tag{3}$$

Las ecuaciones 1 o 2 (para el campo eléctrico de una distribución de carga) y 3 (que da la fuerza debida a aquella distribución que actúa sobre otra carga) juntas pueden considerarse como una forma de la ley de Coulomb para hallar la fuerza electrostática entre las cargas.

En el caso de los campos magnéticos, buscamos la fuerza entre los elementos de *corriente* (Fig. 3). Esto es, consideramos dos corrientes i_1 e i_2 y sus correspondientes elementos de corriente $i_1\, d\mathbf{s}_1$ e $i_2\, d\mathbf{s}_2$. Suponemos, basados en nuestros resultados del capítulo anterior, que las direcciones relativas de los elementos de corriente (especificadas por los vectores $d\mathbf{s}_1$ y $d\mathbf{s}_2$) serán importantes y que la fuerza entre las corrientes puede incluir los productos cruz de los vectores. La ley de Coulomb de la fuerza entre las cargas se desarrolló como un enunciado a partir de resultados experimentales; una ley análoga para la fuerza magnética la propuso el físico francés André-Marie Ampère* en 1820, poco después de conocer los resultados de Oersted. La fuerza magnética $d\mathbf{F}_{21}$ ejercida sobre el elemento de corriente 2 por i_1 puede escribirse, usando la ecuación 30 del capítulo 34, así:

$$d\mathbf{F}_{21} = i_2\, d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_1, \tag{4}$$

en donde el campo magnético $\mathbf{B}_1$ en la ubicación del elemento de corriente $i_2\, d\mathbf{s}_2$ se debe a toda la corriente i_1.

* Véase "André-Marie Ampère", por L. Pearce Williams, *Scientific American*, enero de 1989, pág. 90.

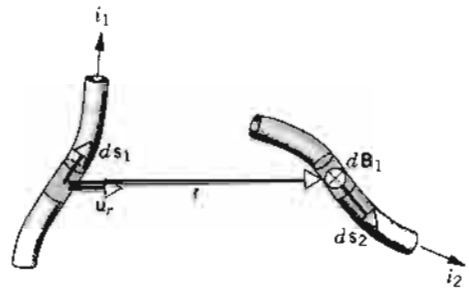


Figura 3 Dos distribuciones de corriente i_1 e i_2 arbitrarias. El elemento de corriente en la longitud $d\mathbf{s}_1$ de un conductor crea un campo magnético $d\mathbf{B}_1$ en la ubicación de un elemento de corriente en la longitud $d\mathbf{s}_2$ del otro conductor.

La contribución $d\mathbf{B}_1$ de cada elemento de corriente de i_1 al campo total $\mathbf{B}_1$ está dada por

$$d\mathbf{B}_1 = k\frac{i_1\, d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{u}_r}{r^2} = k\frac{i_1\, d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}}{r^3}, \tag{5}$$

en donde $\mathbf{r}$ es el vector del elemento de corriente 1 al elemento de corriente 2, y $\mathbf{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$. Las ecuaciones 4 y 5 juntas dan la fuerza magnética entre los elementos de corriente de una manera análoga a las ecuaciones 1 y 3 para los elementos de carga.

En la ecuación 5 está incluida una constante indeterminada k, al igual que incluimos una constante similar en la ley de Coulomb (véase la Ec. 1 del capítulo 27). Se recordará que, en electrostática, teníamos dos opciones para determinar la constante en la ley de Coulomb: (1) fijar la constante igual a un valor conveniente, y usar la ley de la fuerza para determinar por experimentación la unidad de carga eléctrica o bien (2) definir la unidad de carga y luego determinar la constante por experimentación. Elegimos la opción 2, que define a la unidad de carga en términos de la unidad de corriente. En el caso de la constante en la ley de la fuerza magnética elegimos la opción 1: fijar la constante igual a un valor conveniente y usar la ley de la fuerza para definir a la unidad de corriente, el ampere. Se define que la constante k en unidades del SI tiene el valor exacto 10^{-7} tesla · metro/ampere (T · m/A). Sin embargo, como fue el caso en electrostática, hallamos conveniente escribir a la constante en una forma diferente:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}, \tag{6}$$

donde la constante μ_0, llamada la *constante de permeabilidad*, tiene el valor exacto

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}.$$

La constante de permeabilidad μ_0 desempeña un papel en el cálculo de los campos magnéticos similar al de la constante de permitividad ϵ_0 al calcular los campos eléc-

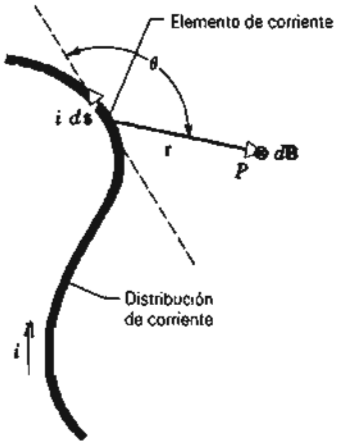


Figura 4 El elemento $i\,d\mathbf{s}$ de una distribución de corriente arbitraria crea un campo magnético $d\mathbf{B}$ hacia adentro del plano de la página en el punto P.

tricos. Las dos constantes no son independientes entre sí; como demostraremos en el capítulo 41, se enlazan a través de la velocidad de la luz c, de modo que $c = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Por lo tanto, *no* estamos en libertad de elegir a ambas constantes de modo arbitrario; podemos elegir una arbitrariamente, pero entonces la otra está determinada por el valor aceptado de c.

Ahora podemos escribir los resultados generales para el campo magnético debido a una distribución de corriente arbitraria. La figura 4 ilustra la geometría general. No estamos ya considerando la fuerza entre dos elementos de corriente; en su lugar, calculamos el campo $d\mathbf{B}$ en el punto P debido a un solo elemento de corriente $i\,d\mathbf{s}$. Si nos interesa calcular el efecto de ese campo sobre las cargas en movimiento o las corrientes en el punto P, usamos las fórmulas que desarrollamos en el capítulo anterior. Eliminando los subíndices en la ecuación 5 y usando la ecuación 6 para la constante k, tenemos

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (7)$$

Este resultado se conoce como la *ley de Biot y Savart*. La dirección de $d\mathbf{B}$ es la misma que la dirección de $d\mathbf{s}\times\mathbf{u}_r$ (o sea $d\mathbf{s}\times\mathbf{r}$), hacia adentro del plano del papel en la figura 4.

Podemos expresar la magnitud de $d\mathbf{B}$ a partir de la ley de Biot y Savart como

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\operatorname{sen}\theta}{r^2}, \qquad (8)$$

donde θ es el ángulo entre $d\mathbf{s}$ (que está en la dirección de i), y $\mathbf{r}$, como se muestra en la figura 4.

Para hallar el campo total $\mathbf{B}$ debido a toda la distribución de corriente, debemos integrar sobre todos los elementos de corriente $i\,d\mathbf{s}$:

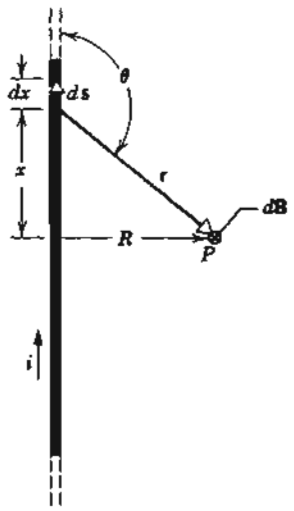


Figura 5 El campo magnético $d\mathbf{B}$ generado por un elemento de corriente en un alambre recto largo apunta hacia adentro de la página en P.

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (9)$$

Del mismo modo como lo hicimos en el capítulo 28 para los campos eléctricos, al calcular esta integral debemos tener en cuenta que no todos los elementos $d\mathbf{B}$ están en la misma dirección (véase la Sec. 28-5 para ejemplos de esta clase de integral vectorial en el caso de los campos eléctricos).

35-2 APLICACIONES DE LA LEY DE BIOT-SAVART

Un alambre recto largo

Ilustramos la ley de Biot-Savart aplicándola para hallar $\mathbf{B}$ debido a una corriente i en un alambre recto largo. La figura 5 muestra un elemento de corriente $i\,d\mathbf{s}$ representativo. La magnitud de la contribución $d\mathbf{B}$ de este elemento al campo magnético en P se encuentra a partir de la ecuación 8,

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\,\operatorname{sen}\theta}{r^2}.$$

Elegimos que x sea la variable de la integración que corre a lo largo del alambre, y así la longitud del elemento de corriente es dx. Las direcciones de las contribuciones $d\mathbf{B}$ en el punto P para todos los elementos son las mismas, es decir, hacia adentro del plano de la figura en ángulo recto con la página. Ésta es la dirección del producto vectorial

$d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$. Podemos entonces evaluar una integral escalar en lugar de la integral vectorial de la ecuación 9, y B puede escribirse como

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\operatorname{sen}\theta\, dx}{r^2}. \qquad (10)$$

Ahora x, θ y r no son independientes, estando relacionadas (véase la Fig. 5) por

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

de modo que la ecuación 10 se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R\, dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

o sea

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}. \qquad (11)$$

Este problema nos recuerda su equivalente electrostático. Deducimos una expresión para $\mathbf{E}$ debido a una barra larga cargada por métodos de integración, usando la ley de Coulomb (Sec. 28-5). Resolvimos también el mismo problema usando la ley de Gauss (Sec. 29-5). Más adelante, en este capítulo, consideraremos una ley de los campos magnéticos, la ley de Ampère, que es similar a la ley de Gauss en cuanto a que simplifica los cálculos del campo magnético en los casos (como éste) en que tenga un alto grado de simetría.

Un anillo circular de corriente

La figura 6 muestra un anillo circular de radio R por el que pasa una corriente i. Calculemos $\mathbf{B}$ en el punto P sobre el eje a una distancia z del centro del anillo.

El ángulo θ entre el elemento de corriente $i\,d\mathbf{s}$ y $\mathbf{r}$ es de 90°. Según la ley de Biot y Savart, sabemos que el vector $d\mathbf{B}$ de este elemento está en ángulo recto con el plano formado por $i\,d\mathbf{s}$ y $\mathbf{r}$ y por lo tanto, se encuentra en ángulo recto con $\mathbf{r}$, como lo muestra la figura.

Resolvamos a $d\mathbf{B}$ en dos componentes, una, $d\mathbf{B}_{\parallel}$, a lo largo del eje del anillo y otra, $d\mathbf{B}_{\perp}$, en ángulo recto con el eje. Sólo $d\mathbf{B}_{\parallel}$ contribuye al campo magnético total $\mathbf{B}$ en el punto P. Esto se deduce porque las componentes $d\mathbf{B}_{\parallel}$ de todos los elementos de corriente están sobre el eje y se suman directamente; sin embargo, las componentes $d\mathbf{B}_{\perp}$ apuntan en direcciones distintas perpendicularmente al eje, y la suma de todas las $d\mathbf{B}_{\perp}$ para el anillo completo es cero, según la simetría. (Un elemento de corriente diametralmente opuesto, indicado en la figura 6, produce el mismo $d\mathbf{B}_{\parallel}$ pero el $d\mathbf{B}_{\perp}$ opuesto). Por lo tanto, podemos reemplazar a la integral vectorial de todas las $d\mathbf{B}$ con una integral escalar de las componentes paralelas únicamente:

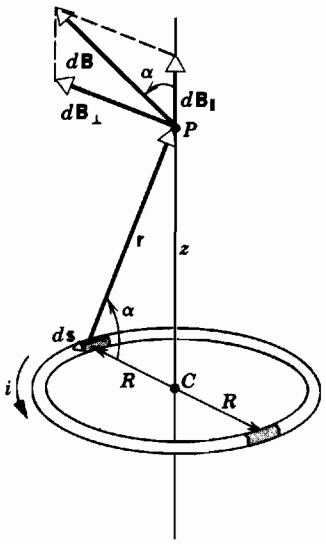


Figura 6 Un anillo circular de corriente. El elemento $i\,ds$ del anillo crea un campo $d\mathbf{B}$ en un punto P sobre el eje del anillo.

$$B = \int dB_{\parallel}. \qquad (12)$$

Para el elemento de corriente en la figura 6, la ley de Biot y Savart (Ec. 8) da

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \operatorname{sen} 90°}{r^2}. \qquad (13)$$

Tenemos también que

$$dB_{\parallel} = dB \cos\alpha,$$

la cual, combinada con la ecuación 13, da

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i \cos\alpha\, ds}{4\pi r^2}. \qquad (14)$$

La figura 6 muestra que r y α no son independientes una de la otra. Expresemos a cada una en términos de z, la distancia desde el centro del anillo hasta el punto P. Las relaciones son

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 14 para $dB_{\parallel}$ nos da

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}}\, ds.$$

Nótese que i, R, y z tienen los mismos valores para todos los elementos de corriente. Al integrar esta ecuación, obtenemos

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 iR}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds$$

o bien, observando que $\int ds$ es simplemente la circunferencia del anillo ($= 2\pi R$),

$$B = \frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{15}$$

En el centro del anillo ($z = 0$), la ecuación 15 se reduce a

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}. \tag{16}$$

La magnitud del campo magnético en el eje de un anillo circular de corriente está dado por la ecuación 15. El campo tiene su valor máximo en el plano del anillo (Ec. 16) y disminuye conforme la distancia z aumenta. La dirección del campo está determinada por la regla de la mano derecha: se empuña el alambre con la mano derecha, con el pulgar indicando la dirección de la corriente, y los demás dedos se enroscan en dirección al campo magnético.

Si $z \gg R$, de modo que no se consideren los puntos cerca del anillo, la ecuación 15 se reduce a

$$B = \frac{\mu_0 iR^2}{2z^3}.$$

En una bobina de N vueltas circulares idénticas, devanadas apretadamente, el campo total es N veces este valor, o sea (sustituyendo el área $A = \pi R^2$ del anillo)

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NiA}{z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{z^3}, \tag{17}$$

en donde μ es el *momento dipolar magnético* (véase la Sec. 34-7) de la espira de corriente. Esto nos recuerda el resultado deducido en el problema 11 del capítulo 28 [$E = (1/2\pi\epsilon_0)(p/z^3)$], que es la fórmula para el campo *eléctrico* en el eje de un dipolo *eléctrico*. El problema 33 da un ejemplo del cálculo del campo magnético en puntos distantes perpendiculares al eje de un dipolo magnético.

Hemos demostrado de dos maneras que podemos ver a un anillo de corriente como un dipolo magnético: por una parte, experimenta un momento de torsión dado por $\tau = \mu \times \mathbf{B}$ cuando lo situamos en un campo magnético *externo* (Ec. 37 del capítulo 34); por otra, genera su propio campo magnético dado, para los puntos en el eje, por la ecuación 17. La tabla 1 resume algunas propiedades de los dipolos magnéticos y eléctricos.

Problema muestra 1 Por dos alambres largos paralelos separados por una distancia $2d$ entre sí fluyen corrientes iguales i en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 7*a*. Obtenga una expresión para el campo magnético B en un punto P sobre la línea que une a los alambres y a una distancia x desde el punto medio entre ellos.

Solución El estudio de la figura 7*a* muestra que $\mathbf{B}_1$ debido a la corriente i_1 y $\mathbf{B}_2$ debido a la corriente i_2 apuntan en la misma dirección en P. Cada uno está dado por la ecuación 11 ($B = \mu_0 i/2\pi R$) de modo que

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(d + x)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(d - x)} = \frac{\mu_0 id}{\pi(d^2 - x^2)}.$$

La inspección de este resultado muestra que (1) B es simetrico alrededor de $x = 0$; (2) B tiene su valor mínimo ($= \mu_0 i/\pi d$) en $x = 0$; y (3) $B \to \infty$ cuando $x \to \pm d$. Esta última conclusión no es correcta, porque la ecuación 11 no puede aplicarse a puntos dentro de los alambres. En realidad (véase el problema muestra 5, por ejemplo) el campo debido a cada alambre se anularía en el centro de ese alambre.

Se recomienda al lector demostrar que nuestro resultado del campo combinado permanece válido en los puntos en donde $|x| > d$. La figura 7*b* muestra la variación de B con x para $i = 25$ A y $d = 25$ mm.

Problema muestra 2 En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón gira alrededor del núcleo en una trayectoria de 5.29×10^{-11} m de radio con una frecuencia ν de 6.63×10^{15} Hz (o rev/s). (*a*) ¿Qué valor de B se establece en el centro de la órbita? (*b*) ¿Cuál es el momento dipolar magnético equivalente?

Solución (*a*) La corriente es la rapidez con la cual la carga pasa por cualquier punto en la órbita y está dada por

$$i = e\nu = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(6.63 \times 10^{15}\ \text{Hz}) = 1.06 \times 10^{-3}\ \text{A}.$$

TABLA 1 ALGUNAS ECUACIONES DEL DIPOLO

Propiedad	*Dipolo eléctrico*	*Dipolo magnético*
Momento de torsión en un campo externo	$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$	$\tau = \mu \times \mathbf{B}$
Energía en un campo externo	$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	$U = -\mu \cdot \mathbf{B}$
Campo en puntos distantes a lo largo del eje	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p}{z^3}$	$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{z^3}$
Campo en puntos distantes a lo largo de la bisectriz perpendicular	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}$	$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu}{x^3}$

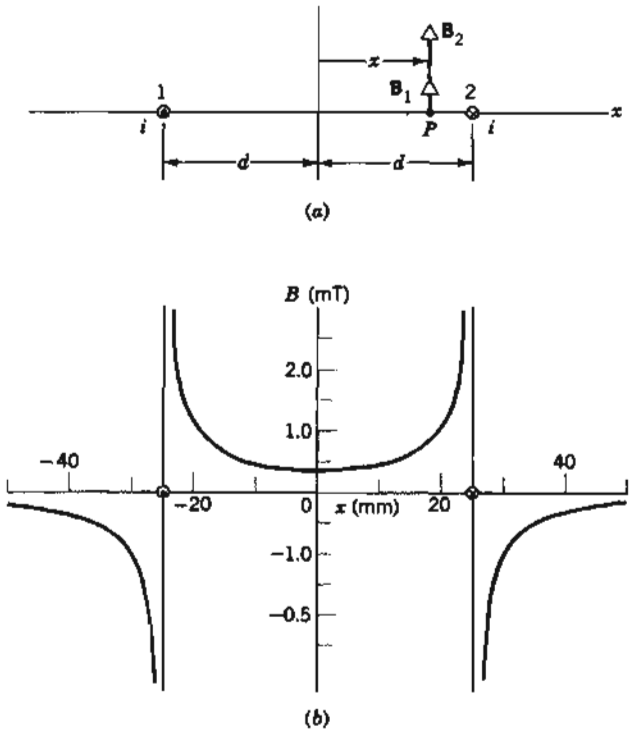


Figura 7 Problema muestra 1. (*a*) Los campos magnéticos en el punto *P* debidos a las corrientes en los alambres 1 y 2. (*b*) El campo resultante en *P*, calculado para $i = 25$ A y $d = 25$ mm.

El campo magnético *B* en el centro de la órbita está dado por la ecuación 16,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(1.06 \times 10^{-3}\ \text{A})}{2(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})} = 12.6\ \text{T}.$$

(*b*) De la ecuación 36 del capítulo 34 con *N* (el número de espiras) = 1, tenemos que

$$\mu = iA = (1.06 \times 10^{-3}\ \text{A})(\pi)(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})^2 = 9.31 \times 10^{-24}\ \text{A}\cdot\text{m}^2.$$

Problema muestra 3 La figura 8 muestra una cinta plana de cobre de anchura *a* y espesor despreciable por la cual pasa una corriente *i*. Determine el campo magnético **B** en el punto *P*, a una distancia *R* desde el centro de la cinta a lo largo de su bisectriz perpendicular.

Solución Subdividamos la cinta en filamentos infinitesimales largos de anchura *dx*, cada uno de los cuales puede considerarse como un alambre portador de corriente *di* dada por $i(dx/a)$. La contribución *dB* del campo en el punto *P* en la figura 8 está dada, para el elemento mostrado, por la forma diferencial de la ecuación 11, o sea

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i(dx/a)}{R\sec\theta},$$

donde $r = R/\cos\theta = R\sec\theta$. Nótese que el vector *d***B** forma un ángulo recto con la línea marcada por *r*.

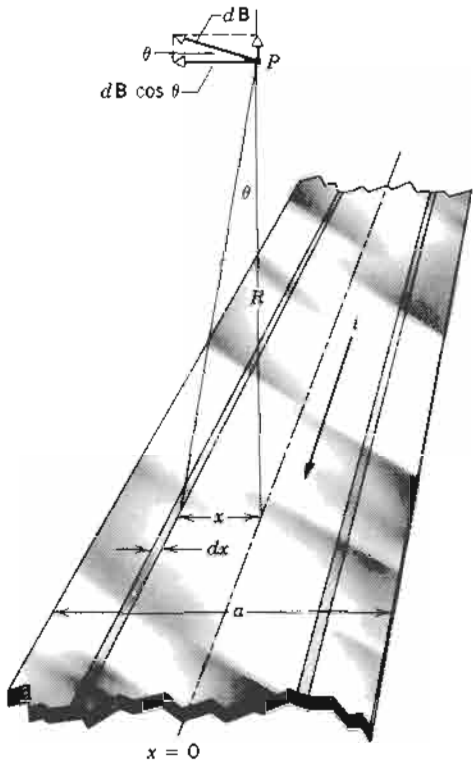


Figura 8 Problema muestra 3. Una cinta plana de anchura *a* por la cual fluye una corriente *i*.

Sólo es efectiva la componente horizontal de *d***B**, es decir, *dB* cos θ; la componente vertical se cancela por la contribución de un filamento ubicado simétricamente en el otro lado del origen (la segunda cinta sombreada en la Fig. 8). Así, *B* en el punto *P* está dado por la integral (escalar)

$$B = \int dB\cos\theta = \int \frac{\mu_0 i(dx/a)}{2\pi R\sec\theta}\cos\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R}\int \frac{dx}{\sec^2\theta}.$$

Las variables *x* y θ no son independientes, estando relacionadas por

$$x = R\tan\theta$$

o bien

$$dx = R\sec^2\theta\, d\theta.$$

Los límites en θ son $\pm\alpha$, en donde $\alpha = \tan^{-1}(a/2R)$. Al sustituir a *dx* por *B* en la expresión, hallamos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R}\int \frac{R\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\alpha = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{2R}.$$

Éste es el resultado general para el campo magnético debido a la cinta.

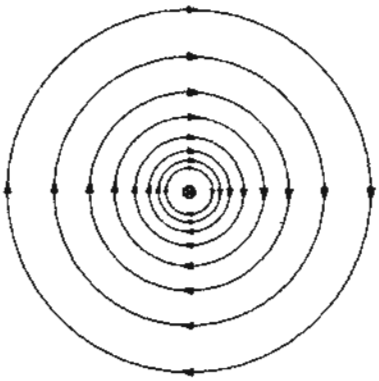


Figura 9 Las líneas del campo magnético son círculos concéntricos en un alambre recto y largo, por el cual fluye una corriente. Su dirección está dada por la regla de la mano derecha.

En los puntos alejados de la cinta, α es un ángulo pequeño, para el cual $\alpha \approx \tan \alpha = a/2R$. Así, tenemos, como un resultado aproximado,

$$B \approx \frac{\mu_0 i}{\pi a}\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{R}.$$

Este resultado era de esperarse pues en los puntos distantes la cinta no puede distinguirse de un alambre delgado (véase la Ec. 11).

35-3 LAS LÍNEAS DE B

La figura 9 muestra las líneas que representan al campo magnético **B** cerca de un alambre recto largo. Nótese el aumento en el espaciamiento de las líneas cuando aumenta la distancia desde el alambre. Esto representa la disminución $1/r$ predicha por la ecuación 11.

La figura 10 muestra las líneas magnéticas resultantes asociadas a la corriente de un alambre orientado en ángulo recto con un campo *externo* uniforme $\mathbf{B}_e$ que se dirige hacia la izquierda. En cualquier punto, el campo magnético total resultante $\mathbf{B}_t$ es el vector suma de $\mathbf{B}_e$ y $\mathbf{B}_i$, en donde $\mathbf{B}_i$ es el campo magnético creado por la corriente del alambre. Los campos $\mathbf{B}_e$ y $\mathbf{B}_i$ tienden a cancelarse arriba del alambre y a reforzarse entre sí abajo del alambre. En el punto P de la figura 10, $\mathbf{B}_e$ y $\mathbf{B}_i$ se cancelan exactamente, y $\mathbf{B}_t = 0$. Muy cerca del alambre el campo está representado por líneas circulares, y $\mathbf{B}_t \approx \mathbf{B}_i$.

Para Michael Faraday, creador del concepto, las líneas del campo magnético representaban la acción de fuerzas mecánicas, un poco parecida a la acción de una liga elástica estirada. Usando la interpretación de Faraday, podemos ver sin dificultad que el alambre de la figura 10 es jalado hacia arriba por la "tensión" de las líneas del campo. Este concepto tiene sólo una utilidad limitada, y

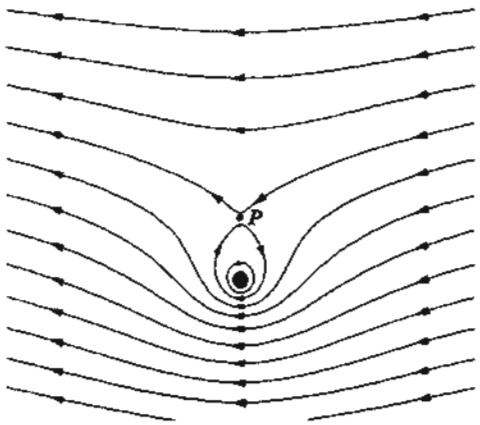


Figura 10 Un alambre recto largo portador de una corriente hacia adentro de la página está inmerso en un campo magnético externo uniforme. Las líneas del campo magnético mostradas representan el campo resultante formado al combinar en cada punto los vectores que representan al campo uniforme original y al campo creado por la corriente en el alambre.

hoy día usamos las líneas de **B** principalmente para formarnos una imagen mental. En los cálculos cuantitativos usamos los vectores del campo, y describiríamos la fuerza magnética sobre el alambre de la figura 10 usando la relación $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$.

Al aplicar esta relación a la figura 10, recordamos que la fuerza sobre el alambre es causada por el *campo externo* en el que está inmerso el alambre; esto es, es $\mathbf{B}_e$, el cual apunta hacia la izquierda. Puesto que **L** apunta hacia adentro de la página, la fuerza magnética sobre el alambre ($= i\mathbf{L} \times \mathbf{B}_e$) apunta en efecto hacia arriba. Es importante usar sólo el campo *externo* en tales cálculos, pues el campo creado por la corriente del alambre no puede ejercer una fuerza sobre el alambre, del mismo modo en que el campo gravitatorio de la Tierra no puede ejercer una fuerza sobre la Tierra misma sino sólo sobre otro cuerpo. En la figura 9, por ejemplo, no existe una fuerza magnética sobre el alambre porque no está presente ningún campo magnético externo.

35-4 DOS CONDUCTORES PARALELOS

Poco después de que Oersted descubriera que un conductor portador de corriente desviaba la aguja de una brújula magnética, Ampère concluyó que tales conductores deberían atraerse entre sí con una fuerza de origen magnético.

Analizaremos la interacción magnética de dos corrientes de manera similar al método que utilizábamos para el análisis de la interacción eléctrica entre dos cargas:

$$\text{carga} \rightleftarrows \mathbf{E} \rightleftarrows \text{carga}.$$

Esto es, una carga crea un campo eléctrico, y la otra carga interactúa con el campo en su ubicación particular. Usamos un procedimiento similar para la interacción magnética:

$$\text{corriente} \rightleftarrows \mathbf{B} \rightleftarrows \text{corriente}.$$

Aquí una corriente genera un campo magnético, y la otra corriente interactúa entonces con ese campo.

En la figura 11, el alambre 1, que conduce una corriente i_1, produce un campo magnético $\mathbf{B}_1$ cuya magnitud, en el sitio del segundo alambre es, de acuerdo con la ecuación 11,

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}.$$

La regla de la mano derecha muestra que la dirección de $\mathbf{B}_1$ en el alambre 2 es hacia abajo, como se muestra en la figura.

El alambre 2, por el cual fluye una corriente i_2, puede entonces considerarse como inmerso en un campo magnético *externo* $\mathbf{B}_1$. Una longitud L de este alambre experimenta una fuerza magnética lateral $\mathbf{F}_{21} = i_2\mathbf{L} \times \mathbf{B}_1$ de magnitud

$$F_{21} = i_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L i_1 i_2}{2\pi d}. \qquad (18)$$

La regla vectorial para el producto cruz muestra que $\mathbf{F}_{21}$ se encuentra en el plano de los alambres y apunta hacia el alambre 1 como se ve en la figura 11.

Hubiéramos podido igualmente haber comenzado con el alambre 2 al calcular primero el campo magnético $\mathbf{B}_2$ producido por el alambre 2 en el sitio del alambre 1 y luego determinar la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ ejercida sobre una longitud L del alambre 1 por el campo del alambre 2. Esta fuerza sobre el alambre 1 apuntaría, en corrientes paralelas, hacia el alambre 2 en la figura 11. Las fuerzas que ejercen los dos alambres uno sobre el otro son de igual magnitud y de dirección opuesta; forman un par acción-reacción de acuerdo con la tercera ley de Newton.

Si, en la figura 11, las corrientes fuesen antiparalelas, hallaríamos que las fuerzas sobre los alambres tendrían la dirección opuesta: los alambres se repelerían entre sí. La regla general es:

Las corrientes paralelas se atraen, y las corrientes antiparalelas se repelen.

Esta regla es, de alguna manera, opuesta a la regla para las cargas eléctricas, en la que las corrientes iguales (paralelas) se atraen, pero las cargas iguales (del mismo signo) se repelen.

La fuerza entre alambres paralelos largos se usa para definir al ampere. Dados dos alambres paralelos largos de sección transversal circular despreciable separados en el vacío por una distancia de 1 metro, se define al ampere como la corriente en cada alambre que produciría una fuerza de 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.

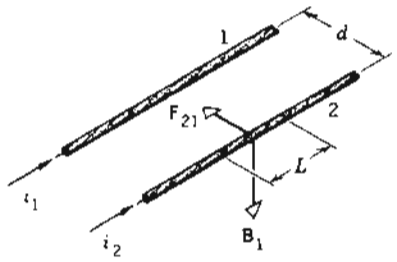


Figura 11 Dos alambres paralelos que conducen corrientes en la misma dirección se atraen entre sí. El campo $\mathbf{B}_1$ en el alambre 2 es aquél debido a la corriente del alambre 1.

Las mediciones de corriente primarias pueden realizarse con una balanza de corriente, mostrada esquemáticamente en la figura 12. Ésta consta de una bobina de alambre devanada cuidadosamente y colocada entre otras dos bobinas; las bobinas exteriores están sujetas a una mesa, mientras que la bobina interior cuelga del brazo de una balanza. Las tres bobinas conducen la misma corriente.

Al igual que los alambres paralelos de la figura 11, las bobinas ejercen fuerzas mutuas, las cuales pueden medirse al cargar con pesas la charola de la balanza. La corriente puede determinarse a partir de esta fuerza medida y de las dimensiones de las bobinas. Este procedimiento de uso de bobinas es más práctico que aquél de los alambres paralelos largos de la figura 11. Las mediciones con la balanza de corriente se emplean para calibrar otros estándares secundarios más convenientes para medir la corriente.

Problema muestra 4 Un alambre horizontal largo soportado rígidamente conduce una corriente i_a de 96 A. Directamente encima de él y paralelo a él hay un alambre delgado conductor de una corriente i_b de 23 A y de 0.73 N/m de peso. ¿A qué altura en el alambre inferior habría que extender este segundo alambre si esperamos soportarlo mediante repulsión magnética?

Solución Para proporcionar repulsión, las dos corrientes deben apuntar en direcciones opuestas. En el equilibrio, la fuerza magnética por unidad de longitud debe ser igual al peso por unidad de longitud y debe estar dirigida opuestamente. Al despejar d de la ecuación 18 da

$$d = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi(F/L)} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(96\ \text{A})(23\ \text{A})}{2\pi(0.073\ \text{N/m})}$$
$$= 6.0 \times 10^{-3}\ \text{m} = 6.0\ \text{mm}.$$

Suponemos que los diámetros de los alambres son mucho más pequeños que su separación. Esta hipótesis es necesaria porque al deducir la ecuación 18 supusimos tácitamente que el campo magnético producido por un alambre es uniforme en todos los puntos dentro del segundo alambre.

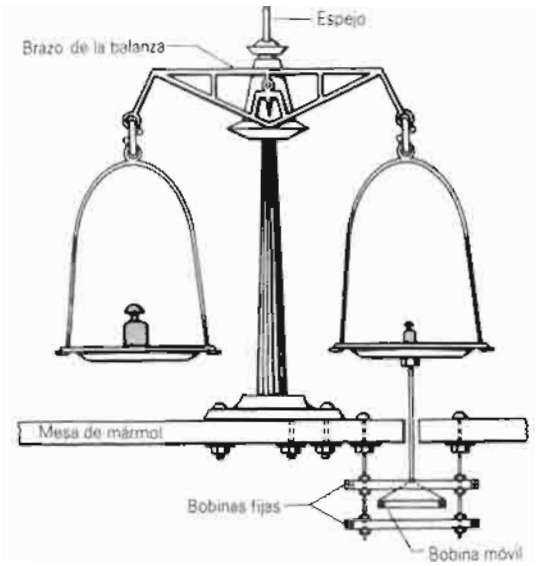


Figura 12 Balanza de corriente.

¿Es el equilibrio del alambre suspendido estable o inestable contra los desplazamientos verticales? Esto puede demostrarse si desplazamos el alambre verticalmente y examinamos cómo cambian las fuerzas sobre el alambre. ¿Es el equilibrio estable o inestable contra los desplazamientos horizontales?

Supongamos que el alambre delgado está suspendido *debajo* del alambre soportado rígidamente. ¿Cómo puede hacerse que "flote"? ¿Es el equilibrio estable o inestable contra los desplazamientos verticales? ¿Y contra los desplazamientos horizontales?

35-5 LA LEY DE AMPÈRE

La ley de Coulomb puede considerarse como una ley fundamental de la electrostática; podemos usarla para calcular el campo eléctrico asociado con cualquier distribución de cargas de corriente. Sin embargo, en el capítulo 29 demostramos que la ley de Gauss nos permite resolver cierta clase de problemas que contienen un alto grado de simetría, con facilidad y elegancia. Además, demostramos que la ley de Gauss contiene en sí a la ley de Coulomb para el campo eléctrico de una carga puntual. En resumen, consideramos que la ley de Gauss es más básica que la ley de Coulomb, y que la ley de Gauss es una de las cuatro ecuaciones fundamentales (Maxwell) del electromagnetismo.

La situación es similar en el magnetismo. Usando la ley de Biot-Savart, podemos calcular el campo magnético de cualquier distribución de corrientes, del mismo modo en que usamos la ecuación 2 (equivalente a la ley de Coulomb) para calcular el campo eléctrico de cualquier distribución de cargas. Un enfoque más fundamental de los campos magnéticos hace uso de una ley que (como la ley de Gauss para los campos eléctricos) aprovecha la simetría presente en ciertos problemas para simplificar el cálculo de **B**. Esta ley se considera más fundamental que la ley de Biot-Savart y conduce a otra de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Este nuevo resultado es lo que constituye la *ley de Ampère* y se escribe

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i. \tag{19}$$

Se recordará que, al usar la ley de Gauss, primero construíamos una superficie cerrada imaginaria (una superficie gaussiana) que encerraba una cierta cantidad de carga. Al usar la ley de Ampère construimos una curva cerrada imaginaria (llamada *anillo amperiano*), como se indica en la figura 13. El lado izquierdo de la ecuación 19 nos dice que dividamos a la curva en segmentos pequeños de longitud ds. Al recorrer el anillo (nuestra dirección de viaje determinará la dirección de ds), evaluamos la cantidad $\mathbf{B}\cdot ds$ y sumamos (integramos) todas esas cantidades alrededor del anillo.

La integral de la izquierda en la ecuación 19 se llama *integral de línea*. (Anteriormente hemos usado integrales de línea en el capítulo 7 para calcular el trabajo y en el capítulo 30 para calcular la diferencia de potencial.) El círculo sobrepuesto en el signo de la integral nos recuerda que la integral de línea debe evaluarse alrededor de una trayectoria *cerrada*. Si θ representa al ángulo entre ds y **B**, podemos escribir la integral de línea como

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint B\, ds \cos\theta. \tag{20}$$

El lado derecho de la ecuación 19 es la corriente total "encerrada" por el anillo; esto es, es la corriente total que pasa por los alambres que perforan la superficie encerrada por el anillo. Como en el caso de la ley de Gauss para las cargas, no se incluyen las corrientes afuera del anillo. La figura 13 muestra tres alambres portadores de corriente. El campo magnético **B** es el efecto neto de las

Figura 13 La ley de Ampère aplicada a un anillo arbitrario que encierra a dos alambres pero que excluye a un tercero. Obsérvense las direcciones de las corrientes.

corrientes en todos los alambres. Sin embargo, en la evaluación del lado derecho de la ecuación 19, sólo incluimos las corrientes i_1 e i_2, porque el alambre que conduce a i_3 no pasa a través de la superficie encerrada por el anillo. Los dos alambres que pasan a través del anillo conducen corrientes en dirección opuesta. Se emplea una regla de la mano derecha para asignar signos a las corrientes: con los dedos de la mano derecha en la dirección en que se recorre el anillo, las corrientes que siguen la dirección del pulgar (como i_1) se toman como positivas, mientras que las corrientes en dirección opuesta (como i_2) se toman como negativas. La corriente neta i en el caso de la figura 13 es, entonces, $i = i_1 - i_2$.

El campo magnético **B** en los puntos sobre el anillo y dentro del anillo depende, ciertamente, de la corriente i_3; sin embargo, la *integral* de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ alrededor del anillo *no* depende de corrientes como i_3 que no penetran la superficie encerrada por el anillo. Esto es razonable, porque $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ para el campo creado por i_1 o por i_2 tiene siempre el mismo signo cuando viajamos alrededor del anillo; sin embargo, $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ para el campo debido únicamente a i_3 cambia de signo cuando recorremos el anillo, y de hecho las contribuciones positiva y negativa se cancelan exactamente entre sí.

Nótese que el hecho de incluir a la constante arbitraria 4π en la ley de Biot-Savart reduce la constante que aparece en la ley de Ampère a μ_0 simplemente. (Se obtuvo una simplificación similar de la ley de Gauss al incluir la constante 4π en la ley de Coulomb.)

Nos fue posible emplear la ley de Gauss para calcular los campos eléctricos sólo en aquellos casos que tienen un alto grado de simetría. En esos casos, argumentábamos que E era constante y que podía eliminarse de la integral. Elegimos a los anillos amperianos de manera similar, de modo que B sea constante y pueda eliminarse de la integral.

A modo de ilustración, usemos la ley de Ampère para hallar el campo magnético a una distancia r de un alambre recto largo, problema que ya hemos resuelto al usar la ley de Biot-Savart. Como se ilustra en la figura 14, elegimos como nuestra trayectoria amperiana un círculo de radio r. A partir de la simetría del problema, **B** puede depender únicamente de r (y no, por ejemplo, de la coordenada angular alrededor del círculo). Al elegir una trayectoria que esté a la misma distancia del alambre en todos sus puntos, sabemos que B es constante alrededor de la trayectoria.

De los experimentos de Oersted sabemos que **B** tiene sólo una componente tangencial. Entonces, el ángulo θ es cero, y la integral de línea es

$$\oint B\,ds\cos\theta = B\oint ds = B(2\pi r).$$

Nótese que la integral de ds alrededor de la trayectoria es simplemente la longitud de la trayectoria, o sea $2\pi r$ en el caso del círculo. El lado derecho de la ley de Ampère es simplemente $\mu_0 i$ (tomada como positiva, de acuerdo con la regla de la mano derecha). La ley de Ampère da

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

o sea

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Esto es idéntico a la ecuación 11, un resultado que obtuvimos (con mucho más esfuerzo) usando la ley de Biot-Savart.

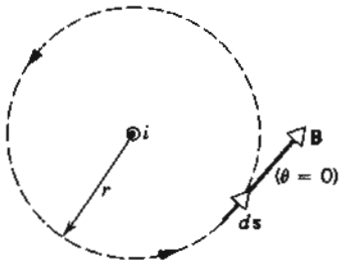


Figura 14 Un anillo amperiano circular se utiliza para hallar el campo magnético creado por una corriente en un alambre recto largo. El alambre es perpendicular al plano de la página, y la dirección de la corriente es hacia afuera de la página.

Problema muestra 5 Deduzca una expresión para **B** a una distancia r del centro de un alambre cilíndrico largo de radio R, en donde $r < R$. El alambre conduce una corriente i, distribuida uniformemente en la sección transversal del alambre.

Solución La figura 15 muestra un anillo amperiano circular adentro del alambre. La simetría sugiere que **B** es de magnitud constante a lo largo del anillo y tangente a él como se muestra. La ley de Ampère da

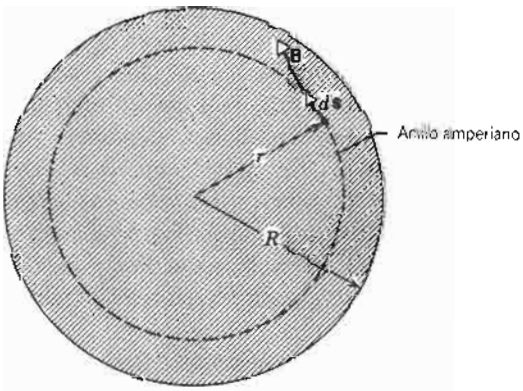


Figura 15 Problema muestra 5. Un alambre recto largo conduce una corriente que sale de la página y se distribuye uniformemente en la sección transversal circular del alambre. Un anillo amperiano circular se dibuja dentro del alambre.

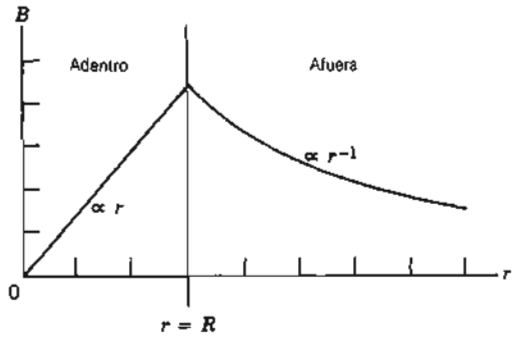


Figura 16 El campo magnético calculado para el alambre que se muestra en la figura 15. Nótese que el mayor campo ocurre en la superficie del alambre.

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

en donde el lado derecho incluye únicamente la fracción de la corriente que pasa a través de la superficie encerrada por la trayectoria de integración. Al despejar B se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}.$$

En la superficie del alambre ($r = R$), esta ecuación se reduce a la misma expresión que hallamos al poner $r = R$ en la ecuación 11 ($B = \mu_0 i/2\pi R$). Esto es, ambas expresiones dan el mismo resultado para el campo de la superficie del alambre. La figura 16 muestra el grado al que el campo depende de r, tanto dentro como fuera del alambre.

35-6 SOLENOIDES Y TOROIDES

Dos clases de componentes prácticos basados en los devanados de espiras de corriente son los *solenoides* y los *toroides*. El solenoide suele utilizarse para crear un campo magnético uniforme, al igual que el capacitor de placas paralelas crea un campo eléctrico uniforme. En los timbres de las puertas y en los altavoces, el solenoide a menudo proporciona el campo magnético que acelera a un material magnético. Los toroides se emplean también para crear campos grandes.

Solenoides

El solenoide es un alambre largo devanado en una hélice fuertemente apretada y conductor de una corriente i. La hélice es muy larga en comparación con su diámetro. ¿Cuál es el campo magnético **B** que genera el solenoide?

La figura 17 muestra, sólo con fines de ilustración, la sección de un solenoide "extendido". En los puntos cercanos a una sola vuelta del solenoide, el observador no puede percibir que el alambre tiene la forma de arco. El alambre se comporta magnéticamente casi como un alambre recto largo, y las líneas de **B** debidas a esta sola vuelta son casi círculos concéntricos.

El campo del solenoide es la suma vectorial de los campos creados por todas las espiras que forman el solenoide. La figura 17 sugiere que los campos tienden a cancelarse entre alambres contiguos. También sugiere que, en los puntos dentro del solenoide y razonablemente alejados de los alambres, **B** es paralelo al eje del solenoide. En el caso límite de alambres cuadrados empaquetados en forma compacta, el solenoide se convierte esencialmente en una lámina de corriente cilíndrica, y las necesidades de simetría obligan entonces a que sea rigurosamente cierto el hecho de que **B** sea paralelo al eje del solenoide. A continuación, damos por sentado que esto es así.

Para puntos como P en la figura 17, el campo creado por la parte superior de las espiras del solenoide (marca-

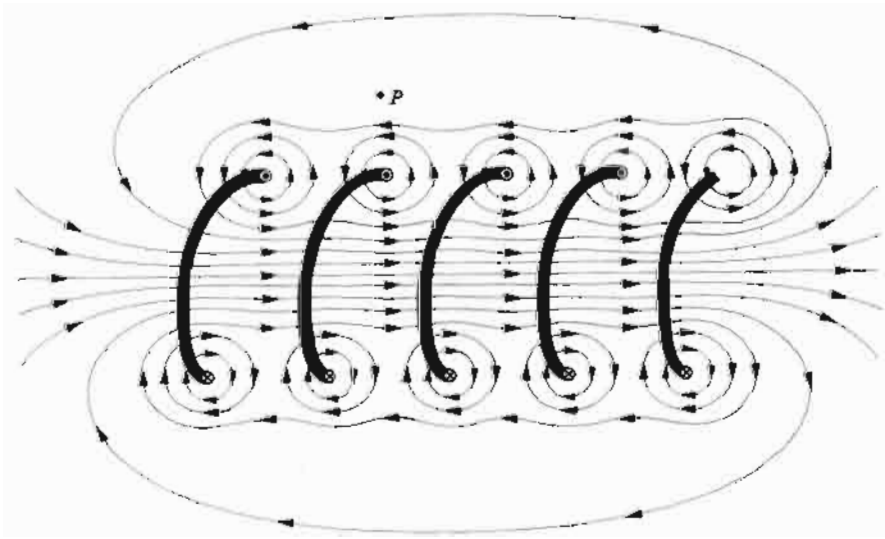


Figura 17 Sección de un solenoide "extendido" con el fin de mostrar las líneas del campo magnético.

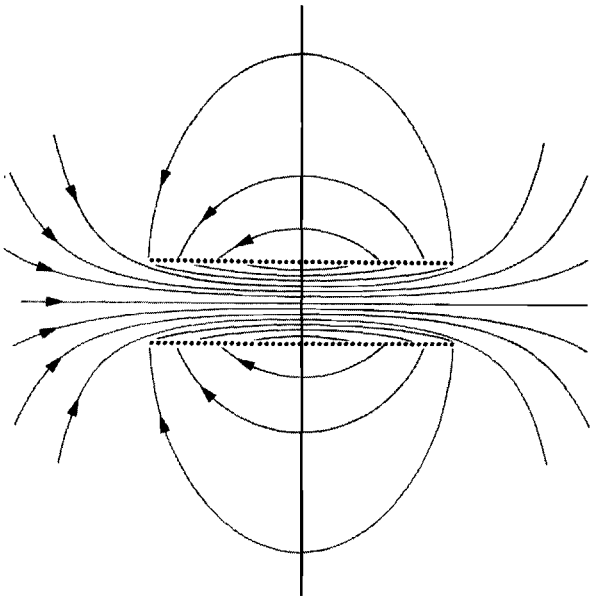


Figura 18 Líneas del campo magnético en un solenoide de longitud finita. Nótese que el campo es más intenso (lo que está indicado por la mayor densidad de las líneas del campo) dentro del solenoide que fuera del mismo.

das con el signo ⊙, porque la corriente sale de la página) apunta a la izquierda y tiende a cancelar al campo generado por la parte inferior de las espiras del solenoide (marcadas como ⊗, porque la corriente entra a la pagina), que apunta hacia la derecha. Cuando el solenoide se vuelve más y más ideal, esto es, cuando se aproxima a la configuración de una lámina de corriente cilíndrica e infinitamente larga, el campo **B** en los puntos de afuera tiende a cero. Considerar que el campo externo sea cero es una buena hipótesis de un solenoide práctico si su longitud es mucho mayor que su diámetro y si consideramos únicamente los puntos externos cerca de la región central del solenoide, es decir, lejos de los extremos. La figura 18 muestra las líneas de **B** para un solenoide real, que está lejos de ser ideal, puesto que la longitud es ligeramente mayor que el diámetro. Aun aquí, el espaciamiento de las líneas de **B** en el plano central muestra que el campo externo es mucho más débil que el campo interno.

Apliquemos la ley de Ampère,

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i,$$

a la trayectoria rectangular *abcd* en el solenoide ideal de la figura 19. Escribiremos la integral $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ como la suma de cuatro integrales, una por cada segmento de la trayectoria:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \int_b^c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \int_c^d \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \int_d^a \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}. \quad (21)$$

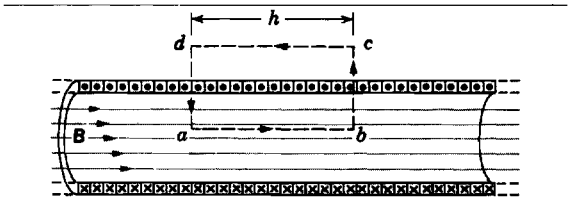


Figura 19 Un anillo amperiano (el rectángulo *abcd*) se emplea para calcular el campo magnético de este solenoide largo idealizado.

La primera integral a la derecha es Bh, donde B es la magnitud de **B** dentro del solenoide y h es la longitud arbitraria de la trayectoria desde a hasta b. Nótese que la trayectoria ab, si bien paralela al eje del solenoide, no necesariamente coincide con él. Resultará que B adentro del solenoide es constante en su sección transversal e independiente de la distancia desde el eje (como se sugiere por el espaciamiento igual de las líneas de **B** en la figura 18 cerca del centro del solenoide).

La segunda y cuarta integrales de la ecuación 21 son cero, porque en cada elemento de estas trayectorias **B** está en ángulo recto con la trayectoria (para los puntos dentro del solenoide) o bien es cero (para los puntos fuera de él). En cualquier caso, $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ es cero, y las integrales se anulan. La tercera integral, que incluye la parte del rectángulo que se encuentra fuera del solenoide, es cero porque hemos aceptado que **B** es cero en todos los puntos externos de un solenoide ideal.

Para toda la trayectoria rectangular, $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ tiene el valor Bh. La corriente neta i que pasa por el anillo amperiano rectangular no es la misma que la corriente i_0 en el solenoide porque el devanado atraviesa el anillo más de una vez. Hagamos que n sea el número de espiras por unidad de longitud: entonces la corriente total, que está fuera de la página dentro del anillo amperiano rectangular de la figura 19, es

$$i = i_0 nh.$$

La ley de Ampère se convierte entonces en

$$Bh = \mu_0 i_0 nh$$

o sea

$$B = \mu_0 i_0 n. \quad (22)$$

La ecuación 22 muestra que el campo magnético adentro de un solenoide depende únicamente de la corriente i_0 y del número de espiras n por unidad de longitud.

Si bien hemos deducido la ecuación 22 para un solenoide ideal infinitamente largo, se cumple bastante bien con los solenoides reales en los puntos internos cerca del centro del solenoide. Para un solenoide ideal, la ecuación 22 indica que B no depende del diámetro o de la longitud del solenoide y que B es constante en la sección transver-

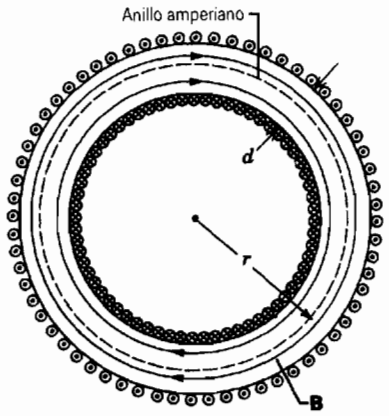


Figura 20 Toroide. El campo interior puede determinarse usando el anillo amperiano circular que se muestra.

sal del solenoide. El solenoide es una manera práctica de crear un campo magnético uniforme.

Toroides

La figura 20 muestra un toroide, que debemos considerar que es un solenoide doblado en forma de rosca. Hallemos el campo magnético en los puntos interiores usando la ley de Ampère y ciertas consideraciones de simetría.

Partiendo de la simetría, las líneas de **B** forman círculos concéntricos en el interior del toroide, como se muestra en la figura. Elegimos un círculo concéntrico de radio r como anillo amperiano y lo recorremos en dirección de las manecillas del reloj. La ley de Ampère da

$$B(2\pi r) = \mu_0 i_0 N,$$

donde i_0 es la corriente en el devanado del toroide y N es el número total de espiras. Esto da

$$B = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}. \tag{23}$$

Al contrario de lo que ocurre con el solenoide, B no es constante en la sección transversal de un toroide. Debemos poder demostrar, a partir de la ley de Ampère, que $B = 0$ en los puntos fuera de un toroide ideal.

Una observación más detallada de la ecuación 23 justifica nuestra anterior aseveración de que el toroide es "un solenoide doblado en forma de rosca". En la ecuación 23, el denominador, $2\pi r$, es la circunferencia central del toroide, y $N/2\pi r$ es justamente n, el número de espiras por unidad de longitud. Con esta sustitución, la ecuación 23 se reduce a $B = \mu_0 i_0 n$, la ecuación del campo magnético en la región central de un solenoide.

La dirección del campo magnético dentro de un toroide (o de un solenoide) se deduce de la regla de la mano derecha: doble los dedos de la mano derecha en dirección de la corriente; el pulgar derecho extendido apunta entonces en dirección al campo magnético.

Los toroides forman la característica central del *tokamak*, máquina que muestra ser prometedora como base del reactor termonuclear. Estudiaremos su modo de operación en el capítulo 55 de este mismo texto.

Problema muestra 6 Un solenoide tiene una longitud de L = 1.23 m y un diámetro interior d = 3.55 cm. El devanado tiene cinco capas de 850 espiras cada una y conduce una corriente i_0 = 5.57 A. ¿Cuál es B en su centro?

Solución De la ecuación 22

$$B = \mu_0 i_0 n = (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(5.57\ \mathrm{A})\left(\frac{5 \times 850\ \text{espiras}}{1.23\ \mathrm{m}}\right)$$
$$= 2.42 \times 10^{-2}\ \mathrm{T} = 24.2\ \mathrm{mT}.$$

Nótese que la ecuación 22 se cumple aun cuando el solenoide tenga más de una capa de devanado porque el diámetro del devanado no interviene en la ecuación.

El campo fuera de un solenoide *(Opcional)*

Hasta el momento hemos despreciado el campo fuera del solenoide pero, aun en un solenoide ideal, el campo no es cero en los puntos fuera del devanado. La figura 21 muestra una trayectoria amperiana en forma de círculo de radio r. Ya que los devanados del solenoide son helicoidales, una espira del devanado cruza la superficie encerrada por el círculo. El producto $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ para esta trayectoria depende de la componente tangencial del campo B_t, y por tanto la ley de Ampère da

$$B_t(2\pi r) = \mu_0 i_0$$

o sea

$$B_t = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}, \tag{24}$$

que es el mismo campo (en magnitud *y también* en dirección) que se generaría por un alambre recto. Nótese que los devanados, además de conducir corriente alrededor de la superficie del solenoide, conducen también corriente de izquierda a derecha en la figura 21, y a este respecto el solenoide se comporta como un alambre recto en los puntos fuera del devanado.

El campo tangencial es mucho más pequeño que el campo interior (Ec. 22), como podemos ver al considerar la razón

$$\frac{B_t}{B} = \frac{\mu_0 i_0/2\pi r}{\mu_0 i_0 n} = \frac{1}{2\pi r n}.$$

Supongamos que el solenoide consta de una capa de vueltas en la que los alambres se tocan entre sí, como en la figura 19. Cada intervalo a lo largo del solenoide de longitud igual al diámetro D del alambre contiene una espira, y así el número de espiras n por unidad de longitud debe ser de $1/D$. Entonces, la razón se convierte en

$$\frac{B_t}{B} = \frac{D}{2\pi r}. \tag{25}$$

En un alambre típico, D = 0.1 mm. La distancia r a los puntos exteriores debe ser cuando menos tan grande como el radio del

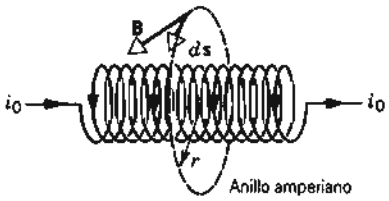


Figura 21 Un anillo amperiano circular de radio r se emplea para hallar el campo tangencial externo de un solenoide.

solenoide, el cual podría ser de unos cuantos centímetros. Entonces $B_t/B \leq 0.001$, y el campo tangencial exterior es realmente despreciable comparado con el campo interior a lo largo del eje. Por lo tanto, estamos en lo seguro al despreciar el campo exterior.

Al dibujar un círculo amperiano similar al de la figura 21 pero con un radio más pequeño que el del solenoide, uno debe poder demostrar que la componente tangencial del campo interior es cero. ■

35-7 EL ELECTROMAGNETISMO Y LOS MARCOS DE REFERENCIA *(Opcional)*

La figura 22*a* muestra una partícula portadora de una carga positiva q en reposo cerca de un alambre recto largo por el que fluye una corriente i. Vemos al sistema desde un marco de referencia S en el que el alambre está en reposo. Dentro del alambre hay electrones negativos que se mueven a una velocidad de arrastre v_d y núcleos de iones positivos en reposo. En cualquier longitud dada del alambre, el número de electrones es igual al número de corazas de iones, y la carga neta es cero. Los electrones pueden considerarse instantáneamente como una línea de carga negativa, la cual crea un campo eléctrico en la ubicación de q de acuerdo con la ecuación 33 del capítulo 28:

$$E = \frac{\lambda_-}{2\pi\epsilon_0 r},$$

en donde λ_- es la densidad de carga lineal de los electrones (un número negativo). Las corazas de iones positivos generan también un campo eléctrico dado por una expresión similar, dependiendo de la densidad de carga lineal λ_+ de los iones positivos. Puesto que las densidades de carga son de magnitud igual y signo opuesto, $\lambda_+ + \lambda_- = 0$, y el campo eléctrico neto que actúa sobre la partícula es cero también.

Existe un campo magnético distinto de cero sobre la partícula, pero, como la partícula está en reposo, no existe fuerza magnética. Por lo tanto, en este marco de referencia no actúa ninguna fuerza neta de origen electromagnético sobre la partícula.

Consideremos ahora la situación desde la perspectiva de un marco de referencia S' que se mueve paralelo al alambre a velocidad v_d (la velocidad de arrastre de los electrones). La figura 22*b* muestra la situación en este marco de referencia, donde los electrones están en reposo y las corazas de iones se mueven hacia la derecha a una velocidad v_d. Claramente, en este caso la partícula, por estar en movimiento, experimenta una fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ como se muestra en la figura.

Observadores en marcos inerciales diferentes deben estar de acuerdo en que, si no existe una aceleración en el marco S, tampoco existirá una aceleración en el marco S'. Por lo tanto, la partícula no debe experimentar una fuerza neta en S', y entonces, debe haber otra fuerza además de $\mathbf{F}_B$ que actúe sobre la partícula para que la fuerza neta sea cero.

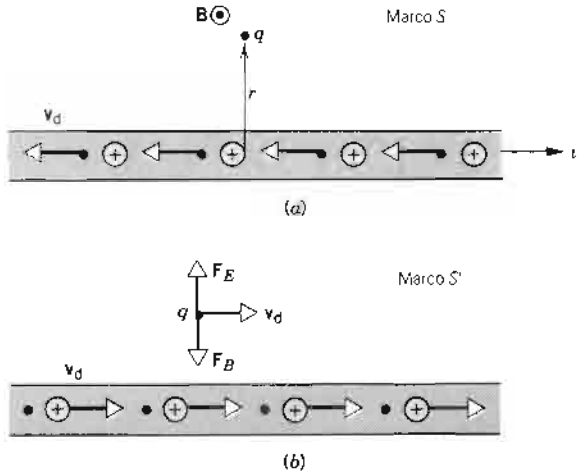


Figura 22 (*a*) Una partícula de carga q está en reposo y en equilibrio cerca de un alambre que conduce una corriente i. La situación es observada desde un marco de referencia S en reposo relativo a la partícula. (*b*) La misma situación vista desde un marco S' que se mueve con la velocidad de arrastre de los electrones en el alambre. La partícula está también en equilibrio en este marco bajo la influencia de las dos fuerzas $\mathbf{F}_E$ y $\mathbf{F}_B$.

Esta fuerza adicional que actúa en el marco S' debe ser de origen eléctrico. Consideremos en la figura 22*a* que el alambre tiene una longitud L. Podemos imaginar que la longitud del alambre consta de dos barras de medición, una barra (los iones) en reposo cargada positivamente y una barra (los electrones) en movimiento cargada negativamente. Las dos barras tienen la misma longitud (en S) y contienen el mismo número de cargas. Cuando transformamos a aquellas barras en S', hallamos que la barra de carga negativa tiene una longitud mayor en S'. En S, esta barra en movimiento tiene su *longitud contraída*, de acuerdo con el efecto relativista de contracción de la longitud que ya hemos estudiado en la sección 21-3. En S', está en reposo y tiene su *longitud propia*, la cual es más larga que la longitud contraída en S. La densidad lineal negativa λ'_- de carga en S' es de una magnitud menor que la de aquélla en S (esto es, $|\lambda'_-| < |\lambda_-|$), porque la misma cantidad de carga se distribuye sobre una longitud mayor en S'.

Para las cargas positivas, la situación es opuesta. En S, las cargas positivas están en reposo, y la barra de carga positiva tiene su longitud propia. En S', está en movimiento y tiene una longitud contraída más corta. La densidad lineal λ'_+ de la carga positiva en S' es mayor que aquélla en S ($\lambda'_+ > \lambda_+$), porque la misma cantidad de carga está distribuida sobre una longitud menor. Por lo tanto, tenemos las relaciones siguientes para las densidades de carga:

$$\text{en } S: \quad \lambda_+ = |\lambda_-|,$$

$$\text{en } S': \quad \lambda'_+ > |\lambda'_-|.$$

La carga q experimenta los campos eléctricos debidos a una línea de carga positiva y una línea de carga negativa. En S', estos campos no se cancelan, porque las densidades de carga lineal

son diferentes. El campo eléctrico en q dentro de S' es, por lo tanto, debido a una densidad lineal neta de carga positiva, y q es repelida del alambre. La fuerza eléctrica $\mathbf{F}_E$ sobre q se opone por tanto a la fuerza magnética $\mathbf{F}_B$, como se muestra en la figura 22*b*. Un cálculo detallado* demuestra que la fuerza eléctrica resultante es exactamente igual a la fuerza magnética, y la fuerza neta dentro de S' es cero. Así, la partícula no experimenta ninguna aceleración en cualquiera de los marcos de referencia. Podemos extender este resultado a otras situaciones diferentes al caso especial que consideramos aquí, en el que S' se mueve a la velocidad $\mathbf{v}_d$ con respecto a S. En otros marcos de referencia, la fuerza eléctrica y la fuerza magnética tienen valores diferentes de sus valores en S'; sin embargo, en cada marco son iguales y opuestas entre sí, y la fuerza neta sobre la partícula es cero en *todos* los marcos de referencia.

Éste es un resultado sorprendente. De acuerdo con la relatividad especial, los campos eléctrico y magnético no se presentan en forma independiente. Un campo que sea puramente eléctrico o puramente magnético en un marco de referencia tiene componentes tanto eléctricas como magnéticas en otro marco. Usando las ecuaciones relativistas de transformación, podemos fácilmente ir y venir de un marco al otro, y a menudo podemos resolver problemas difíciles escogiendo un marco de referencia en el que los campos tengan un carácter más sencillo y transformando luego el resultado otra vez al marco original. La relatividad especial puede tener un gran valor práctico para resolver tales problemas, porque las técnicas de la relatividad especial pueden ser más sencillas que las técnicas clásicas.

En lenguaje matemático, decimos que las leyes del electromagnetismo (las ecuaciones de Maxwell) son invariantes con respecto a la transformación de Lorentz. Recordemos nuestro estudio en la sección 3-6 acerca de las leyes físicas *invariantes*: ponemos por escrito la ley en un marco de referencia, la transformamos a otro marco, y obtenemos una ley exactamente de la misma forma matemática. Por ejemplo, la ley de Gauss, una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, tiene exactamente la misma forma en todo marco de referencia.

Las palabras de Einstein son directas y sin ambages: "La fuerza que actúa sobre un cuerpo en movimiento dentro de un campo magnético no es otra cosa que un campo eléctrico." (De hecho, el trabajo original de Einstein en 1905, en el que presentó por vez primera las ideas de la relatividad especial, se titulaba "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.") En este contexto, podemos ver al magnetismo como un efecto relativista, dependiente de la velocidad de la carga relativa al observador. Sin embargo, al contrario de lo que ocurre con otros efectos relativistas, tiene consecuencias sustancialmente observables a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz. ■

* Véase, por ejemplo, R. Resnick, *Introduction to Special Relativity* (Wiley, 1968), capítulo 4.

PREGUNTAS

1. Un haz de protones de 20 MeV sale de un ciclotrón. ¿Provocan estas partículas un campo magnético?
2. Analice las analogías y diferencias entre la ley de Coulomb y la ley de Biot-Savart.
3. Considere la línea de un campo magnético. La magnitud de **B** a lo largo de esta línea ¿es constante o variable? ¿Puede dar un ejemplo de cada caso?
4. En electrónica, los conductores por los cuales fluyen corrientes iguales pero opuestas se entrecruzan a menudo uno con otro para reducir su efecto magnético en puntos distantes. ¿Por qué resulta esto eficaz?
5. Considérense dos cargas, primero (*a*) del mismo signo y luego (*b*) de signos opuestos, que se mueven a igual velocidad a lo largo de trayectorias paralelas separadas. Compárense las direcciones de las fuerzas eléctrica y magnética mutuas en cada caso.
6. ¿Existe alguna manera diferente de crear un campo magnético que el generado por cargas en movimiento?
7. Proporcione detalles de las tres maneras en que puede medirse el campo magnético **B** en un punto P, a una distancia perpendicular r a partir de un alambre recto largo que conduce una corriente i constante. Básese en (*a*) la proyección de una partícula de carga a través del punto P con una velocidad **v**, paralela al alambre; (*b*) la medición de la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre un segundo alambre, paralelo al primero y que conduce una corriente i'; (*c*) la medición del momento de torsión ejercido sobre un dipolo magnético pequeño ubicado a una distancia perpendicular r del alambre.
8. ¿Cómo podría usted medir el momento dipolar magnético de la aguja de una brújula?
9. Sobre el piso del salón en que usted está sentado se encuentra una espira circular de alambre que conduce una corriente constante i en sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba. ¿Cuál es la direccion del momento dipolar magnético de esta espira de corriente?
10. ¿Es **B** uniforme en todos los puntos dentro de una espira circular de alambre por la cual fluye una corriente? Explique.
11. En la figura 10, explique la relación entre la figura y la ecuación $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$.
12. Dos conductores largos paralelos conducen corrientes iguales i en la misma dirección. Trace en forma aproximada las líneas resultantes de **B** debidas a la acción de ambas corrientes. ¿Sugiere la figura una atracción entre los alambres?
13. Una corriente pasa por un resorte vertical de cuyo extremo inferior cuelga una pesa. ¿Qué sucederá?
14. La ecuación 11 ($B = \mu_0 i/2\pi R$) sugiere que se crea un campo magnético intenso en los puntos cercanos a un alambre largo que conduce una corriente. Ya que existe una corriente i y un campo magnético **B**, ¿por qué no existe una fuerza sobre el alambre de acuerdo con la ecuación $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$?

15. Dos alambres rectos largos pasan uno cerca del otro formando ángulo recto. Si los alambres tienen libertad para moverse, describa qué sucede cuando se envían corrientes a través de ambos.

16. Dos alambres fijos se cruzan entre sí perpendicularmente de modo que no se tocan en realidad pero están cerca uno del otro, como se muestra en la figura 23. En cada alambre existen corrientes iguales i en las direcciones indicadas. ¿En qué región(es) habrá algunos puntos de campo magnético neto nulo?

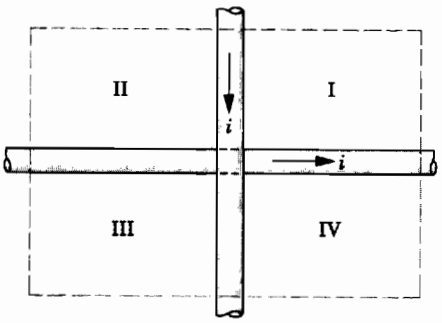


Figura 23 Pregunta 16.

17. Una espira de forma irregular de alambre flojo está situada sobre una mesa carente de fricción y anclada en los puntos a y b como se muestra en la figura 24. Si ahora hacemos pasar una corriente i por el alambre, ¿tratará de formar un anillo circular o tratará de abultarse aún más?

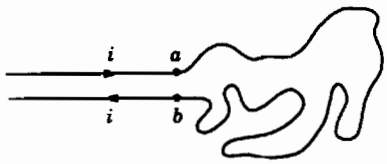


Figura 24 Pregunta 17.

18. ¿Puede pasar a través de un conductor la trayectoria de integración alrededor de la cual aplicamos la ley de Ampère?

19. Supóngase que establecemos una trayectoria de integración alrededor de un cable que contiene 12 alambres con corrientes diferentes (algunas en direcciones opuestas) en cada alambre. ¿Cómo calcularíamos i según la ley de Ampère en este caso?

20. Aplique la ley de Ampère cualitativamente a las tres trayectorias mostradas en la figura 25.

21. Analice las analogías y las diferencias entre la ley de Gauss y la ley de Ampère.

22. ¿Se deduce necesariamente sólo de argumentos de simetría que las líneas de **B** alrededor de un alambre largo recto que conduce una corriente i deben ser círculos concéntricos?

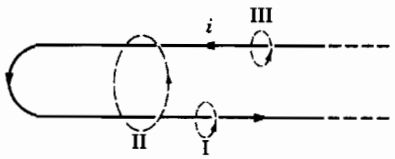


Figura 25 Pregunta 20.

23. En un tubo largo de cobre se establece una corriente longitudinal uniforme y estacionaria. ¿Existe un campo magnético (*a*) dentro y/o (*b*) fuera del tubo?

24. Un conductor muy largo tiene una sección transversal cuadrada y contiene una cavidad coaxial también con una sección transversal cuadrada. La corriente está uniformemente distribuida sobre la sección transversal del material del conductor. ¿Es el campo magnético en la cavidad igual a cero? Justifique su respuesta.

25. Un alambre recto largo de radio R conduce una corriente constante i. ¿Cómo depende de R el campo magnético generado por esta corriente? Considérense puntos tanto fuera como dentro del alambre.

26. Un alambre recto y largo conduce una corriente constante i. ¿Qué dice la ley de Ampère para (*a*) una espira que encierre al alambre pero que no sea circular, (*b*) una espira que no encierre al alambre y (*c*) una espira que encierre al alambre pero que no toda se encuentre sobre un plano?

27. Dos solenoides largos están uno dentro del otro sobre el mismo eje, como en la figura 26. Conducen corrientes idénticas pero en direcciones opuestas. Si no existe un campo magnético dentro del solenoide interior, ¿qué puede usted decir con respecto a n, el número de espiras por unidad de longitud, en los dos solenoides? ¿Cuál de ellos, si alguno, tiene el valor más grande?

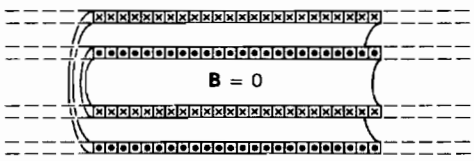


Figura 26 Pregunta 27.

28. El campo magnético en el centro de una espira circular de corriente tiene el valor de $B = \mu_0 i/2R$; véase la ecuación 16. Sin embargo, el campo *eléctrico* en el centro de un anillo de carga es *cero*. ¿Por qué esta diferencia?

29. Se establece una corriente estacionaria en una red cúbica de alambres resistivos, como en la figura 27. Use argumentos de simetría para demostrar que el campo magnético en el centro del cubo es cero.

30. A modo de ejercicio de representación vectorial, contraste y compare la figura 16 del capítulo 18, que trata del flujo de fluidos, con la figura 9 de este capítulo, que trata del campo magnético. ¿Con qué solidez puede hacer una analogía?

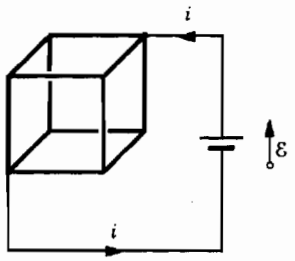


Figura 27 Pregunta 29.

31. ¿Se cumple la ecuación 22 ($B = \mu_0 i_0 n$) para un solenoide de sección transversal cuadrada?
32. El toroide se describe como un solenoide doblado en forma de "rosca". El campo magnético en el exterior de un solenoide ideal no es cero. ¿Qué puede decirse acerca de la intensidad del campo magnético en el exterior de un toroide ideal?
33. Al moverse, los electrones constituyen la corriente en un alambre y esta corriente está acompañada de un campo magnético. ¿Qué corriente y campo magnético mediría un observador que se mueva a lo largo del alambre a la misma velocidad de arrastre del electrón?

PROBLEMAS

Sección 35-2 Aplicaciones de la ley de Biot y Savart

1. Un alambre de cobre desnudo #10 (2.6 mm de diámetro) puede conducir una corriente de 50 A sin sobrecalentarse. Para esta corriente, ¿cuál es el campo magnético en la superficie del alambre?
2. Un topógrafo está usando una brújula magnética a 6.3 m debajo de una línea de energía eléctrica en la que existe una corriente estacionaria de 120 A. ¿Interferirá esto seriamente con la lectura de la brújula? La componente horizontal del campo magnético de la Tierra en ese lugar es de 21 μT (= 0.21 gauss).
3. El cañón de electrones de 25 kV de un tubo de TV proyecta un haz de elctrones de 0.22 mm de diámetro hatia la pantalla, llegando 5.6×10^{14} electrones cada segundo. Calcule el campo magnético producido por el haz en un punto a 1.5 mm del eje del haz.
4. En un lugar de las Islas Filipinas, el campo magnético de la Tierra tiene un valor de 39.0 μT y es horizontal y dirigido hacia el norte. El campo neto es cero a 8.13 cm sobre un alambre horizontal recto y largo que conduce una corriente estacionaria. (*a*) Calcule la corriente y (*b*) halle su dirección.
5. Un alambre recto y largo conduce una corriente de 48.8 A. Un electrón, que viaja a 1.08×10^7 m/s, está a 5.20 cm del alambre. Calcule la fuerza que actúa sobre el electrón si la velocidad del electrón se dirige (*a*) hacia el alambre, (*b*) paralela a la corriente y (*c*) en ángulo recto con las direcciones definidas por (*a*) y (*b*).
6. Un conductor recto por el cual fluye una corriente i se divide en dos curvas semicirculares como se muestra en la figura 28. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético en el centro C del anillo circular así formado?
7. Dos alambres paralelos largos están a 8.10 cm de separación. ¿Qué corrientes iguales deben fluir en los alambres si el campo magnético a la mitad entre ellos ha de tener una magnitud de 296 μT?

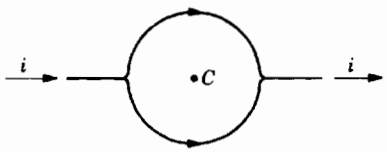


Figura 28 Problema 6.

8. Dos alambres paralelos rectos y largos, separados por 0.75 cm, son perpendiculares al plano de la página como se muestra en la figura 29. El alambre W_1 conduce una corriente de 6.6 A hacia la página. ¿Cuál debe ser la corriente (magnitud y dirección) en el alambre W_2 para que el campo magnético resultante en el punto P sea cero?

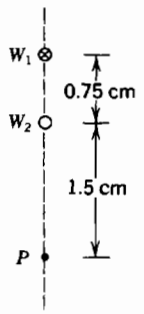


Figura 29 Problema 8.

9. La figura 30*a* muestra un tramo de alambre que conduce una corriente i y está doblado formando una bobina circular de una vuelta. En la figura 30*b*, el mismo tramo de alambre se ha doblado más, para formar una espira doble de radio más pequeño. (*a*) Si B_a y B_b son las magnitudes de los campos magnéticos en los centros de las dos espiras, ¿cuál es la razón B_b/B_a? (*b*) ¿Cuál es la razón de sus momentos dipolares, μ_b/μ_a?

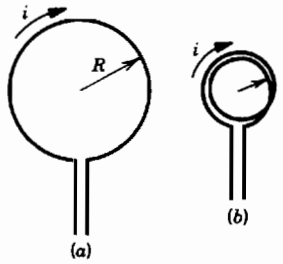


Figura 30 Problema 9.

10. La figura 31 muestra un arreglo conocido como *bobina de Helmholtz*. Consta de dos bobinas circulares coaxiales cada una de N vueltas y radio R, separadas por una distancia R. Conducen corrientes iguales i en la misma dirección. Halle el campo magnético en P, a medio camino entre las bobinas.

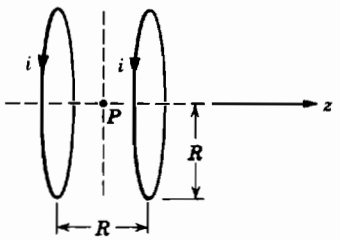


Figura 31 Problemas 10, 26 y 27.

11. Un estudiante fabrica un electroimán al devanar 320 vueltas de alambre alrededor de un cilindro de madera de 4.80 cm de diámetro. La bobina se conecta a una batería que produce una corriente de 4.20 A en el alambre. (*a*) ¿Cuál es el momento magnético de este dispositivo? (*b*) ¿A qué distancia axial $z \gg d$ será de 5.0 μT (aproximadamente un décimo del campo magnético de la Tierra) el campo magnético de este dipolo?

12. Se forma una horquilla larga al doblar un trozo de alambre como se muestra en la figura 32. Si el alambre conduce una corriente i = 11.5 A, (*a*) ¿cuáles son la magnitud y la dirección de **B** en el punto *a*? (*b*) ¿En el punto *b*, muy alejado de *a*? Considere que R = 5.20 mm.

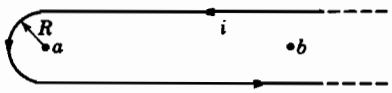


Figura 32 Problema 12.

13. Un alambre que conduce una corriente i tiene la configuración que se muestra en la figura 33. Dos secciones rectas semi-infinitas, cada una tangente al mismo círculo, están conectadas por un arco circular, de ángulo θ, a lo largo de la circunferencia del círculo, estando todas las secciones en el mismo plano. ¿Cuál debe ser θ con objeto de que B sea cero en el centro del círculo?

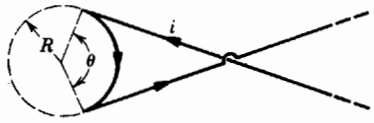


Figura 33 Problema 13.

14. Por un tramo recto de alambre de longitud L fluye una corriente i. (*a*) Demuestre que el campo magnético asociado con este segmento en P, a una distancia perpendicular D de un extremo del alambre (véase la Fig. 34), está dado por

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi D} \frac{L}{(L^2 + D^2)^{1/2}}.$$

(*b*) Demuestre que el campo magnético es cero en el punto Q, a lo largo de la línea del alambre.

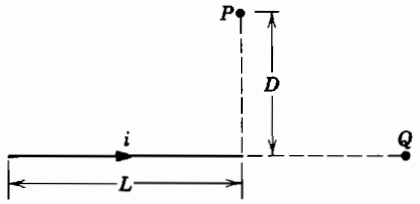


Figura 34 Problema 14.

15. Considere el circuito de la figura 35. Los segmentos curvos son arcos de círculo de radios a y b. Los segmentos rectos están a lo largo de los radios. Halle el campo magnético **B** en P, suponiendo una corriente i en el circuito.

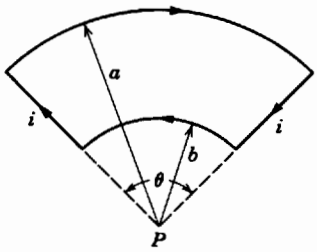


Figura 35 Problema 15.

16. Un segmento recto de alambre de longitud L conduce una corriente i. Demuestre que el campo magnético **B** asociado con este segmento, a la distancia R del segmento a lo largo de una bisectriz perpendicular (véase la Fig. 36), está dado en magnitud por

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}}.$$

Demuestre que esta expresión se reduce a un resultado esperado cuando $L \to \infty$.

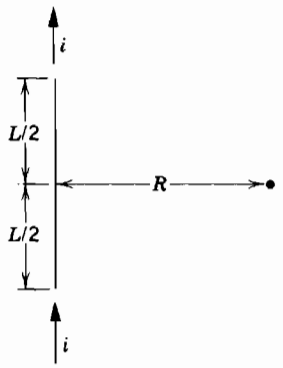


Figura 36 Problema 16.

17. Demuestre que B en el centro de una espira rectangular de alambre de longitud L y anchura W, que conduce una corriente i, está dado por

$$B = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{(L^2 + W^2)^{1/2}}{LW}.$$

Demuestre que esto se reduce a un resultado consistente con el problema 1 cuando $L \gg W$.

18. Una espira cuadrada de alambre, de lado a, conduce una corriente i. (*a*) Demuestre que B para un punto en el eje de la espira y a una distancia z de su centro está dado por

$$B(z) = \frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4z^2 + a^2)(4z^2 + 2a^2)^{1/2}}.$$

(*b*) ¿A qué se reduce esto en el centro de la espira?

19. El campo magnético B en diversos puntos sobre el eje de una espira cuadrada de corriente, de lado a, está dado en el problema 18. (*a*) Demuestre que el campo axial de esta espira cuando $z \gg a$ es el de un dipolo magnético (véase la Ec. 17). (*b*) Halle el momento dipolar magnético de esta espira.

20. Se le da a usted una longitud L de alambre por el cual puede fluir una corriente i. Con el alambre se puede formar un círculo o un cuadrado. Demuestre que el cuadrado produce, en el punto central, un valor mayor de B.

21. La figura 37 muestra la sección transversal de una cinta larga y delgada de anchura w que está conduciendo hacia adentro de la página una corriente total i distribuida uniformemente. Calcule la magnitud y la direccion del campo magnético **B** en un punto P en el plano de la cinta a una distancia d de su extremo. (*Sugerencia*: Imagine que la cinta está construida de muchos alambres paralelos, largos y delgados.)

22. Dos alambres paralelos, rectos y largos, que están a 12.2 cm de separación, conducen cada uno una corriente de 115 A. La figura 38 muestra la sección transversal, con los alambres perpendiculares a la página, y el punto P que se encuentra en la bisectriz perpendicular a d. Halle la magnitud y dirección del campo magnético en P, cuando la corriente por el alambre de la izquierda va hacia afuera de la página y la corriente por el alambre de la derecha va (*a*) hacia afuera de la página y (*b*) hacia adentro de la página.

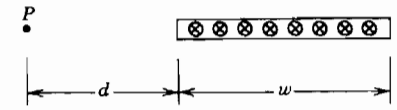


Figura 37 Problema 21.

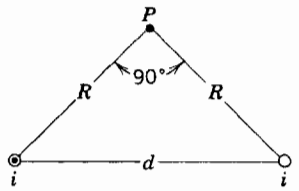


Figura 38 Problema 22.

23. En la figura 7*a*, suponga que ambas corrientes tengan la misma dirección, hacia afuera del plano de la figura. Demuestre que el campo magnético en el plano definido por los alambres es de

$$B = \frac{\mu_0 i x}{\pi(x^2 - d^2)}.$$

Suponga que $i = 25$ A y $d = 2.5$ cm en la figura 7*a* y grafique B para los valores entre -2.5 cm $< x < +2.5$ cm. Considere que los diámetros del alambre son despreciables.

24. Dos alambres largos separados por una distancia d conducen corrientes antiparalelas iguales i, como en la figura 39. (*a*) Demuestre que la intensidad del campo magnético en el punto P, equidistante de los alambres, está dado por

$$B = \frac{2\mu_0 i d}{\pi(4R^2 + d^2)}.$$

(*b*) ¿En qué dirección apunta **B**?

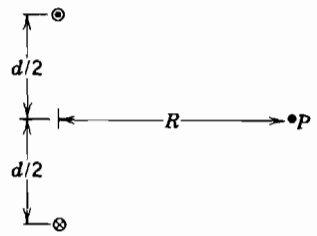


Figura 39 Problema 24.

25. Se le da un circuito cerrado con radios a y b, como se muestra en la figura 40, que conduce una corriente i. Determine el momento dipolar magnético del circuito.

26. Dos bobinas de 300 vueltas cada una, conducen una corriente i. Están separadas por una distancia igual a sus radios, como se muestra en la figura 31. Para $R = 5.0$ cm e $i = 50$ A, grafique a B como función de la distancia z a

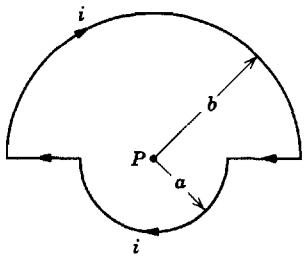


Figura 40 Problema 25.

lo largo del eje común para los valores comprendidos entre $z = -5$ cm a $z = +5$ cm, considerando que $z = 0$ en el punto medio P. Tales bobinas proporcionan un campo B especialmente uniforme cerca del punto P. (*Sugerencia*: véase la Ec. 15.)

27. En el problema 10 (Fig. 31), considere que la separación de las bobinas sea una variable representada por s (no necesariamente igual al radio R de la bobina). (*a*) Demuestre que la primera derivada del campo magnético (dB/dz) es cero en el punto medio P cualquiera que sea el valor de s. ¿Por qué esperaría que esto sea cierto al considerar la simetría? (*b*) Demuestre que la segunda derivada del campo magnético (d^2B/dz^2) es también cero en P cuando $s = R$. Esto explica la uniformidad de B cerca de P para esta separación en particular de las bobinas.
28. Una espira circular de 12 cm de radio conduce una corriente de 13 A. Una segunda espira de 0.82 cm de radio, que tiene 50 vueltas y una corriente de 1.3 A está en el centro de la primera espira. (*a*) ¿Qué campo magnético crea la espira grande en su centro? (*b*) Calcule el momento de torsión que actúa sobre la espira pequeña. Suponga que los planos de las dos espiras están en ángulo recto y que el campo magnético debido a la espira grande es esencialmente uniforme en todo el volumen ocupado por la espira pequeña.
29. (*a*) Un alambre en forma de un polígono regular de n lados está justamente encerrado por un círculo de radio a. Si la corriente por este alambre es i, demuestre que el campo magnético **B** en el centro del círculo está dado, en magnitud, por

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2\pi a} \tan(\pi/n).$$

(*b*) Demuestre que cuando $n \to \infty$ este resultado se aproxima al de una espira circular. (*c*) Encuentre el momento dipolar del polígono.

30. (*a*) Un alambre largo está doblado en la forma mostrada en la figura 41, sin hacer contacto al cruzarse en P. El radio de la sección circular es R. Determine la magnitud y la dirección de **B** en el centro C de la porción circular cuando la corriente i circula como se indica. (*b*) La parte circular del alambre se gira sin distorsión alrededor de su diámetro (en trazos) perpendicular a la porción recta del alambre. El momento magnético asociado con el anillo está ahora en la dirección de la corriente en la parte recta del alambre. Determine **B** en C en este caso.

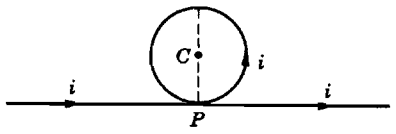


Figura 41 Problema 30.

31. (*a*) Calcule **B** en el punto P en la figura 42. (*b*) ¿Es la intensidad del campo en P mayor o menor que en el centro del cuadrado?

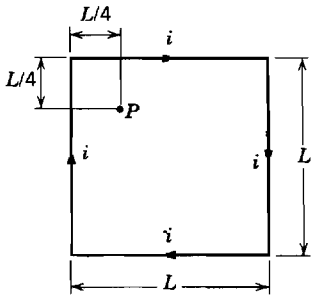


Figura 42 Problema 31.

32. Un disco delgado de plástico de radio R tiene una carga q distribuida uniformemente en su superficie. Si el disco gira con una frecuencia angular ω alrededor de su eje, demuestre que (*a*) el campo magnético en el centro del disco es

$$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

y (*b*) el momento dipolar magnético del disco es

$$\mu = \frac{\omega q R^2}{4}.$$

(*Sugerencia*: El disco que gira es equivalente a un conjunto de espiras de corriente.)

33. Considérese que la espira rectangular mostrada en la figura 43 conduce una corriente i. Un punto P está ubicado a una distancia x a partir del centro de la espira. Halle una expresión para el campo magnético en P debido a la espira

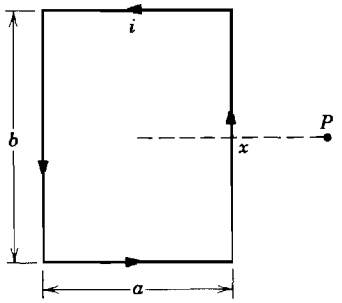


Figura 43 Problema 33.

de corriente, suponiendo que P está muy alejado. Verifique que la expresión obtenida concuerda con la cantidad apropiada en la tabla 1, cuando $\mu = iab$. (*Sugerencia*: Pueden tratarse simultáneamente los lados opuestos del rectángulo, pero téngase cuidado con las direcciones de **B** debidas a cada lado.)

Sección 35-4 Dos conductores paralelos

34. La figura 44 muestra cinco alambres paralelos largos en el plano xy. Cada alambre conduce una corriente $i = 3.22$ A en la dirección x positiva. La separación entre alambres contiguos es $d = 8.30$ cm. Halle la fuerza magnética por metro, en magnitud y dirección, que se ejerce sobre cada uno de los cinco alambres.

Figura 44 Problema 34.

35. Cuatro alambres largos de cobre son paralelos entre sí y están dispuestos en un cuadro; véase la figura 45. Transportan corrientes iguales i hacia afuera de la página, como se muestra. Calcule la fuerza por metro en cualquier alambre; dé magnitud y dirección. Suponga que $i = 18.7$ A y $a = 24.5$ cm. (Esto se conoce como el efecto de estricción en el caso del movimiento paralelo de las partículas cargadas en un plasma.)

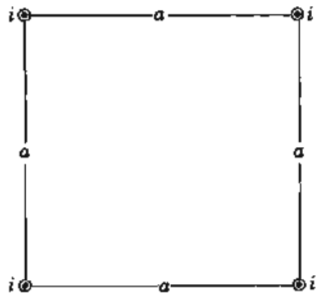


Figura 45 Problema 35.

36. La figura 46 muestra un alambre largo que conduce una corriente i_1. La espira rectangular conduce una corriente i_2. Calcule la fuerza resultante que actúa sobre la espira. Suponga que $a = 1.10$ cm, $b = 9.20$ cm, $L = 32.3$ cm, $i_1 = 28.6$ A e $i_2 = 21.8$ A.

37. La figura 47 muestra un esquema idealizado de un "cañón electromagnético sobre rieles", diseñado para disparar proyectiles con velocidades hasta de 10 km/s. (Se está estudiando la factibilidad de estos dispositivos como defensa contra los misiles balísticos.) El proyectil P descansa entre dos rieles paralelos (y en contacto con ellos), a lo largo de los cuales puede deslizarse. Un generador G suministra una corriente que fluye por un riel, cruza el proyectil y regresa al otro riel. (*a*) Sea w la distancia entre los rieles, r el radio de los rieles (supuestos como circulares), e i la corriente. Demuestre que la fuerza sobre el proyectil es hacia la derecha y está dada aproximadamente por

$$F \approx \frac{1}{2}\left(\frac{i^2\mu_0}{\pi}\right)\ln\left(\frac{w+r}{r}\right)$$

(*b*) Si el proyectil (en este caso una ficha de prueba) arranca del extremo izquierdo del riel en reposo, determine la velocidad v a la cual es expulsado hacia la derecha. Suponga que $i = 450$ kA, $w = 12$ mm, $r = 6.7$ cm, $L = 4.0$ m, y que la masa de la ficha es de $m = 10$ g.

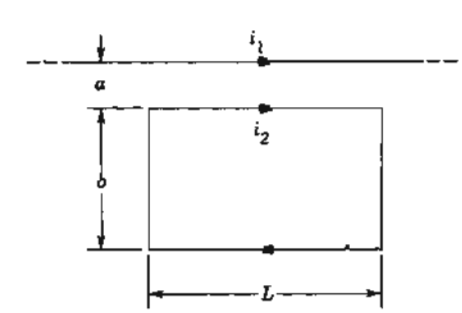


Figura 46 Problema 36.

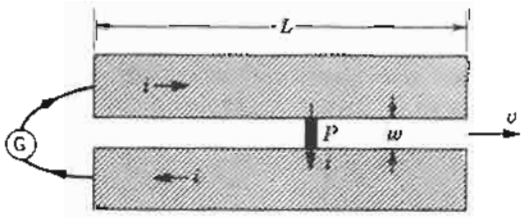


Figura 47 Problema 37.

38. En el problema muestra 4, supóngase que el alambre superior se desplaza hacia abajo una pequeña distancia y luego se suelta. Demuestre que el movimiento resultante del alambre es armónico simple con la misma frecuencia de oscilación que un péndulo simple de longitud d.

Sección 35-5 La ley de Ampère

39. Cada uno de los ocho conductores indicados en la figura 48 conduce 2.0 A de corriente hacia adentro o hacia afuera de la página. Están indicadas dos trayectorias por la integral de línea $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$. ¿Cuál es el valor de la integral para (*a*) la trayectoria de puntos y (*b*) la trayectoria de trazos?

40. Ocho alambres cortan la página perpendicularmente en los puntos mostrados en la figura 49. Un alambre denotado por el entero k($k = 1, 2, \ldots, 8$) conduce la corriente ki_0. Para aquéllos con k impar, la corriente sale de la página;

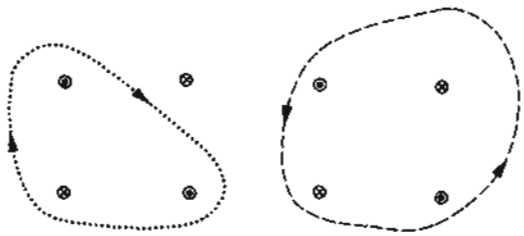


Figura 48 Problema 39.

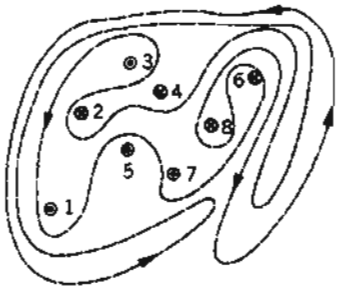


Figura 49 Problema 40.

para los de k par entra a la página. Evalúe $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de la trayectoria cerrada en la dirección que se muestra.

41. En cierta región existe una densidad de corriente uniforme de 15 A/m² en dirección z positiva. ¿Cuál es el valor de $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ cuando la integral de línea se considera a lo largo de los tres segmentos en línea recta desde $(4d, 0, 0)$ hasta $(4d, 3d, 0)$ hasta $(0, 0, 0)$ hasta $(4d, 0, 0)$, en donde $d = 23$ cm?

42. Considérese un alambre cilíndrico largo de radio R que conduce una corriente i distribuida uniformemente en su sección transversal. ¿A qué *dos* distancias del eje del alambre, la intensidad del campo magnético debido a la corriente es igual a la mitad del valor en la superficie?

43. Demuestre que un campo magnético uniforme **B** no puede caer abruptamente a cero conforme uno se mueve en ángulo recto con él, como se indica por la flecha horizontal a través del punto a en la figura 50. (*Sugerencia*: Aplique la ley de Ampère a la trayectoria rectangular mostrada por las líneas de trazos.) En los imanes reales siempre ocurre el "efecto de borde" de las líneas de **B**, lo cual significa que **B** tiende a cero en forma gradual. Modifique las líneas de **B** en la figura para indicar una situación más realista.

44. La figura 51 muestra la sección transversal de un conductor cilíndrico hueco de radios a y b, que conduce una corriente i uniformemente distribuida. (*a*) Usando el anillo amperiano circular mostrado, verifique que $B(r)$ para el intervalo $b < r < a$ está dado por

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r}.$$

(*b*) Compruebe esta fórmula para los casos especiales en los que $r = a$, $r = b$ y $b = 0$. (*c*) Suponga que $a = 2.0$ cm, $b = 1.8$ cm e $i = 100$ A y grafique $B(r)$ en el intervalo $0 < r < 6$ cm.

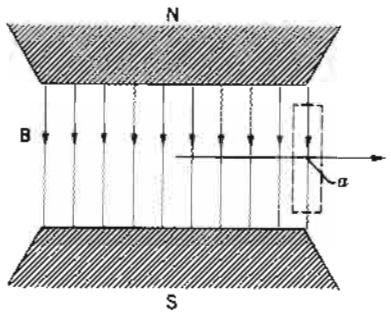


Figura 50 Problema 43.

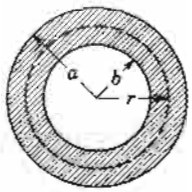


Figura 51 Problema 44.

45. La figura 52 muestra la sección transversal de un conductor largo del tipo llamado cable coaxial, de radios a, b y c. En los conductores existen corrientes i iguales pero antiparalelas, distribuidas uniformemente. Deduzca expresiones para $B(r)$ en los intervalos (*a*) $r < c$, (*b*) $c < r < b$, (*c*) $b < r < a$, y (*d*) $r > a$. (*e*) Pruebe estas expresiones para todos los casos especiales que se le ocurran. (*f*) Suponga que $a = 2.0$ cm, $b = 1.8$ cm, $c = 0.40$ cm e $i = 120$ A, y grafique $B(r)$ dentro del intervalo $0 < r < 3$ cm.

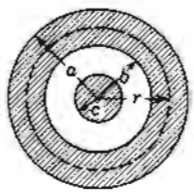


Figura 52 Problema 45.

46. Un conductor consta de un número infinito de alambres adyacentes, cada uno infinitamente largo y conduciendo una corriente i_0. Demuestre que las líneas de **B** son como se representan en la figura 53 y que B para todos los puntos arriba y abajo de la lámina infinita de corriente está dado por

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0 n i_0,$$

en donde n es el número de alambres por unidad de longitud. Deduzca tanto por la aplicación directa de la ley de Ampère como considerando que el problema constituye un caso límite del problema muestra 3.

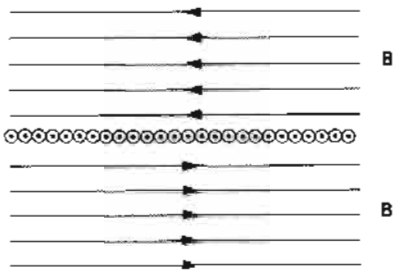


Figura 53 Problema 46.

47. La densidad de corriente a lo largo de un alambre cilíndrico, largo, sólido, de radio a está en dirección del eje y varía linealmente con la distancia radial r relativo al eje de acuerdo con $j = j_0 r/a$. Determine el campo magnético en el interior del alambre. Exprese la respuesta en función de la corriente total i que fluye por el alambre.

48. La figura 54 muestra la sección transversal de un conductor cilíndrico largo de radio a que contiene un orificio cilíndrico largo de radio b. Los ejes de los dos cilindros son paralelos y están separados por una distancia d. Una corriente i se distribuye uniformemente sobre el área rayada en la figura. (a) Use una superposición de ideas para demostrar que el campo magnético en el centro del orificio es

$$B = \frac{\mu_0 i d}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

(b) Analice los dos casos especiales $b = 0$ y $d = 0$. (c) ¿Puede usarse la ley de Ampère para demostrar que el campo magnético en el orificio es uniforme? (*Sugerencia*: Considere el orificio cilíndrico como si estuviese lleno con dos corrientes iguales moviéndose en direcciones opuestas, de tal manera que se cancelen entre sí. Suponga que cada una de estas corrientes tiene la misma densidad de corriente que la del conductor real. Así, superponemos los campos debidos a los dos cilindros de corriente completos, de radios a y b, cada uno de ellos con la misma densidad de corriente.)

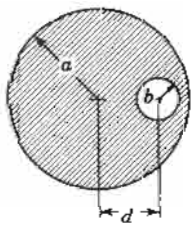


Figura 54 Problema 48.

49. Un tubo circular largo, con un radio exterior de R, conduce una corriente (distribuida uniformemente) de i_0 (hacia adentro del papel como se muestra en la Fig. 55). Un alambre corre paralelo al tubo a una distancia $3R$ de centro a centro. Calcule la magnitud y dirección de la corriente en el alambre que causaría que el campo magnético resultante en el punto P tenga la misma magnitud, pero la dirección opuesta, que el campo resultante en el centro del tubo.

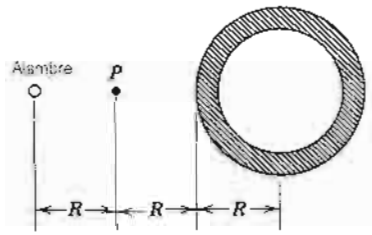


Figura 55 Problema 49.

Sección 35-6 Solenoides y toroides

50. Un solenoide de 95.6 cm de largo tiene un radio de 1.90 cm, un devanado de 1230 vueltas y conduce una corriente de 3.58 A. Calcule la intensidad del campo magnético en el interior del solenoide.

51. Un solenoide de 1.33 m de largo y 2.60 cm de diámetro conduce una corriente de 17.8 A. El campo magnético en el interior del solenoide es de 22.4 mT. Halle la longitud del alambre que forma al solenoide.

52. Un toroide que tiene una sección transversal cuadrada de 5.20 cm de lado y un radio interior de 16.2 cm tiene 535 vueltas y conduce una corriente de 813 mA. Calcule el campo magnético en el interior del toroide en (a) el radio interior y (b) el radio exterior del toroide.

53. Un solenoide largo tiene 100 vueltas por centímetro. Un electrón se mueve dentro del solenoide en un círculo de 2.30 cm de radio, perpendicular al eje del solenoide. La velocidad del electrón es de $0.0460c$ (c = velocidad de la luz). Halle la corriente en el solenoide.

54. Un solenoide largo con 115 vueltas/cm y un radio de 7.20 cm conduce una corriente de 1.94 mA. Una corriente de 6.30 A fluye en un conductor recto a lo largo del eje del solenoide. (a) ¿A qué distancia radial del eje estará la dirección del campo magnético resultante a 40.0° de la dirección axial? (b) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?

55. Un efecto interesante (y frustrante) ocurre cuando uno intenta confinar un conjunto de electrones y de iones positivos (un plasma) dentro del campo magnético de un toroide. Las partículas cuyo movimiento es perpendicular al campo **B** no ejecutarán trayectorias circulares porque la

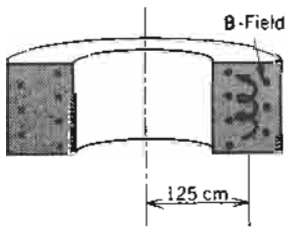


Figura 56 Problema 55.

intensidad del campo varía con la distancia radial desde el eje del toroide. Este efecto, que se muestra (exagerado) en la figura 56, provoca que partículas de signo opuesto se desvíen en direcciones opuestas paralelamente al eje del toroide. (*a*) ¿Cuál es el signo de la carga sobre la partícula cuya trayectoria está representada en la figura? (*b*) Si la trayectoria de la partícula tiene un radio de curvatura de 11 cm cuando su distancia radial desde el eje del toroide es de 125 cm, ¿cuál será el radio de curvatura cuando la partícula esté a 110 cm del eje?

56. Deduzca la ecuación del solenoide (Ec. 22) comenzando con la expresión para el campo sobre el eje de una espira circular (Ec. 15). (*Sugerencia*: Subdivida al solenoide en una serie de espiras de corriente de espesor infinitesimal e integre. Véase la Fig. 17.)

CAPÍTULO 36

LA LEY DE LA INDUCCIÓN DE FARADAY

A menudo podemos prever el resultado de un experimento al considerar cómo se relaciona éste por simetría con otros experimentos. Por ejemplo, una espira de corriente dentro de un campo magnético experimenta un momento de torsión (debido al campo) que hace girar a la espira. Consideremos una situación similar: una espira de alambre en la que no existe corriente se coloca dentro de un campo magnético, y un agente externo aplica un momento de torsión de tal forma que haga girar a la espira. ¡Hallamos que en la espira aparece una corriente! En una espira de alambre dentro de un campo magnético, una corriente produce un momento de torsión y un momento de torsión produce una corriente. Éste es un ejemplo de la simetría de la naturaleza.

La aparición de corriente en la espira es un ejemplo de la aplicación de la ley de la inducción de Faraday, *que constituye el tema de estudio en este capítulo. La ley de Faraday, que es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, se dedujo a partir de una serie de experimentos sencillos y directos, que pueden llevarse a cabo fácilmente en el laboratorio y que sirven directamente para demostrar la ley de Faraday.*

36-1 LOS EXPERIMENTOS DE FARADAY

La ley de la inducción de Faraday tiene su origen en los experimentos realizados por Michael Faraday en Inglaterra en 1831, y por Joseph Henry en Estados Unidos casi al mismo tiempo.* Aunque Faraday publicó sus resultados primero, lo cual le da la prioridad del descubrimiento, a la unidad de inductancia en el SI (véase el capítulo 38) se le llama *henry* (abreviatura H). Por otra parte, la unidad de capacitancia en el SI recibe el nombre, como ya hemos visto, de *farad* (abreviatura F). En el capítulo 38, en donde estudiamos las oscilaciones en circuitos capacitivo-inductivos, veremos cuán apropiado es vincular los nombres de estos dos talentosos contemporáneos en un solo contexto.

La figura 1 muestra una bobina de alambre como parte de un circuito que contiene un amperímetro. Normalmente, cabría esperar que el amperímetro no mostrase corriente en el circuito porque parece que no existe una fuerza electromotriz. Sin embargo, si desplazamos un imán de barra hacia la bobina, con su polo norte encarando

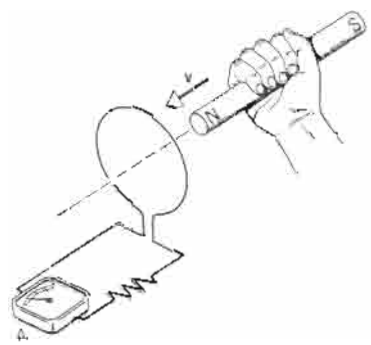


Figura 1 El amperímetro A marca cuando el imán se mueve con respecto a la bobina.

* Además de su descubrimiento independiente y simultáneo de la ley de la inducción, Faraday y Henry tuvieron otras similitudes en sus vidas. Ambos fueron aprendices a una edad temprana. Faraday, a la edad de 14 años, era aprendiz de un encuadernador en Londres. Henry, a los 13 años, era aprendiz de un relojero en Albany, Nueva York. Años después Faraday fue nombrado director de la Royal Institution en Londres, cuya fundación se debió en gran parte a un estadounidense, Benjamin Thompson (Conde de Rumford). Por otra parte, Henry llegó a ser secretario de la Smithsonian Institution en Washington, DC, la cual fue fundada gracias a un inglés, James Smithson.

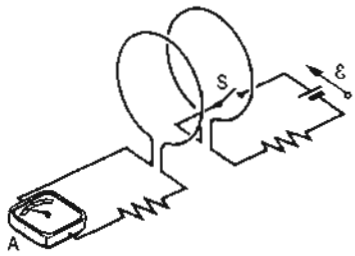


Figura 2 El amperímetro A marca momentáneamente cuando se cierra o se abre el interruptor S. No interviene ningún movimiento físico de las bobinas.

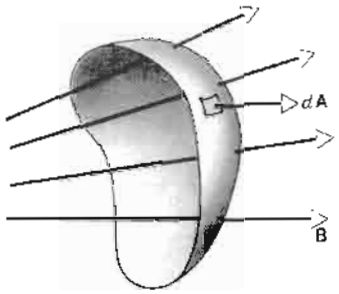


Figura 3 El campo magnético **B** a través de un área *A* da un flujo magnético que atraviesa la superficie. El elemento de área *d***A** se representa por un vector.

a la bobina, ocurre un fenómeno notable. *Al mover el imán*, el indicador del amperímetro se mueve, demostrando con ello que pasa corriente por la bobina. Si mantenemos al imán estacionario con respecto a la bobina, el amperímetro no marca. Si movemos el imán *alejándose* de la bobina, el medidor muestra de nuevo una desviación, pero ahora en dirección opuesta, lo cual significa que la corriente en la bobina circula en dirección opuesta. Si usamos el extremo del polo sur de un imán en lugar del extremo del polo norte, el experimento funciona como se ha descrito, pero la desviación se invierte. Cuanto más aprisa se mueve al imán, mayor será la lectura registrada en el medidor. Experimentos posteriores demuestran que *lo que importa es el movimiento relativo entre el imán y la bobina*. No existe ninguna diferencia en que movamos el imán hacia la bobina o la bobina hacia el imán.

La corriente que aparece en este experimento se llama *corriente inducida* y se dice que se origina por una *fuerza electromotriz inducida*. Nótese que no existen baterías en ninguna parte del circuito. Faraday dedujo, a partir de experimentos como éste, la ley que da la magnitud y dirección de las fem inducidas. Tales fem son muy importantes en la práctica. Es muy probable que las lámparas del salón donde usted está leyendo este libro funcionen por una fem inducida producida en un generador eléctrico comercial.

En otro experimento se emplea el aparato de la figura 2. Las bobinas se colocan una cerca de la otra pero en reposo la una con respecto a la otra. Cuando cerramos el interruptor S, creando así una corriente estacionaria en la bobina de la derecha, el medidor marca momentáneamente; cuando abrimos el interruptor, interrumpiendo de este modo la corriente, el medidor marca de nuevo momentáneamente, pero en dirección opuesta. Ninguno de los aparatos se mueve físicamente en este experimento.

El experimento muestra que existe una fem inducida en la bobina izquierda de la figura 2 siempre que la corriente de la bobina de la derecha esté *cambiando*. Lo que es significativo aquí es *la velocidad a la que cambia la corriente y no la intensidad de la corriente*.

La característica común de estos dos experimentos es el *movimiento* o *cambio*. La causa de las fem inducidas es el imán *en movimiento* o la corriente *cambiante*. En la sección siguiente damos la base matemática de estos efectos.

36-2 LA LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

Imaginemos que existen líneas de un campo magnético provenientes del imán de barra de la figura 1 y de la espira de corriente de la derecha en la figura 2. Algunas de esas líneas del campo pasan a través de la bobina izquierda en ambas figuras. Cuando se mueve el imán en la situación de la figura 1, o cuando se abre o cierra el interruptor en la figura 2, el número de líneas del campo magnético que pasan a través de la bobina de la izquierda cambia. Como lo demostraron los experimentos de Faraday, y como la técnica de Faraday de las líneas de campo nos ayuda a percibir, *lo que induce la fem en el anillo es el cambio en el número de líneas de campo que pasan a través de un circuito cerrado*. Específicamente, lo que determina la fem inducida es la *velocidad de cambio* en el número de líneas de campo que pasan a través del anillo.

Para hacer a este enunciado cuantitativo, introduzcamos el *flujo magnético* Φ_B. Al igual que el flujo eléctrico (véase la Sec. 29-2), puede considerarse que el flujo magnético es una medida del número de líneas de campo que pasan a través de una superficie. En analogía con el flujo eléctrico (véase la Ec. 7 del capítulo 29), el flujo magnético a través de *cualquier* superficie se define como

$$\Phi_B = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}. \qquad (1)$$

Aquí $d\mathbf{A}$ es un elemento del área de la superficie (como se muestra en la Fig. 3), y la integración se lleva a cabo sobre toda la superficie a través de la cual deseamos

calcular el flujo (por ejemplo, la superficie encerrada por el anillo de la izquierda en la Fig. 1). Si el campo magnético tiene una magnitud y dirección constantes en un área planar A, el flujo puede escribirse así:

$$\Phi_B = BA \cos \theta, \tag{2}$$

donde θ es el ángulo entre la normal a la superficie y la dirección del campo.

La unidad del flujo magnético en el SI es el tesla · metro^2, al cual se le da el nombre de *weber* (abreviado Wb). Esto es,

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ tesla} \cdot \text{metro}^2.$$

Al invertir esta relación, vemos que el tesla es equivalente al weber/metro^2, el cual era la unidad usada para los campos magnéticos antes de que el tesla fuese adoptado como la unidad del SI.

En términos del flujo magnético, la fem inducida en un circuito está dada por la *ley de la inducción de Faraday*:

> *La fem inducida en un circuito es igual al negativo de la velocidad con que cambia con el tiempo el flujo magnético a través del circuito.*

En términos matemáticos, la ley de Faraday es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{3}$$

donde $\mathcal{E}$ es la fem inducida. Si la cantidad del cambio de flujo está en unidades de webers por segundo, la fem tiene unidades de volts. El signo menos de la ecuación 3 es muy importante, porque nos indica la dirección de la fem inducida. Consideraremos este signo en detalle en la sección siguiente.

Si la bobina consta de N vueltas, entonces aparece una fem inducida en cada vuelta, y la fem inducida total en el circuito es la suma de los valores individuales, del mismo modo que en el caso de las baterías conectadas en serie. Si la bobina está tan apretada que puede considerarse que cada vuelta ocupa la misma región del espacio y por lo tanto experimenta el mismo cambio de flujo, entonces la fem inducida total es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{4}$$

Existen muchas maneras de cambiar el flujo a través de un anillo: al mover un imán en relación con el anillo (como en la Fig. 1), al variar la corriente en un circuito cercano (como en la Fig. 2 y también en un transformador), al desplazar el anillo dentro de un campo no uniforme, al girar el anillo dentro de un campo magnético fijo tal que el ángulo θ de la ecuación 2 cambie (como en un generador), o al cambiar el tamaño o la forma del anillo o circuito. En cada uno de estos métodos, se induce una fem en el anillo.

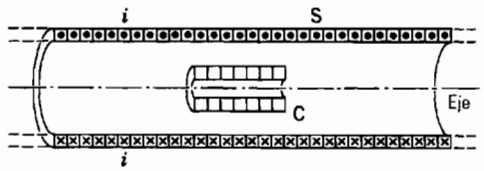


Figura 4 Problema muestra 1. Una bobina C está ubicada dentro de un solenoide S. El solenoide conduce una corriente que sale de la página en la parte superior y entra en la inferior, como se indica por medio de puntos y cruces. En la bobina aparece una fem inducida cuando la corriente en el solenoide está cambiando.

Por último, es preciso observar que, aun cuando la ecuación 3 se conoce como la ley de Faraday, no fue escrita en esa forma por Faraday, quien carecía de una formación matemática. De hecho, la obra en tres volúmenes que publicó Faraday sobre electromagnetismo, y que constituye un hito en el desarrollo de la física y de la química, ¡no contiene una sola ecuación!

Problema muestra 1 El solenoide largo S de la figura 4 tiene 220 vueltas/cm y conduce una corriente $i = 1.5$ A; su diámetro d es de 3.2 cm. En su centro colocamos una bobina C de 130 vueltas bien apretadas de diámetro $d_C = 2.1$ cm. La corriente en el solenoide aumenta de cero a 1.5 A con una velocidad constante por un periodo de 0.16 s. ¿Cuál es el valor absoluto (esto es, la magnitud sin tener en cuenta al signo) de la fem inducida que aparece en la bobina central cuando está cambiando la corriente en el solenoide?

Solución El valor absoluto del flujo final a través de cada vuelta de esta bobina está dado por la ecuación 2 cuando $\theta = 0$.

$$\Phi_B = BA.$$

El campo magnético B en el centro del solenoide está dado por la ecuación 22 del capítulo 35, o sea

$$\begin{aligned} B = \mu_0 in &= (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(1.5\ \text{A}) \\ &\quad \times (220\ \text{vueltas/cm})\ (100\ \text{cm/m}) \\ &= 4.15 \times 10^{-2}\ \text{T}. \end{aligned}$$

En términos de su diámetro d_C, el área de la bobina central (no del solenoide) está dado por $\frac{1}{4}\pi d_C^2$, obteniéndose 3.46×10^{-4} m^2. El valor absoluto del flujo final a través de cada vuelta de la bobina es, entonces,

$$\begin{aligned} \Phi_B &= (4.15 \times 10^{-2}\ \text{T})(3.46 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \\ &= 1.44 \times 10^{-5}\ \text{Wb} = 14.4\ \mu\text{Wb}. \end{aligned}$$

La fem inducida se deduce de la ley de Faraday (Ec. 4), en la cual no tomamos en cuenta el signo menos porque estamos buscando sólo el valor absoluto de la fem:

$$\mathcal{E} = \frac{N\,\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

donde N es el número de vueltas en la bobina interior C. El cambio $\Delta\Phi_B$ en el flujo en cada vuelta de la bobina central es,

entonces, de 14.4 μWb. Este cambio ocurre en 0.16 s, dando para la magnitud de la fem inducida

$$\mathcal{E} = \frac{N\,\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{(130)(14.4 \times 10^{-6}\ \text{Wb})}{0.16\ \text{s}}$$
$$= 1.2 \times 10^{-2}\ \text{V} = 12\ \text{mV}.$$

En la siguiente sección explicaremos cómo hallar la *dirección* de la fem inducida. Por ahora, podemos predecir su dirección por medio del argumento siguiente. Supongamos que un aumento en el flujo de la bobina exterior causó una corriente en la bobina interior que produjo un campo magnético en la misma dirección que el campo original. Esto aumentaría a su vez el flujo a través del área encerrada por la bobina exterior, lo cual causaría similarmente que su corriente aumente y, por lo tanto, aumentando otra vez la corriente en la bobina interior, y así en lo sucesivo. ¿Es esto un resultado razonable?

36-3 LA LEY DE LENZ

Hasta ahora no hemos especificado las direcciones de las fem inducidas. Si bien podemos hallar estas direcciones a partir de un análisis formal de la ley de Faraday, preferimos hallarlas a partir del principio de conservación de la energía. En mecánica, el principio de la energía nos permite a menudo sacar conclusiones con respecto a los sistemas mecánicos sin analizarlos en detalle. Usamos aquí el mismo enfoque. La regla para determinar la dirección de la corriente inducida fue propuesta en 1834 por Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865) y se conoce como la *ley de Lenz*:

> *En un circuito conductor cerrado, la corriente inducida aparece en una dirección tal que ésta se opone al cambio que la produce.*

El signo menos en la ley de Faraday indica esta oposición.

La ley de Lenz se refiere a *corrientes* inducidas, lo cual significa que sólo se aplica a circuitos conductores cerrados. Si el circuito está abierto, por lo general podríamos pensar en términos de lo que sucedería si *estuviese* cerrado, y de esta manera determinar la dirección de la fem inducida.

Consideremos el primero de los experimentos de Faraday descritos en la sección 36-1. La figura 5 muestra el polo norte de un imán y una sección transversal de un anillo conductor cercano. Al empujar al imán hacia el anillo (o al anillo hacia el imán) se genera una corriente inducida en el anillo. ¿Cuál es su dirección?

Una espira de corriente crea un campo magnético en puntos distantes como el de un dipolo magnético, siendo una cara del anillo un polo norte y la cara opuesta un polo sur. El polo norte, como en las barras imantadas, es aquella cara *a partir de* la cual salen las líneas de **B**. Si, como lo predice la ley de Lenz, el anillo en la figura 5 va

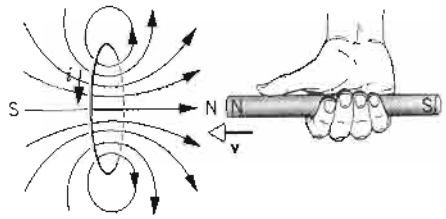


Figura 5 Cuando el imán se empuja hacia el anillo, la corriente inducida *i* tiene la dirección mostrada, creando un campo magnético que se opone al movimiento del imán. Esto ilustra la aplicación de la ley de Lenz.

a oponerse al movimiento del imán hacia él, la cara del anillo *hacia* el imán debe resultar ser un polo norte. Los dos polos norte —uno de la espira de corriente y el otro del imán— se repelen entre sí. La regla de la mano derecha aplicada al anillo demuestra que para el campo magnético creado por el anillo al salir de la cara derecha de la espira, la corriente inducida debe ser como se muestra. La corriente va en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando miramos a lo largo del imán hacia la espira.

Cuando empujamos el imán hacia el anillo (o al anillo hacia el imán), aparece una corriente inducida. En términos de la ley de Lenz esta acción de empujar es el "cambio" que produce la corriente inducida y, de acuerdo con esta ley, la corriente inducida se opone al "empuje". Si jalamos el imán alejándolo de la bobina, la corriente inducida se opone al "jalón" creando un polo *sur* en la cara derecha del anillo de la figura 5. Para hacer de la cara derecha un polo sur, la corriente debe ser opuesta a la mostrada en la figura 5. Ya sea que jalemos o empujemos el imán, su movimiento es automáticamente opuesto.

El agente que causa que el imán se mueva, ya sea hacia la bobina o alejándose de ella, experimenta siempre una fuerza de resistencia y, por lo tanto, debe realizar trabajo. Del principio de conservación de la energía, se concluye que este trabajo efectuado sobre el sistema debe ser exactamente igual a la energía interna (Joule) producida en la bobina, puesto que éstas son las únicas transferencias de energía que ocurren en el sistema. Si el imán se mueve más rápidamente, el agente efectúa un trabajo a una mayor velocidad y la velocidad de producción de la energía interna aumenta en consonancia. Si cortamos el anillo y luego realizamos el experimento, no existe una corriente inducida, ningún cambio en la energía interna, ninguna fuerza sobre el imán, y no se requiere ningún trabajo para moverlo. Todavía existe una fem en el anillo, pero, al igual que una batería conectada a un circuito abierto, no se genera una corriente.

Si, en la figura 5, la corriente estuviese en la dirección *opuesta* a la mostrada, al mover el imán hacia el anillo, la cara del anillo hacia el imán sería un polo sur, lo cual *jalaría* a la barra imantada hacia el anillo. Sólo necesita-

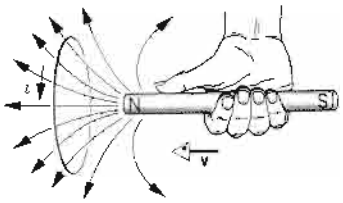


Figura 6 Otro ejemplo de la ley de Lenz. Cuando el imán se empuja hacia el anillo, el flujo magnético a través del anillo aumenta. La corriente inducida en el anillo crea un campo magnético èl cual se opone al aumento de flujo.

ríamos empujar al imán ligeramente para comenzar el proceso y, por lo tanto, la acción sería autoperpetua. El imán aceleraría hacia el anillo, aumentando su energia cinética todo el tiempo. Al mismo tiempo, aparecería en el anillo una energía interna a una velocidad que iría aumentando con el tiempo. ¡Esto sería una situación en la que se obtendría algo a cambio de nada! No es necesario aclarar aquí que esto no ocurre.

Apliquemos la ley de Lenz a la figura 5 de manera diferente. La figura 6 muestra las líneas de **B** para una barra imantada.* Desde este punto de vista el "cambio" es el aumento en Φ_B a través del anillo provocado al acercar el imán. La corriente inducida se opone a este cambio creando un campo que tiende a oponerse al aumento de flujo causado por el imán en movimiento. Así, el campo debido a la corriente inducida debe apuntar de izquierda a derecha en el plano de la bobina, de acuerdo con nuestra conclusión preliminar.

Aquí no es significativo el hecho de que el campo inducido se oponga al *campo* del imán sino más bien el hecho de que se opone al *cambio*, que en este caso es el *aumento* en Φ_B a través del anillo. Si retiramos el imán, reducimos Φ_B a través del anillo. El campo inducido debe oponerse ahora a esta disminución en Φ_B (esto es, al cambio) *reforzando* el campo magnético. En cada caso el campo inducido se opone al cambio que le da origen.

Ahora podemos obtener la dirección de la corriente en la bobina pequeña C del problema muestra 1. El campo del solenoide S apunta hacia la derecha en la figura 4 y es creciente. La corriente en C debe oponerse a este aumento del flujo a través de C y así debe crear un campo que se opone al campo de S. La corriente en C está, por lo tanto, en dirección opuesta a la de S. Si la corriente en S estuviese *decreciendo* en lugar de creciendo, un argumento similar demuestra que la corriente inducida en C tendría la misma dirección que la corriente en S.

* En este problema existen dos campos magnéticos —uno relacionado con el anillo de corriente y otro con la barra imantada. Usted debe asegurarse siempre de cuál se trata.

Corrientes parásitas o de Foucault

Cuando el flujo magnético a través de un trozo grande de material conductor cambia, aparecen corrientes inducidas en el material (Fig. 7). Estas corrientes se llaman *corrientes de Foucault* o *corrientes parásitas*. En ciertos casos, las corrientes parásitas pueden producir efectos indeseables. Por ejemplo, aumentan la energía interna y, por lo tanto, la temperatura del material puede aumentar. Por esta razón, los materiales sometidos a campos magnéticos cambiantes son a menudo *laminados* o constituidos por muchas capas delgadas aisladas entre sí. En lugar de un camino largo, las corrientes parásitas recorren muchos caminos cortos, aumentando por tanto la longitud total de sus trayectorias y la resistencia correspondiente; el calentamiento resistivo $\mathcal{E}^2/R$ es menor, y el aumento en la energía interna es menor. Por otra parte, el calentamiento por medio de corrientes parásitas puede utilizarse ventajosamente, como en un *horno de inducción*, en el cual una muestra de material puede calentarse usando un campo magnético que cambie rápidamente. Los hornos de inducción se emplean en los casos en los cuales no es posible conseguir un contacto térmico con el material que desea calentarse, como cuando éste está dentro de una cámara al vacío.

Las corrientes parásitas son corrientes reales y producen los mismos efectos que las corrientes reales. En particular, se ejerce una fuerza $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ en la parte de la trayectoria de la corriente parásita de la figura 7 que pasa a través del campo. Esta fuerza se transmite al material, y puede emplearse la ley de Lenz para demostrar (véase la pregunta 26) que la fuerza se opone al movimiento del conductor. Esto da origen a una forma de *frenado magnético*, por el que los campos magnéticos aplicados a una rueda que esté girando o a una pista en movimiento producen fuerzas que desaceleran el movimiento. Un freno tal no tiene partes móviles o mecanismos de ninguna clase y no se halla sometido al desgaste por fricción de los frenos mecánicos ordinarios. Más aún, es más eficiente a altas velocidades (porque la fuerza magnética aumenta con la velocidad relativa), donde el desgaste sobre los frenos mecánicos sería mayor.

36-4 FEM DE MOVIMIENTO O CINÉTICA

El ejemplo de la figura 6, si bien fácil de comprender cualitativamente, no conduce por sí mismo a cálculos cuantitativos. Consideremos, pues, la figura 8, la cual muestra una espira rectangular de alambre de anchura D, uno de cuyos extremos está dentro de un campo uniforme **B** que apunta en ángulo recto al plano de la espira. Este campo **B** puede producirse, por ejemplo, en el entrehierro

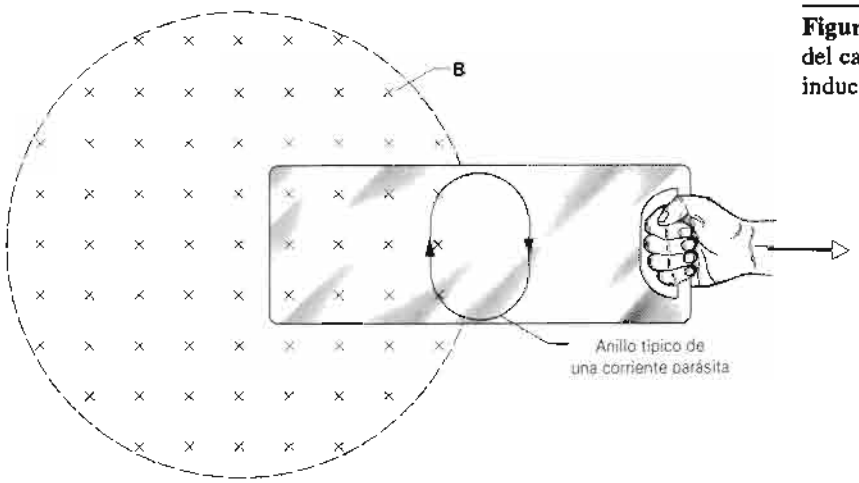


Figura 7 Cuando el material conductor se retira del campo magnético, aparece una corriente inducida (corriente parásita) como se muestra.

de un electroimán grande. Las líneas de trazos muestran los límites supuestos del campo magnético. La espira es jalada hacia la derecha con una rapidez constante v.

La situación descrita por la figura 8 no difiere en ningún detalle esencial de aquélla de la figura 6. En cada caso un anillo conductor y un imán están en movimiento relativo; en cada caso se causa el cambio con el tiempo del flujo del campo del imán a través del anillo o de la espira. La diferencia importante entre los dos arreglos es que la situación de la figura 8 permite cálculos más sencillos.

El agente externo (la mano en la Fig. 8) tira de la espira hacia la derecha con una rapidez constante v al ejercer una fuerza F. Deseamos calcular la potencia mecánica $P = Fv$ gastada por el agente externo o, de modo equivalente, la cantidad de trabajo que se realiza sobre la espira, y comparar ese resultado con la cantidad de energía interna que produce la corriente inducida en la espira.

El flujo Φ_B encerrado por la espira en la figura 8 es

$$\Phi_B = BDx,$$

donde Dx es el área de esa parte de la espira en la que B no es cero. Hallamos la fem $\mathcal{E}$ partiendo de la ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BDx) = -BD\frac{dx}{dt} = BDv, \quad (5)$$

en donde hemos hecho que $-dx/dt$ sea igual a la rapidez v con la que se jala la espira fuera del campo magnético, puesto que x es decreciente. Nótese que la única dimensión de la espira que interviene en la ecuación 5 es la longitud D del conductor de la izquierda. Como veremos más adelante, la fem inducida en la figura 8 puede considerarse como situada aquí. Una fem inducida como ésta, producida por el movimiento relativo de un conductor y la fuente de un campo magnético, se llama a veces una *fem de movimiento o cinética*.

La fem BDv genera una corriente en la espira dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BDv}{R}, \quad (6)$$

donde R es la resistencia de la espira. De la ley de Lenz, esta corriente (y por lo tanto $\mathcal{E}$) debe fluir siguiendo el movimiento de las manecillas del reloj en la figura 8; se opone al "cambio" (la disminución en Φ_B) al crear un campo que es paralelo al campo externo dentro de la espira.

La corriente en la espira da lugar a las fuerzas magnéticas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ que actúan sobre los tres conductores, de acuerdo con la ecuación 28 del capítulo 34,

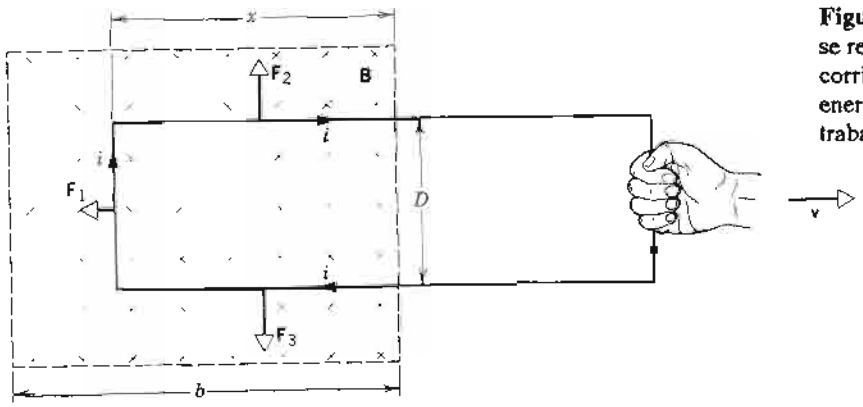


Figura 8 Cuando la espira conductora cerrada se retira del campo, se produce en ella una corriente inducida i. La corriente produce una energía interna en la misma cantidad que el trabajo mecánico que se efectúa sobre la espira.

$$\mathbf{F} = i\mathbf{L}\times\mathbf{B}. \tag{7}$$

Puesto que $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ son iguales y opuestas, se cancelan entre sí; $\mathbf{F}_1$, que es la fuerza que se opone a nuestro esfuerzo para mover la espira, está dada, en magnitud, por las ecuaciones 6 y 7 como

$$F_1 = iDB\,\text{sen}\,90^\circ = \frac{B^2D^2v}{R}. \tag{8}$$

El agente que tira de la espira debe ejercer una fuerza F igual en magnitud a F_1, si la espira ha de moverse a una velocidad constante. El agente debe, por lo tanto, realizar un trabajo con una velocidad constante de

$$P = F_1v = \frac{B^2D^2v^2}{R}. \tag{9}$$

Podemos también calcular la velocidad en la que la energía se disipa en la espira como resultado del calentamiento de Joule a causa de la corriente inducida. Esta velocidad está dada por

$$P = i^2R = \left(\frac{BDv}{R}\right)^2R = \frac{B^2D^2v^2}{R}, \tag{10}$$

lo cual concuerda precisamente con la ecuación 9 para la velocidad a la que el trabajo mecánico se efectúa sobre la espira. El trabajo realizado por el agente externo se disipa al final como un calentamiento de Joule de la espira.

La figura 9 muestra una vista lateral de la espira dentro del campo. En la figura 9*a* la espira está estacionaria; en la figura 9*b* la estamos moviendo hacia la derecha; en la figura 9*c* la estamos moviendo hacia la izquierda. Las líneas de **B** en estas figuras representan el *campo resultante* como consecuencia de la suma vectorial del campo debido al imán y el campo debido a la corriente inducida, en caso de haber alguna, en la espira. De acuerdo con el punto de vista de Faraday, según el cual vemos a las líneas del campo magnético como bandas de hule estiradas (véase la Sec. 35-3), las líneas del campo magnético en la figura 9 sugieren convincentemente que el agente que mueve a la bobina o espira experimenta siempre una fuerza de oposición.

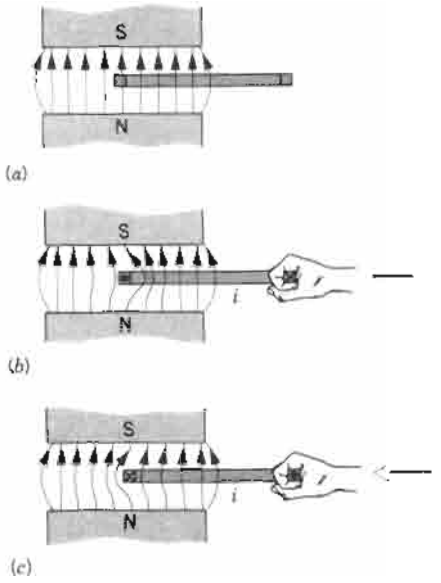


Figura 9 Las líneas del campo magnético que actúan sobre una espira conductora dentro de un campo magnético cuando la espira está (*a*) en reposo, (*b*) saliendo del campo y (*c*) entrando al campo. Cualquier intento de mover la espira da lugar a una fuerza de oposición.

Problema muestra 2 La figura 10*a* muestra una espira rectangular de resistencia R, anchura D y longitud a atraída a una velocidad constante v a través de una región de espesor d en donde hay un campo magnético **B** creado por un imán. Como funciones de la posición x del extremo derecho de la espira, grafique (*a*) el flujo Φ_B en la espira, (*b*) la fem inducida $\mathcal{E}$ y (*c*) la velocidad P de generación de energía interna en la espira. Considere que $D = 4$ cm, $a = 10$ cm, $d = 15$ cm, $R = 16\ \Omega$, $B = 2.0$ T y $v = 1.0$ m/s

Solución (*a*) El flujo Φ_B es cero cuando la espira no está en el campo; es BDa cuando la espira está enteramente dentro del campo; es BDx cuando la espira está entrando al campo y $BD[a - (x - d)]$ cuando la espira está saliendo del campo. Estas conclusiones, que el lector debe comprobar, se muestran gráficamente en la figura 10*b*.

(*b*) La fem inducida $\mathcal{E}$ está dada por $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$, lo cual podemos escribir como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}v,$$

donde $d\Phi_B/dx$ es la pendiente de la curva de la figura 10*b*. La fem $\mathcal{E}$ está graficada como función de x en la figura 10*c*. Usando el mismo tipo de razonamiento que el empleado para la figura 8, deducimos de la ley de Lenz que, cuando la espira está entrando al campo, la fem $\mathcal{E}$ actúa en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj vista desde arriba. Nótese que no existe una fem cuando la espira está por completo dentro del campo magnético porque el flujo Φ_B a través de la espira no está cambiando con el tiempo, como lo muestra la figura 10*b*.

(*c*) La velocidad de producción de la energía interna está dada por $P = \mathcal{E}^2/R$. Puede calcularse al elevar al cuadrado la ordenada de la curva de la figura 10*c* y dividiendo entre R. El resultado se grafica en la figura 10*d*.

Si el efecto de borde del campo magnético, que no puede evitarse en la práctica (véase el problema 43 del capítulo 35), se toma en cuenta, los bordes angulares y las esquinas en la figura 10 serán reemplazados por curvas suaves. ¿Qué cambios ocurrirían en las curvas de la figura 10 si la espira fuese cortada de modo que ya no formase una trayectoria conductora cerrada?

Problema muestra 3 Una barra de cobre de longitud R gira con una frecuencia angular ω dentro de un campo magnético uniforme **B** como se muestra en la figura 11. Halle la fem $\mathcal{E}$ desarrollada entre los dos extremos de la barra. (Se puede medir esta fem situando un riel conductor a lo largo del círculo de

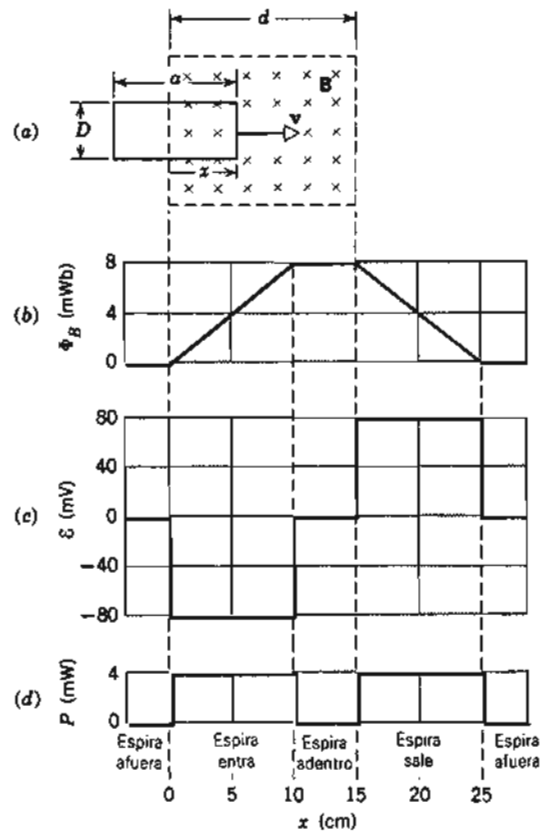


Figura 10 Problema muestra 2. (*a*) Una espira conductora cerrada es atraída a velocidad constante a través completamente de una región en la cual existe un campo magnético uniforme **B**. (*b*) El flujo magnético a través de la espira en función de la coordenada x del lado derecho de la espira. (*c*) La fem inducida en función de x. (*d*) La velocidad a la que aparece la energía interna en la espira conforme se desplaza.

trazos en la figura y conectando un voltímetro entre el riel y el punto O.)

Solución Si un alambre de longitud dr se mueve a una velocidad v en ángulo recto con un campo **B**, se desarrollará una fem impulsora $d\mathcal{E}$ (véase la Ec. 5) dada por

$$d\mathcal{E} = Bv\,dr.$$

La barra de la figura 11 puede dividirse en elementos de longitud dr, siendo ωr la velocidad lineal v de cada elemento. Cada elemento es perpendicular a **B** y se mueve también en una dirección en ángulo recto con **B** de modo que, puesto que las fem $d\mathcal{E}$ de cada elemento están "en serie",

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^R Bv\,dr = \int_0^R B\omega r\,dr = \tfrac{1}{2}B\omega R^2.$$

Como un segundo enfoque, consideremos que, en cualquier instante, el flujo encerrado por el sector aOb en la figura 11 está dado por

$$\Phi_B = BA = B(\tfrac{1}{2}R^2\theta),$$

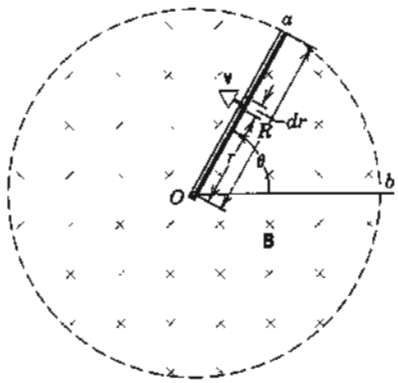


Figura 11 Problema muestra 3. Una barra de cobre gira dentro de un campo magnético uniforme.

donde $\frac{1}{2}R^2\theta$ es el área del sector. Al derivar se obtiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \tfrac{1}{2}BR^2\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}B\omega R^2.$$

Según la ley de Faraday, ésta es precisamente la magnitud de $\mathcal{E}$ y concuerda con el resultado previo.

36-5 CAMPOS ELÉCTRICOS INDUCIDOS

Supóngase que colocamos una espira de alambre conductor dentro de un campo magnético externo (como en la Fig. 12*a*). El campo, que suponemos tiene una intensidad uniforme sobre el área de la espira, puede crearse por un electroimán externo. Podemos variar la intensidad del campo magnético al variar la corriente en el electroimán.

Al variar **B**, el flujo magnético a través de la espira varía con el tiempo y, según las leyes de Lenz y de Faraday, podemos calcular la magnitud y dirección de la fem inducida y de la corriente inducida en la espira. Antes de que el campo comenzase a cambiar, no existía una corriente en la espira; mientras que el campo está cambiando, fluyen cargas en la espira. Para que las cargas comiencen a moverse, deben ser aceleradas por un campo eléctrico. Este *campo eléctrico inducido* ocurre con un campo magnético cambiante, de acuerdo con la ley de Faraday.

El campo eléctrico inducido es tan real como cualquiera que pudiera crearse por cargas estáticas; por ejemplo, éste ejerce una fuerza $q_0\mathbf{E}$ sobre una carga de prueba. Además, la presencia del campo eléctrico no tiene nada que ver con la presencia de la espira de alambre; si retiráramos la espira completamente, el campo eléctrico seguiría estando presente. Podríamos también llenar el espacio con un "gas" de electrones o de átomos ionizados; estas partículas experimentarían el mismo campo eléctrico inducido **E**.

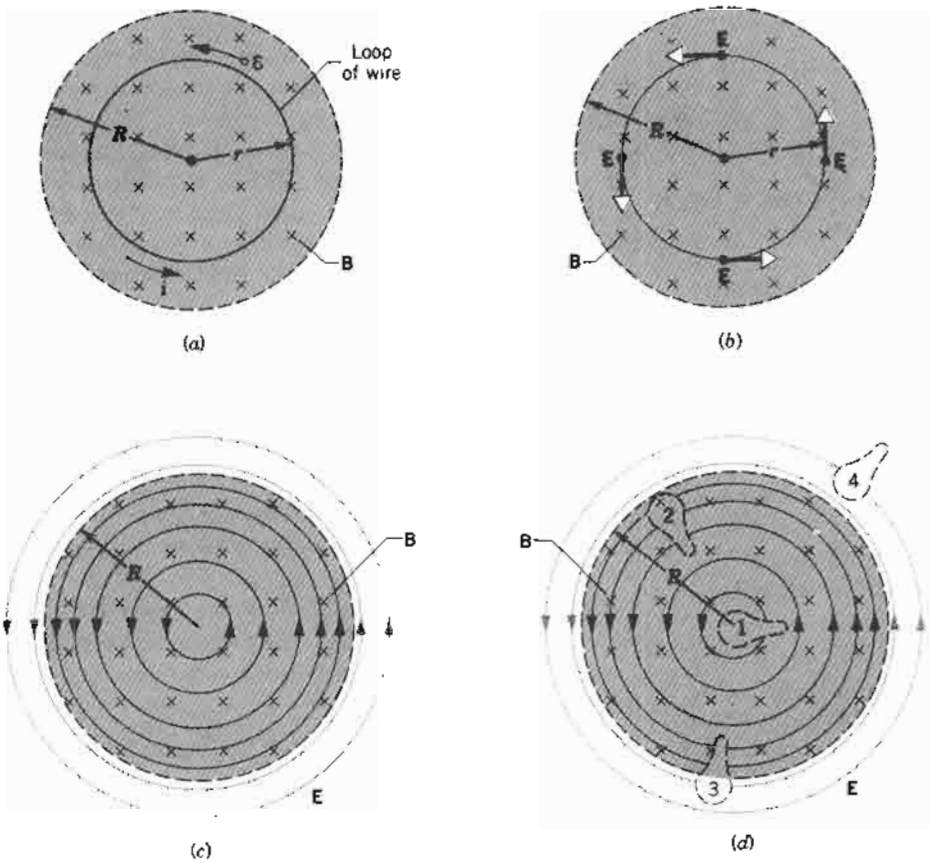


Figura 12 (*a*) Si el campo magnético aumenta con una velocidad uniforme, aparece una corriente constante, como se muestra, en la espira de alambre de radio r. (*b*) Existen campos eléctricos inducidos en la región, aun cuando se retire el anillo. (*c*) Imagen completa de los campos eléctricos inducidos, representados como líneas de fuerza. (*d*) Cuatro trayectorias cerradas similares alrededor de las cuales puede calcularse una fem.

Reemplacemos, por tanto, la espira de alambre con una trayectoria circular de radio arbitrario r (Fig. 12*b*). La trayectoria, a la que consideramos en un plano perpendicular a la dirección de **B**, encierra una región de espacio en la que el campo magnético está cambiando a razón de $d\mathbf{B}/dt$. Suponemos que la cantidad $d\mathbf{B}/dt$ es la misma en todos los puntos del área encerrada por la trayectoria. La trayectoria circular encierra un flujo Φ_B que está cambiando a razón de $d\Phi_B/dt$ debido a la variación del campo magnético. Alrededor de la trayectoria aparece una fem inducida, y por lo tanto, existe un campo eléctrico inducido en todos los puntos alrededor del círculo. De la simetría, concluimos que **E** debe tener la misma magnitud en todos los puntos alrededor del círculo, no existiendo una dirección preferida en este espacio. Además, **E** no puede tener una componente radial, conclusión que se deduce de la ley de Gauss: construyamos una superficie gaussiana cilíndrica imaginaria perpendicular al plano de la figura 12*b*. Si existiese una componente radial de **E**, existiría un flujo *eléctrico* neto dentro o fuera de la superficie, lo cual requeriría que la superficie encerrara una carga eléctrica neta. Puesto que no existe tal carga, el flujo eléctrico debe ser cero y la componente radial de **E** debe ser cero. Así, el campo eléctrico inducido es tangencial, y las líneas del campo eléctrico son círculos concéntricos, como en la figura 12*c*.

Consideremos una carga de prueba q_0 que se mueva alrededor de la trayectoria circular en la figura 12*b*. El trabajo W efectuado sobre la carga por el campo eléctrico inducido en una revolución es $\mathcal{E}q_0$. En forma equivalente, podemos expresar el trabajo como la fuerza eléctrica q_0E multiplicada por el desplazamiento $2\pi r$ cubierto en una revolución. Al igualar entre sí estas dos expresiones para W y cancelando el factor q_0, obtenemos

$$\mathcal{E} = E(2\pi r). \tag{11}$$

El lado derecho de la ecuación 11 puede ser expresado como una integral de línea de **E** alrededor del círculo, lo cual puede escribirse para los casos más generales (por

ejemplo, cuando **E** no sea constante o cuando la trayectoria elegida no sea un círculo) como

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \tag{12}$$

Nótese que la ecuación 12 directamente se reduce a la ecuación 11 en nuestro caso especial de una trayectoria circular con un **E** tangencial constante.

Reemplazando la fem por la ecuación 12, podemos escribir la ley de la inducción de Faraday ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$) como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{13}$$

En esta forma es como la ley de Faraday aparece como una de las cuatro ecuaciones de Maxwell básicas del electromagnetismo. En esta forma, es evidente que la ley de Faraday implica que un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico.

En la figura 12 hemos supuesto que el campo magnético está creciendo; esto es, tanto dB/dt como $d\Phi_B/dt$ son positivos. Según la ley de Lenz, la fem inducida se opone a este cambio, y así las corrientes inducidas crean un campo magnético que apunta hacia afuera del plano de la figura. Puesto que las corrientes deben circular en sentido contrario a las manecillas del reloj, las líneas del campo eléctrico inducido **E** (que es el causante de la corriente) deben estar también en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Si, por lo contrario, el campo magnético estuviese decreciendo ($dB/dt < 0$), las líneas del campo eléctrico inducido estarían en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que la corriente inducida se opone una vez más al cambio en Φ_B.

Puede aplicarse la ley de Faraday en la forma de la ecuación 13 a trayectorias de cualquier geometría, no únicamente a la trayectoria circular especial que elegimos en la figura 12*b*. La figura 12*d* muestra cuatro de tales trayectorias, teniendo todas la misma forma y área pero estando ubicadas en posiciones diferentes dentro del campo cambiante. Para las trayectorias 1 y 2, la fem inducida es la misma porque estas trayectorias se encuentran por completo dentro del campo magnético cambiante y, por lo tanto, tiene el mismo valor de $d\Phi_B/dt$. Sin embargo, aunque la fem $\mathcal{E}$ ($= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$) es la misma para estas dos trayectorias, la distribución de los vectores del campo eléctrico alrededor de las trayectorias es diferente, como lo indican las líneas del campo eléctrico. Para la trayectoria 3, la fem es menor porque tanto Φ_B como $d\Phi_B/dt$ son más pequeñas, y para la trayectoria 4 la fem inducida es cero, aunque el campo eléctrico no sea cero en ningún punto a lo largo de la trayectoria.

Los campos eléctricos inducidos que se crean por el proceso de inducción no están asociados con cargas sino con un flujo magnético cambiante. Si bien, ambas clases de campos eléctricos ejercen fuerzas sobre las cargas, existe una diferencia entre ellos. La evidencia más simple de esta diferencia es que las líneas de **E** asociadas con un flujo magnético cambiante pueden formar anillos cerrados (véase la Fig. 12); las líneas de **E** asociadas con las cargas no forman anillos cerrados sino que siempre se dirigen comenzando en una carga positiva y terminando en una carga negativa.

La ecuación 15 del capítulo 30, la cual definió la diferencia de potencial entre dos puntos a y b, es

$$V_b - V_a = \frac{-W_{ab}}{q_0} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \tag{14}$$

Si el potencial ha de tener algún significado útil, esta integral (y W_{ab}) debe tener el mismo valor para todas las trayectorias que unan a a con b. Esto se demostró que era así para todos los casos examinados en los capítulos anteriores.

Un caso especial interesante surge cuando a y b son el mismo punto. La trayectoria que los une es ahora un anillo cerrado; V_a debe ser idéntico a V_b, y la ecuación 14 se reduce a

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \tag{15}$$

Sin embargo, cuando está presente un flujo magnético cambiante, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ *no* es cero sino que es, de acuerdo con la ley de Faraday (véase la Ec. 13), $-d\Phi_B/dt$. Los campos eléctricos asociados con cargas estacionarias son *conservativos*, pero aquéllos asociados con campos magnéticos cambiantes son *no conservativos*; véase la sección 8-2. Los campos eléctricos (no conservativos) producidos por la inducción no pueden describirse mediante un potencial eléctrico.

Un argumento similar puede expresarse en el caso de los campos magnéticos producidos por las corrientes en alambres. Las líneas de **B** forman también anillos cerrados (véase la Fig. 9 del capítulo 35) y, como consecuencia, el potencial magnético no tiene ningún significado en tales casos.

Problema muestra 4 En la figura 12*b*, supongamos que R = 8.5 cm y que dB/dt = 0.13 T/s. (*a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico **E** cuando r = 5.2 cm? (*b*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido cuando r = 12.5 cm?

Solución (*a*) De la ley de Faraday (Ec. 13) tenemos

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Notamos que $r < R$. El flujo Φ_B a través de una trayectoria cerrada de radio r es, entonces,

$$\Phi_B = B(\pi r^2),$$

de modo que

$$E(2\pi r) = -(\pi r^2)\frac{dB}{dt}.$$

Al resolver para E y considerando las magnitudes, hallamos

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| r. \tag{16}$$

Nótese que el campo eléctrico inducido E depende de dB/dt pero no de B. Para $r = 5.2$ cm, tenemos, para la magnitud de **E**,

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| r = \tfrac{1}{2}(0.13\ \text{T/s})(5.2 \times 10^{-2}\ \text{m})$$

$$= 0.0034\ \text{V/m} = 3.4\ \text{mV/m}.$$

(*b*) En este caso tenemos $r > R$ de modo que todo el flujo del imán pasa a través de la trayectoria circular. Entonces

$$\Phi_B = B(\pi R^2).$$

De la ley de Faraday (Ec. 13) hallamos entonces que

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(\pi R^2)\frac{dB}{dt}.$$

Si despejamos E y consideramos de nuevo las magnitudes, hallamos

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right|\frac{R^2}{r}. \tag{17}$$

En este caso se induce un campo eléctrico aun en los puntos que están bien afuera del campo magnético (cambiante), un resultado importante que hace posible la existencia de los transformadores (véase la Sec. 39-5). Para $r = 12.5$ cm, la ecuación 17 da

$$E = \tfrac{1}{2}(0.13\ \text{T/s})\frac{(8.5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{12.5 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$

$$= 3.8 \times 10^{-3}\ \text{V/m} = 3.8\ \text{mV/m}.$$

Las ecuaciones 16 y 17 dan el mismo resultado, como debe ser, cuando $r = R$. La figura 13 muestra una gráfica de $E(r)$ basada en estas dos ecuaciones.

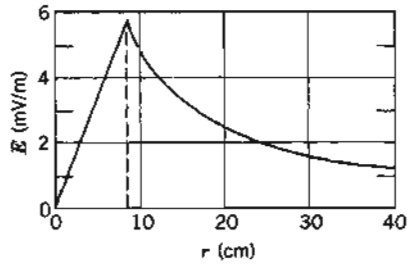


Figura 13 El campo eléctrico inducido determinado en el problema muestra 4.

36-6 EL BETATRÓN*

El betatrón es un aparato para acelerar electrones (conocidos también como partículas beta) a altas velocidades usando campos eléctricos inducidos producidos por campos magnéticos cambiantes. Tales electrones de alta energía pueden amplearse para investigación básica en física así como para producir rayos X en investigación aplicada en la industria y con fines médicos como en la terapia contra el cáncer. El betatrón proporciona una ilustración excelente de la "realidad" de los campos eléctricos inducidos. Típicamente, los betatrones pueden producir energías de 100 MeV, en cuyo caso los electrones son altamente relativistas ($v = 0.999987c$). Los betatrones pueden producir corrientes enormes, en la gama de 10^3 a 10^5 A. Sin embargo, son máquinas pulsantes, que producen pulsaciones de una anchura típica μs o menos separados por intervalos de tiempo de entre 0.01 y 1 s.

La figura 14 muestra una sección transversal de la estructura interior de un betatrón. Consta de un gran electroimán M, cuyo campo (indicado por las líneas de campo) puede variar al cambiar la corriente en las bobinas C. Los electrones circulan en el tubo de cerámica en forma de rosca, evacuado, marcado como D. Su órbita está en ángulo recto con el plano de la figura, saliendo de la izquierda y entrando por la derecha.

El campo magnético tiene varias funciones: (1) guía a los electrones en una trayectoria circular; (2) el campo magnético cambiante produce un campo eléctrico inducido que acelera a los electrones en su trayectoria; (3) mantiene un radio constante de la trayectoria de los electrones; (4) introduce electrones en la órbita y luego los retira de la órbita una vez que han alcanzado su energía plena; y (5) proporciona una fuerza restauradora que tiende a resistir cualquier tendencia de los electrones a salir de sus órbitas, ya sea verticalmente o radialmente. Es notable que el campo magnético sea capaz de llevar a cabo todas estas operaciones.

Las bobinas portan una corriente alterna y producen el campo magnético mostrado en la figura 15. Para que los electrones circulen en la dirección mostrada en la figura 14 (en sentido contrario a las manecillas del reloj vistos desde arriba), el campo magnético debe apuntar hacia arriba (considerado como positivo en la Fig. 15). Además, el campo cambiante debe tener una pendiente positiva ($dB/dt > 0$ de modo que $d\Phi_B/dt > 0$) si se quiere que los electrones se aceleren (en lugar de que se desaceleren) durante el ciclo. Así, sólo el primer cuarto de ciclo en la figura 15 es útil en la operación del betatrón; los electrones se inyectan en $t = 0$ y se extraen en $t = T/4$. El aparato no produce un haz en los tres cuartos de ciclo restantes.

* Para una revisión de los desarrollos y aplicaciones de los betatrones y aparatos similares, véase "Ultra-high-current Electron Induction Accelerators", por Chris A. Kapetanakos y Phillip Sprangle, *Physics Today*, febrero de 1985, pág. 58.

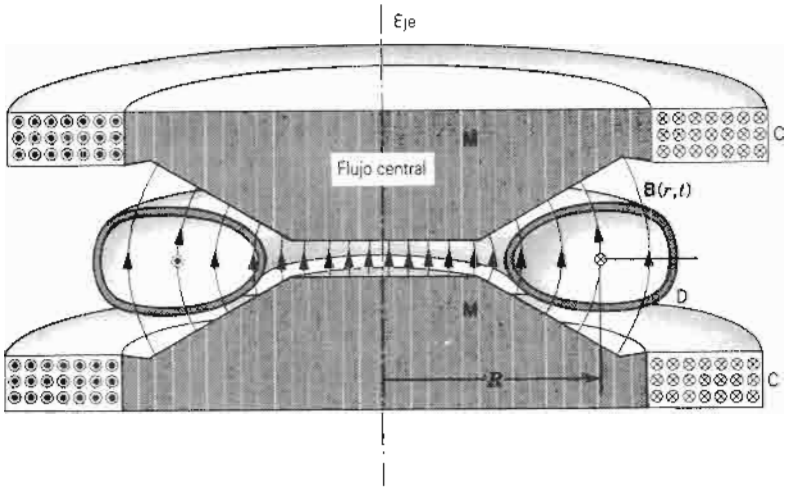


Figura 14 Sección transversal de un betatrón, donde se muestra la órbita de los electrones acelerados y una "instantánea" del campo magnético variable en el tiempo en determinado momento durante el ciclo. El campo magnético se produce por las bobinas C y adquiere su forma debido a las piezas polares magnéticas M.

Problema muestra 5 En un betatrón de 100 MeV, el radio R de la órbita es de 84 cm. El campo magnético en la región encerrada por la órbita se eleva periódicamente (60 veces por segundo) desde cero hasta un valor máximo promedio $B_{av,m}$ = 0.80 T en un intervalo de aceleración de un cuarto de periodo, o sea 4.2 ms. (*a*) ¿Cuánta energía adquiere el electrón en un recorrido promedio alrededor de su órbita en este flujo cambiante? (*b*) ¿Cuál es la velocidad *promedio* de un electrón durante su ciclo de aceleración?

Solución (*a*) El flujo central se eleva durante el intervalo de aceleración desde cero hasta un máximo de

$$\Phi_B = (B_{av,m})(\pi R^2)$$
$$= (0.80\ \text{T})(\pi)(0.84\ \text{m})^2 = 1.8\ \text{Wb}.$$

El valor promedio de $d\Phi_B/dt$ durante el intervalo de aceleración es, entonces

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{av} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{1.8\ \text{Wb}}{4.2 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 430\ \text{Wb/s}.$$

Según la ley de Faraday (Ec. 3) esto es también la fem promedio en volts. Entonces el electrón aumenta su energía según un promedio de 430 eV por revolución dentro de este flujo cambiante. Para alcanzar su energía final plena de 100 MeV, tiene que realizar unas 230,000 revoluciones en su órbita, una trayectoria de 1200 km de longitud total.

(*b*) La duración del ciclo de aceleración está dada como 4.2 ms, y la longitud de la trayectoria es de 1200 km, como se calculó en el inciso anterior. La velocidad promedio es, entonces,

$$\bar{v} = \frac{1200 \times 10^3\ \text{m}}{4.2 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 2.86 \times 10^8\ \text{m/s}.$$

Esto es el 95% de la velocidad de la luz. La velocidad real del electrón acelerado plenamente, cuando haya alcanzado su energía final de 100 Mev, es 99.9987% de la velocidad de la luz.

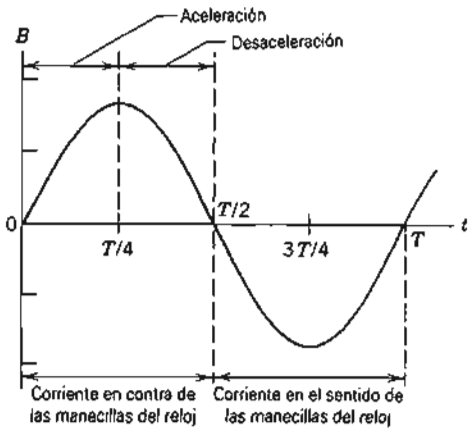


Figura 15 La variación con el tiempo del campo magnético B del betatrón durante un ciclo.

36-7 LA INDUCCIÓN Y EL MOVIMIENTO RELATIVO *(Opcional)*

En la sección 35-7 explicábamos que la clasificación de los efectos electromagnéticos en puramente eléctricos o puramente magnéticos dependía del marco de referencia del observador. Esto es, lo que parece ser un campo magnético en un marco de referencia puede parecer una mezcla de campos eléctricos y magnéticos en otro marco de referencia. Puesto que la fem está determinada por la velocidad del objeto que se mueve a través del campo magnético, está claro que depende del marco de referencia del observador. Otros observadores en marcos inerciales diferentes medirán velocidades diferentes e intensidades del campo magnético diferentes. Por lo tanto, es esencial especificar el marco de referencia del observador al calcular las fem y las corrientes inducidas.

La figura 16*a* muestra una espira cerrada a la que un agente externo (no ilustrado) causa que se mueva a velocidad **v** con respecto a un imán que proporciona un campo uniforme **B** sobre una región. Un observador S está en reposo con respecto al imán empleado para crear el campo **B**. La fem inducida en este caso es una *fuerza electromotriz de movimiento o cinética* porque la espira de conducción se está moviendo con respecto a este observador.

Consideremos un portador de carga positiva en el centro del extremo izquierdo de la espira. Para el observador S, esta carga

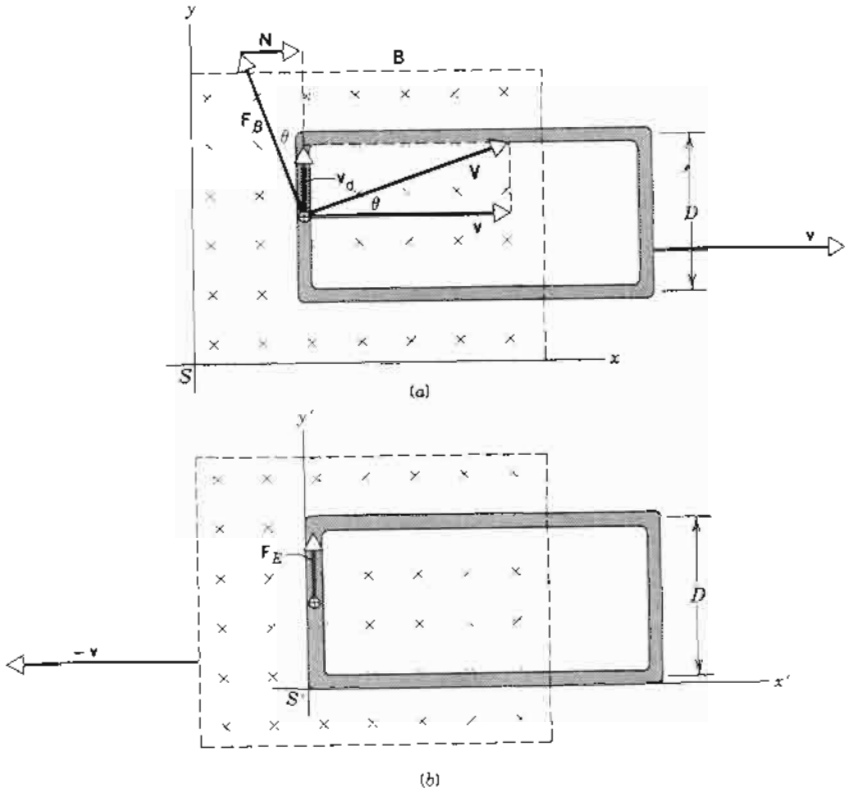


Figura 16 Una espira conductora cerrada está moviéndose con respecto a un imán que produce el campo **B**. (*a*) Un observador *S*, fijo con respecto al imán, ve a la espira moviéndose hacia la derecha y observa una fuerza magnética $F_B \cos\theta$ que actúa hacia arriba sobre los portadores de carga positiva. (*b*) Un observador *S'*, fijo con respecto a la espira, ve al imán moviéndose hacia la izquierda y observa una fuerza *eléctrica* que actúa hacia arriba sobre los portadores de carga positiva. En ambas figuras existen fuerzas internas de colisión (no ilustradas) que impiden que los portadores de carga se aceleren.

q está obligada a moverse a través del campo **B** a velocidad **v** hacia la derecha junto con la espira, y experimenta una fuerza magnética dada por $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (no ilustrada en la Fig. 16*a*). Esta fuerza provoca que los portadores se muevan hacia arriba (en la dirección *y*) a lo largo del conductor; finalmente, llegan a adquirir la velocidad de arrastre $\mathbf{v}_d$, como se muestra en la figura 16*a*.

La velocidad de equilibrio de los portadores resultante es ahora **V**, la suma vectorial de **v** y $\mathbf{v}_d$. En esta situación la fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ es

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{18}$$

actuando (como siempre) en ángulo recto con la velocidad resultante **V** del portador, como se muestra en la figura 16*a*.

Al actuar sola, $\mathbf{F}_B$ tendería a empujar a los portadores a través de la pared izquierda del conductor. Ya que esto no sucede, la pared del conductor debe ejercer una fuerza normal **N** sobre los portadores (véase la Fig. 16*a*) de magnitud tal que $\mathbf{v}_d$ se encuentre paralela al eje del alambre; en otras palabras, **N** cancela exactamente a la componente horizontal de $\mathbf{F}_B$, dejando únicamente a la componente $F_B \cos\theta$ que se encuentra a lo largo de la dirección del conductor. Esta última componente de la fuerza sobre el portador también se cancela, en este caso, por la fuerza impulsora promedio $\bar{F}_i$ asociada a las colisiones internas que experimenta el portador cuando se mueve a velocidad (constante) v_d por el alambre.

La energía cinética del portador de carga al moverse por el alambre permanece constante. Esto es consistente con el hecho de que la fuerza resultante que actúa sobre el portador de carga ($= \mathbf{F}_B + \bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{N}$) es cero. El trabajo efectuado por $\mathbf{F}_B$ es cero porque las fuerzas magnéticas, que actúan en ángulo recto con la velocidad de una carga en movimiento, no pueden efectuar ningún trabajo sobre esa carga. Entonces, el trabajo (negativo) efectuado sobre el portador por la fuerza de colisión interna promedio $\bar{\mathbf{F}}_i$ debe ser cancelado exactamente por el trabajo (positivo) efectuado sobre el portador por la fuerza **N**. Por último, **N** es suministrada por el agente que tira de la espira a través del campo magnético, y la energía mecánica gastada por este agente aparece como energía interna en la espira, como hemos visto en la sección 36-4.

Calculemos entonces el trabajo dW efectuado sobre el portador en el tiempo dt por la fuerza **N**; es

$$dW = N(v\,dt) \tag{19}$$

donde $v\,dt$ es la distancia que la espira (y el portador) se ha movido hacia la derecha en la figura 16*a* en el tiempo dt. Podemos escribir para N (véase la Ec. 18 y la Fig. 16*a*)

$$N = F_B \operatorname{sen}\theta = (qVB)(v_d/V) = qBv_d. \tag{20}$$

Al sustituir la ecuación 20 en la ecuación 19 nos da

$$\begin{aligned} dW &= (qBv_d)(v\,dt) \\ &= (qBv)(v_d\,dt) = qBv\,ds \end{aligned} \tag{21}$$

donde ds ($= v_d\,dt$) es la distancia que recorre el portador a lo largo del conductor en el tiempo dt.

El trabajo efectuado sobre el portador al completar un circuito de la espira se halla integrando la ecuación 21 alrededor de la espira y es

$$W = \oint dW = qBvD. \tag{22}$$

Esto se deduce porque las contribuciones de trabajo en las partes superior e inferior de las espiras son de signo opuesto y se

cancelan, y no se efectúa ningún trabajo en aquellas porciones de la espira que se encuentran fuera del campo magnético.

Un agente que efectúe un trabajo sobre los portadores de carga, generando así una corriente en una espira conductora cerrada, puede verse como una fem. Usando la ecuación 22, hallamos

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{qBvD}{q} = BDv, \tag{23}$$

que es el mismo resultado que dedujimos a partir de la ley de la inducción de Faraday; véase la ecuación 5. Entonces una fem impulsora está íntimamente relacionada con la desviación lateral de una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético.

Consideremos ahora cómo vería la situación de la figura 16*a* un observador S' que esté *en reposo con respecto a la espira*. Para este observador, el imán se mueve hacia la izquierda en la figura 16*b* a velocidad $-\mathbf{v}$, y la carga q no se mueve en la dirección x' con la espira, sino que se mueve siguiendo el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la espira. S' mide una fem $\mathcal{E}'$ que se explica, al nivel microscópico, afirmando que se induce en la espira un campo eléctrico $\mathbf{E}'$ debido a la acción del imán en movimiento. La fem $\mathcal{E}'$ está relacionada con $\mathbf{E}'$ según la ecuación 12,

$$\mathcal{E}' = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}.$$

El campo inducido $\mathbf{E}'$, que tiene el mismo origen que los campos inducidos que estudiamos en la sección 36-5, ejerce una fuerza $q\mathbf{E}'$ sobre el portador de carga.

El campo inducido $\mathbf{E}'$ que produce la corriente existe únicamente en el costado izquierdo de la espira. (Cuando operamos la integral de la ecuación 12 alrededor de la espira, las contribuciones a la integral a partir de la componente x' de $\mathbf{E}'$ se cancelan en los extremos superior e inferior, mientras que no existe una contribución de las partes de la espira que no estén dentro del campo magnético.) Usando la ecuación 12 obtenemos, entonces

$$\mathcal{E}' = E'D. \tag{24}$$

Para un movimiento a velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, las fem dadas por las ecuaciones 23 y 24 deben ser idénticas, porque el movimiento relativo de la espira y del imán es idéntico en los dos casos mostrados en la figura 16. Al igualar estas relaciones nos da

$$E'D = BDv,$$

o sea

$$E' = vB. \tag{25}$$

En la figura 16*b*, el vector $\mathbf{E}'$ apunta hacia arriba a lo largo del eje del extremo izquierdo de la espira conductora porque ésta es la dirección en que se observa que se mueven las cargas positivas. Las direcciones de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ se muestran claramente en esta figura. Vemos entonces que la ecuación 25 es consistente con la relación vectorial más general

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{26}$$

No hemos demostrado la ecuación 26 excepto para el caso especial de la figura 16; sin embargo, es aplicable en general, independiente de cuál sea el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$.

Interpretamos la ecuación 26 de la siguiente manera. El observador S fijo con respecto al imán percibe únicamente un campo magnético. Para este observador, la fuerza surge del movimiento de las cargas a través de $\mathbf{B}$. El observador S' fijo en el portador de carga advierte también un campo eléctrico $\mathbf{E}'$ y le atribuye al campo eléctrico la fuerza sobre la carga (inicialmente en reposo con respecto a S'). S dice que la fuerza es de origen puramente magnético, mientras que S' dice que la fuerza es de origen puramente eléctrico. Desde el punto de vista de S, la fem inducida está dada por $\oint(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$. Desde el punto de vista de S', la misma fem inducida está dada por $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}$, en donde $\mathbf{E}'$ es el vector del campo eléctrico (inducido) que S' observa en los puntos a lo largo del circuito.

Para un tercer observador S'', en relación con el cual se mueven tanto el imán como la espira, la fuerza que tiende a mover a las cargas alrededor de la espira no es ni puramente eléctrica ni puramente magnética sino un poco de cada una. En resumen, en la ecuación

$$\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

diferentes observadores se forman diferentes juicios de $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{v}$ pero, cuando éstos están combinados, todos los observadores se forman el mismo juicio con respecto a $\mathbf{F}/q$, y todos obtienen el mismo valor para la fem inducida en la espira (que depende únicamente del movimiento *relativo*). Esto es, la fuerza total (y, por tanto, la aceleración total) es la misma para todos los observadores, pero cada observador se forma una estimación diferente de las fuerzas eléctricas y magnéticas por separado que contribuyen a la misma fuerza total.

El punto esencial es que lo que le parece un campo magnético a un observador puede parecerle una combinación de campos eléctrico y magnético a un segundo observador en un marco de referencia inercial diferente. Sin embargo, ambos observadores concuerdan en el resultado mensurable total, en el caso de la figura 16, la corriente en la espira. Estamos forzados a concluir que los campos magnético y eléctrico *no* son independientes uno del otro y no tienen una existencia única por separado; dependen del marco inercial, como también concluimos en la sección 35-7.

Todos los resultados de esta sección suponen que la velocidad relativa entre S y S' es pequeña comparada con la velocidad de la luz c. Si v es comparable a c, puede aplicarse el grupo apropiado de transformaciones relativistas. En este caso, hallaríamos que las fem inducidas medidas por S y S' ya no serían iguales, y que el campo eléctrico inducido no está dado por la ecuación 26. sin embargo, si ponemos cuidado en definir todas las cantidades de la manera relativista apropiada, hallamos de nuevo que las leyes básicas del electromagnetismo, incluyendo a la ley de Faraday, se cumplen en todos los marcos de referencia inerciales.* En efecto, tales consideraciones condujeron a Einstein a la teoría especial de la relatividad; en el lenguaje de la relatividad especial, decimos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes con respecto a la transformación de Lorentz. ■

* Para un estudio cuidadoso de las fem de movimiento en el caso de velocidades que no sean necesariamente pequeñas comparadas con c, véase "Application of Special Relativity to a Simple System in which a Motional emf Exists", por Murray D. Sirkis, *American Journal of Physics*, junio de 1986, pág. 538. En *Introduction to Special Relativity*, por Robert Resnick (Wiley, 1968), capítulo 4, pueden hallarse consideraciones adicionales de la transformación relativista de los campos eléctrico y magnético.

PREGUNTAS

1. Demuestre que 1 volt = 1 weber/segundo.
2. ¿Son las fem y las corrientes inducidas diferentes de algún modo de las fem y corrientes suministradas por una batería conectada a una espira conductora?
3. ¿La intensidad del imán afecta la magnitud del voltaje inducido en una bobina a través de la cual se mueve un imán? De ser así, explique cómo.
4. Explique con sus propias palabras la diferencia entre un campo magnético **B** y el flujo de un campo magnético Φ_B. ¿Son vectores o escalares? ¿En qué unidades pueden expresarse cada una? ¿Cómo se relacionan estas unidades? ¿Son alguna o ambas (o ninguna) propiedades de un punto dado en el espacio?
5. ¿Puede una partícula cargada en reposo ponerse en movimiento por la acción de un campo magnético? Si no, ¿por qué no? De ser así, ¿cómo? Considérense campos tanto estáticos como variables en el tiempo.
6. Explique cualitativamente las configuraciones de las líneas de **B** en la figura 9*a-c*.
7. En la ley de la inducción de Faraday, ¿depende la fem inducida de la resistencia del circuito? De ser así, ¿cómo?
8. Usted deja caer una barra imantada a lo largo del eje de un tubo largo de cobre. Describa el movimiento del imán y los intercambios de energía que intervienen. Desprecie la resistencia del aire.
9. Usted está jugando con un anillo de metal, moviéndolo de un lado a otro dentro de un campo magnético, como en la figura 9. ¿Cómo puede usted decir, sin una inspección detallada, si el anillo tiene o no un corte de sierra angosto que lo cruza, convirtiéndolo en no conductor?
10. La figura 17 muestra un pista de madera inclinada que pasa, en parte de su longitud, a través de un campo magnético intenso. Deja usted rodar un disco de cobre por la pista. Describa el movimiento del disco al rodar desde la parte alta de la pista hasta el fondo.

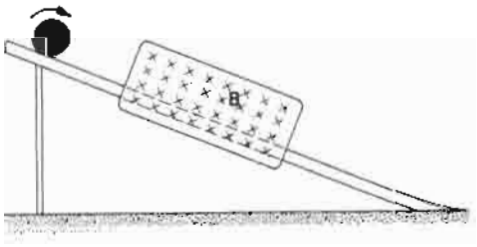


Figura 17 Pregunta 10.

11. La figura 18 muestra un anillo de cobre, colgado del techo por medio de dos hilos. Describa en detalle cómo podría usted usar en la forma más efectiva una barra imantada que haga que este anillo oscile de un lado a otro.
12. ¿Es inducida una fem en un solenoide largo por una barra imantada que se mueva dentro del solenoide a lo largo de su eje? Explique su respuesta.
13. Dos espiras conductoras están una frente a la otra, con una separación d, como se muestra en la figura 19. Un observador mira a lo largo de su eje común de izquierda a derecha. Si se establece súbitamente una corriente i en el sentido de las manecillas del reloj en la espira más grande, por medio de una batería no ilustrada, (*a*) ¿cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira más pequeña? (*b*) ¿Cuál es la dirección de la fuerza (de haber alguna) que actúa sobre la espira más pequeña?

Figura 18 Pregunta 11.

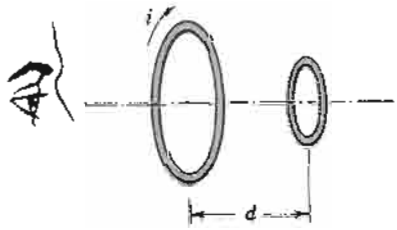


Figura 19 Pregunta 13.

14. ¿Cuál es la dirección de la fem inducida en la bobina Y de la figura 20 (*a*) cuando la bobina Y se mueve hacia la bobina X? (*b*) ¿cuando la corriente en la bobina X disminuye, sin ningún cambio en las posiciones relativas de las bobinas?

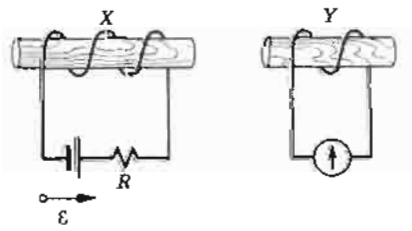


Figura 20 Pregunta 14.

15. El polo norte de un imán se mueve alejándose de un anillo de cobre, como en la figura 21. ¿En qué dirección

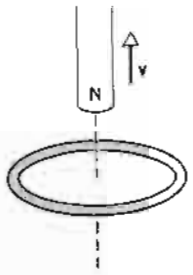


Figura 21 Pregunta 15.

apuntaría la corriente en la parte del anillo más alejada del lector?

16. Una espira circular se mueve a velocidad constante a través de regiones donde campos magnéticos de la misma magnitud se dirigen hacia adentro o hacia afuera del plano de la página, como se indica en la figura 22. ¿En cuál de las siete posiciones indicadas seguirá la fem (*a*) el sentido de las manecillas del reloj, (*b*) el sentido contrario a las manecillas del reloj, y (*c*) será cero?

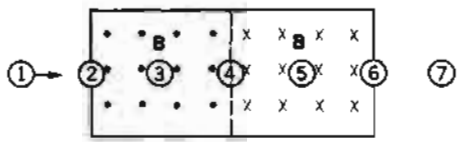


Figura 22 Pregunta 16.

17. Un solenoide corto que conduce una corriente estacionaria se mueve hacia una espira conductora como en la figura 23. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira según mira uno hacia ella, como se muestra?

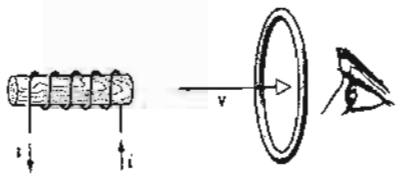


Figura 23 Pregunta 17.

18. La resistencia R en el circuito a la izquierda de la figura 24 aumenta a velocidad constante. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el circuito de la derecha?

19. ¿Cuál es la direccion de la corriente inducida a través del resistor R en la figura 25 (*a*) inmediatamente después de haber sido cerrado el interruptor S, (*b*) algún tiempo después de haber sido cerrado el interruptor S, y (*c*) inmediatamente después de que haya sido abierto el interruptor S? (*d*) Cuando el interruptor S se mantiene cerrado, ¿de cuál extremo de la bobina más larga salen las líneas de campo? Éste es el polo norte efectivo de la bobina. (*e*) ¿En qué forma los electrones de conducción de la bobina que contiene a R perciben el flujo dentro

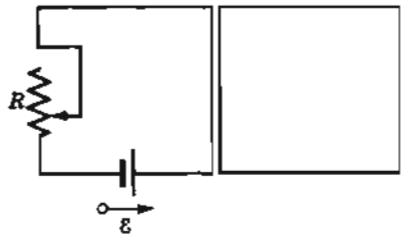


Figura 24 Pregunta 18.

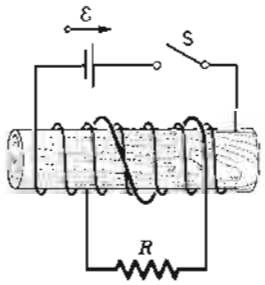


Figura 25 Pregunta 19.

de la bobina larga? ¿Qué los mantiene moviéndose realmente?

20. ¿Puede una corriente inducida crear alguna vez un campo magnético **B** que esté en la misma dirección que el campo magnético que induce la corriente? Justifique su respuesta.

21. ¿Cómo puede usted resumir en un enunciado todas las maneras de determinar la dirección de una fem inducida?

22. La espira de alambre que se muestra en la figura 26 gira con velocidad angular constante alrededor del eje x. Está presente un campo magnético uniforme **B**, cuya dirección es la del eje y positivo. ¿Para qué porciones de la rotación es la corriente inducida en la espira (*a*) de P a Q, (*b*) de Q a P, y (*c*) de cero? Repita cuando la dirección de la rotación se invierte con respecto a la mostrada en la figura.

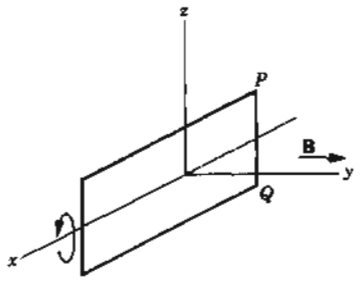


Figura 26 Pregunta 22.

23. En la figura 27, el segmento recto de alambre móvil se desplaza hacia la derecha a velocidad constante **v**. En la dirección mostrada aparece una corriente inducida. ¿Cuál es la dirección del campo magnético uniforme (supuesto como constante y perpendicular a la página) en la región A?

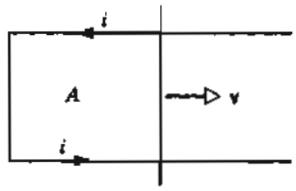


Figura 27 Pregunta 23.

24. Una espira conductora, mostrada en la figura 28, se retira del imán permanente tirando verticalmente hacia arriba. (*a*) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida? (*b*) ¿Se requiere una fuerza para retirar a la espira? (No considere el peso de la espira.) (*c*) ¿La cantidad total de energía interna producida depende del tiempo invertido en retirarla?

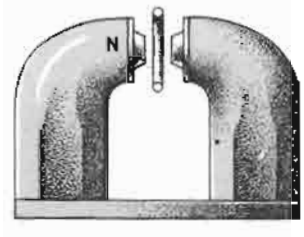


Figura 28 Pregunta 24.

25. Una espira cerrada plana está situada dentro de un campo magnético uniforme. ¿De qué maneras puede la espira moverse sin que se induzca una fem? Considere los movimientos tanto de traslación como de rotación.

26. Una cinta de cobre está montada a modo de péndulo alrededor de *O*, según vemos en la figura 29. Tiene libertad de oscilar a través de un campo magnético normal a la página. Si la cinta tiene ranuras cortadas en ella, como se muestra, puede oscilar libremente a través del campo. Si se sustituye por una cinta sin ranuras, el movimiento se amortigua fuertemente (*amortiguación magnética*). Explique las observaciones. (*Sugerencia*: Use la ley de Lenz; considere las trayectorias que deben seguir los portadores de carga en la cinta si han de oponerse al movimiento.)

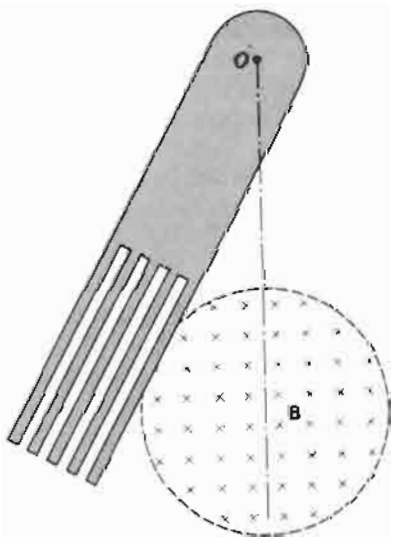


Figura 29 Pregunta 26.

27. Considérese una lámina conductora que está en un plano perpendicular a un campo magnético **B**, como se muestra en la figura 30. (*a*) Si **B** cambia súbitamente, el cambio en **B** no se detecta totalmente en los puntos cerca de *P* (*blindaje electromagnético*). Explíquelo. (*b*) Si la resistividad de la lámina es cero, el cambio nunca se detecta en *P*. Explíquelo. (*c*) Si **B** cambia periódicamente a una frecuencia elevada y el conductor está hecho de un material de resistividad baja, la región cercana a *P* está casi completamente blindada a los cambios en el flujo. Explíquelo. (*d*) ¿Por qué este conductor no es útil como blindaje contra los campos magnéticos?

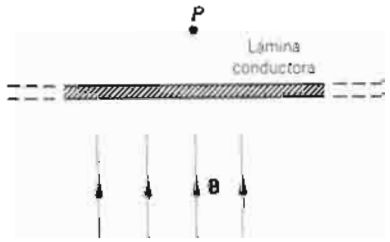


Figura 30 Pregunta 27.

28. (*a*) En la figura 12*b*, ¿necesita ser el círculo de radio *r* un anillo conductor con objeto de que **E** y $\mathcal{E}$ estén presentes? (*b*) Si el círculo de radio *r* no fuese concéntrico (desplazado ligeramente hacia la izquierda, por ejemplo), ¿cambiaría $\mathcal{E}$? ¿Cambiaría la configuración de **E** alrededor del círculo? (*c*) ¿Existiría una fem para el círculo concéntrico de radio *r*, cuando $r > R$? ¿Existen campos eléctricos?

29. Un anillo de cobre y un anillo de madera de las mismas dimensiones están situados de modo que exista el mismo flujo magnético cambiante a través de cada uno de ellos. Compare los campos eléctricos inducidos en los dos anillos.

30. Un aeroplano comercial está viajando en vuelo nivelado sobre Alaska, en donde el campo magnético de la Tierra tiene una componente grande hacia abajo. ¿Cuál de las puntas de las alas (izquierda o derecha) tiene más electrones que la otra?

31. En la figura 12*d*, ¿cómo pueden ser idénticas las fem inducidas alrededor de las trayectorias 1 y 2? Los campos eléctricos inducidos son mucho más débiles cerca de la trayectoria 1 que cerca de la trayectoria 2, como lo muestra el espaciamiento de las líneas de fuerza. Véase también la figura 13.

32. De un ciclotrón (véase la sección 34-3) se dice que es un *aparato de resonancia*. ¿Depende un betatrón de la resonancia? Explique.

33. Demuestre que, en el betatrón de la figura 14, las direcciones de las líneas de **B** están trazadas correctamente para ser consistentes con la dirección de circulación mostrada para los electrones.
34. En el betatrón de la figura 14, usted desea aumentar el radio de la órbita imponiendo súbitamente un flujo central adicional $\Delta\Phi_B$ (generado al establecer súbitamente una corriente en una bobina auxiliar no mostrada). ¿Estarían las líneas de **B**, asociadas a este incremento de flujo, en la misma dirección que las líneas mostradas en la figura, o estarían en la dirección opuesta? Suponga que el campo magnético en la posición de la órbita permanece relativamente sin cambio a causa de este incremento del flujo.
35. En el betatrón de la figura 14, ¿por qué se hace con placas laminadas el núcleo magnético del imán en lugar de hacerse con metal sólido como en el ciclotrón de la sección 34-3?
36. En la figura 16*a* podemos ver que sobre los portadores de carga en la rama izquierda de la espira actúa una fuerza ($F_B \cos \theta$). Sin embargo, si debe haber una corriente continua en la espira (y en efecto sí la hay) una fuerza de alguna clase debe actuar sobre los portadores de carga en las otras tres ramas de la espira, con el fin de mantener la misma velocidad de arrastre v_d en estas ramas. ¿Cuál es su fuente? (*Sugerencia*: Considere que la rama izquierda de la espira era el único elemento conductor, siendo las otras tres no conductoras. ¿No se apilaría una carga positiva en la parte superior de la mitad izquierda y una carga negativa en la parte inferior?)

PROBLEMAS

Sección 36-2 La ley de inducción de Faraday

1. En cierto lugar en el hemisferio Norte, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de 42 μT y apunta hacia abajo formando 57° con la vertical. Calcule el flujo a través de la superficie horizontal de 2.5 m² de área; véase la figura 31.

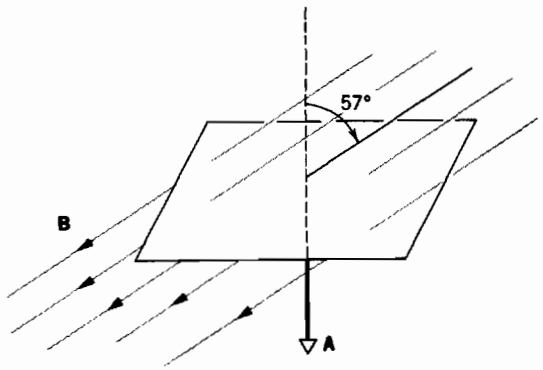


Figura 31 Problema 1.

2. Una antena circular de televisión de UHF (frecuencia ultraalta) tiene un diámetro de 11.2 cm. El campo magnético de una señal de TV es normal al plano de la espira y, en un instante de tiempo, su magnitud está cambiando a razón de 157 mT/s. El campo es uniforme. Halle la fem en la antena.
3. En la figura 32, el flujo magnético a través de la espira mostrada aumenta gradualmente de acuerdo con la relación

$$\Phi_B = 6t^2 + 7t,$$

donde Φ_B está en miliwebers y t está en segundos. (*a*) ¿Cuál es el valor absoluto de la fem inducida en la espira cuando t = 2.0 s? (*b*) ¿Cuál es la dirección de la corriente que pasa por el resistor?

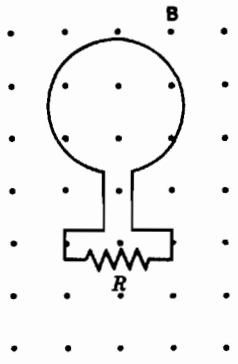


Figura 32 Problemas 3 y 11.

4. El campo magnético a través de una espira de alambre de una vuelta, de 16 cm de radio y 8.5 Ω de resistencia cambia con el tiempo como se muestra en la figura 33. Calcule la fem en la espira en función del tiempo. Considere los intervalos de tiempo (*a*) t = 0 a t = 2 s; (*b*) t = 2 s a t = 4 s; (*c*) t = 4 s a t = 8 s. El campo magnético (uniforme) está en ángulo recto con el plano de la espira.

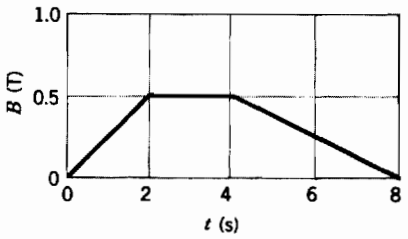


Figura 33 Problema 4.

5. Un campo magnético uniforme es normal al plano de una espira circular de 10.4 cm de diámetro hecha de alambre de cobre (diámetro = 2.50 mm). (*a*) Calcule la resistencia del alambre. (Véase la tabla 1 en el capítulo 32.) (*b*) ¿A qué velocidad debe cambiar con el tiempo el campo magnético si se quiere una corriente inducida de 9.66 A en la espira?
6. Una antena de cuadro de área A y resistencia R es perpendicular a un campo magnético uniforme **B**. El campo cae linealmente a cero en un intervalo de tiempo Δt. Halle una expresión para la energía interna total disipada en la antena.
7. Supongamos que la corriente en el solenoide del problema muestra 1 cambia ahora, no como en ese problema muestra, sino de acuerdo con $i = 3.0t + 1.0t^2$, donde i está en amperes y t está dado en segundos. (*a*) Grafique la fem inducida en la bobina desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s. (*b*) La resistencia de la bobina es de 0.15 Ω. ¿Cuál es la corriente en la bobina en $t = 2.0$ s?
8. En la figura 34, una bobina de 120 vueltas de 1.8 cm de radio y 5.3 Ω de resistencia está situada fuera de un solenoide como el del problema muestra 1. Si la corriente en el solenoide cambia como en el problema muestra, (*a*) ¿qué corriente aparece en la bobina mientras está cambiando la corriente en el solenoide? (*b*) ¿Cómo los electrones de conducción en la bobina "captan el mensaje" del solenoide de que tienen que moverse para establecer una corriente? Al fin y al cabo, el flujo magnético se halla confinado por completo dentro del solenoide.

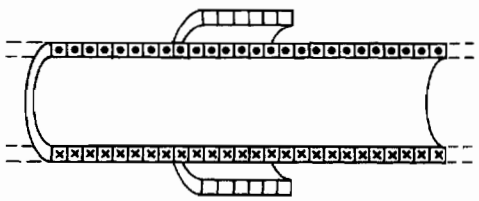


Figura 34 Problema 8.

9. Tenemos un alambre de cobre de 52.5 cm (diámetro = 1.10 mm). Éste tiene la forma de una espira circular y está situado en ángulo recto con un campo magnético uniforme que está aumentando con el tiempo a una velocidad constante de 9.82 mT/s. ¿A qué velocidad se genera la energía interna en la espira?
10. Un anillo cerrado de alambre consta de un par de semicírculos idénticos, de 3.7 cm de radio, que se encuentran en planos mutuamente perpendiculares. Éste se formó doblando un anillo circular a lo largo del diámetro hasta que las dos mitades resultaron perpendiculares. Un campo magnético uniforme **B**, de 76 mT de magnitud, está dirigido perpendicularmente al diámetro del doblez, formando ángulos de 62° y 28° con los planos de los semicírculos, como se muestra en la figura 35. El campo magnético se reduce a cero a una velocidad uniforme durante un intervalo de tiempo de 4.5 ms. Determine la fem inducida.

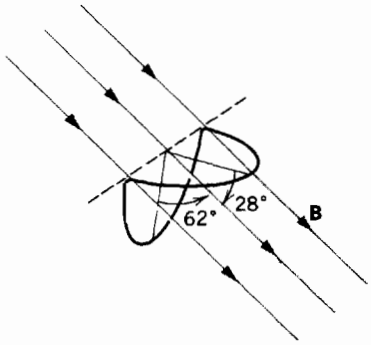


Figura 35 Problema 10.

11. En la figura 32, sea $\Phi_B(0)$ el flujo para la espira en el tiempo $t = 0$. Luego hagamos que el campo magnético **B** varíe de un modo continuo pero no especificado, tanto en magnitud como en dirección, de forma que en el tiempo t el flujo esté representado por $\Phi_B(t)$. (*a*) Demuestre que la carga neta $q(t)$ que ha pasado por el resistor R en el tiempo t es

$$q(t) = \frac{1}{R}[\Phi_B(0) - \Phi_B(t)],$$

independientemente de la manera que haya cambiado **B**. (*b*) Si $\Phi_B(t) = \Phi_B(0)$ en un caso particular tenemos que $q(t) = 0$. ¿Es necesariamente cero la corriente inducida en el intervalo de tiempo de 0 a t?

12. Alrededor de un núcleo cilíndrico de 12.2 cm² de área de su sección transversal están devanadas 125 vueltas de alambre de cobre aislado. Las dos terminales están conectadas a un resistor. La resistencia total en el circuito es de 13.3 Ω. Un campo magnético longitudinal uniforme aplicado externamente en el núcleo cambia de 1.57 T en una dirección a 1.57 T, en dirección opuesta, en 2.88 ms. ¿Cuánta carga fluye por el circuito? (*Sugerencia*: Véase el problema 11.)
13. Un campo magnético uniforme **B** está cambiando en magnitud a velocidad constante dB/dt. Se tiene una masa m de cobre que va a ser estirada para formar un alambre de radio r el cual formará un anillo circular de radio R. Demuestre que la corriente inducida en el anillo no depende del calibre del alambre o del tamaño del anillo y, suponiendo a **B** perpendicular al anillo, está dada por

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt},$$

donde ρ es la resistividad y δ la densidad del cobre.

14. Una espira cuadrada de alambre con lados de 2.3 m es perpendicular a un campo magnético uniforme, estando la mitad del área de la espira dentro del campo, como se muestra en la figura 36. La espira contiene una batería de 2.0 V con resistencia interna despreciable. Si la magnitud del campo varía con el tiempo de acuerdo con $B = 0.042 - 0.87t$, B expresado en teslas y t en segundos, ¿cuál es la fem total en el circuito?

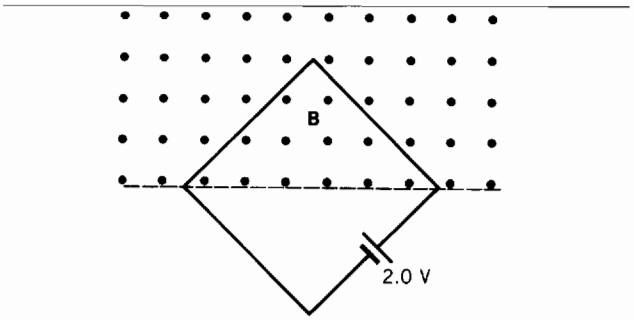


Figura 36 Problema 14.

15. Un alambre está doblado en tres segmentos circulares de radio $r = 10.4$ cm como se muestra en la figura 37. Cada segmento es un cuadrante de un círculo, estando *ab* en el plano *xy*, *bc* en el plano *yz*, y *ca* en el plano *zx*. (*a*) Si un campo magnético uniforme **B** apunta en la dirección *x* positiva, halle la fem generada en el alambre cuando *B* aumenta a razón de 3.32 mT/s. (*b*) ¿Cuál es la dirección de la fem en el segmento *bc*?

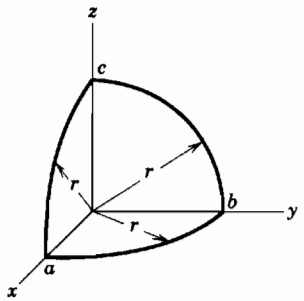


Figura 37 Problema 15.

16. En la situación mostrada en la figura 38, $a = 12$ cm, $b = 16$ cm. La corriente en el alambre recto largo está dada por $i = 4.5t^2 - 10t$, donde *i* está en amperes y *t* en segundos. Halle la fem en la espira cuadrada en $t = 3.0$ s.

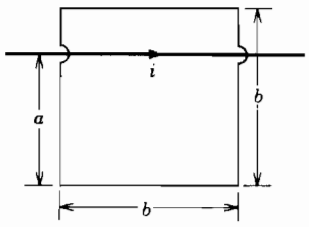


Figura 38 Problema 16.

17. En la figura 39, el cuadrado tiene lados de 2.0 cm de longitud. Un campo magnético apunta hacia afuera de la página; su magnitud está dada por $B = 4t^2y$, donde *B* está en teslas, *t* en segundos y *y* en metros. Determine la fem alrededor del cuadrado en $t = 2.5$ s y dé su dirección.

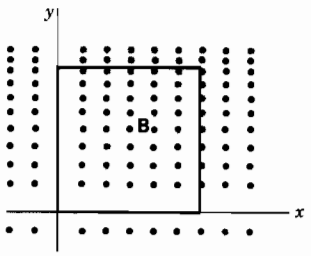


Figura 39 Problema 17.

Sección 36-4 Fem de movimiento o cinética

18. Un automóvil que tiene una antena de radio de 110 cm de largo viaja a 90 km/h en una región donde el campo magnético de la Tierra es de 55 μT. Halle el valor máximo posible de la fem inducida.

19. Una espira circular de 10 cm de diámetro está situada de modo que su normal forma un ángulo de 30° con la dirección de un campo magnético uniforme de 0.50 T. La espira se "bambolea" de modo que su normal gira en un cono con respecto a la dirección del campo a una velocidad constante de 100 rev/min; el ángulo entre la normal y la dirección del campo (= 30°) permanece sin cambio durante el proceso. ¿Qué fem aparece en la espira?

20. La figura 40 muestra una barra conductora de longitud *L* que, tirando de ella, es atraída a lo largo de rieles conductores horizontales, carentes de fricción, a una velocidad constante **v**. Un campo magnético vertical uniforme **B** ocupa la región en que se mueve la barra. Supóngase que $L = 10.8$ cm, $v = 4.86$ m/s y $B = 1.18$ T. (*a*) Halle la fem inducida en la barra. (*b*) Calcule la corriente en la espira conductora. Suponga que la resistencia de la barra sea de 415 mΩ y que la resistencia de los rieles sea despreciablemente pequeña. (*c*) ¿A qué velocidad se está generando la energía interna en la barra? (*d*) Determine la fuerza que debe aplicarse por un agente externo a la barra para mantener su movimiento. (*e*) ¿A qué velocidad esta fuerza realiza trabajo sobre la barra? Compare esta respuesta con la respuesta dada a (*c*).

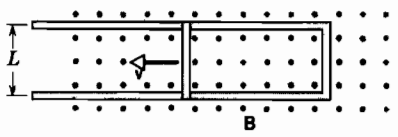


Figura 40 Problema 20.

21. En la figura 41, una barra conductora de masa *m* y longitud *L* se desliza sin fricción sobre dos rieles horizontales largos. Un campo magnético vertical uniforme **B** ocupa la región en que la barra está en libertad de moverse. El generador G suministra una corriente *i* constante que fluye por un riel, atraviesa la barra, y regresa al generador a lo largo del otro riel. Encuentre la velocidad de la barra en función del tiempo, suponiendo que esté en reposo en $t = 0$.

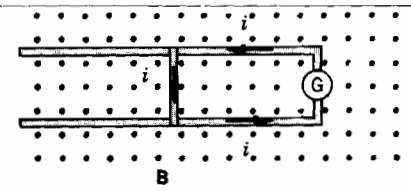


Figura 41 Problemas 21 y 22.

22. En el problema 21 (véase la Fig. 41) el generador G de corriente constante se reemplaza por una batería que suministra una fem constante $\mathcal{E}$. (*a*) Demuestre que la velocidad de la barra tiende ahora a un valor terminal constante v y dé su magnitud y dirección. (*b*) ¿Cuál es la corriente en la barra cuando se alcanza esta velocidad terminal? (*c*) Analice esta situación así como el caso del problema 21 desde el punto de vista de las transferencias de energía.

23. Una espira circular hecha de un material elástico conductor estirado tiene un radio de 1.23 m. Está situada con su plano en ángulo recto con un campo magnético uniforme de 785 mT. Cuando se suelta, el radio de la espira comienza a disminuir a una velocidad instantánea de 7.50 cm/s. Calcule la fem inducida en la espira en ese instante.

24. La figura 42 muestra dos anillos paralelos de alambre que tienen un eje común. El anillo más pequeño (de radio r) está arriba del anillo más grande (de radio R) a una distancia $x \gg R$. Por consiguiente, la magnitud del campo magnético debido a la corriente i en el anillo más grande es casi constante en todo el anillo más pequeño e igual al valor en el eje. Suponga que x está creciendo a una velocidad constante $dx/dt = v$. (*a*) Determine el flujo magnético a través del área limitada por el anillo más pequeño en función de x. (*b*) Calcule la fem generada en el anillo más pequeño. (*c*) Determine la dirección de la corriente inducida que fluye en el anillo más pequeño.

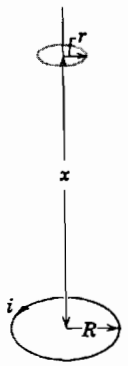


Figura 42 Problema 24.

25. Una pequeña barra imantada se jala rápidamente a través de un anillo conductor, a lo largo de su eje. Trace cualitativamente (*a*) la corriente inducida y (*b*) la velocidad de la generación de energía interna en función de la posición del centro del imán. Suponga que el polo norte del imán entra al anillo primero y que el imán se mueve a velocidad constante. Trace la corriente inducida como positiva si circula siguiendo el movimiento de las manecillas del reloj vista en el sentido de la trayectoria del imán.

26. Un alambre rígido doblado en forma de semicírculo de radio a gira con una frecuencia v dentro de un campo magnético uniforme, como se indica en la figura 43. ¿Cuáles son (*a*) la frecuencia y (*b*) la amplitud de la fem inducida en la espira?

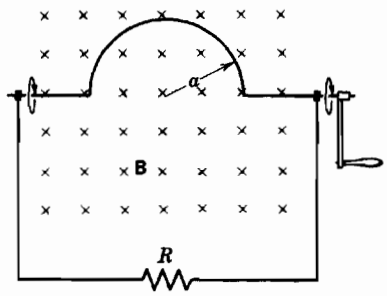


Figura 43 Problema 26.

27. Una espira rectangular de N vueltas de longitud a y anchura b gira con una frecuencia v dentro de un campo magnético uniforme **B**, como en la figura 44. (*a*) Demuestre que en la espira se genera una fem inducida dada por

$$\mathcal{E} = 2\pi vNabB \operatorname{sen} 2\pi vt = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} 2\pi vt$$

Éste es el principio del generador comercial de corriente alterna. (*b*) Diseñe una espira que produciría una fem con $\mathcal{E}_0 = 150$ V al girar a razón de 60 rev/s dentro de un campo magnético de 0.50 T.

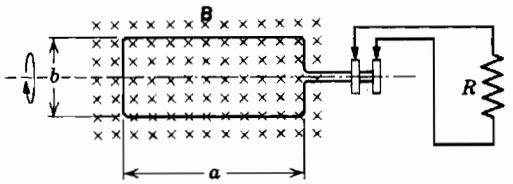


Figura 44 Problema 27.

28. Un alambre conductor de longitud fija L puede ser devanado en N vueltas circulares y usado como la armadura de un generador. Para obtener la máxima fem, ¿cuál valor de N se elegiría?

29. La armadura de un motor tiene 97 vueltas cada una de 190 cm^2 de área y gira dentro de un campo magnético uniforme de 0.33 T. Se aplica una diferencia de potencial de 24 V. Si no está acoplada ninguna carga y si se desprecia la fricción, halle la rapidez de la rotación en el equilibrio.

30. Un generador consta de 100 vueltas de alambre formadas en una bobina rectangular de 50 cm por 30 cm, situada por completo dentro de un campo magnético uniforme de magnitud $B = 3.5$ T. ¿Cuál es el valor máximo de la fem producida cuando se hace girar a la bobina a razón de

1000 revoluciones por minuto alrededor de un eje perpendicular a **B**?

31. En cierto lugar, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de $B = 59\ \mu T$ y está inclinado hacia abajo formando un ángulo de 70° con la horizontal. Una bobina circular horizontal plana de alambre con un radio de 13 cm tiene 950 vueltas y una resistencia total de 85 Ω. Está conectada a un galvanómetro de 140 Ω de resistencia. A la bobina se le da un impulso de media revolución alrededor de un diámetro, de modo que de nuevo esté horizontal. ¿Cuánta carga fluye a través del galvanómetro durante el impulso? (*Sugerencia*: Véase el problema 11.)

32. En el planteamiento del problema muestra 3 considere que $B = 1.2$ T y $R = 5.3$ cm. Si $\mathcal{E} = 1.4$ V, ¿qué aceleración experimentará un punto situado en el extremo de la barra al girar?

33. La figura 45 muestra una barra de longitud L a la que se le obliga a moverse a una velocidad constante v a lo largo de rieles conductores horizontales. En este caso, el campo magnético en que se mueve la barra no es uniforme sino que está provisto por una corriente i en un alambre paralelo largo. Suponga que $v = 4.86$ m/s, $a = 10.2$ mm, $L = 9.83$ cm e $i = 110$ A. (*a*) Calcule la fem inducida en la barra. (*b*) ¿Cuál es la corriente en la espira conductora? Suponga que la resistencia de la barra sea de 415 mΩ y que la resistencia de los rieles es despreciable. (*c*) ¿Con qué velocidad se está generando la energía interna en la barra? (*d*) ¿Qué fuerza debe aplicarse a la barra por un agente externo para mantener su movimiento? (*e*) ¿A qué velocidad este agente externo realiza trabajo sobre la barra? Compare esta respuesta con la de (*c*).

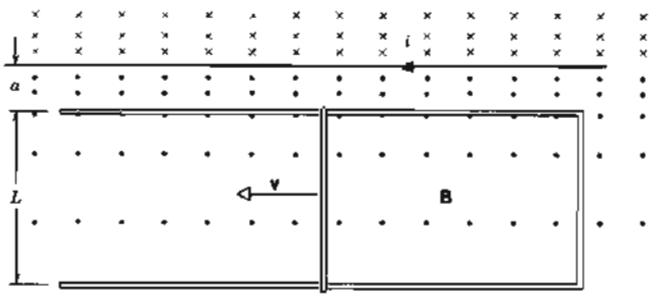


Figura 45 Problema 33.

34. Dos rieles conductores rectos forman un ángulo θ en donde se unen sus extremos. Una barra conductora en contacto con los rieles y formando un triángulo isósceles con ellos arranca en el vértice en el momento $t = 0$ y se mueve a velocidad constante **v** hacia la derecha, como se muestra en la figura 46. Un campo magnético **B** apunta hacia afuera de la página. (*a*) Halle la fem inducida en función del tiempo. (*b*) Si $\theta = 110°$, $B = 352$ mT y $v = 5.21$ m/s, ¿cuándo es la fem inducida igual a 56.8 V?

35. Una espira rectangular de alambre con longitud a, anchura b y resistencia R está situada cerca de un alambre infinitamente largo que conduce una corriente i, como se muestra en la figura 47. La distancia desde el alambre largo a la espira es D. Halle (*a*) la magnitud del flujo magnético a través de la espira y (*b*) la corriente en la espira al moverse alejándose del alambre largo a una rapidez v.

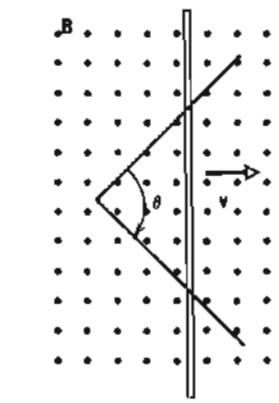


Figura 46 Problema 34.

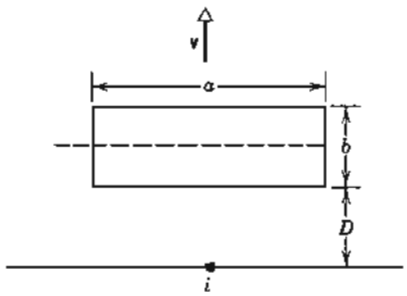


Figura 47 Problema 35.

36. La figura 48 muestra un "generador homopolar", un dispositivo con un disco conductor sólido como rotor. Esta máquina puede producir una fem más grande que otra que use rotores con espiras de alambre, puesto que puede girar a una velocidad angular mucho mayor antes de que las fuerzas centrífugas destruyan al rotor. (*a*) Demuestre que la fem producida está dada por

$$\mathcal{E} = \pi v B R^2$$

donde v es la frecuencia de giro, R el radio del rotor y B el campo magnético uniforme perpendicular al rotor. (*b*) Halle el momento de torsión que debe ser provisto

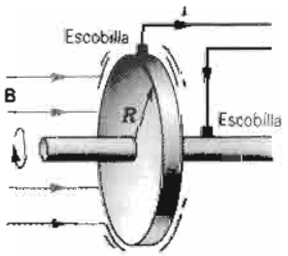


Figura 48 Problema 36.

por el motor al girar el rotor cuando la corriente producida es i.

37. Una barra de longitud L, masa m y resistencia R se desliza sin fricción por rieles conductores paralelos de resistencia despreciable, como en la figura 49. Los rieles están conectados entre sí en el fondo, como se muestra, formando un anillo de conducción con la barra como un miembro superior. El plano de los rieles forma un ángulo θ con la horizontal y en la región existe un campo magnético vertical uniforme **B**. (*a*) Demuestre que la barra adquiere una velocidad terminal de estado estacionario cuya magnitud es

$$v = \frac{mgR}{B^2L^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}.$$

(*b*) Demuestre que la velocidad a la que se genera energía interna en la barra es igual a la velocidad con la que la barra pierde energía potencial gravitatoria. (*c*) Analice la situación si **B** estuviese dirigida hacia abajo en lugar de estar hacia arriba.

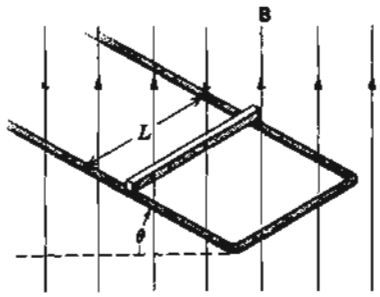


Figura 49 Problema 37.

38. Un alambre cuya área de sección transversal es de 1.2 mm² y cuya resistividad es de $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m está doblado en forma de arco circular de radio $r = 24$ cm, como se muestra en la figura 50. Un tramo recto adicional de este alambre, OP, puede girar libremente alrededor del pivote en O y forma un contacto deslizante con el arco en P. Por último, otro tramo recto de este alambre, OQ, completa el circuito. Todo el sistema está colocado dentro de un campo magnético $B = 0.15$ T dirigido hacia afuera del plano de la figura. El alambre recto OP inicia del reposo para $\theta = 0$ y tiene una aceleración angular constante de 12 rad/s². (*a*) Halle la resistencia de la espira $OPQO$ en función de θ. (*b*) Halle el flujo magnético a través de la espira en función de θ. (*c*) ¿Para qué valor de θ la corriente inducida es máxima en la espira? (*d*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente inducida en la espira?

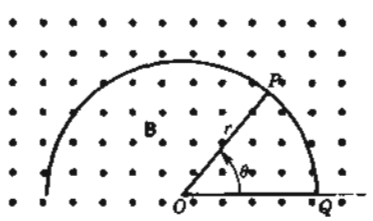


Figura 50 Problema 38.

39. Un freno electromagnético por "corrientes parásitas" consta de un disco de conductividad σ y espesor t que gira alrededor de un eje que pasa por su centro con un campo magnético **B** aplicado perpendicularmente al plano del disco en una pequeña área a^2 (véase la Fig. 51). Si el área a^2 está a una distancia r del eje, halle una expresión aproximada para el momento de torsión que tiende a disminuir la velocidad del disco en el instante en que su velocidad angular es igual a ω.

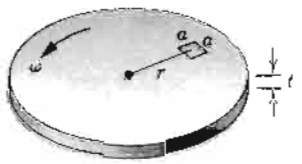


Figura 51 Problema 39.

Sección 36-5 Campos eléctricos inducidos

40. Un solenoide largo tiene un diámetro de 12.6 cm. Cuando pasa una corriente i por sus devanados, se produce en su interior un campo magnético uniforme $B = 28.6$ mT. Al disminuir a i, se causa que el campo disminuya a razón de 6.51 mT/s. Calcule la magnitud del campo eléctrico inducido (*a*) a 2.20 cm y (*b*) a 8.20 cm del eje del solenoide.

41. La figura 52 muestra dos regiones circulares R_1 y R_2 con radios $r_1 = 21.2$ cm y $r_2 = 32.3$ cm, respectivamente. En R existe un campo magnético uniforme de $B_1 = 48.6$ mT hacia adentro de la página y en R_2 existe un campo magnético uniforme de $B_2 = 77.2$ mT hacia afuera de la página (haga caso omiso de cualquier efecto de borde de estos campos). Ambos campos están decreciendo a razón de 8.50 mT/s. Calcule la integral $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ para cada una de las tres trayectorias indicadas.

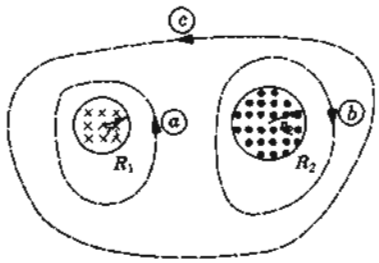


Figura 52 Problema 41.

42. La figura 53 muestra un campo magnético uniforme **B** confinado a un volumen cilíndrico de radio R. **B** está decreciendo en magnitud a una velocidad constante de 10.7 mT/s. ¿Cuál es la aceleración instantánea (dirección y magnitud) experimentada por un electrón situado en a, en b y en c? Suponga que $r = 4.82$ cm. (El efecto de borde

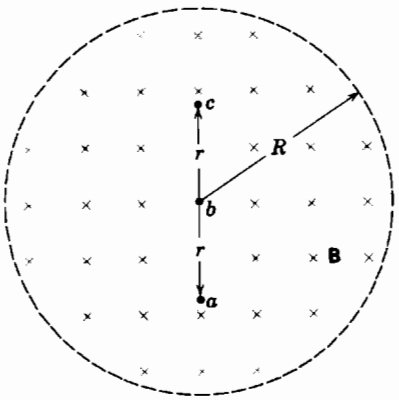


Figura 53 Problema 42.

necesario del campo más allá de R no cambiará su respuesta mientras exista una simetría axial alrededor del eje perpendicular que pasa por b.)

43. Compruebe que el campo eléctrico **E** en un capacitor de placas paralelas cargado no puede caer abruptamente a cero cuando uno se mueve en ángulo recto a él, como se indica por medio de la flecha en la figura 54 (véase el punto a). En los capacitores reales ocurre siempre el efecto de borde de las líneas de fuerza, lo que significa que **E** tiende a cero de una manera gradual y continua; compare con el problema 43, capítulo 35. (*Sugerencia*: Aplique la ley de Faraday a la trayectoria rectangular mostrada por las líneas de trazos.)

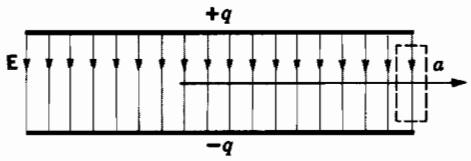


Figura 54 Problema 43.

44. A principios de 1981 el laboratorio Francis Bitter National Magnet del M.I.T. inició la operación de un imán cilíndrico de 3.3 cm de diámetro que produce un campo de 30 T, entonces el campo de estado estacionario más grande del mundo. El campo puede variarse senoidalmente entre los límites de 29.6 T y 30.0 T con una frecuencia de 15 Hz. Cuando se hace esto, ¿cuál es el valor máximo del campo eléctrico inducido a una distancia radial de 1.6 cm del eje? Este imán se describe en *Physics Today*, agosto de 1984.

45. Un campo magnético uniforme **B** ocupa un volumen cilíndrico de radio R. Una barra de metal de longitud L está situada como se muestra en la figura 55. Si B cambia a razón de dB/dt, demuestre que la fem que se produce por el cambio del campo magnético y que actúa entre los extremos de la barra está dada por

$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt}\frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

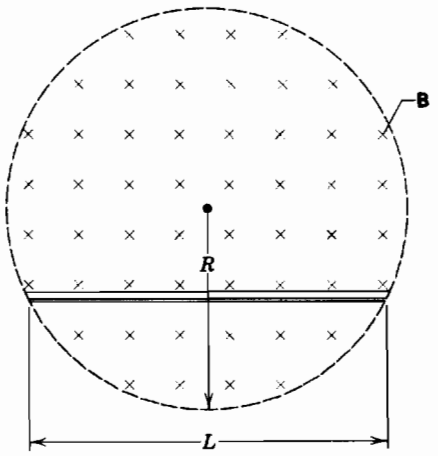


Figura 55 Problema 45.

Sección 36-6 El betatrón

46. La figura 56*a* muestra una vista desde arriba de la órbita del electrón en un betatrón. Los electrones se aceleran en una órbita circular en el plano xy y luego se sacan para chocar con el blanco T. El campo magnético **B** está a lo largo del eje z (el eje positivo z está fuera de la página). El campo magnético B_z a lo largo de este eje varía senoidalmente como se muestra en la figura 56*b*. Recuerde que el campo magnético debe (*i*) guiar a los electrones en su trayectoria circular y (*ii*) generar el campo eléctrico que acelera a los electrones. En la figura 56*b*, ¿qué cuarto(s) de ciclo son adecuados (*a*) de acuerdo con (*i*), (*b*) de acuerdo con (*ii*), y (*c*) para la operación del betatrón?

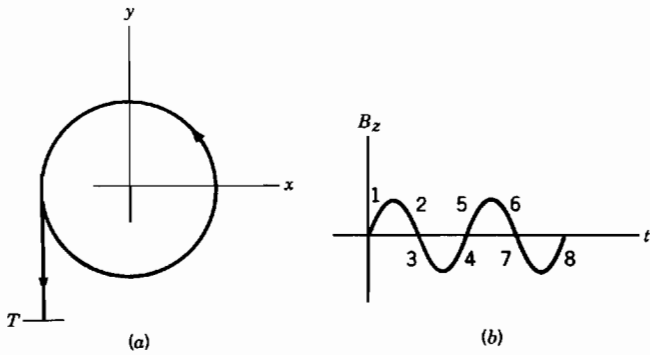


Figura 56 Problema 46.

47. En cierto betatrón, el radio de la órbita del electrón es de 32 cm y el campo magnético en la órbita está dado por $B_{orb} = 0.28 \text{ sen } 120\pi t$, donde t está en segundos y B_{orb} está en teslas. En el betatrón, el valor promedio B_{av} del campo encerrado por la órbita del electrón es igual al doble del valor B_{orb} en la órbita del electrón. (*a*) Calcule el campo eléctrico inducido que sienten los electrones en $t = 0$. (*b*) Halle la aceleración de los electrones en este instante. No considere los efectos relativísticos.

48. Algunas mediciones del campo magnético máximo en función del radio en un betatrón son:

r (cm)	B (tesla)	r (cm)	B (tesla)
0	0.950	81.2	0409
10.2	0.950	83.7	0.400
68.2	0.950	88.9	0.381
73.2	0.528	91.4	0.372
75.2	0.451	93.5	0.360
77.3	0.428	95.5	0.340

Demuestre por medio del análisis gráfico que la relación $B_{av} = 2B_{orb}$ mencionada en el problema 47 como esencial para la operación del betatrón se satisface en el radio de la órbita $R = 84$ cm. (*Sugerencia*: Advierta que

$$B_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R B(r) 2\pi r \, dr$$

y evalúe la integral gráficamente.)

Sección 36-7 La inducción y el movimiento relativo

49. (*a*) Estime θ en la figura 16. Recuerde que $v_d = 4 \times 10^{-2}$ cm/s en un caso típico. Suponga que $v = 15$ cm/s. (*b*) Está claro que θ será pequeño. Sin embargo, ¿debemos tener que $\theta \neq 0$ para que sean válidos los argumentos presentados en relación con esta figura?

CAPÍTULO 37

PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

Los materiales magnéticos desempeñan papeles cada vez más importantes en nuestra vida diaria. En los motores eléctricos y en los generadores, así como también en ciertos tipos de altoparlantes, se emplean comúnmente materiales como el hierro, que son imanes permanentes a temperaturas ordinarias. Otros materiales pueden "imantarse" o "desimantarse" con relativa facilidad; éstos han encontrado un amplio uso para almacenar información en aplicaciones como cintas magnéticas para grabar (usadas en las grabadoras de audio con cinta y en las videocaseteras o VCR), los discos de computadora y en las tarjetas de crédito. Otros materiales son análogos a los dieléctricos en cuanto que adquieren un campo magnético inducido en respuesta a un campo magnético externo; el campo inducido se anula al quitar el campo externo.

En este capítulo consideraremos la estructura interna de los materiales la cual es responsable de sus propiedades magnéticas. Consideraremos una forma magnética de la ley de Gauss, la cual toma en cuenta la evidente inexistencia de polos magnéticos aislados. Demostraremos que el comportamiento de diferentes materiales magnéticos puede entenderse en términos de los momentos dipolares magnéticos de los átomos individuales. Un entendimiento completo de las propiedades magnéticas requiere métodos de la mecánica cuántica que van más allá del nivel de este texto, pero puede obtenerse un entendimiento cualitativo basado en los prinicipios que se estudian en este capítulo.

37-1 LA LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

La figura 1*a* muestra el campo eléctrico asociado a una barra aislante que tiene cantidades iguales de carga positiva y negativa situadas en los extremos opuestos. Éste constituye un ejemplo de dipolo eléctrico. La figura 1*b* muestra el caso análogo de un dipolo magnético, tal como la familiar barra imantada, con un polo norte en un extremo y un polo sur en el otro extremo. En este nivel, los casos eléctrico y magnético son muy similares. (Compare el lector la Fig. 9*b* del capítulo 28 con la Fig. 1 del capítulo 34 para ver otra ilustración de esta semejanza.) De hecho, podríamos ser llevados a postular la existencia de polos magnéticos individuales análogos a las cargas eléctricas; tales polos, si existiesen, producirían campos magnéticos (semejantes a los campos eléctricos producidos por las cargas) proporcionales a la intensidad de los polos e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia

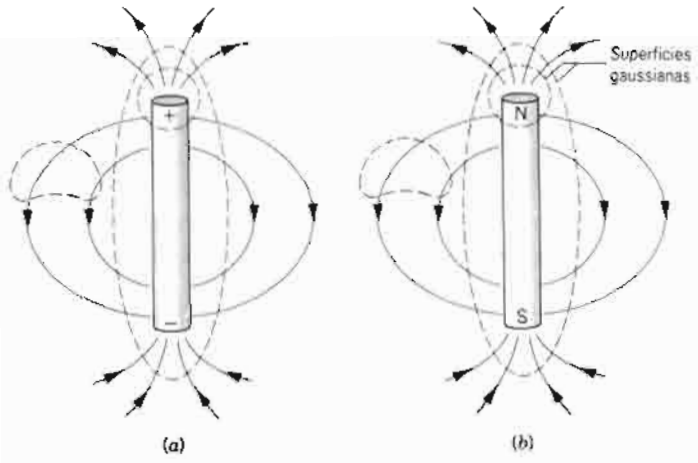


Figura 1 (*a*) Un dipolo eléctrico, que consta de una barra aislante con una carga positiva en un extremo y una carga negativa en el otro. Se muestran varias superficies gaussianas. (*b*) Un dipolo magnético, que consta de una barra imantada con un polo norte en un extremo y un polo sur en el otro.

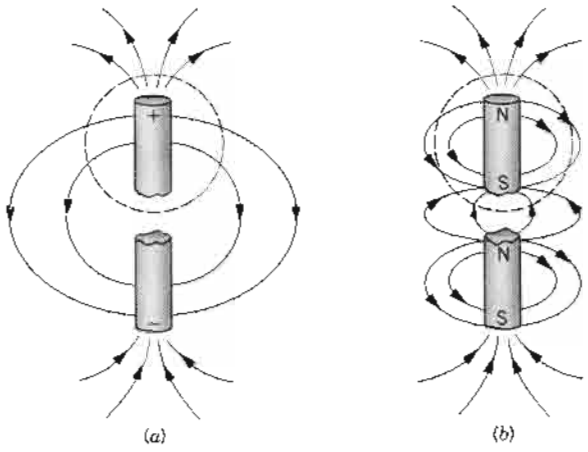


Figura 2 (*a*) Cuando el dipolo eléctrico de la figura 1*a* se corta a la mitad, la carga positiva se aísla en una pieza y la carga negativa en la otra. (*b*) Cuando el dipolo magnético de la figura 1*b* se corta a la mitad, aparece un nuevo par de polos norte y sur. Nótese la diferencia en los patrones del campo.

desde el polo. Como veremos, esta hipótesis no concuerda con el experimento.

Cortemos a la mitad los objetos de la figura 1 y separémoslos en dos piezas. La figura 2 muestra que los casos eléctrico y magnético ya no son semejantes. En el caso eléctrico, tenemos dos objetos que, si se les separa por una distancia suficientemente grande, pudieran considerarse como cargas puntuales de polaridades opuestas, cada una de las cuales produciría un campo característico de una carga puntual. Sin embargo, en el caso magnético no obtenemos polos norte y sur aislados, sino un par de imanes, cada uno de ellos con sus propios polos norte y sur.

Esto es una diferencia importante entre los dipolos eléctricos y magnéticos: el dipolo eléctrico puede separarse en cada una de sus cargas (o "polos") constituyentes, pero el dipolo magnético no. Cada vez que tratamos de dividir a un dipolo magnético en polos norte y sur por separado, creamos un nuevo par de polos. Es un poco parecido a la acción de cortar un tramo de cuerda con dos extremos para tratar de obtener dos trozos de cuerda ¡cada uno de los cuales con sólo un extremo!

Este efecto ocurre microscópicamente, hasta el nivel de cada átomo. Como lo veremos en la sección siguiente, cada átomo se comporta como un dipolo magnético que tiene un polo norte y un polo sur, y hasta donde todavía sabemos, el dipolo, y no el solo polo aislado, parece ser la unidad fundamental más pequeña de la estructura magnética.

Esta diferencia entre los campos eléctrico y magnético tiene una expresión matemática en la forma de la ley de Gauss. En la figura 1*a*, el flujo del campo eléctrico a través de diferentes superficies gaussianas depende de la carga neta encerrada por cada superficie. Si la superficie no encierra ninguna carga, o ninguna carga neta (esto es, cantidades iguales de carga positiva y negativa, como el dipolo completo), el flujo del vector del campo eléctrico a través de la superficie es cero. Si la superficie corta al dipolo, de modo que encierre una carga neta q, el flujo Φ_E del campo eléctrico está dado por la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0. \qquad (1)$$

De manera semejante podemos construir superficies gaussianas para el campo magnético, como en la figura 1*b*. Si la superficie gaussiana no contiene ninguna "carga magnética" neta, el flujo Φ_B del campo magnético que atraviesa la superficie es cero. Sin embargo, como lo hemos visto, aun aquellas superficies gaussianas que cortan a la barra imantada no encierran una carga magnética, porque cada corte a través del imán produce una pieza que tiene tanto un polo norte como un polo sur. La forma magnética de la ley de Gauss se escribe

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \qquad (2)$$

El flujo neto del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es cero.

La figura 3 muestra una representación más detallada de los campos magnéticos de una barra imantada y de un solenoide, ambos de los cuales pueden ser considerados como dipolos magnéticos. Nótese en la figura 3*a* que las líneas de **B** entran a la superficie gaussiana en el interior del imán y salen de ella en el exterior del mismo. El flujo total hacia adentro es igual al flujo total hacia afuera, y el flujo neto Φ_B para la superficie es cero. Lo mismo es cierto para la superficie gaussiana que atraviesa al solenoide mostrado en la figura 3*b*. En ningún caso existe un solo punto del cual se originen las líneas de **B** o al cual converjan; esto es, *no existe ninguna carga magnética aislada.*

Monopolos magnéticos

En el capítulo 29 demostrábamos que la ley de Gauss para los campos eléctricos es equivalente a la ley de Coulomb, la cual se basa en la observación experimental de la fuerza entre cargas puntuales. La ley de Gauss para el magnetismo se basa también en una observación experimental, la falla al observar polos magnéticos aislados, como un polo norte o un polo sur .

La existencia de cargas magnéticas aisladas fue propuesta en 1931 por el físico teórico Paul Dirac sobre la base de argumentos que emplean la mecánica cuántica y la simetría. Dirac llamó a aquellas cargas *monopolos magnéticos* y dedujo algunas propiedades básicas que cabía esperar de ellos, incluyendo la magnitud de la "carga magnética" (análoga a la carga electrónica e). Siguiendo la predicción de Dirac, se hicieron investigaciones de mo-

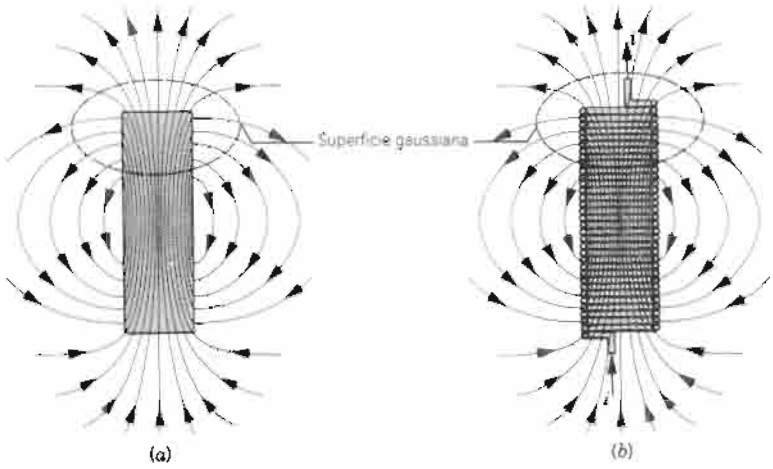


Figura 3 Las líneas de **B** en (*a*) una barra imantada y (*b*) un solenoide corto. En cada caso, el polo norte está en la parte superior de la figura. Las líneas de trazos representan superficies gaussianas.

nopolos magnéticos usando grandes aceleradores de partículas además de examinar muestras de materia terrestre y extraterrestre. Ninguna de estas primeras investigaciones arrojó evidencia alguna de la existencia de los monopolos magnéticos.

Los intentos recientes por unificar las leyes de la física, juntando a las fuerzas fuerte, débil y electromagnética en un solo marco, han vuelto a despertar el interés en los monopolos magnéticos. Estas teorías predicen la existencia de monopolos magnéticos extremadamente masivos, de aproximadamente 10^{16} veces la masa del protón. Es en efecto demasiado masivo para producirlo en cualquier acelerador en la Tierra; de hecho, las únicas condiciones conocidas bajo las cuales podrían obtenerse tales monopolos serían en la caliente y densa materia del universo temprano. La búsqueda de los monopolos magnéticos continúa, pero hasta ahora no se ha obtenido una evidencia convincente de su existencia.* Por el momento, suponemos o bien que los monopolos no existen, de modo que la ecuación 2 es exacta y universalmente válida, o bien que, si existen, son tan excesivamente raros que la ecuación 2 es una aproximación altamente precisa. La ecuación 2 asume, entonces, un papel fundamental como descripción del comportamiento de los campos magnéticos en la naturaleza, y constituye una de las cuatro ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

37-2 MAGNETISMO ATÓMICO Y NUCLEAR

Las diferencias en el comportamiento microscópico entre los campos eléctricos y magnéticos pueden apreciarse mejor observando la estructura atómica y nuclear fundamental que produce los campos. Consideremos el medio dieléctrico mostrado en la figura 13 del capítulo 31. El medio consta de dipolos eléctricos que están alineados dentro de un campo eléctrico externo. Estos dipolos producen un campo eléctrico inducido en el medio. Si cortamos al medio en dos, suponiendo que no cortemos a ninguno de los dipolos, obtenemos dos medios dieléctricos semejantes; cada uno tiene una carga positiva inducida en un extremo y una carga negativa inducida en el otro extremo. Podemos seguir dividiendo al material hasta alcanzar el nivel de un solo átomo o molécula, el o la cual tiene una carga negativa en un extremo y una carga positiva en el otro extremo. Con un corte final podemos dividir y separar las cargas positiva y negativa.

El medio magnético parece comportarse macroscópicamente de modo semejante. La figura 4 representa a un medio magnético como una colección de dipolos magnéticos. Si cortamos al medio en dos sin cortar a ninguno de los dipolos, cada una de las dos mitades tiene un polo norte en un extremo y un polo sur en el otro. Podemos continuar cortando únicamente hasta que lleguemos al nivel de un solo átomo. Aquí descubriremos que el dipolo magnético consta no de dos cargas individuales y opuestas, como en el caso eléctrico, sino más bien es una diminuta espira de corriente, en donde la corriente corresponde, por ejemplo, a la circulación del electrón en el átomo. Del mismo modo que en el caso de los anillos o espiras de corriente considerados en la sección 34-7, la corriente atómica tiene un momento dipolar magnético asociado. No existe manera de dividir a este dipolo en polos separados, de modo que el dipolo es la unidad fundamental más pequeña del magnetismo.

Consideremos un modelo sencillo en el que un electrón se mueve en una órbita circular en un átomo. El momento dipolar magnético μ de esta espira de corriente es, de acuerdo con la ecuación 36 del capítulo 34,

$$\mu = iA, \tag{3}$$

* Véase "Searches for Magnetic Monopoles and Fractional Electric Charges", por Susan B. Felch, *The Physics Teacher*, marzo de 1984, pág. 142. Véase también "Superheavy Magnetic Monopoles", por Richard A. Carrigan, Jr. y W. Peter Trower, *Scientific American*, abril de 1982, pág. 106.

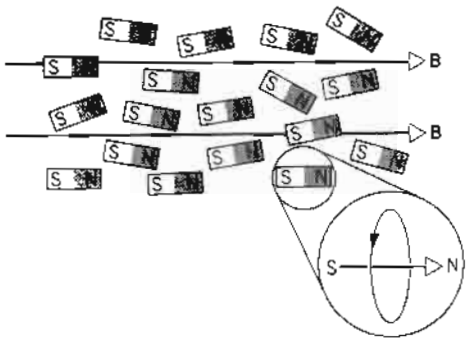


Figura 4 Un material magnético puede considerarse como un conjunto de momentos dipolares magnéticos, cada uno con un polo norte y un polo sur. Microscópicamente, cada dipolo es realmente una espira de corriente que no puede dividirse en polos individuales.

donde i es la corriente efectiva asociada con la circulación del electrón y A es el área encerrada por la órbita. La corriente es justamente la carga e dividida entre el periodo T para una órbita,

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v}, \tag{4}$$

donde r es el radio de la órbita y v es la velocidad tangencial del electrón. El momento magnético puede, entonces, escribirse

$$\mu = iA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)(\pi r^2) = \frac{erv}{2}. \tag{5}$$

En términos del momento angular $l = mvr$, esto es

$$\mu_l = \frac{e}{2m} l. \tag{6}$$

Escribimos esto como μ_l para recordarnos que esta contribución al momento dipolar magnético de un átomo depende del ímpetu angular orbital l.

Generalizamos la ecuación 6 notando que (1) tanto μ como l son vectores, de modo que la ecuación 6 debe escribirse más apropiadamente en forma vectorial, y (2) la circulación de *todos* los electrones de un átomo contribuye al momento dipolar magnético. Por lo tanto, obtenemos

$$\boldsymbol{\mu}_L = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}, \tag{7}$$

donde μ_L es el momento dipolar magnético orbital total del átomo y $\mathbf{L} = \Sigma\, \mathbf{l}_i$ es el ímpetu angular orbital total de todos los electrones del átomo. El signo negativo aparece porque, debido a la carga eléctrica negativa de los electrones, la corriente tiene el sentido opuesto al movimiento electrónico, de modo que el vector del momento magnético está en una dirección opuesta a la del ímpetu angular.

De la mecánica cuántica (véase la sección 13-6) aprendemos que cualquier componente en particular del ímpetu angular $\mathbf{L}$ está *cuantizado* en múltiplos enteros de $h/2\pi$, donde h es la constante de Planck. Esto es, el ímpetu angular orbital puede tener valores de $h/2\pi$, $2(h/2\pi)$, $3(h/2\pi)$, y así sucesivamente, pero nunca, por ejemplo, de $1.8(h/2\pi)$ o $4.2(h/2\pi)$. Se obtiene una unidad natural en que podemos medir los momentos dipolares magnéticos atómicos, llamada el *magnetón de Bohr* μ_B, haciendo que L tenga la magnitud $h/2\pi$ en la ecuación 7, en cuyo caso el momento magnético tiene el valor de un magnetón de Bohr μ_B, o sea

$$\mu_B = \frac{e}{2m}\frac{h}{2\pi} = \frac{eh}{4\pi m}. \tag{8}$$

Al sustituir los valores apropiados para la carga y la masa del electrón en la ecuación 8, hallamos

$$\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T}.$$

Los momentos magnéticos asociados con el movimiento orbital de los electrones en los átomos tienen, por lo general, magnitudes del orden de μ_B.

Momentos magnéticos intrínsecos

Los experimentos llevados a cabo en la segunda década de este siglo haciendo pasar haces de átomos a través de campos magnéticos, demostraron que el modelo de la estructura dipolar magnética del átomo explicado anteriormente no era suficiente para explicar las propiedades observadas; fue necesario introducir otra clase de momento magnético para el electrón, llamado *momento magnético intrínseco* μ_s.

Un ímpetu angular intrínseco s se encuentra asociado a este momento magnético intrínseco, por analogía con la ecuación 6. La relación vectorial entre el momento magnético intrínseco y el ímpetu angular intrínseco puede escribirse

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{s}. \tag{9}$$

TABLA 1 ESPINES Y MOMENTOS MAGNÉTICOS DE ALGUNAS PARTÍCULAS

Partícula	s (unidades de $h/2\pi$)	μ_s (unidades de μ_B)
Electrón	$\frac{1}{2}$	-1.001 159 652 193
Protón	$\frac{1}{2}$	+0.001 521 032 202
Neutrón	$\frac{1}{2}$	-0.001 041 875 63
Deuterón (^{2}H)	1	+0.000 466 975 448
Alfa	0	0
Fotón	1	0

Para un electrón, la componente del ímpetu angular intrínseco **s** para cualquier eje elegido, la predice la teoría cuántica y queda confirmado mediante experimentación que tiene el valor de $\frac{1}{2}(h/2\pi)$,* como se ilustró en la figura 19 del capítulo 13. A veces, es conveniente imaginar al momento magnético intrínseco considerando que el electrón es una bola de carga, que gira sobre su eje. (De aquí que el ímpetu angular intrínseco *s* sea también conocido como "espín".)† Sin embargo, esta interpretación no es estrictamente correcta porque, hasta donde sabemos, el electrón es una partícula puntual con un radio de cero.

Por analogía con la ecuación 7, podemos definir que el vector μ_s del momento dipolar magnético intrínseco *total* de un átomo es

$$\boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{m}\mathbf{S}, \tag{10}$$

donde $\mathbf{S} = \Sigma\, \mathbf{s}_i$ es el espín total de los electrones en el átomo.

El ímpetu angular orbital y el momento dipolar magnético orbital de un electrón *individual* son propiedades de su estado de movimiento en particular. El ímpetu angular intrínseco (espín) y el momento dipolar magnético intrínseco de un solo electrón son características fundamentales del electrón mismo, junto con su masa y su carga eléctrica. De hecho, cada partícula elemental tiene un cierto ímpetu angular intrínseco y un momento dipolar magnético intrínseco correspondiente. La tabla 1 da algunos ejemplos de estos valores. Nótese la increíble precisión de estos valores medidos, para los que la incertidumbre se encuentra en los últimos uno o dos dígitos. Los valores para el neutrón y el protón tienen precisiones respectivas de 1 parte en 10^7 y 10^8, mientras que para el electrón tiene una precisión de 1 parte en 10^{11}, ¡lo que la convierte en la medición más precisa que jamás se haya realizado!

Las propiedades magnéticas de un material se determinan por el momento dipolar magnético total de sus átomos, obtenido de la suma vectorial de la parte orbital, ecuación 7, y la parte del espín, ecuación 10. En un átomo complejo que contenga muchos electrones, las sumas necesarias para determinar **L** y **S** pueden ser muy complicadas. Sin embargo, en muchos casos los electrones se acoplan en pares de modo que la **L** y la **S** totales son cero. Los materiales hechos de estos átomos son virtualmente no magnéticos, excepto por un efecto inducido muy débil llamado *diamagnetismo*, el cual consideraremos en la sección 37-4. En otros átomos, ya sea **L** o **S** (o ambos) pueden ser distintos de cero; estos átomos son responsables del campo magnético inducido en ciertos materiales y que es análogo al campo *eléctrico* inducido en un material dieléctrico. Tales materiales se llaman *paramagnéticos*. El tipo de magnetismo más familiar es el *ferromagnetismo*, en el que, debido a las interacciones entre los átomos, los efectos magnéticos persisten en el material incluso cuando el campo magnético externo se suprime. En la sección 37-4 veremos cómo nuestro sencillo modelo atómico del magnetismo nos ayuda igualmente a entender el comportamiento ferromagnético.

Magnetismo nuclear

El núcleo, que está compuesto de protones y neutrones en un movimiento orbital bajo la influencia de sus fuerzas mutuas, tiene un momento magnético con dos partes: una parte orbital, debida al movimiento de los protones (los neutrones, por no tener carga, no contribuyen al momento magnético orbital, aunque pueden tener un ímpetu angular orbital), y una parte intrínseca, debida a los momentos magnéticos intrínsecos de los protones y de los neutrones. (Puede parecer sorprendente que el neutrón sin carga tenga un momento magnético intrínseco distinto de cero. Si el neutrón fuese realmente una partícula elemental sin una carga eléctrica, no tendría, en efecto, un momento dipolar magnético. El momento dipolar magnético distinto de cero del neutrón nos da una pista sobre su estructura interna y puede explicarse bastante bien al considerar que el neutrón está compuesto de tres quarks cargados.)

Los núcleos tienen momentos dipolares magnéticos orbital y de espín que pueden expresarse en la forma de las ecuaciones 7 y 10. Sin embargo, la masa que aparece en estas ecuaciones (la masa del electrón) debe ser reemplazada por la masa de un protón o de un neutrón, que es de unas 1800 veces la masa del electrón. Los momentos dipolares magnéticos nucleares típicos son menores que los momentos dipolares atómicos por un factor del orden de 10^{-3}, y su contribución a las propiedades magnéticas de los materiales es generalmente insignificante.

Los efectos del magnetismo nuclear son importantes en el caso de la *resonancia magnética nuclear*, en donde el núcleo está sometido a la radiación electromagnética de una frecuencia precisamente definida, y que corresponde a la necesaria para causar que el momento magnético nuclear cambie de dirección. Podemos alinear los momentos magnéticos nucleares en una muestra de material por medio de un campo magnético estático; la dirección de los dipolos se invierte cuando absorben la radiación electromagnética variable con el tiempo. La absorción de esta radiación puede detectarse fácilmente. Este efecto es la base de la formación de imágenes por resonancia magnética (MRI), una técnica de diagnóstico

* La diferencia evidente de un factor de 2 entre la ecuación 6 y la ecuación 9 surge porque la unidad básica de *s* para el electrón es $\frac{1}{2}(h/2\pi)$, mientras que la unidad básica de *l* es $h/2\pi$. En ambos casos, la unidad fundamental de μ es μ_B. En realidad, la diferencia entre ambas ecuaciones no es de 2 *exactamente*; está predicho para el electrón que es de 2.002 319 304 386, resultado que ha sido verificado experimentalmente hasta 12 cifras decimales.

† Espín toma su nombre del inglés *spin*, giran sobre su propio eje. (N. del T.)

Figura 5 Sección transversal de la cabeza de un ser humano, tomada según las técnicas de la formación de imágenes por resonancia magnética (MRI, magnetic resonance imaging). Muestra detalles que no son visibles por medio de imágenes de rayos X y además no implica riesgo alguno para la salud del paciente.

en que pueden obtenerse imágenes de los órganos del cuerpo usando una radiación mucho menos peligrosa para el organismo humano que los rayos X (Fig. 5).

Problema muestra 1 Un neutrón está dentro de un campo magnético de intensidad $B = 1.5$ T. El espín del neutrón es inicialmente paralelo a la dirección de **B**. ¿Cuánto trabajo externo debe realizarse para invertir la dirección del espín del neutrón?

Solución La energía de la interacción de un dipolo magnético con un campo magnético se obtuvo de la ecuación 38 del capítulo 34, $U = -\mu \cdot \mathbf{B}$. La tabla 1 muestra que el momento magnético del neutrón, al igual que el del electrón, es negativo, lo que significa que, a lo largo de cualquier eje elegido, la componente del vector que representa su momento magnético de espín se opone siempre a aquella que representa su espín. Cuando el espín es paralelo al campo, como en el estado inicial de este problema, μ se opone al campo y así la energía inicial U_i es

$$U_i = -\mu \cdot \mathbf{B} = |\mu|B,$$

porque el ángulo entre μ y **B** es 180°. Escribimos esto en términos de la magnitud de μ puesto que ya hemos tomado en cuenta a su signo en el producto punto. Cuando el espín cambia de dirección (lo cual se llama "sacudida del espín"), el momento magnético resulta ser *paralelo* a **B**, y la energía final es

$$U_f = -\mu \cdot \mathbf{B} = -|\mu|B.$$

El trabajo externo efectuado sobre el sistema es igual al cambio en la energía, o sea

$$\begin{aligned} W &= U_f - U_i = -|\mu|B - |\mu|B = -2|\mu|B \\ &= -2(0.00104\,\mu_B)[(9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})/\mu_B](1.5\ \text{T}) \\ &= -2.9 \times 10^{-26}\ \text{J} = -0.18\ \mu\text{eV}. \end{aligned}$$

Puesto que el entorno efectúa un trabajo *negativo* sobre el sistema, el sistema efectúa un trabajo *positivo* sobre su entorno. Esta energía podría transmitirse al entorno en forma de radiación electromagnética, la cual estaría en la región de radio-frecuencia del espectro y tendría una frecuencia de 44 MHz, ligeramente abajo de la región de sintonización de un aparato de radio de FM.

37-3 MAGNETIZACIÓN

En el capítulo 31 consideramos el efecto de llenar el espacio entre las placas de un capacitor con un medio dieléctrico, y hallamos que al insertar al dieléctrico manteniendo constante la carga sobre las placas se reducía el campo eléctrico entre las placas. Esto es, si $\mathbf{E}_0$ es el campo eléctrico sin el dieléctrico, entonces el campo **E** con el dieléctrico está dado por la ecuación 35 del capítulo 31, lo cual escribimos en forma vectorial como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\kappa_e. \tag{11}$$

El efecto del dieléctrico se caracteriza por la constante dieléctrica κ_e.

Consideremos en su lugar un medio magnético compuesto de átomos que tienen momentos dipolares magnéticos μ_i. Estos dipolos apuntan generalmente en varias direcciones en el espacio. Calculemos el momento dipolar neto μ de un volumen V del material tomando la suma *vectorial* de todos los dipolos en ese volumen: $\mu = \Sigma\mu_i$. Definimos entonces que la *magnetización* **M** del medio es el momento dipolar neto por unidad de volumen, o sea

$$\mathbf{M} = \frac{\mu}{V} = \frac{\Sigma\mu_i}{V}. \tag{12}$$

Para que la magnetización sea considerada una cantidad microscópica, la ecuación 12 debería escribirse como el límite cuando el volumen tiende a cero. Esto nos permite considerar que un material tiene una magnetización *uniforme*.

Supongamos que tal material está situado dentro de un campo uniforme $\mathbf{B}_0$. Este campo aplicado "magnetiza" al material y alinea los dipolos. Los dipolos alineados producen un campo magnético propio, en analogía con el campo *eléctrico* producido por los dipolos eléctricos en un medio dieléctrico (véase la sección 31-6). En cualquier punto en el espacio, el campo magnético neto **B** es la suma

del campo aplicado $\mathbf{B}_0$ y el producido por los dipolos, al cual llamaremos $\mathbf{B}_M$, así que

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M. \tag{13}$$

El campo $\mathbf{B}_M$ puede incluir contribuciones de los dipolos permanentes en los materiales paramagnéticos (análogos a los dieléctricos polares) y de los dipolos inducidos en todos los materiales (como en los dieléctricos no polares).

El campo de magnetización $\mathbf{B}_M$ está relacionado con la magnetización $\mathbf{M}$, la cual (como se definió en la Ec. 12) está también determinada por los dipolos en el material. En campos débiles, $\mathbf{M}$ es proporcional al campo aplicado $\mathbf{B}_0$. Sin embargo, $\mathbf{B}_M$ es, en general, difícil de calcular a no ser que la magnetización sea uniforme y la geometría tenga un alto grado de simetría. Como ejemplo de tal caso, consideremos un solenoide (ideal) largo de sección transversal circular lleno de un material magnético (Fig. 6). En este caso, el campo aplicado es uniforme en todo el interior; tanto $\mathbf{B}_0$ como $\mathbf{M}$ son paralelos al eje, y puede demostrarse que $\mathbf{B}_M = \mu_0\mathbf{M}$ en el interior del solenoide. (El lector debe comprobar las dimensiones y demostrar que $\mu_0\mathbf{M}$ tiene las mismas dimensiones que $\mathbf{B}$.)

Entonces, podemos escribir el campo neto como

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0\mathbf{M} \tag{14}$$

como se ilustra en la figura 6*b*. En campos débiles, $\mathbf{M}$ aumenta linealmente con el campo aplicado $\mathbf{B}_0$, por lo cual $\mathbf{B}$ debe ser proporcional a $\mathbf{B}_0$. En este caso, podemos escribir

$$\mathbf{B} = \kappa_m\mathbf{B}_0, \tag{15}$$

donde κ_m es la *constante de permeabilidad* del material, la cual se define relativa al vacío, para el cual $\kappa_m = 1$. Las constantes de permeabilidad de los materiales más comunes (exceptuando los ferroimanes) tienen valores muy cercanos a 1, como lo estudiaremos en la sección siguiente. En los materiales distintos a los ferroimanes, la constante de permeabilidad puede depender de propiedades como la temperatura y la densidad del material, pero no del campo $\mathbf{B}_0$. En circunstancias ordinarias, la ecuación 15 describe una relación lineal con el campo neto $\mathbf{B}$ que aumenta linealmente al aumentar el campo aplicado. En cambio, en los ferroimanes podemos considerar que la ecuación 15 define a una κ_m en particular que depende del campo aplicado $\mathbf{B}_0$, de modo que la ecuación 15 ya no es lineal.*

* Existe aquí, como siempre, una analogía entre los campos eléctrico y magnético. Existen materiales dieléctricos, llamados *ferroeléctricos*, en los que la relación entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}_0$ no es lineal, esto es, κ_e depende del campo aplicado $\mathbf{E}_0$. A partir de tales materiales podemos construir dipolos eléctricos cuasipermanentes, llamados *electretos*, que son análogos a los imanes permanentes. La mayoría de los materiales dieléctricos en uso común son lineales, mientras que los materiales magnéticos más comúnmente útiles son no lineales.

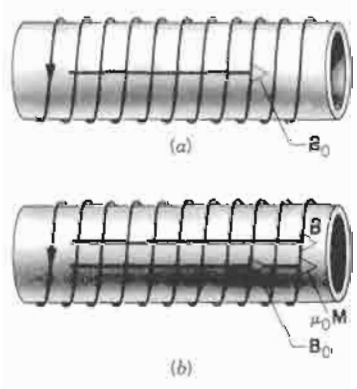


Figura 6 (*a*) En un solenoide vacío, la corriente crea un campo $\mathbf{B}_0$. (*b*) Cuando el solenoide está lleno con un material magnético, el campo total $\mathbf{B}$ incluye las contribuciones $\mathbf{B}_0$ de la corriente y el $\mu_0\mathbf{M}$ del material magnético.

Al combinar las ecuaciones 14 y 15, podemos escribir la magnetización inducida por el campo aplicado como

$$\mu_0\mathbf{M} = (\kappa_m - 1)\mathbf{B}_0. \tag{16}$$

En la mayoría de los materiales que no son ferromagnéticos, la cantidad $\kappa_m - 1$ es típicamente del orden de 10^{-3} a 10^{-6}, y por lo tanto la contribución de la magnetización $\mu_0\mathbf{M}$ al campo total es por lo general mucho menor que $\mathbf{B}_0$. Esto contrasta enormemente con el caso de los campos eléctricos, en donde κ_e tiene valores dentro de un margen de 3 a 100 en los materiales típicos. El campo eléctrico neto se modifica sustancialmente por el medio dieléctrico, mientras que el medio magnético tiene sólo un efecto pequeño sobre el campo magnético en los imanes que no sean ferromagnéticos.

Problema muestra 2 El campo magnético en el interior de cierto solenoide tiene el valor 6.5×10^{-4} T cuando el solenoide está vacío. Cuando está lleno de hierro, el campo es de 1.4 T. (*a*) Encuentre la permeabilidad relativa para estas condiciones. (*b*) Halle el momento magnético promedio de un átomo de hierro en estas condiciones.

Solución (*a*) De la ecuación 15, tenemos (considerando sólo las magnitudes)

$$\kappa_m = \frac{B}{B_0} = \frac{1.4\text{ T}}{6.5 \times 10^{-4}\text{ T}} = 2300.$$

(*b*) Usando la ecuación 14, obtenemos

$$M = \frac{B - B_0}{\mu_0} = \frac{1.4\text{ T} - 6.5 \times 10^{-4}\text{ T}}{4\pi \times 10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A}} = 1.11 \times 10^6\text{ A/m}.$$

Nótese que las unidades de M pueden expresarse también como $\text{A} \cdot \text{m}^2/\text{m}^3$. Esto representa el momento magnético por unidad de volumen del hierro. Para hallar el momento magnético por átomo, necesitamos la densidad n del número de átomos (el número de átomos por unidad de volumen):

$$n = \frac{\text{átomos}}{\text{volumen}} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \frac{\text{átomos}}{\text{masa}}$$
$$= \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \frac{\text{átomos/mol}}{\text{masa/mol}} = \rho \frac{N_A}{m}.$$

Aquí ρ es la densidad del hierro, N_A es la constante de Avogadro, y m es la masa molar del hierro. Al sustituir los valores, obtenemos

$$n = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{0.0559 \text{ kg/mol}}$$
$$= 8.45 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3.$$

El momento magnético promedio por átomo es

$$\mu = \frac{M}{n} = \frac{1.11 \times 10^6 \text{ A/m}}{8.45 \times 10^{28}/\text{m}^3} = 1.31 \times 10^{-23} \text{ J/T} = 1.4\,\mu_B.$$

Este resultado es muy consistente con el que esperamos para un momento magnético atómico. El cálculo sugiere que cada átomo de la muestra de hierro contribuye completamente con su momento dipolar magnético a la magnetización del material, situación que caracteriza a los ferroimanes.

37-4 MATERIALES MAGNÉTICOS

Ahora estamos en posición de entender algunas características de los tres tipos de materiales magnéticos. Como lo veremos, estas clasificaciones dependen, en parte, de los momentos dipolares magnéticos de los átomos del material y en parte de las interacciones entre los átomos.

Paramagnetismo

El paramagnetismo ocurre en materiales cuyos átomos tienen momentos dipolares magnéticos permanentes; no hay diferencia si estos momentos dipolares son del tipo orbital o del tipo de espín.

En la muestra de un material paramagnético que no tenga aplicado un campo, los momentos dipolares atómicos están inicialmente orientados al azar en el espacio (Fig. 7*a*). La magnetización, calculada de acuerdo con la ecuación 12, es cero, porque las direcciones al azar del μ_i provocan que la suma vectorial se anule, del mismo modo que las velocidades dirigidas al azar de las moléculas de una muestra de un gas suman cero para la velocidad del centro de masa de toda la muestra.

Cuando se aplica al material un campo magnético externo (quizás al situarlo dentro de los devanados de un solenoide), el momento de torsión o torca resultante sobre los dipolos tiende a alinearlos con el campo (Fig. 7*b*). La suma vectorial de los momentos dipolares individuales ya no es cero. El campo dentro del material tiene ahora dos componentes: el campo aplicado $\mathbf{B}_0$ y el campo inducido $\mu_0\mathbf{M}$ de la magnetización de los dipolos. Nótese que estos

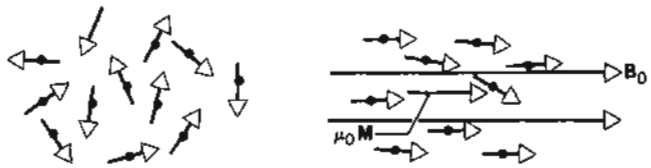


Figura 7 (*a*) En una muestra no magnetizada, los momentos magnéticos atómicos están orientados al azar. (*b*) Cuando se aplica un campo externo $\mathbf{B}_0$, los dipolos giran para alinearse con el campo, y la suma vectorial de los momentos dipolares atómicos da una contribución $\mu_0\mathbf{M}$ al campo en el material.

dos campos son paralelos; los dipolos aumentan el valor del campo aplicado, en oposición al caso eléctrico en el que el campo del dipolo se oponía al campo aplicado y reducía el campo eléctrico total en el material (véase la Fig. 13 del capítulo 31). La razón entre $\mu_0\mathbf{M}$ y $\mathbf{B}_0$ se determina, de acuerdo con la ecuación 16, por $\kappa_m - 1$, la cual es pequeña y positiva en los materiales paramagnéticos. La tabla 2 muestra algunos valores representativos.

El movimiento térmico de los átomos tiende a perturbar el alineamiento de los dipolos, y en consecuencia la magnetización disminuye al aumentar la temperatura. En 1895 Pierre Curie descubrió que la relación entre M y la temperatura T es inversa y se escribe

$$M = C\frac{B_0}{T}, \tag{17}$$

que se conoce como la *ley de Curie*, siendo conocida la constante C como la constante de Curie.

Puesto que la magnetización de una muestra en particular depende de la suma vectorial de sus dipolos magnéticos atómicos, la magnetización alcanza su valor máximo cuando todos los dipolos son paralelos. Si existen N de tales dipolos en el volumen V, el valor máximo de μ es $N\mu_i$, el cual ocurre cuando todos los N dipolos magnéticos μ_i son paralelos. En este caso

$$M_{\text{máx}} = \frac{N}{V}\mu_i. \tag{18}$$

Cuando la magnetización alcanza su valor de *saturación*, los aumentos en el campo aplicado $\mathbf{B}_0$ no tienen ya efecto sobre la magnetización. La ley de Curie, que requiere que M aumente linealmente con B_0, es válida sólo cuando la magnetización está lejos de la saturación, es decir, cuando B_0/T es pequeña. La figura 8 muestra la magnetización medida M como una fracción del valor máximo $M_{\text{máx}}$ en función de B_0/T para varias temperaturas de la sal paramagnética de cromo y aluminio, $CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$. (En esta sal los responsables del paramagnetismo son los iones.) Nótese la tendencia a la saturación, y que la ley de Curie es válida únicamente para valores pequeños de B_0/T

TABLA 2 PERMEABILIDAD RELATIVA DE ALGUNOS MATERIALES PARAMAGNÉTICOS A LA TEMPERATURA AMBIENTE

Material	$\kappa_m - 1$
Gd_2O_3	1.2×10^{-2}
$CuCl_2$	3.5×10^{-4}
Cromo	3.3×10^{-4}
Tungsteno	6.8×10^{-5}
Aluminio	2.2×10^{-5}
Magnesio	1.2×10^{-5}
Oxígeno (1 atm)	1.9×10^{-6}
Aire (1 atm)	3.6×10^{-7}

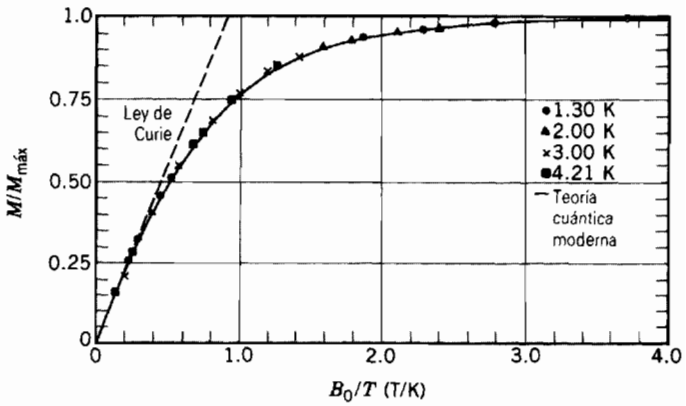


Figura 8 En un material paramagnético, la razón de la magnetización M y su valor de saturación $M_{máx}$ varía según B_0/T.

(correspondientes a campos aplicados pequeños o a temperaturas elevadas). Un tratamiento completo que emplea la mecánica estadística cuántica concuerda excelentemente con los datos.

Cuando el campo magnético externo se suprime de una muestra paramagnética, el movimiento térmico causa que las direcciones de los momentos dipolares magnéticos se distribuyan de nuevo al azar; las fuerzas magnéticas entre los átomos son demasiado débiles para mantener el alineamiento y evitar la distribución al azar. Este efecto puede emplearse para conseguir el enfriamiento en un proceso conocido como *desmagnetización adiabática*. Una muestra se magnetiza a temperatura constante. Los dipolos se mueven en un estado de energía mínima en un alineamiento total o parcial con el campo aplicado y, al hacerlo, deben ceder energía al material circundante. Esta energía fluye como calor al depósito térmico del entorno. Ahora la muestra se aísla térmicamente de su entorno y se desmagnetiza adiabáticamente. Cuando los dipolos se distribuyen al azar, el aumento en su energía magnética debe ser compensado por una disminución correspondiente en la energía interna del sistema (puesto que en un proceso adiabático no puede fluir el calor hacia o desde el sistema aislado); por lo tanto, la temperatura de la muestra debe disminuir. La mínima temperatura que pueda alcanzarse está determinada por el campo residual causado por los dipolos. La desmagnetización de los dipolos magnéticos atómicos puede utilizarse para lograr temperaturas del orden de 0.001 K, mientras que la desmagnetización de los dipolos magnéticos nucleares mucho más pequeños permite que se obtengan temperaturas del orden de 10^{-6} K.

Diamagnetismo

En 1847, Michael Faraday descubrió que una muestra de bismuto era *repelida* por un imán potente. A tales sustancias las llamó diamagnéticas. (Por el contrario, las sustancias paramagnéticas son *atraídas* siempre por un imán.) El diamagnetismo se presenta en todos los materiales. Sin embargo, generalmente es un efecto mucho más débil que el paramagnetismo y, por lo tanto, puede observarse más fácilmente sólo en materiales que no sean paramagnéticos. Tales materiales podrían ser aquellos que tienen momentos dipolares magnéticos atómicos de valor cero, originándose quizás de átomos que tienen varios electrones con sus momentos magnéticos orbital y de espín que al sumarse vectorialmente dan un valor de cero.

El diamagnetismo es análogo al efecto de los campos eléctricos inducidos en la electrostática. Un trozo de material no cargado, como el papel, es atraído hacia una barra cargada de cualquier polaridad. Las moléculas del papel no tienen momentos dipolares eléctricos permanentes pero adquieren momentos dipolares *inducidos* por la acción del campo eléctrico, y estos momentos inducidos pueden entonces ser atraídos por el campo (véase la Fig. 14 del capítulo 31).

En los materiales diamagnéticos, los átomos que no tienen momentos dipolares magnéticos *permanentes* adquieren momentos dipolares *inducidos* cuando están situados dentro de un campo magnético externo. Consideremos que los electrones que giran en un átomo se comporten como espiras de corriente. Cuando se aplica un campo externo $\mathbf{B}_0$, el flujo a través del anillo cambia. Según la ley de Lenz, el movimiento debe cambiar de manera tal que un campo inducido se oponga a este aumento en el flujo. Un cálculo basado en las órbitas circulares (véase el problema 25) demuestra que el cambio en el movimiento se logra con un ligero aumento o disminución de la velocidad del movimiento orbital, de modo que la frecuencia circular asociada con el movimiento orbital cambia según

$$\Delta\omega = \pm\frac{eB_0}{2m}, \tag{19}$$

donde B_0 es la magnitud del campo aplicado y m es la masa del electrón. Este cambio en la frecuencia orbital cambia en efecto el momento magnético orbital de un electrón (véase la Ec. 5 y el problema muestra 4).

Si quisiéramos traer un solo átomo de un material como el bismuto cerca del polo norte de un imán, el campo (que apunta alejándose del polo) tiende a aumentar el flujo a través de la espira de corriente que representa al electrón circulando. De acuerdo con la ley de Lenz, debe haber un campo inducido apuntando en la dirección opuesta (hacia el polo). El polo norte inducido está en el lado de la espira hacia el imán, y los dos polos norte se repelen entre sí.

Este efecto ocurre sin importar cuál sea el sentido de la rotación de la órbita original, de modo que, en un material diamagnético, la magnetización se opone al campo aplicado. La razón de la contribución a la magnetización del campo $\mu_0 M$ al campo aplicado B_0, dado por $\kappa_m - 1$ de acuerdo con la ecuación 16, llega a estar entre -10^{-6} y -10^{-5} para materiales diamagnéticos típicos. La tabla 3 muestra algunos materiales diamagnéticos y sus constantes de permeabilidad.

TABLA 3 PERMEABILIDAD RELATIVA DE ALGUNAS SUSTANCIAS DIAMAGNÉTICAS A LA TEMPERATURA AMBIENTE

Sustancia	$\kappa_m - 1$
Mercurio	-3.2×10^{-5}
Plata	-2.6×10^{-5}
Bismuto	-1.7×10^{-5}
Alcohol etílico	-1.3×10^{-5}
Cobre	-9.7×10^{-6}
Bióxido de carbono (1 atm)	-1.1×10^{-8}
Nitrógeno (1 atm)	-5.4×10^{-9}

Ferromagnetismo

El ferromagnetismo, al igual que el paramagnetismo, se presenta en materiales en los que los átomos tienen momentos dipolares magnéticos permanentes. Lo que distingue a los materiales ferromagnéticos de los materiales paramagnéticos es que, en los materiales ferromagnéticos, existe una fuerte interacción entre los momentos dipolares atómicos vecinos que los mantiene alineados incluso cuando se suprime el campo magnético externo. El que esto ocurra o no depende de la intensidad de los dipolos atómicos y también, puesto que el campo del dipolo cambia con la distancia, de la separación entre los átomos del material. Ciertos átomos podrían ser ferromagnéticos en una clase de material pero no en otra, porque su espaciamiento es diferente. Los materiales ferromagnéticos más comunes a la temperatura ambiente incluyen a los elementos hierro, cobalto y níquel. Los elementos ferromagnéticos menos comunes, alguno de los cuales muestran su ferromagnetismo sólo a temperaturas mucho menores que la temperatura ambiente, son los elementos de las tierras raras, como el gadolinio y el disprosio. También pueden ser ferromagnéticos los compuestos y las aleaciones; por ejemplo, el CrO_2, el ingrediente básico de las cintas magnéticas, es ferromagnético aunque, ninguno de los elementos, cromo u oxígeno, es ferromagnético a temperatura ambiente.

Podemos disminuir la efectividad del acoplamiento entre átomos vecinos que causa el ferromagnetismo al aumentar la temperatura de una sustancia. A la temperatura a la cual un material ferromagnético se vuelve paramagnético se le denomina *temperatura Curie*. La temperatura Curie del hierro, por ejemplo, es de 770°C; arriba de esta temperatura, el hierro es paramagnético. La temperatura Curie del metal gadolinio es de 16°C; a la temperatura ambiente, el gadolinio es paramagnético, mientras que a temperaturas por debajo de los 16°C, el gadolinio se vuelve ferromagnético.

El acrecentamiento del campo aplicado es considerable en los ferroimanes. En un ferroimán, el campo magnético total $\mathbf{B}$ puede ser de 10^3 a 10^4 veces el campo aplicado $\mathbf{B}_0$. La permeabilidad κ_m de un material ferromagnético no es constante; ni el campo $\mathbf{B}$ ni la magnetización $\mathbf{M}$ aumentan linealmente de acuerdo con $\mathbf{B}_0$, aun a valores pequeños de $\mathbf{B}_0$.

Insertemos un material ferromagnético como el hierro dentro del solenoide de la figura 6*b*. Supongamos que inicialmente la corriente es cero y que el hierro no está magnetizado de modo que, inicialmente, tanto B_0 como M son cero. Aumentamos B_0 al aumentar la corriente en el solenoide. La magnetización aumenta rápidamente hacia un valor de saturación, como lo indica en la figura 9 el segmento *ab*. Ahora disminuimos la corriente hasta cero. La magnetización no recupera su trayectoria original, sino que, en cambio, el hierro permanece magnetizado (en el punto *c*) incluso si el campo aplicado B_0 es cero. Si luego invertimos la dirección de la corriente en el solenoide, alcanzamos una magnetización saturada en la dirección opuesta (punto *d*), y al retornar la corriente a cero hallamos que la muestra retiene una magnetización permanente en el punto *e*. Podemos entonces aumentar otra vez la corriente para regresar a la magnetización saturada a su dirección original (punto *b*). La trayectoria *bcdeb* puede seguirse repetidamente.

El comportamiento que se muestra en la figura 9 se llama *histéresis*. En los puntos *c* y *e*, el hierro se magnetiza, aunque no exista corriente en el solenoide. Además, el hierro "recuerda" cómo se magnetizó, y una corriente negativa produce una magnetización diferente a la positiva. Esta "memoria" es esencial en la operación de un

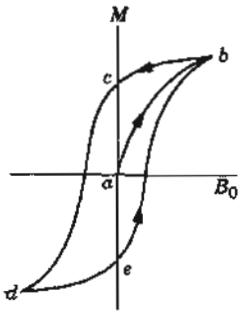


Figura 9 La variación de la magnetización de una muestra de material ferromagnético cuando cambia el campo aplicado. El circuito *bcdeb* se llama *curva de histéresis.*

almacenamiento magnético de información, como en las cintas de los *cassettes* y en los discos de las computadoras.

La forma en la que un ferroimán llega a la saturación ocurre mediante un mecanismo diferente al de un paraimán (el cual describimos por medio de la rotación de dipolos magnéticos individuales para alinearse con el campo aplicado). Un material como el hierro está compuesto de un gran número de cristales microscópicos. Dentro de cada cristal están los *dominios magnéticos*, regiones de apenas 0.01 mm de tamaño en las que el acoplamiento de los dipolos magnéticos atómicos produce en esencia el alineamiento perfecto de todos los átomos. La figura 10 muestra un patrón de dominios en un monocristal de níquel ferromagnético. Existen muchos dominios, cada uno de cuyos dipolos apuntan en una dirección diferente, y el resultado neto de sumar estos momentos dipolares en un ferroimán que no esté magnetizado da una magnetización de cero.

Cuando el ferroimán está situado dentro de un campo externo, pueden ocurrir dos efectos: (1) los dipolos fuera de las paredes de los dominios que están alineados con el campo pueden girar hasta alinearse, permitiendo, en efecto, que tales dominios crezcan a costas de los dominios vecinos; y (2) los dipolos de los dominios no alineados pueden mecerse completamente para alinearse con el campo aplicado. En cualquier caso, hay ahora más dipolos alineados con el campo, y el material tiene una magnetización grande. Cuando se suprime el campo, las paredes del dominio no retornan completamente a sus posiciones anteriores, y el material retiene una magnetización en la dirección del campo aplicado.

Problema muestra 3 Una sustancia paramagnética está constituida de átomos con un momento dipolar magnético de 3.3 μ_B. Está situada en un campo magnético de 5.2 T de intensidad. ¿A qué temperatura debe enfriarse la sustancia para que la energía magnética de cada átomo sea tan grande como la energía cinética media de traslación por átomo?

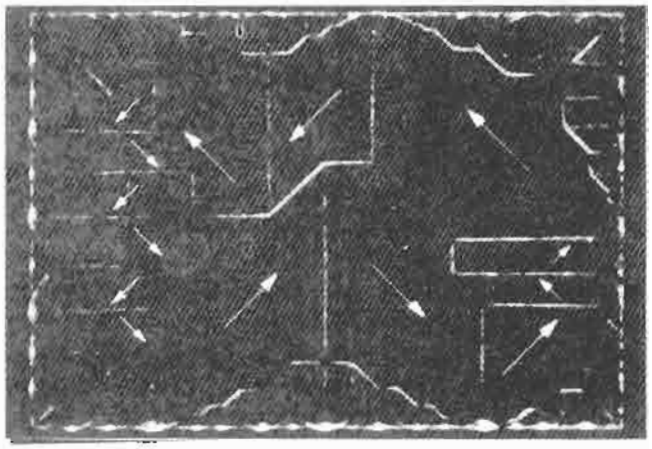


Figura 10 Patrones de dominio en un monocristal de níquel. Las líneas blancas, que muestran las fronteras de los dominios, se producen al esparcir óxido de hierro sobre la superficie. Las flechas ilustran la orientación de los dipolos magnéticos dentro de los dominios.

Solución La energía magnética de un dipolo dentro de un campo externo es $U = -\mu \cdot \mathbf{B}$, y la energía cinética media de traslación por átomo es $(3/2)kT$ (véase la Sec. 23-4). Éstas son de igual magnitud cuando la temperatura es

$$T = \frac{\mu B}{(3/2)k} = \frac{(3.3)(9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(5.2\ \text{T})}{(1.5)(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})} = 7.7\ \text{K}.$$

Problema muestra 4 Calcule el cambio en el momento magnético de un electrón que gira dentro de un campo aplicado B_0 de 2.0 T que actúa perpendicularmente al plano de la órbita. Considere que $r = 5.29 \times 10^{-11}$ m como radio de la órbita, correspondiente al estado normal de un átomo de hidrógeno.

Solución Podemos escribir la ecuación 5 como

$$\mu = \tfrac{1}{2}erv = \tfrac{1}{2}er^2\omega,$$

usando $v = r\omega$. El cambio $\Delta\mu$ en el momento magnético correspondiente a un cambio en la frecuencia angular es, entonces,

$$\Delta\mu = \tfrac{1}{2}er^2\Delta\omega = \tfrac{1}{2}er^2\left(\pm\frac{eB_0}{2m}\right) = \pm\frac{e^2B_0r^2}{4m}$$
$$= \pm\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(2.0\ \text{T})(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})^2}{4(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$
$$= \pm 3.9 \times 10^{-29}\ \text{J/T},$$

donde hemos usado la ecuación 19 para $\Delta\omega$.

Comparado con el valor del momento magnético, $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ J/T, vemos que este efecto alcanza a ser únicamente alrededor de 4×10^{-6} del momento magnético. Esto es consistente con el orden de magnitud esperado para los efectos diamagnéticos (tabla 3).

37-5 EL MAGNETISMO DE LOS PLANETAS *(Opcional)*

Si bien las brújulas magnéticas se habían utilizado desde hacía varios siglos como instrumentos de navegación, la explicación

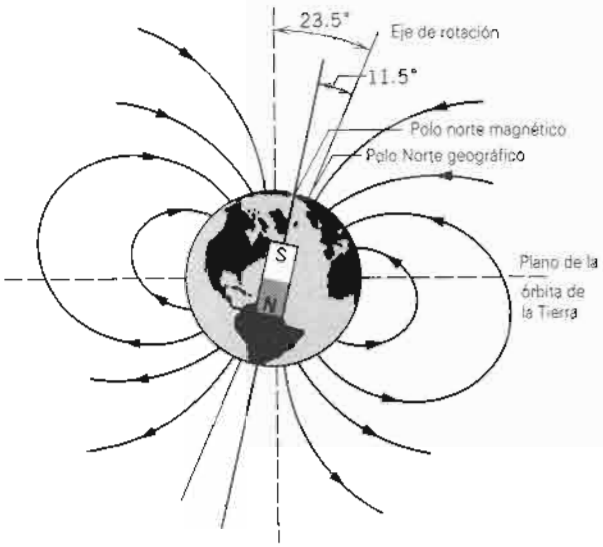


Figura 11 Representación simplificada del campo magnético de la Tierra cerca de su superficie. Observe que el polo norte magnético en realidad es un polo sur del dipolo que representa el campo de la Tierra. El eje magnético se encuentra aproximadamente a la mitad del eje de rotación y la normal al plano de la órbita de la Tierra (línea vertical discontinua).

Figura 12 La espectacular aurora boreal, también conocida como "luces del norte".

de su comportamiento no se comprendió bien sino hasta el año 1600, cuando Sir William Gilbert, más tarde médico de la reina Isabel I, propuso que la Tierra es un enorme imán, con un polo magnético cerca de cada polo geográfico. Otros investigadores que le han ido sucediendo en el curso de la historia han trazado cuidadosamente el campo magnético de la Tierra, y las naves espaciales interplanetarias han estudiado los campos magnéticos de otros planetas.

El campo de la Tierra puede considerarse aproximadamente como el de un dipolo magnético, con momento $\mu = 8.0 \times 10^{22}$ J/T. El campo en la superficie tiene una magnitud que va desde unos 30 μT cerca del Ecuador hasta unos 60 μT cerca de los Polos. (Para un dipolo, esperamos que el campo magnético en el eje sea el doble del campo a la misma distancia a lo largo de la bisectriz; véase la tabla 1 del capítulo 35.) El eje del dipolo forma un ángulo de unos 11.5° con el eje de rotación de la Tierra (que a su vez forma un ángulo de 23.5° con la normal al plano de la órbita de la Tierra con respecto al Sol, como se muestra en la Fig. 11). Lo que comúnmente llamamos el polo norte magnético, el cual se ubica al norte de Canadá, es de hecho el polo sur del dipolo Tierra, como lo hemos definido con la convergencia de las líneas del campo magnético. El polo sur magnético, que se localiza en la Antártida, está representado por el polo norte de un dipolo, porque las líneas de **B** salen de él. Dicho de otra manera, cuando usamos una brújula magnética para indicar la dirección, el extremo de la brújula que apunta hacia el norte es un polo norte verdadero del imán suspendido en la brújula; es atraído hacia un polo sur verdadero, el cual está cerca del polo norte geográfico de la Tierra.

El campo magnético de la Tierra tiene una importancia práctica no solamente en la navegación sino también en el levantamiento topográfico y en las comunicaciones. Por lo tanto ha sido extensamente estudiado durante muchos años, en la superficie midiendo su magnitud y dirección y más arriba de su superficie usando satélites en órbita. Entre sus otros efectos están los cinturones de radiación de Van Allen que rodean a la Tierra (véase la Fig. 15 del capítulo 34) y las llamadas "auroras boreales", el espléndido espectáculo de la aurora* (Fig. 12).

Puesto que encontramos rocas magnetizadas en el suelo, surgiría, quizás, la inclinación a imaginar la existencia de un núcleo de rocas magnetizadas permanentemente como la fuente del campo magnético de la Tierra. Sin embargo, esto no puede ser así, porque la temperatura del núcleo es de varios miles de grados, muy por encima de la temperatura Curie del hierro. Por lo tanto, el hierro que hay en el núcleo de la Tierra no puede ser ferromagnético.

Además, de las mediciones realizadas desde hace unos pocos siglos sabemos que el polo norte magnético se desplaza en relación con el polo norte geográfico, y sabemos por los registros geológicos que los polos se invierten en una escala de tiempo de varios cientos de miles de años. (Además, como lo veremos más adelante, algunos planetas del sistema solar que tienen composiciones similares a la de la Tierra no tienen campo magnético, mientras que otros planetas que ciertamente no contienen material magnético tienen campos muy grandes.) Tales observaciones son difíciles de explicar basándose en la hipótesis de un núcleo permanentemente magnetizado.

La fuente exacta del magnetismo de la Tierra no está del todo comprendida, pero probablemente implica cierta clase de efecto de *dínamo*. La parte exterior del núcleo contiene minerales en estado líquido, que conducen la electricidad fácilmente. Un pequeño campo magnético inicial provoca que fluyan corrientes en este conductor en movimiento, según la ley de la inducción de Faraday. Estas corrientes pueden acrecentar el campo magnético y este campo acrecentado es lo que observamos como el campo de la Tierra. Sin embargo, sabemos por nuestro estudio de la inducción que un conductor que se mueva dentro de un campo magnético experimenta una fuerza de frenado. La fuente de energía necesaria para vencer a la fuerza de frenado y mantener al núcleo en movimiento no ha podido todavía comprenderse.

La Tierra contiene un registro de cambios tanto en la dirección como en la magnitud del campo. Por ejemplo, las muestras

* Véase "The Dynamic Aurora", por Syun-Ichi Akasofu, *Scientific American*, mayo de 1989, pág. 90.

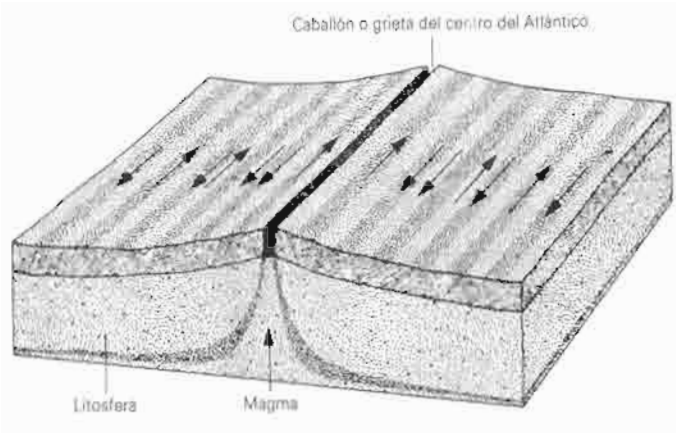


Figura 13 Cuando el material fundido brota a través de un caballón en el fondo del océano y se enfría, conserva un registro de la dirección del campo magnético de la Tierra en ese momento (flechas). Cada segmento podría representar un tiempo de 100,000 a 1,000,000 de años.

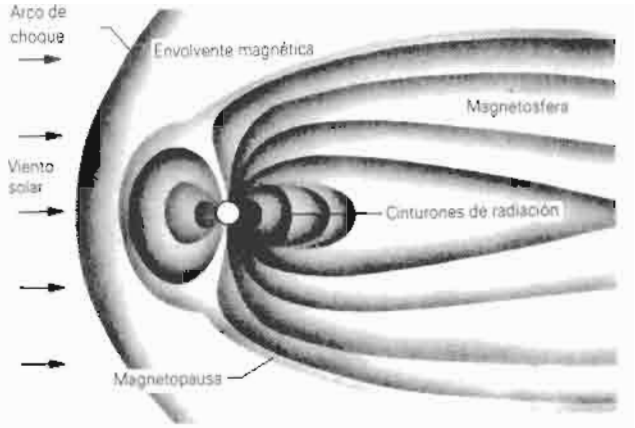


Figura 14 El campo magnético lejos de la superficie de la Tierra muestra la influencia del campo dipolar, así como la del viento solar. La larga cola magnética se extiende a lo largo de varios miles de diámetros terrestres.

de alfarería antigua contienen diminutas partículas de hierro, que resultaron magnetizadas en el campo de la Tierra conforme la alfarería fue enfriándose después de su cocción. De la intensidad de la magnetización de las partículas, podemos deducir la intensidad del campo de la Tierra en el tiempo y lugar de la cocción. Un registro geológico de origen similar se conserva en el fondo oceánico (Fig. 13). Cuando el magma fundido brota de una grieta submarina y se solidifica, las partículas de hierro resultan magnetizadas. La dirección de la magnetización de las partículas muestra la dirección del campo de la Tierra. De los patrones de magnetización podemos deducir que los polos de la Tierra se han invertido con mucha regularidad a lo largo de la historia geológica. Esta inversión ocurre cada 100,000 a 1,000,000 de años y ha sido más frecuente en tiempos recientes. Las razones de estas inversiones y su velocidad creciente no se conocen, pero presumiblemente implican el efecto de dínamo de alguna manera.*

Conforme nos alejamos de la Tierra, su campo disminuye, y comenzamos a observar modificaciones como consecuencia del *viento solar*, una corriente de partículas cargadas que llegan del Sol (Fig. 14). Como resultado, una larga cola asociada al campo de la Tierra se extiende a lo largo de muchos miles de diámetros terrestres. Puesto que el Sol tiene un efecto tan grande sobre el campo magnético de la Tierra, aun a distancias de unos cuantos radios terrestres, puede influir en los fenómenos en los que intervienen el campo de la Tierra, como la comunicación por radio y la aurora.

En los últimos años, las sondas del espacio interplanetario han hecho posible la medición de la dirección y magnitud de los campos magnéticos de los planetas. Estas observaciones apoyan la teoría del mecanismo de dínamo como la fuente de estos campos. La tabla 4 muestra valores de los momentos dipolares magnéticos y los campos magnéticos en la superficie de los planetas.

* Véase "The Evolution of the Earth's Magnetic Field", por Jeremy Bloxham y David Gubbins, *Scientific American*, diciembre de 1989, pág. 68; y "The Source of the Earth's Magnetic Field", por Charles R. Carrigan y David Gubbins, *Scientific American*, febrero de 1979, pág. 118.

TABLA 4 LOS CAMPOS MAGNÉTICOS EN EL SISTEMA SOLAR

Planeta	$\mu(A \cdot m^2)$	*B en la superficie* (μT)
Mercurio	5×10^{19}	0.35
Venus	$< 10^{19}$	< 0.01
Tierra	8.0×10^{22}	30
Marte	$< 2 \times 10^{18}$	< 0.01
Júpiter	1.6×10^{27}	430
Saturno	4.7×10^{25}	20
Urano	4.0×10^{24}	10 a 100
Neptuno	2.2×10^{24}	10 a 100

Venus, cuyo núcleo es similar al de la Tierra, no tiene un campo porque su rotación es demasiado lenta (una cada 244 días terrestres) para sostener el efecto de dínamo. Marte, cuyo periodo de rotación es casi el mismo que el de la Tierra, no tiene un campo porque su núcleo es presumiblemente demasiado pequeño, un hecho deducido de la medición de la densidad media de Marte. Los planetas exteriores (Júpiter y más allá) están compuestos en su mayoría de hidrógeno y helio, los que ordinariamente no se cree que sean magnéticos; sin embargo, a las altas presiones y temperaturas cerca del centro de estos planetas, el hidrógeno y el helio pueden comportarse como los metales, mostrando en particular una gran conductividad eléctrica y permitiendo el efecto de dínamo.

La figura 15 muestra el alineamiento del eje de rotación y del eje del campo magnético de Júpiter y de Urano; compárense con la Tierra que se muestra en la figura 11. Nótese que el eje de rotación de Urano es casi paralelo al plano de su órbita, al contrario de los demás planetas. Nótese también que el eje magnético de Urano está muy desalineado con su eje de rotación y que el dipolo está desplazado del centro del planeta. Una situación similar ocurre en el planeta Neptuno. Desafortunadamente, nuestra información de las observaciones en los planetas se limita a la obtenida de los vuelos espaciales que se llevaron

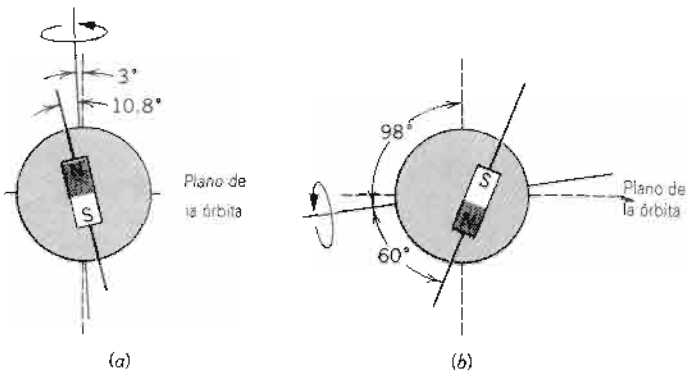


Figura 15 (*a*) El alineamiento del eje dipolar magnético de Júpiter relativo a su eje de rotación y al plano de su órbita. Nótese que, al contrario de la Tierra, el polo norte magnético es un verdadero polo norte del campo dipolar. (*b*) El alineamiento del eje magnético dipolar de Urano.

a cabo en la cercanía del planeta sólo por un día más o menos. Si pudiésemos examinar sus demás propiedades físicas y sus registros geológicos, aprenderíamos muchísimo más acerca del origen del magnetismo de los planetas.* ■

Problema muestra 5 Una medición de la componente horizontal B_h del campo de la Tierra en la ubicación de Tucson, Arizona da un valor de 26 μT. Al suspender un pequeño imán a modo de brújula que pueda oscilar libremente en un plano vertical, es posible medir el ángulo entre la dirección del campo y el plano horizontal, llamado la *inclinación* o el *ángulo de inclinación* ϕ_i. Se ha medido que el ángulo de inclinación en Tucson es de 59°. Halle la magnitud del campo y su componente vertical en esa ubicación.

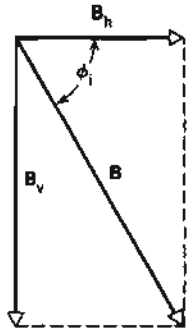


Figura 16 Problema muestra 5. Las componentes horizontal y vertical del campo magnético de la Tierra cerca de Tucson, Arizona. El ángulo ϕ_i es el ángulo de inclinación.

Solución Como lo muestra la figura 16, la magnitud del campo puede encontrarse de

$$B = \frac{B_h}{\cos \phi_i} = \frac{26\ \mu\text{T}}{\cos 59^\circ} = 50\ \mu\text{T}.$$

La componente vertical está dada por

$$B_v = B_h \tan \phi_i = (26\ \mu\text{T})(\tan 59^\circ) = 43\ \mu\text{T}.$$

Como cabía esperar de un campo dipolar (véase la Fig. 11), los valores medidos del ángulo de inclinación varían entre 0° cerca del Ecuador (en realidad, el ecuador *magnético*) y 90° cerca de los polos.

* Véase "Magnetic Fields in the Cosmos", por E. N. Parker, *Scientific American*, agosto de 1983, pág. 44; y "Uranus", por Andrew P. Ingersoll, *Scientific American*, enero de 1987, pág. 38.

PREGUNTAS

1. Dos barras de hierro son idénticas en apariencia. Una es un imán y la otra no. ¿Cómo puede usted distinguirlas? No se le permite suspender a ninguna de las barras como una aguja de brújula o usar cualquier otro aparato.
2. Dos barras de hierro se atraen siempre, sin importar la combinación en que se acerquen sus extremos uno al otro. ¿Puede concluirse que una de las barras no está imantada?
3. ¿En qué modo son iguales o diferentes estos fenómenos? (*a*) Una barra cargada puede atraer pequeños trozos de aisladores sin carga. (*b*) Un imán permanente puede atraer una muestra desmagnetizada de material ferromagnético.
4. ¿Cómo puede determinarse la polaridad de un imán en el que no esté marcada su polaridad?
5. Demuestre que, clásicamente, una carga positiva que gira sobre su eje tendrá un momento magnético de espín que apunta en la misma dirección que el ímpetu angular de su espín.
6. El neutrón, que no tiene carga, tiene un momento dipolar magnético. ¿Es esto posible con base en el electromagnetismo clásico, o esta sola prueba indica que el electromagnetismo clásico falla?
7. ¿Todos los imanes permanentes, deben tener polos norte y sur identificables? Considere otras geometrías diferentes a la barra imantada o al imán de herradura.
8. Considérense estas dos situaciones (*a*) un monopolo magnético (hipotético) se hace pasar por un anillo conductor de una sola espira a lo largo de su eje, a velocidad constante; (*b*) una barra imantada corta (un dipolo magnético), se hace pasar en forma semejante. Compare cualitativamente las cantidades netas de carga transferidas a través

de cualquier sección transversal del anillo durante estos dos procesos. Los experimentos diseñados para detectar posibles monopolos magnéticos se aprovechan de tales diferencias.

9. Se encuentra, mediante una prueba, que cierta barra corta de hierro tiene un polo norte en cada extremo. Sobre la barra se esparcen limaduras de hierro. ¿A dónde (en el caso más sencillo) se adhieren? Dibuje un boceto de cómo se verían las líneas de **B**, tanto dentro como fuera de la barra.

10. Comenzando con **A** y **B** en las posiciones y orientaciones que se muestran en la figura 17, estando **A** fijo pero **B** libre de girar, ¿qué sucede (*a*) si **A** es un dipolo eléctrico y **B** es un dipolo magnético; (*b*) si **A** y **B** son ambos dipolos magnéticos; (*c*) si **A** y **B** son ambos dipolos eléctricos? Responda a las mismas preguntas cuando **B** está fijo y **A** puede girar libremente.

Figura 17 Pregunta 10.

11. Usted es un fabricante de brújulas. (*a*) Describa las maneras con que podría magnetizar las agujas. (*b*) El extremo de la aguja que apunta hacia el norte, por lo general, se pinta de un color característico. Sin suspender la aguja en el campo de la Tierra, ¿cómo podría determinarse qué extremo de la aguja pintar? (*c*) ¿Es el extremo pintado un polo magnético norte o sur?

12. ¿Cabría esperar que la magnetización en la saturación de una sustancia paramagnética sea muy diferente de la de una sustancia ferromagnética saturada del mismo tamaño aproximadamente? ¿Por qué o por qué no?

13. ¿Puede usted explicar el hecho de que los materiales ferromagnéticos se vuelvan puramente paramagnéticos a profundidades mayores de unos 20 km bajo la superficie de la Tierra?

14. Se desea desmagnetizar una muestra de material ferromagnético el cual retiene el magnetismo que adquirió cuando estaba situada en un campo externo. ¿Debe la temperatura de la muestra elevarse hasta la temperatura de fusión para conseguirlo?

15. La magnetización inducida por medio de un campo magnético externo dado de cierta esfera diamagnética no varía con la temperatura, contrariamente, por completo, a la situación en el paramagnetismo. Explique este comportamiento en términos de la descripción que hemos dado del origen del diamagnetismo.

16. Explique por qué un imán atrae a un objeto de hierro como un clavo que no esté magnetizado.

17. ¿Actúa alguna fuerza neta o algún momento de torsión sobre (*a*) una barra de hierro desmagnetizada o (*b*) una barra imantada permanente cuando ésta se coloca dentro de un campo magnético uniforme?

18. Un clavo está situado en reposo sobre una mesa carente de fricción cerca de un imán potente. Se le suelta y es atraído por el imán. ¿Cuál es la fuente de la energía cinética que tiene justo antes de que choque con el imán?

19. Se dice que los superconductores son perfectamente diamagnéticos. Explíquelo.

20. Explique por qué una pequeña barra imantada que está situada verticalmente sobre un tazón hecho de plomo superconductor no necesita fuerzas de contacto para soportarlo.

21. Compare las curvas de magnetización de una sustancia paramagnética (véase la Fig. 8) y de una sustancia ferromagnética (véase la Fig. 9). ¿Cómo se vería una curva similar de una sustancia diamagnética?

22. ¿Por qué se alinean las limaduras de hierro con un campo magnético? Al fin y al cabo, no están intrínsecamente magnetizadas.

23. El campo magnético de la Tierra puede representarse con mucha exactitud por el de un dipolo magnético ubicado en o cerca del centro de la Tierra. Pueden considerarse los polos magnéticos de la Tierra como (*a*) los puntos por donde pasa el eje de este dipolo a través de la superficie de la Tierra o (*b*) los puntos sobre la superficie terrestre en donde una aguja inclinada apuntaría verticalmente. ¿Necesariamente son éstos los mismos puntos?

24. Un "amigo" le pide prestada su brújula favorita y pinta de rojo toda la aguja. Cuando usted lo descubre está perdido en una cueva y tiene consigo dos linternas eléctricas de bolsillo, unos cuantos metros de alambre y (por supuesto) este libro. ¿Cómo descubriría cuál extremo de la aguja de su brújula es el extremo que señala hacia el norte?

25. ¿Cómo podría usted magnetizar una barra de hierro si la Tierra fuese el único imán disponible?

26. ¿Cómo haría usted para blindar determinado volumen del espacio contra los campos magnéticos externos constantes? Si piensa que no puede hacerse, explique por qué.

27. Los rayos cósmicos son partículas cargadas que chocan con nuestra atmósfera partiendo de alguna fuente externa. Hallamos que la mayoría de los rayos cósmicos de baja energía llegan a la Tierra cerca de los polos magnéticos norte y sur más bien que al ecuador (magnético). ¿Por qué es esto?

28. ¿Cómo podría medirse el momento dipolar magnético de la Tierra?

29. Dé tres razones para creer que el flujo Φ_B del campo magnético de la Tierra es mayor en las fronteras de Alaska que en las de Texas.

30. Las auroras se observan con mayor frecuencia no en los polos magnéticos norte y sur sino en las latitudes magnéticas alejadas a unos 23° de estos polos (pasando por la Bahía de Hudson, por ejemplo, en el hemisferio geomagnético norte). ¿Puede usted pensar en alguna razón, cualitativa, de por qué la actividad de las auroras no deba ser más intensa en los polos mismos?

31. ¿Puede pensar en un mecanismo por el cual una tormenta magnética, esto es, una fuerte perturbación del campo magnético de la Tierra, puede interferir con las comunicaciones por radio?

PROBLEMAS

Sección 37-1 La ley de Gauss para el magnetismo

1. El flujo magnético a través de cada una de cinco caras de un dado está dado por $\Phi_B = \pm N$ Wb, donde N (= 1 a 5) es el número de puntos en la cara. El flujo es positivo (hacia afuera) para N par y negativo (hacia adentro) para N impar. ¿Cuál es el flujo a través de la sexta cara del dado?
2. Una superficie gaussiana en forma de un cilindro circular recto tiene un radio de 13 cm y una longitud de 80 cm. A través de un extremo existe un flujo magnético hacia adentro de 25 μWb. En el otro extremo existe un campo magnético uniforme de 1.6 mT, normal a la superficie y dirigido hacia afuera. Calcule el flujo magnético neto a través de la superficie curva.
3. La figura 18 muestra cuatro grupos de pares de pequeñas agujas de brújula, dispuestas en un espacio en que no existe un campo magnético externo. Identifique el equilibrio en cada caso como estable o inestable. Considere para cada par sólo el momento de torsión que actúa sobre una aguja debido al campo magnético creado por la otra. Explique sus respuestas.

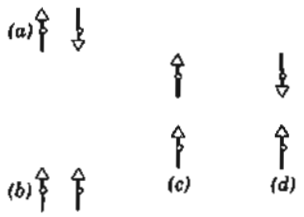


Figura 18 Problema 3.

4. Una barra imantada sencilla pende de un hilo como se muestra en la figura 19. Luego se crea un campo magnético uniforme **B** dirigido horizontalmente. Dibuje la orientación resultante del hilo y del imán.

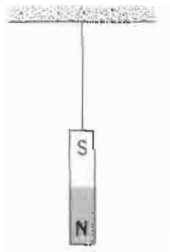


Figura 19 Problema 4.

5. Dos alambres, paralelos al eje z y a una distancia de $4r$ entre sí, conducen corrientes iguales i en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 20. Un cilindro circular de radio r y longitud L tiene su eje sobre el eje z, a la mitad entre los alambres. Aplique la ley de Gauss del magnetismo para calcular el flujo magnético neto hacia afuera a través de la mitad de la superficie cilíndrica que está sobre el eje x. (*Sugerencia*: Determine el flujo a través de aquella porción del plano xz que está dentro del cilindro.)

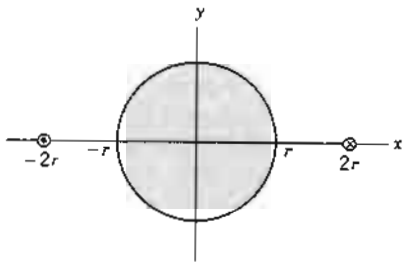


Figura 20 Problema 5.

Sección 37-2 Magnetismo atómico y nuclear

6. Usando los valores del momento angular de espín s y el momento magnético de espín μ_s dados en la tabla 1 para el electrón libre, verifique numéricamente la ecuación 9.
7. En el estado de mínima energía del átomo de hidrógeno, la distancia más probable entre el único electrón y el protón central es de 5.29×10^{-11} m. Calcule (*a*) el campo eléctrico y (*b*) el campo magnético creado por el protón a esta distancia, medido a lo largo del eje de espín del protón. Véase la tabla 1 para el momento magnético del protón.
8. Supóngase que los núcleos (protones) del hidrógeno en 1.50 g de agua pudieran estar perfectamente alineados. Calcule el campo magnético que se produciría a 5.33 m de la muestra a lo largo del eje de alineamiento.
9. Una carga q está distribuida uniformemente alrededor de un anillo delgado de radio r. El anillo está girando alrededor de un eje que atraviesa su centro y perpendicularmente a este plano con una velocidad angular ω. (*a*) Demuestre que el momento magnético debido a la carga en rotación es

$$\mu = \tfrac{1}{2} q\omega r^2.$$

(*b*) Si L es el momento angular del anillo, demuestre que $\mu/L = q/2m$.

10. Suponga que el electrón es una pequeña esfera de radio R, estando distribuida su carga y su masa uniformemente en todo su volumen. Un electrón tal tiene un momento angular de "espín" L y un momento magnético μ. Demuestre que $e/m = 2\mu/L$. ¿Esta predicción está de acuerdo con el experimento? (*Sugerencia*: El electrón esférico debe dividirse en anillos de corriente infinitesimales y debe hallarse por integración una expresión para el momento magnético. Este modelo del electrón es demasiado mecanicista para coincidir con la esencia de la física cuántica.)

Sección 37-3 Magnetización

11. Un imán en forma de barra cilíndrica tiene una longitud de 4.8 cm y un diámetro de 1.1 cm. Tiene una magnetiza-

ción uniforme de 5.3 kA/m. Calcule su momento dipolar magnético.

12. El momento dipolar asociado a un átomo de hierro en una barra de hierro es de 2.22 μ_B. Supóngase que todos los átomos de la barra, que tiene una longitud de 4.86 cm y un área de sección transversal de 1.31 cm^2, tienen sus momentos dipolares alineados. (*a*) ¿Cuál es el momento dipolar de la barra? (*b*) ¿Qué momento de torsión debe ser ejercido para mantener a este imán en ángulo recto con un campo externo de 1.53 T?

13. Un solenoide con 16 vueltas/cm porta una corriente de 1.3 A. (*a*) ¿En cuánto aumenta el campo magnético dentro del solenoide cuando se inserta una barra de cromo perfectamente ajustada? (*b*) Halle la magnetización de la barra. (Véase la tabla 2.)

14. Un electrón con una energía cinética K_e viaja en una trayectoria circular que es perpendicular a un campo magnético uniforme, sometido sólo a la fuerza del campo. (*a*) Demuestre que el momento dipolar magnético debido a su movimiento orbital tiene una magnitud $\mu = K_e/B$ y que está en dirección opuesta a la de **B**. (*b*) ¿Cuál es la magnitud y dirección del momento dipolar magnético de un ión positivo con energía cinética K_i en las mismas circunstancias? (*c*) Un gas ionizado consta de 5.28×10^{21} electrones/m^3 y el mismo número de iones/m^3. Considere que la energía cinética promedio del electrón sea de 6.21×10^{-20} J y que la energía cinética promedio del ion sea de 7.58×10^{-21} J. Calcule la magnetización del gas en un campo magnético de 1.18 T.

Sección 37-4 Materiales magnéticos

15. Se aplica un campo magnético de 0.50 T a un gas paramagnético cuyos átomos tienen un momento dipolar magnético intrínseco de 1.2×10^{-23} J/T. ¿A qué temperatura será igual la energía cinética media de traslación de los átomos del gas a la energía requerida para invertir a tal dipolo extremo por extremo dentro de este campo magnético?

16. Las mediciones en las minas y en los pozos indican que la temperatura de la Tierra aumenta con la profundidad a una razón promedio de 30 C°/km. Suponiendo una temperatura de 20°C en la superficie, ¿a qué profundidad cesará el hierro de ser ferromagnético? (La temperatura Curie del hierro varía muy poco con la presión.)

17. Una muestra de la sal paramagnética para la cual se aplica la curva de magnetización de la figura 8 se mantiene a la temperatura ambiente (300 K). ¿Para qué campo aplicado sería (*a*) el 50% y (*b*) el 90% el grado de saturación magnética de la muestra? (*c*) ¿Se pueden obtener estos campos en el laboratorio?

18. Una muestra de la sal paramagnética para la cual se aplica la curva de magnetización de la figura 8 está inmersa en un campo magnético de 1.8 T. ¿A qué temperatura sería (*a*) el 50% y (*b*) el 90% el grado de saturación magnética de la muestra?

19. La sal paramagnética a la cual se aplica la curva de magnetización de la figura 8 va a comprobarse para ver si cumple con la ley de Curie. La muestra se coloca en un campo magnético de 0.50 T que permanece constante durante el experimento. Luego se mide la magnetización M a temperaturas que varían entre 10 y 300 K. ¿Se determinará que la ley de Curie es válida en estas condiciones?

20. Una sustancia paramagnética es atraída (débilmente) a un polo de un imán. La figura 21 muestra un modelo de este fenómeno. La "sustancia paramagnética" es una espira de corriente L, la cual está situada en el eje de una barra imantada más cerca de su polo norte que de su polo sur. A causa del momento de torsión $= \tau = \mu \times \mathbf{B}$ ejercido sobre la espira por el campo **B** de la barra magnetizada, el momento dipolar magnético μ de la espira se alineará por sí mismo hasta quedar paralelo a **B**. (*a*) Trace un esquema que muestre las líneas del campo **B** debidas a la barra imantada. (*b*) Muestre la dirección de la corriente i en la espira. (*c*) Usando $d\mathbf{F} = i\,d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ demuestre a partir de (*a*) y (*b*) que la fuerza neta sobre L se dirige al polo norte de la barra imantada.

21. Una sustancia diamagnética es repelida (débilmente) por un polo de un imán. La figura 21 muestra un modelo de este fenómeno. La "sustancia diamagnética" es una espira de corriente L que está situada en el eje de una barra magnetizada más cerca de su polo norte que de su polo sur. Puesto que la sustancia es diamagnética el momento magnético μ de la espira se alineará por sí mismo hasta ser antiparalelo al campo **B** de la barra magnetizada. (*a*) Trace un esquema que muestre las líneas del campo **B** debidas a la barra imantada. (*b*) Muestre la dirección de la corriente i en la espira. (*c*) Usando $d\mathbf{F} = i\,d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$, demuestre a partir de (*a*) y (*b*) que la fuerza neta sobre L se aleja del polo norte de la barra imantada.

Figura 21 Problemas 20 y 21.

22. La magnetización a saturación del metal ferromagnético níquel es de 511 kA/m. Calcule el momento magnético de un solo átomo de níquel. (Obtenga del apéndice D los datos necesarios.)

23. El acoplamiento mencionado en la sección 37-4 como responsable del ferromagnetismo *no* es la energía de interacción magnética mutua entre dos dipolos magnéticos elementales. Para demostrarlo, calcule (*a*) el campo magnético a una distancia de 10 nm a lo largo del dipolo a partir de un átomo con un momento dipolar magnético de 1.5×10^{-23} J/T (cobalto) y (*b*) la energía mínima necesaria para hacer girar a un segundo dipolo idéntico extremo por extremo dentro de este campo. Compare con los resultados del problema muestra 3. ¿Qué concluye usted?

24. Considérese un sólido que contenga N átomos por unidad de volumen, teniendo cada átomo un momento dipolar magnético μ. Supóngase que la dirección de μ puede ser sólo paralela o antiparalela a un campo magnético **B** aplicado externamente (éste será el caso cuando μ se debe al espín de un solo electrón). De acuerdo con la mecánica

estadística, puede demostrarse que la probabilidad de que un átomo se encuentre en un estado con energía U es proporcional a $e^{-U/kT}$ en donde T es la temperatura y k es la constante de Boltzmann (distribución de Boltzmann; véase la sección 24-6). Entonces, puesto que $U = -\mu \cdot \mathbf{B}$, la fracción de átomos cuyo momento dipolar es paralelo a $\mathbf{B}$ es proporcional a $e^{\mu B/kT}$ y la fracción de átomos cuyo momento dipolar es antiparalelo a $\mathbf{B}$ es proporcional a $e^{-\mu B/kT}$. (*a*) Demuestre que la magnetización de este sólido es $M = N\mu \tanh(\mu B/kT)$. Aquí tanh es la función tangencial hiperbólica: $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (*b*) Demuestre que (*a*) se reduce a $M = N\mu^2 B/kT$ cuando $\mu B \ll kT$. (*c*) Demuestre que (*a*) se reduce a $M = N\mu$ cuando $\mu B \gg kT$. (*d*) Demuestre que (*b*) y (*c*) concuerdan cualitativamente con la figura 8.

25. Considérese un átomo en el que un electrón se mueva en una órbita circular con radio r y frecuencia angular ω_0. Se aplica un campo magnético perpendicular al plano de la órbita. Como resultado de la fuerza magnética, el electrón circula en una órbita con el mismo radio r pero con una nueva frecuencia angular $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. (*a*) Demuestre que, al aplicar el campo, el cambio en la aceleración centrípeta del electrón es de $2r\omega_0 \Delta\omega$. (*b*) Suponiendo que el cambio en la aceleración centrípeta se deba por completo a la fuerza magnética, deduzca la ecuación 19.

Sección 37-5 El magnetismo de los planetas

26. En el problema muestra 5 se halló que la componente vertical del campo magnético de la Tierra en Tucson, Arizona, es de 43 μT. Suponga que éste es el valor promedio en todo Arizona, territorio que tiene un área de 295,000 kilómetros cuadrados, y calcule el flujo magnético neto a través del resto de la superficie de la Tierra (de toda la superficie excluyendo Arizona). ¿Se dirige el flujo hacia afuera o hacia adentro?

27. La Tierra tiene un momento dipolar magnético de 8.0×10^{22} J/T. (*a*) ¿Qué corriente tendría que establecerse en una sola vuelta de alambre que rodee a la Tierra en su ecuador magnético si quisiéramos crear un dipolo así? (*b*) ¿Podría usarse tal arreglo para cancelar el magnetismo de la Tierra en puntos del espacio muy arriba de la superficie de la Tierra? (*c*) ¿En la superficie de la Tierra?

28. El momento dipolar magnético de la Tierra es de 8.0×10^{22} J/T. (*a*) Si el origen de este magnetismo fuese una esfera de hierro imantada en el centro de la Tierra, ¿cuál sería su radio? (*b*) ¿Qué fracción del volumen de la Tierra ocuparía la esfera? La densidad del núcleo interior de la Tierra es de 14 g/cm^3. El momento dipolar magnético de un átomo de hierro es de 2.1×10^{-23} J/T.

29. El campo magnético de la Tierra puede asemejarse a un campo magnético dipolar, con componentes horizontal y vertical, en un punto a una distancia r del centro de la Tierra, dadas por

$$B_h = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos L_m, \quad B_v = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \operatorname{sen} L_m,$$

donde L_m es la *latitud magnética* (la latitud medida desde el ecuador magnético hacia los polos magnéticos norte o sur). El momento dipolar magnético μ es de 8.0×10^{22} A · m^2. (*a*) Demuestre que la intensidad en la latitud L_m está dada por

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2 L_m}.$$

(*b*) Demuestre que la inclinación ϕ_i del campo magnético se relaciona con la latitud magnética L_m según

$$\tan \phi_i = 2 \tan L_m.$$

30. Use los resultados del problema 29 para predecir el valor (magnitud e inclinación) del campo magnético de la Tierra en (*a*) el ecuador magnético; (*b*) un punto en la latitud magnética de 60°; y (*c*) el polo magnético norte.

31. Halle la altitud sobre la superficie de la Tierra en donde el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de la mitad del valor en la superficie en la misma latitud magnética. (Use la semejanza del campo dipolar dada en el problema 29.)

32. Usando la semejanza con el campo dipolar del campo magnético de la Tierra (véase el problema 29), calcule la intensidad máxima del campo magnético en la frontera entre el núcleo y el manto, la cual se encuentra a 2900 km por debajo de la superficie de la Tierra.

33. Use las propiedades del campo dipolar que se exhiben en el problema 29 para calcular la magnitud y el ángulo de inclinación del campo magnético de la Tierra en el polo norte geográfico. (*Sugerencia*: El ángulo entre el eje magnético y el eje de rotación de la Tierra es de 11.5°.) ¿Por qué los valores calculados probablemente no concuerden con los valores medidos?

CAPÍTULO 38

INDUCTANCIA

El inductor *es un elemento de circuito que almacena energía en el campo magnético que rodea a sus alambres portadores de corriente, del mismo modo que el capacitor almacena energía en el campo eléctrico entre sus placas cargadas. Con anterioridad, hemos usado el capacitor ideal de placas paralelas como una representación conveniente de cualquier capacitor; en este capítulo usaremos similarmente al solenoide ideal para representar a un inductor.*

En el capítulo 31 demostrábamos que el capacitor se caracteriza por el valor de su capacitancia, la cual podemos calcular a partir de la geometría de su construcción y que, entonces, describe el comportamiento del capacitor en un circuito eléctrico. En este capítulo demostraremos que el inductor se caracteriza por su inductancia, *la cual depende de la geometría de su construcción y describe su comportamiento en un circuito.*

Cuando un circuito contiene un inductor y un capacitor, la energía almacenada en el circuito puede oscilar uno al otro entre ellos, al igual que la energía puede oscilar en un oscilador mecánico entre cinética y potencial. Tales circuitos, que se comportan como osciladores electromagnéticos, se analizan al final de este capítulo.

38-1 INDUCTANCIA

La capacitancia se definió en la ecuación 1 del capítulo 31,

$$V_C = \frac{1}{C} q. \tag{1}$$

Esta ecuación que se basa finalmente en la ley de Coulomb, afirma que la diferencia de potencial V_C en un capacitor es proporcional a la carga q almacenada en el capacitor; la constante de proporcionalidad, C^{-1}, da (el recíproco de) la capacitancia. Consideramos las cantidades de la ecuación 1 sólo en cuanto a sus magnitudes; el signo de la diferencia de potencial es tal que la placa con la carga positiva tiene el potencial más elevado.

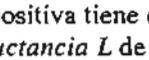
La *inductancia* L de un elemento de circuito (como un solenoide) se define mediante una relación similar,

$$\mathcal{E}_L = L \frac{di}{dt}, \tag{2}$$

en donde todas las cantidades se consideran una vez más sólo como magnitudes. Esta ecuación que, como más tarde demostraremos se basa en la ley de Faraday, afirma que una corriente variable en el tiempo por el inductor genera una fem $\mathcal{E}_L$ a través del inductor, y que la fem $\mathcal{E}_L$ es proporcional a la velocidad de variación de la corriente. La constante de proporcionalidad L da la inductancia. Al igual que la capacitancia C, se considera que la inductancia L es siempre una cantidad positiva.

La ecuación 2 muestra que la unidad de la inductancia en el SI es el volt · segundo/ampere. A esta combinación de unidades se le ha dado el nombre especial de *henry* (abreviado H), de modo que

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ volt} \cdot \text{segundo/ampere}.$$

Esta unidad se llama así en honor de Joseph Henry (1797-1878), físico estadounidense contemporáneo de Faraday. En el diagrama de un circuito eléctrico, el inductor se representa con el símbolo  , el cual tiene forma parecida a la de un solenoide.

Para hallar la relación entre el signo de $\mathcal{E}_L$ y el signo de di/dt, usamos la ley de Lenz. La figura 1 muestra un solenoide ideal en el que se tiene una corriente estacionaria i (quizás por medio de una batería, no ilustrada en la figura). *Disminuyamos* súbitamente la fem (de la batería) en el circuito. La corriente i comienza de inmediato a *disminuir*. Esta disminución de la corriente es el cambio al que, de acuerdo con la ley de Lenz, debe oponerse la

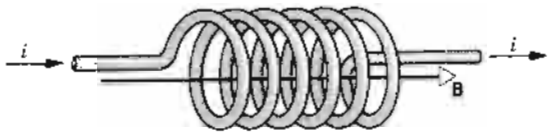


Figura 1 Un inductor arbitrario, representado como un solenoide. La corriente i crea un campo magnético **B**.

inductancia. Para oponerse a la disminución de corriente, la fem inducida debe proporcionar una corriente adicional en la *misma* dirección que i.

Si en cambio *aumentamos* súbitamente la fem (de la batería), la corriente i comienza de inmediato a *aumentar*. Ahora la ley de Lenz demuestra que la inductancia se opone al aumento de la corriente por medio de una corriente adicional en una dirección *opuesta* a i.

En cada caso, la fem inducida actúa oponiéndose al *cambio* en la corriente. La figura 2 resume la relación entre el signo de di/dt y el signo de $\mathcal{E}_L$. En la figura 2*a*, V_b es mayor que V_a, de modo que $V_b - V_a = |L\, di/dt|$. Puesto que i está disminuyendo, di/dt es negativo, de modo que podemos escribirlo como

$$V_b - V_a = -L\, di/dt. \tag{3}$$

En la figura 2*b*, di/dt es positivo y V_a es mayor que V_b, de modo que la ecuación 3 se aplica igualmente en este caso. La ecuación 3 es particulamente útil cuando usamos el teorema del circuito cerrado para analizar circuitos que contengan inductores.

38-2 CÁLCULO DE LA INDUCTANCIA

Hemos calculado la capacitancia de un conductor cargado arbitrariamente (libre de sustancia dieléctrica) usando la ley de Coulomb en la forma de la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico **E** en términos de la carga q almacenada en el capacitor; al escribir la diferencia de potencial como

$$\Delta V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{4}$$

podemos entonces sustituir para **E** y deducir la dependencia de ΔV sobre q, y la ecuación 1 da entonces la capacitancia. Hemos demostrado esta técnica en los ejemplos de la sección 31-2.

Adoptamos una técnica similar para calcular la inductancia. Esta técnica se basa en la ley de Faraday. Primeramente determinamos el campo magnético **B** para la geometría de un inductor en particular (el cual suponemos por ahora que no contiene un material magnético). Esto hace posible obtener el flujo magnético Φ_B a través de

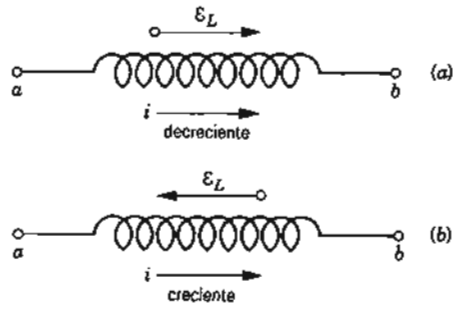


Figura 2 (*a*) Una corriente *decreciente* induce en el inductor una fem que se opone a la disminución en la corriente. (*b*) Una corriente *creciente* induce en el inductor una fem que se opone al aumento.

cada espira de la bobina. Supongamos que el flujo tiene el mismo valor en cada una de las N espiras de la bobina. El producto $N\Phi_B$ se conoce como el número de *eslabones* o *enlaces del flujo* del inductor. La fem puede hallarse a partir de la ley de Faraday

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \tag{5}$$

Las ecuaciones 2 y 5 relacionan a la fem en un inductor con la corriente (Ec. 2) o con una propiedad que es proporcional a la corriente (Φ_B en la Ec. 5). Al comparar las dos ecuaciones (y al considerar la magnitud de todas las cantidades), encontramos

$$L\frac{di}{dt} = \frac{d(N\Phi_B)}{dt}.$$

Al integrar con respecto al tiempo, hallamos

$$Li = N\Phi_B,$$

o sea

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}. \tag{6}$$

La ecuación 6, que se basa en la ley de Faraday, permite hallar la inductancia directamente a partir del número de eslabones o enlaces de flujo. Nótese que, puesto que Φ_B es proporcional a la corriente i, la relación en la ecuación 6 es *independiente* de i y (al igual que la capacitancia) depende sólo de la geometría del dispositivo.

La inductancia de un solenoide

Apliquemos la ecuación 6 para calcular L para una sección de longitud l de un solenoide largo con área de sección transversal A; suponemos que la sección está cerca del centro del solenoide de modo que no necesitan consi-

derarse los efectos de los bordes o extremos. En la sección 35-6 se demostró que el campo magnético B dentro de un solenoide que conduce una corriente i es

$$B = \mu_0 ni, \tag{7}$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud. El número de eslabones (o enlaces) del flujo en la longitud l es

$$N\Phi_B = (nl)(BA),$$

lo cual, después de sustituir a B, nos da

$$N\Phi_B = \mu_0 n^2 liA. \tag{8}$$

La ecuación 6 da entonces la inductancia directamente:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 liA}{i} = \mu_0 n^2 lA. \tag{9}$$

La inductancia por unidad de longitud del solenoide puede escribirse como

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A. \tag{10}$$

Esta expresión contiene sólo factores geométricos —el área de sección transversal y el número de espiras por unidad de longitud. La proporcionalidad con n^2 es la esperada; si duplicamos el número de espiras por unidad de longitud, no sólo se duplica el número N de espiras, sino que el flujo Φ_B a través de *cada espira* se duplica, y el número de eslabones o enlaces del flujo aumenta según un factor de 4, como en el caso de la inductancia.

Las ecuaciones 9 y 10 son válidas para un solenoide de longitud mucho mayor que su radio. Hemos despreciado el esparcimiento de las líneas del campo magnético cerca del extremo de un solenoide, al igual que hemos despreciado el efecto de borde del campo eléctrico cerca de los extremos de las placas de un capacitor.

La inductancia de un toroide

Calcularemos ahora la inductancia de un toroide de sección transversal rectangular, como se muestra en la figura 3. El campo magnético B de un toroide se expresó por la ecuación 23 del capítulo 35,

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi r}, \tag{11}$$

donde N es el número total de espiras en el toroide. Nótese que el campo magnético no es constante dentro del toroide sino que varía con el radio r.

El flujo Φ_B a través de la sección transversal del toroide es

$$\Phi_B = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \int_a^b B(h\,dr) = \int_a^b \frac{\mu_0 iN}{2\pi r} h\,dr$$
$$= \frac{\mu_0 iNh}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iNh}{2\pi}\ln\frac{b}{a},$$

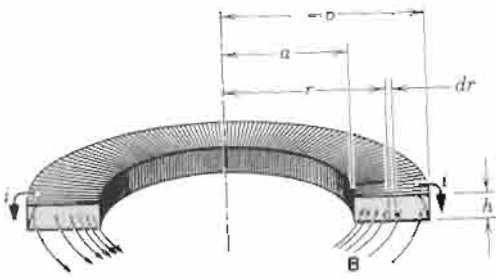


Figura 3 Sección transversal de un toroide, mostrando la corriente en los devanados y el campo magnético en el interior.

donde $h\,dr$ es el área de la laminilla o tira elemental entre las líneas de trazos que se muestran en la figura 3. La inductancia puede entonces determinarse directamente de la ecuación 6:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}. \tag{12}$$

Una vez más, L depende sólo de factores geométricos.

Inductores con materiales magnéticos

En la sección 31-5 hemos demostrado que la capacitancia C de un capacitor lleno con una sustancia dieléctrica aumenta por un factor κ_e, la constante dieléctrica, relativo a la capacitancia C_0 cuando no hay un dieléctrico presente:

$$C = \kappa_e C_0. \tag{13}$$

Nos fue posible convertir las ecuaciones encontradas para los capacitores vacíos para explicar el caso con el dieléctrico reemplazando la constante de permitividad ϵ_0 por el producto $\kappa_e\epsilon_0$.

Cuando un campo magnético $\mathbf{B}_0$ actúa sobre una sustancia, el campo total $\mathbf{B}$ (incluyendo el campo aplicado $\mathbf{B}_0$ más el campo debido a los dipolos del material) puede escribirse

$$\mathbf{B} = \kappa_m \mathbf{B}_0 \tag{14}$$

como lo demostramos en la sección 37-3. Aquí κ_m es la constante de permeabilidad del material. Puesto que el campo aplicado $\mathbf{B}_0$ incluye el factor μ_0, podemos toman en cuenta el efecto del material magnético al reemplazar μ_0 por la cantidad $\kappa_m\mu_0$, en analogía con la sustitución similar que se hizo en el caso de los capacitores que contienen dieléctricos.

En el caso de un inductor, el campo $\mathbf{B}_0$ aparecería en el inductor si no hubiese presente ningún material magnético. El campo $\mathbf{B}$ aparece en el inductor cuando está lleno con material magnético. En la expresión para la inductancia, podemos explicar la presencia de un material magnético que llene al inductor sustituyendo μ_0 por $\kappa_m\mu_0$ o, en analogía con la ecuación 13,

$$L = \kappa_m L_0, \tag{15}$$

donde L es la inductancia con el material magnético presente y L_0 es la inductancia del inductor vacío. Entonces, un solenoide lleno con una sustancia magnética de constante de permeabilidad κ_m tiene una inductancia dada por

$$L = \kappa_m \mu_0 n^2 l A, \tag{16}$$

la cual hallamos al sustituir μ_0 por $\kappa_m \mu_0$ en la ecuación 9.

Ya que las constantes de permeabilidad de las sustancias paramagnéticas o diamagnéticas no difieren sustancialmente de 1, las inductancias de los inductores llenos con tales sustancias son casi iguales a sus valores cuando están vacíos, y no se obtiene un cambio mayor en las propiedades del inductor al llenar el inductor con un material paramagnético o diamagnético. Sin embargo, en el caso de un material ferromagnético, pueden ocurrir cambios sustanciales. Si bien, la constante de permeabilidad no está definida en general para los materiales ferromagnéticos (porque el campo total no aumenta en proporción lineal con el campo aplicado), en circunstancias particulares B puede ser varios miles de veces B_0. Entonces, la constante de permeabilidad "efectiva" de un ferroimán puede tener valores del orden de 10^3 a 10^4, y la inductancia de un inductor lleno con material ferromagnético (esto es, aquel en el que los devanados están sobre un núcleo de un material como el hierro) puede ser mayor que la inductancia de un conjunto similar de devanados sobre un núcleo vacío por un factor de 10^3 a 10^4. Los núcleos ferromagnéticos proporcionan el medio para obtener inductancias grandes, de igual manera que los materiales dieléctricos permiten obtener capacitancias grandes en los capacitores.

Problema muestra 1 Una sección de un solenoide de longitud l = 12 cm y que tiene una sección transversal circular de diámetro d = 1.6 cm conduce una corriente estacionaria de i = 3.80 A. La sección contiene 75 espiras a lo largo de su longitud. (*a*) ¿Cuál es la inductancia del solenoide cuando el núcleo está vacío? (*b*) La corriente se reduce a una velocidad constante de 3.20 A en un tiempo de 15 s. ¿Cuál es la fem resultante desarrollada por el solenoide, y en qué dirección actúa?

Solución (*a*) La inductancia del solenoide se halla a partir de la ecuación 9:

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 n^2 l A \\ &= (4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(75\ \text{vueltas}/0.12\ \text{m})^2(0.12\ \text{m})(\pi)(0.008\ \text{m})^2 \\ &= 1.2 \times 10^{-5}\ \text{H} = 12\ \mu\text{H}. \end{aligned}$$

Nótese que hemos expresado a μ_0 en unidades de H/m. Una inductancia puede expresarse siempre como μ_0 por una cantidad con la dimensión de longitud. Una situación similar prevalece para la capacitancia; véase la sección 31-2.

(*b*) La velocidad en la que cambia la corriente es

$$\frac{di}{dt} = \frac{3.20\ \text{A} - 3.80\ \text{A}}{15\ \text{s}} = -0.040\ \text{A/s},$$

y la fem correspondiente tiene una magnitud dada por la ecuación 2:

$$\mathcal{E}_L = |L\, di/dt| = (12\ \mu\text{H})(0.040\ \text{A/s}) = 0.48\ \mu\text{V}.$$

Puesto que la corriente está disminuyendo, la fem inducida debe actuar en la misma dirección que la corriente, de modo que la fem inducida se opone a las disminuciones en la corriente.

Problema muestra 2 El núcleo del solenoide del problema muestra 1 está lleno con hierro pero la corriente se mantiene constante en 3.20 A. La magnetización del hierro se satura de modo tal que B = 1.4 T. ¿Cuál es la inductancia resultante?

Solución La constante de permeabilidad "efectiva" del núcleo sometido a este campo aplicado en particular se determina a partir de

$$\kappa_m = \frac{B}{B_0} = \frac{B}{\mu_0 n i}$$

$$= \frac{1.4\ \text{T}}{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(75\ \text{vueltas}/0.12\ \text{m})(3.20\ \text{A})} = 557.$$

La inductancia está dada por la ecuación 15 como

$$L = \kappa_m L_0 = (557)(12\ \mu\text{H}) = 6.7\ \text{mH}.$$

38-3 CIRCUITOS *LR*

En la sección 33-7 vimos que si introducimos súbitamente una fem $\mathcal{E}$, quizás usando una batería, en un circuito de una sola malla que contenga un resistor R y un capacitor C, la carga no aumenta inmediatamente a su valor de equilibrio $C\mathcal{E}$ final, sino que tiende a él exponencialmente, como se describió con la ecuación 31 del capítulo 33:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \tag{17}$$

La velocidad a la que crece la carga está determinada por la *constante capacitiva de tiempo* τ_C, definida por

$$\tau_C = RC. \tag{18}$$

Si en este mismo circuito se retira súbitamente la fem $\mathcal{E}$ de la batería cuando el capacitor ha almacenado una carga q_0, la carga no cae a cero inmediatamente sino que tiende a él exponencialmente, como se describe por medio de la ecuación 36 del capítulo 33,

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C}. \tag{19}$$

La misma constante de tiempo τ_C describe la subida y la caída de la carga en el capacitor.

Una elevación (o caída) similar de la corriente ocurre si introducimos súbitamente una fem $\mathcal{E}$ en (o la retiramos de) un circuito de una sola malla que contenga un resistor

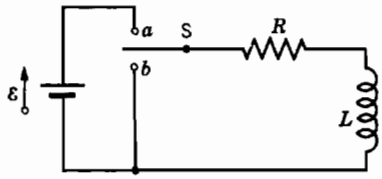


Figura 4 Un circuito *LR*.

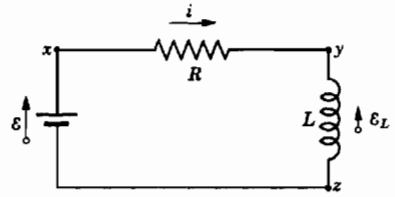


Figura 5 El circuito *LR* de la figura 4 cuando se cierra el interruptor en *a*.

R y un inductor *L*. Cuando el interruptor S en la figura 4 se cierra sobre *a*, la corriente del resistor comienza a elevarse. Si el inductor no estuviese presente, la corriente se elevaría rápidamente hasta un valor estacionario $\mathcal{E}/R$. Sin embargo, a causa del inductor aparece una fem inducida $\mathcal{E}_L$ en el circuito y, según la ley de Lenz, esta fem se opone a la *elevación* de la corriente, lo que significa que se opone a la fem $\mathcal{E}$ de la batería en la polaridad. Así, la corriente del resistor depende de la suma de dos fem, una $\mathcal{E}$ constante debida a la batería y una $\mathcal{E}_L$ variable de signo opuesto debida a la inductancia. En tanto esté presente esta segunda fem, la corriente en el resistor es menor que $\mathcal{E}/R$.

En el transcurso del tiempo, la corriente aumenta menos rápidamente, y la fem inducida $\mathcal{E}_L$, que es proporcional a di/dt, se vuelve menor. La corriente en el circuito tiende al valor $\mathcal{E}/R$ exponencialmente, como lo probaremos en seguida.

Analicemos ahora este circuito cuantitativamente. Cuando el interruptor S de la figura 4 se conecta en *a*, el circuito se reduce al de la figura 5. Apliquemos el teorema del circuito cerrado, comenzando en *x* en la figura 5 y circulando en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la malla. Para la dirección de la corriente que se muestra, *x* tiene un potencial más elevado que *y*, lo que significa que encontraremos un cambio en el potencial de $V_y - V_x = -iR$ al recorrer el resistor. El punto *y* tiene un potencial más elevado que el punto *z* porque, para una corriente creciente, la fem inducida se opone a la *elevación* de la corriente apuntando como se muestra. Así, al recorrer el inductor de *y* a *z*, encontramos un cambio en el potencial de $V_z - V_y = -L(di/dt)$, de acuerdo con la ecuación 3. Finalmente, encontramos una elevación de $+\mathcal{E}$ en el potencial al atravesar a la batería de *z* a *x*. El teorema del circuito cerrado da

$$-iR - L\frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0$$

o sea

$$L\frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E}. \tag{20}$$

Para resolver la ecuación 20, debemos hallar la función $i(t)$ de modo que cuando ésta y su primera derivada se sustituyan en la ecuación 20 se satisfaga esa ecuación.

Si bien existen reglas formales para resolver ecuaciones como la ecuación 20, también es posible resolverla por integración directa (véase el problema 20). En este caso es aún más sencillo tratar de intuir la solución guiados por el razonamiento físico y la experiencia previa. Podemos poner a prueba la solución propuesta al sustituirla en la ecuación 20 y ver si la ecuación resultante se reduce a una identidad.

En este caso proponemos una solución parecida a la de la acumulación de carga en un capacitor dentro de un circuito *RC* (ecuación 17). Con bases físicas requerimos también que la solución $i(t)$ tenga dos propiedades matemáticas. (1) La corriente inicial debe ser cero; esto es, $i(0) = 0$. La corriente se acumula desde el valor de cero justo después de que se cierra el interruptor. (2) La corriente debe tender al valor $\mathcal{E}/R$ conforme *t* se va haciendo más grande. Este segundo requisito se sigue de la expectativa de que el cambio en la corriente disminuya en forma gradual, y al desaparecer di/dt desaparece la influencia del inductor sobre el circuito. Por lo tanto, probaremos como una solución la función

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}). \tag{21}$$

Nótese que esta forma matemática tiene dos propiedades $i(0) = 0$ e $i \to \mathcal{E}/R$ conforme $t \to \infty$. La constante de tiempo τ_L debe determinarse al sustituir $i(t)$ y su derivada di/dt en la ecuación 20. Al derivar la ecuación 21, obtenemos

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\frac{1}{\tau_L}e^{-t/\tau_L}. \tag{22}$$

Llevando a cabo las sustituciones y el álgebra necesaria, hallamos que la ecuación 20 se satisface si

$$\tau_L = \frac{L}{R}. \tag{23}$$

τ_L se llama *constante inductiva de tiempo*. En analogía con la constante capacitiva de tiempo $\tau_C = RC$, indica lo rápidamente que la corriente tiende al valor estacionario en un circuito *LR*.

Para demostrar que la cantidad $\tau_L = L/R$ tiene la dimensión de tiempo, tenemos

$$[\tau_L] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{henry}}{\text{ohm}} = \frac{\text{volt} \cdot \text{segundo/ampere}}{\text{ohm}}$$
$$= \left(\frac{\text{volt}}{\text{ampere} \cdot \text{ohm}}\right) \text{segundo} = \text{segundo},$$

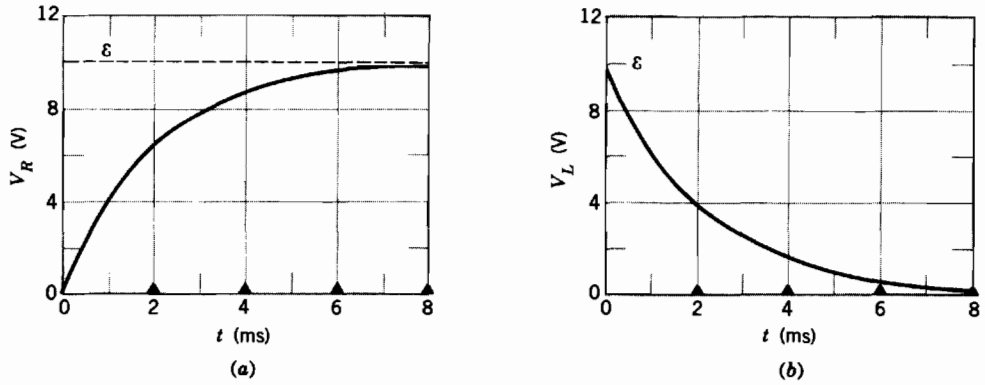


Figura 6 La variación con el tiempo de (*a*) V_R, la diferencia de potencial a través del resistor en el circuito de la figura 5, y (*b*) V_L, la diferencia de potencial en el inductor en ese circuito. Las curvas se han trazado para $R = 2000\ \Omega$, $L = 4.0$ H, y $\mathcal{E} = 10$ V. La constante inductiva de tiempo τ_L es 2 ms; se marcan los intervalos sucesivos iguales a τ_L por medio de triángulos a lo largo del eje horizontal.

donde la cantidad entre paréntesis es igual a 1 porque 1 ohm = 1 volt/ampere (como en $R = V/i$).

La significación física de τ_L se deduce de la ecuación 21. Si ponemos $t = \tau_L$ en esta ecuación, se reduce a

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-1}) = (1 - 0.37)\frac{\mathcal{E}}{R} = 0.63\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

La constante de tiempo τ_L es aquel tiempo en que la corriente en el circuito es menor que su valor estacionario final $\mathcal{E}/R$ por un factor de $1/e$ (alrededor del 37%).

La solución completa para la corriente en un circuito LR puede escribirse como

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-tR/L}). \tag{24}$$

La figura 6 muestra la caída de potencial V_R [$= |V_y - V_x| = i(t)R$] en el resistor R y la caída de potencial V_L [$= |V_z - V_y| = L(di/dt)$] en el inductor ideal.

Si el interruptor S en la figura 4 se conecta a *b* cuando la corriente en el circuito tiene algún valor i_0, el efecto es el de retirar a la batería del circuito. La ecuación que regula el decaimiento subsiguiente de la corriente en el circuito puede hallarse al hacer $\mathcal{E} = 0$ en la ecuación 20, lo cual da

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0. \tag{25}$$

Por sustitución directa o por integración, puede demostrarse que la solución a esta ecuación es

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L}, \tag{26}$$

donde i_0 es la corriente cuando $t = 0$ (que ahora significa el tiempo en el que se conecta el interruptor en *b*). El decaimiento de la corriente ocurre con la misma constante de tiempo exponencial $\tau_L = L/R$ como lo hace la elevación de la corriente. Nótese la semejanza con la ecuación 19 para el decaimiento de la carga en un capacitor.

El movimiento del interruptor de la figura 4 alternativamente entre *a* y *b* puede llevarse a cabo electrónicamente retirando la batería de la figura 5 y reemplazándola con un generador que produzca una *onda cuadrada*, de la forma mostrada en la figura 7*a*. Esta forma de onda oscila en forma alternada entre los valores de $\mathcal{E}$ y 0 en un intervalo de tiempo fijo, el cual elegimos que sea mucho mayor que τ_L.

Si conectamos las terminales de un osciloscopio entre los extremos del resistor (puntos *x* y *y* en la Fig. 5), la forma de onda exhibida es la de la corriente en el circuito, la cual es de forma idéntica a V_R, como se muestra en la figura 7*b*. La corriente se intensifica hasta su valor máximo $\mathcal{E}/R$ cuando la fem aplicada tiene el valor $\mathcal{E}$, y decae exponencialmente a cero (de acuerdo con la Ec. 26) cuando la fem aplicada es cero.

Si conectamos las terminales del osciloscopio entre los extremos del inductor (puntos *y* y *z* en la Fig. 5), la forma de onda que se exhibe es la de la *derivada* de la corriente, la cual tiene la misma forma que V_L, como se muestra en la figura 7*c*. De acuerdo con la ecuación 22, esta forma es

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \mathcal{E}e^{-t/\tau_L} \tag{27}$$

cuando la fem aplicada tiene el valor $\mathcal{E}$. Cuando la fem aplicada es cero, al derivar la ecuación 26 se demuestra que

$$V_L = L\frac{di}{dt} = -\mathcal{E}e^{-t/\tau_L},$$

puesto que $\mathcal{E} = i_0 R$ en este caso. Vemos que este resultado es precisamente el negativo de la ecuación 27. Esto con-

cuerda con la serie alternante de exponenciales positivas y negativas mostrada en la figura 7*c*.

Nótese que la suma de las curvas de las figuras 7*b* y 7*c* da la figura 7*a*. Esto es, $V_R + V_L = \mathcal{E}$, lo cual debe ser cierto de acuerdo con el teorema del circuito cerrado.

Problema muestra 3 Un solenoide tiene una inductancia de 53 mH y una resistencia de 0.37 Ω. Si está conectado a una batería, ¿cuánto tiempo le tomará a la corriente alcanzar la mitad de su valor final de equilibrio?

Solución El valor de equilibrio de la corriente, el cual se alcanza cuando $t \to \infty$, es $\mathcal{E}/R$ según la ecuación 24. Si la corriente tiene la mitad de este valor en un tiempo t_0 en particular, esta ecuación es

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t_0/\tau_L}),$$

o sea

$$e^{-t_0/\tau_L} = \frac{1}{2}.$$

Resolviendo para t_0 al reordenar y considerar el logaritmo (natural) de cada lado, hallamos

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R}\ln 2 = \frac{53 \times 10^{-3}\ \text{H}}{0.37\ \Omega}\ln 2 = 0.10\ \text{s}.$$

38-4 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Cuando se levanta de la Tierra una piedra, el trabajo externo efectuado se almacena como energía potencial del sistema Tierra-piedra. Podemos ver a este proceso de separación de los dos objetos como un modo de almacenar energía en el campo gravitatorio. Cuando se suelta la piedra, la energía puede recuperarse en forma de energía cinética conforme la piedra se va acercando a la Tierra. De forma similar, el trabajo efectuado al separar dos cargas de signos diferentes se almacena en forma de energía del campo eléctrico de las cargas; esa energía puede recuperarse permitiendo que las cargas se junten.

Podemos también considerar la energía almacenada en el campo (gravitatorio o eléctrico) que rodea a un cuerpo aislado, como la Tierra o una sola carga. Vemos a la energía almacenada en ese campo como representativa de la energía consumida para armar al cuerpo a partir de su masa constituyente o sus elementos de carga, suponiendo inicialmente que están en reposo y con separaciones infinitas.

La energía puede almacenarse en forma parecida en un campo magnético. Por ejemplo, considérense dos alambres paralelos, rígidos y largos, que conducen corriente en la misma dirección. Los alambres se atraen entre sí, y el trabajo efectuado para separarlos se almacena en el campo magnético que los rodea. Podemos recuperar esa energía magnética almacenada adicional dejando que los alambres regresen a sus posiciones originales.

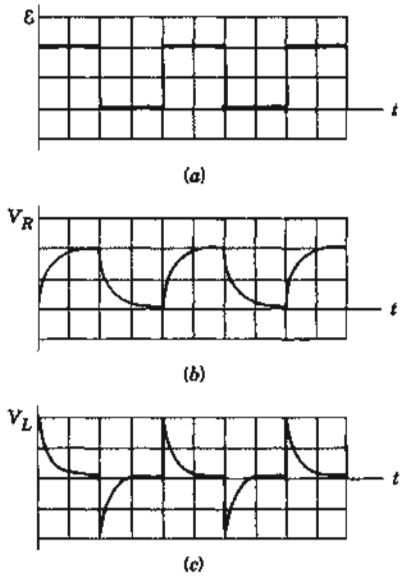


Figura 7 (*a*) Se aplica al circuito de la figura 5 una fuente fem que varía en forma de onda cuadrada. (*b*) La diferencia de potencial en el resistor. (*c*) La diferencia de potencial en el inductor.

También podemos ver a la energía como almacenada en el campo magnético de un alambre aislado, en analogía con la energía del campo eléctrico de una carga aislada. Antes de considerar este tema es útil, en general, considerar la energía almacenada en el campo magnético de un inductor, como presentamos al almacenamiento de la energía en un campo eléctrico en la sección 31-4 al considerar la energía almacenada en un capacitor.

La figura 5 muestra una fuente de fem $\mathcal{E}$ conectada a un resistor R y a un inductor L. El teorema del circuito cerrado aplicado a este circuito da

$$\mathcal{E} = iR + L\frac{di}{dt},$$

como ya lo habíamos hallado en la ecuación 20. Recordemos que el teorema del circuito cerrado es, básicamente, una expresión del principio de conservación de la energía para circuitos de una sola malla. Al multiplicar cada lado de esta expresión por i obtenemos

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt}, \tag{28}$$

la cual tiene la siguiente interpretación física en términos del trabajo y la energía:

1. Si la carga dq pasa por la fuente de la fem $\mathcal{E}$ en la figura 5 en un tiempo dt, la fuente efectúa un trabajo sobre ella en la cantidad $\mathcal{E}\,dq$. La *velocidad* para efectuar el trabajo es $(\mathcal{E}\,dq)/dt$, o sea $\mathcal{E}i$. Entonces, el lado izquierdo de la ecuación 28 es *la velocidad con la que entrega energía al circuito la fuente de la fem.*

2. El segundo término de la ecuación 28, i^2R, es *la velocidad con la que se disipa la energía en el resistor.* Esta energía surge en forma de energía interna asociada a los movimientos atómicos en el resistor.

3. La energía entregada al circuito pero no disipada en el resistor debe, según nuestra hipótesis, almacenarse en el campo magnético. Puesto que la ecuación 28 representa un postulado de la conservación de la energía en circuitos LR, el último término debe representar *la velocidad a la cual se almacena la energía en el campo magnético.*

Hagamos que U_B represente la energía almacenada en el campo magnético; entonces la velocidad a la que se almacena la energía es dU_B/dt. Al igualar la velocidad de almacenamiento de la energía con el último término de la ecuación 28, obtenemos

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} \tag{29}$$

o sea

$$dU_B = Li\,di. \tag{30}$$

Supongamos que comenzamos sin corriente en el inductor ($i = 0$) y sin energía almacenada en su campo magnético. Gradualmente aumentamos la corriente hasta el valor final i. La energía U_B almacenada en el campo magnético puede hallarse integrando la ecuación 30, obteniéndose

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li\,di$$

o sea

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2, \tag{31}$$

lo cual representa la energía magnética total almacenada en una inductancia L que conduce una corriente i.

Si el interruptor de la figura 4 se mueve de a a b después de haberse establecido una corriente i, la energía almacenada en el inductor se disipa por medio del calentamiento Joule en el resistor. La corriente está dada, en este caso, por la ecuación 26.

Se presenta una situación análoga al cargar y descargar un capacitor. Cuando el capacitor haya acumulado una carga q, la energía almacenada en el campo eléctrico es

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Esta expresión se dedujo en la sección 31-4 al hacer a la energía almacenada igual al trabajo que debe efectuarse al generar el campo. El capacitor puede descargarse a través de un resistor, en cuyo caso la energía almacenada se disipa de nuevo en la forma de un calentamiento Joule.

La necesidad de disipar la energía almacenada en un inductor es la razón por la que en el circuito de la figura 4 se necesita un "conmutador sin interrupción". En este tipo de interruptor, la conexión a b se efectúa antes de la desconexión en a. Si *no* se emplease este tipo de interruptor, el circuito se abriría momentáneamente al mover al interruptor de a a b, en cuyo caso la corriente se interrumpiría; la energía almacenada en el inductor se disiparía súbitamente en forma de chispa a través de las terminales del interruptor.

Problema muestra 4 Una bobina tiene una inductancia de 53 mH y una resistencia de 0.35 Ω. (*a*) Si se aplica una fem de 12 V, ¿cuánta energía se almacena en el campo magnético después de haber alcanzado la corriente su valor máximo? (*b*) En términos de τ_L, ¿cuánto tiempo le tomaría a la energía almacenada alcanzar la mitad de su valor máximo?

Solución (*a*) Según la ecuación 21 la corriente máxima es

$$i_m = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12\text{ V}}{0.35\ \Omega} = 34.3\text{ A}.$$

Al sustituir esta corriente en la ecuación 31 hallamos la energía almacenada:

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li_m^2 = \tfrac{1}{2}(53 \times 10^{-3}\text{ H})(34.3\text{ A})^2$$
$$= 31\text{ J}.$$

(*b*) Sea i la corriente en el instante en que la energía almacenada tiene la mitad de su valor máximo. Entonces

$$\tfrac{1}{2}Li^2 = (\tfrac{1}{2})\,\tfrac{1}{2}Li_m^2$$

o sea

$$i = i_m/\sqrt{2}.$$

Pero i está dada por la ecuación 21 e i_m (véase arriba) es $\mathcal{E}/R$, de modo que

$$\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}R}.$$

Esto puede escribirse

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - 1/\sqrt{2} = 0.293,$$

lo cual da

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln 0.293 = -1.23$$

o sea

$$t = 1.23\tau_L.$$

La energía almacenada alcanza la mitad de su valor después de 1.23 constantes de tiempo.

Problema muestra 5 Un inductor de 3.56 H está colocado en serie con un resistor de 12.8 Ω, aplicando súbitamente a la combinación una fem de 3.24 V. A los 0.278 s (que es una constante de tiempo inductiva) después de haberse hecho el contacto, determine (*a*) la velocidad P a la que la batería entrega energía, (*b*) la velocidad P_R a la que surge la energía interna en el resistor, y (*c*) la velocidad P_B a la que se almacena la energía en el campo magnético.

Solución (*a*) La corriente la da la ecuación 21. En $t = \tau_L$, obtenemos

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{3.24\text{ V}}{12.8\ \Omega}(1 - e^{-1}) = 0.1600\text{ A}.$$

La velocidad P a la que la batería entrega energía es, entonces,

$$P = \mathcal{E}i = (3.24\text{ V})(0.1600\text{ A}) = 0.5184\text{ W}.$$

(*b*) La velocidad P_R con la cual se disipa la energía en el resistor está dada por

$$P_R = i^2R = (0.1600\text{ A})^2(12.8\ \Omega) = 0.3277\text{ W}.$$

(*c*) La velocidad P_B ($= dU_B/dt$) a la que se almacena la energía en el campo magnético está dada por la ecuación 29. Al emplear la ecuación 22 con $t = \tau_L$, obtenemos

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-t/\tau_L} = \frac{3.24\text{ V}}{3.56\text{ H}}e^{-1} = 0.3348\text{ A/s}.$$

Según la ecuación 29 la velocidad deseada es, entonces

$$P_B = \frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$
$$= (3.56\text{ H})(0.1600\text{ A})(0.3348\text{ A/s}) = 0.1907\text{ W}.$$

Nótese que, como lo requiere la conservación de la energía,

$$P = P_R + P_B,$$

o sea

$$P = 0.3277\text{ W} + 0.1907\text{ W} = 0.5184\text{ W}.$$

La densidad de energía y el campo magnético

Ahora encontraremos una expresión para la *densidad de energía* (la energía por unidad de volumen) u_B en un campo magnético. Consideremos un solenoide muy largo de área de sección transversal A cuyo interior no contiene ningún material. Una porción de longitud l lejos de cualquier extremo encierra un volumen Al. La energía magnética almacenada en esta porción del solenoide debe estar por completo dentro de este volumen porque el campo magnético en el exterior del solenoide es esencialmente cero. Además, la energía almacenada debe estar distribuida uniformemente en todo el volumen del solenoide porque el campo magnético es uniforme en cualquier parte del interior. Entonces, podemos escribir la densidad de energía como

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

o, puesto que

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2,$$

tenemos

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Al}.$$

Para expresar esto en términos del campo magnético, podemos resolver la ecuación 7 ($B = \mu_0 in$) para i y sustituirla en esta ecuación. También podemos sustituir a L usando la relación $L = \mu_0 n^2 lA$ (Ec. 9). Al hacerlo tenemos finalmente

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \qquad (32)$$

Esta ecuación da la densidad de energía almacenada en cualquier punto (en el vacío o en una sustancia no magnética) en donde el campo magnético es **B**. La ecuación se cumple para todas las configuraciones del campo magnético, aun cuando la dedujimos considerando un caso especial, el solenoide. La ecuación 32 debe compararse con la ecuación 28 del capítulo 31,

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \qquad (33)$$

la cual da la densidad de energía (en un vacío) en cualquier punto dentro de un campo eléctrico. Nótese que tanto u_B como u_E son proporcionales al cuadrado de la cantidad de campo apropiada, B o E.

El solenoide desempeña, en los campos magnéticos, un papel semejante al del capacitor de placas paralelas en los campos eléctricos. En cada caso tenemos un dispositivo sencillo que puede usarse para generar un campo uniforme en una región del espacio bien definida y para deducir, de manera sencilla, las propiedades de estos campos.

Problema muestra 6 Un cable coaxial largo (Fig. 8) consta de dos conductores cilíndricos concéntricos con radios a y b, donde $b \gg a$. Su conductor central conduce una corriente estacionaria i, y el conductor exterior proporciona la trayectoria de retorno. (*a*) Calcule la energía almacenada en el campo magnético para una longitud l de tal cable. (*b*) ¿Cuál es la inductancia de una longitud l del cable?

Solución (*a*) En el espacio entre los dos conductores la ley de Ampère

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i,$$

conduce a

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

o sea

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

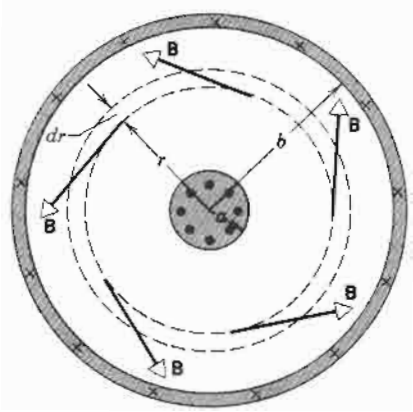


Figura 8 Problema muestra 6. Sección transversal de un cable coaxial, que porta corrientes estacionarias iguales pero opuestas en sus conductores interno y externo. Las líneas de **B** forman círculos en la región situada entre los conductores.

La ley de Ampère demuestra además que el campo magnético es cero para los puntos fuera del conductor exterior (¿por qué?). El conductor exterior es tan delgado que podemos despreciar la energía magnética almacenada en él. De manera parecida suponemos que el conductor interior es tan pequeño que la energía magnética en su volumen es despreciable. Por lo tanto consideramos que la energía magnética almacenada reside enteramente en el espacio entre los conductores.

La densidad de energía para los puntos entre los conductores, según la ecuación 32, es

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Consideremos un elemento de volumen dV el cual consiste en un cascarón cilíndrico cuyos radios son r y $r + dr$ y cuya longitud (perpendicularmente al plano de la Fig. 8) es l. La energía dU_B contenida en él es

$$dU_B = u_B dV = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi r l)(dr) = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\frac{dr}{r}.$$

La energía magnética total almacenada se halla por integración:

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

(*b*) Podemos calcular la inductancia L de la ecuación 31 ($U_B = \frac{1}{2}Li^2$), lo que conduce a

$$L = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

El lector debe deducir también esta expresión directamente de la definición de inductancia, usando los procedimientos de la sección 38-2 (véase el problema 15).

Problema muestra 7 Compare la energía requerida para crear, en un cubo de 10 cm de arista, (*a*) un campo eléctrico uniforme de 1.0×10^5 V/m y (*b*) un campo magnético uniforme de 1.0 T. Es posible que ambos campos se juzguen como razonablemente grandes, pero sin dificultad pueden lograrse en el laboratorio.

Solución (*a*) En el caso eléctrico tenemos, siendo V_0 el volumen del cubo,

$$\begin{aligned} U_E = u_E V_0 &= \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 V_0 \\ &= (0.5)(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(10^5\ \mathrm{V/m})^2(0.1\ \mathrm{m})^3 \\ &= 4.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

(*b*) En el caso magnético, de la ecuación 32 tenemos

$$\begin{aligned} U_B = u_B V_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} V_0 &= \frac{(1.0\ \mathrm{T})^2(0.1\ \mathrm{m})^3}{(2)(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})} \\ &= 400\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

En términos de los campos normalmente disponibles en el laboratorio, en un campo magnético pueden almacenarse cantidades de energía mucho más grandes que en uno eléctrico, siendo la razón de 10^7 aproximadamente en este ejemplo. Inversamente, se requiere mucha más energía para crear un campo magnético de razonable magnitud en el laboratorio que la necesaria para generar un campo eléctrico de magnitud igualmente razonable.

38-5 OSCILACIONES ELECTROMAGNÉTICAS: ANÁLISIS CUALITATIVO

Ahora volvemos al estudio de las propiedades de los circuitos que contienen tanto un capacitor C como un inductor L. Tal circuito forma un *oscilador electromagnético*, en donde la corriente varía senoidalmente con el tiempo, en forma parecida a como varía con el tiempo el desplazamiento de un oscilador mecánico. De hecho, como veremos, existen varias analogías entre los osciladores mecánicos y los electromagnéticos. Estas analogías nos ayudan a entender a los osciladores electromagnéticos basados en nuestro estudio previo de los osciladores mecánicos (capítulo 15).

Por el momento, suponemos que el circuito no incluye una resistencia. El circuito *con* resistencia, al cual consideramos en la sección 38-7, es análogo al oscilador amortiguado el cual lo consideramos en la sección 15-8. Suponemos también que no está presente en el circuito ninguna fuente de fem; los circuitos oscilatorios con una fem presente, los cuales consideraremos también en la sección 38-7, son análogos a los osciladores mecánicos forzados como ya vimos en la sección 15-9.

No estando presente ninguna fem, la energía en el circuito proviene de la energía almacenada inicialmente en uno o ambos de los componentes. Supongamos que el capacitor C se carga (a partir de alguna fuente externa la cual no nos interesa) de modo que contenga una carga q_m, en cuyo momento se retira de la fuente externa y se conecta al inductor L. En la figura 9*a* se muestra el circuito LC. Al principio, la energía U_E almacenada en el capacitor es

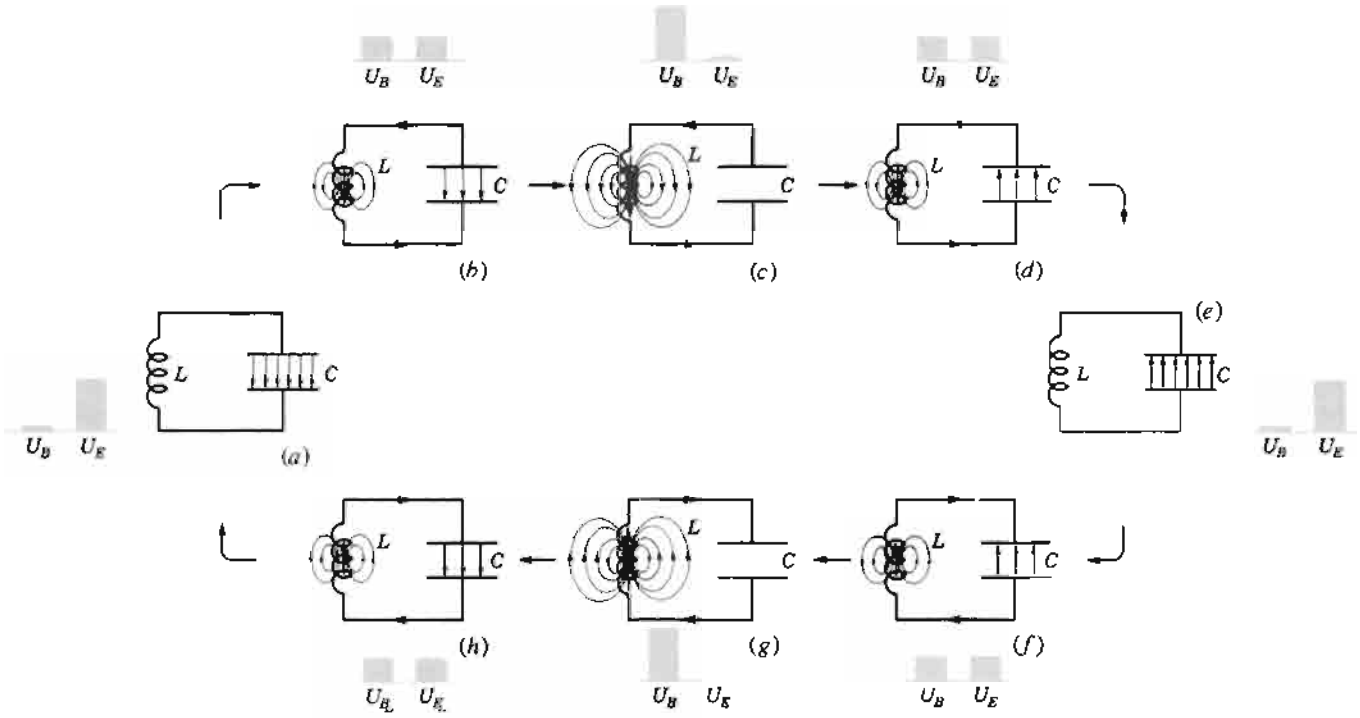


Figura 9 Ocho etapas de un solo ciclo de oscilación de un circuito *LC* sin resistencia. Las gráficas de barras muestran las energías magnética y eléctrica almacenadas. La flecha que pasa por el inductor muestra la corriente.

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}, \tag{34}$$

mientras que la energía $U_B = \frac{1}{2}Li^2$ almacenada en el inductor es inicialmente cero, porque la corriente es cero.

El capacitor comienza ahora a descargarse a través del inductor, moviéndose los portadores de carga positiva en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 9*b*. Por el inductor fluye ahora una corriente $i = dq/dt$, aumentando su energía almacenada desde cero. Al mismo tiempo, al descargarse el capacitor se reduce su energía almacenada. Si el circuito carece de resistencia, no se disipa ninguna energía, y la disminución de la energía almacenada en el capacitor se compensa exactamente con un aumento en la energía almacenada en el inductor, de modo que la energía total permanece constante. En efecto, el campo eléctrico disminuye y el campo magnético aumenta, transfiriéndose la energía del uno al otro.

En el tiempo correspondiente a la figura 9*c*, el capacitor se ha descargado totalmente y la energía almacenada en el capacitor es cero. La corriente en el inductor ha alcanzado su valor máximo y toda la energía del circuito está almacenada en el campo magnético del inductor. Nótese que, aun cuando $q = 0$ en este instante, dq/dt difiere de cero porque está fluyendo carga.

La corriente en el inductor continúa transportando carga de la placa superior del capacitor hacia la placa inferior, como se muestra en la figura 9*d*; la energía fluye ahora desde el inductor de vuelta al capacitor a la vez que su campo eléctrico se acumula nuevamente. Finalmente (véase la Fig. 9*e*), toda la energía se transfiere de regreso al capacitor, el cual está ahora plenamente cargado pero en el sentido opuesto al de la figura 9*a*. La situación continúa ahora mientras el capacitor se descarga hasta que la energía haya regresado completamente al inductor, teniendo el campo magnético y la energía correspondiente sus valores máximos (Fig. 9*g*). Por último, la corriente en el inductor carga al capacitor una vez más hasta que el capacitor esté totalmente cargado y el circuito regresa a su condición inicial (Fig. 9*a*). El proceso comienza de nuevo, y el ciclo se repite indefinidamente. En ausencia de resistencia, la cual causaría que se disipara energía, la carga y la corriente regresan a sus mismos valores máximos en cada ciclo.

La oscilación del circuito *LC* ocurre con una frecuencia definida ν (medida en Hz) correspondiente a una frecuencia angular ω ($= 2\pi\nu$ y medida en rad/s). Como analizaremos en la sección siguiente, ω está determinada por L y C. Mediante elecciones apropiadas de L y C podemos construir circuitos oscilatorios con frecuencias que van desde abajo de las frecuencias de audio (10 Hz) hasta arriba de las frecuencias de las microondas (10 GHz).

Para determinar la carga q en función del tiempo, podemos medir la diferencia de potencial variable $V_C(t)$ que

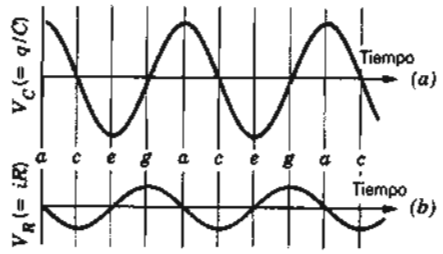


Figura 10 (*a*) La diferencia de potencial en el capacitor del circuito de la figura 9 en función del tiempo. Esta cantidad es proporcional a la carga en el capacitor. (*b*) La diferencia de potencial entre los extremos de un pequeño resistor insertado en el circuito de la figura 9. Esta cantidad es proporcional a la corriente en el circuito. Las letras indican las etapas correspondientes en la oscilación de la figura 9.

existe entre los extremos del capacitor C, la cual se relaciona con la carga q según

$$V_C = \frac{1}{C} q.$$

Podemos determinar la corriente insertando en el circuito un resistor R tan pequeño que su efecto sobre el circuito sea despreciable. La diferencia de potencial $V_R(t)$ en R es proporcional a la corriente, de acuerdo con

$$V_R = iR.$$

Si quisiéramos exhibir $V_C(t)$ y $V_R(t)$, como por ejemplo en la pantalla de un osciloscopio, el resultado podría parecerse al mostrado en la figura 10.

Problema muestra 8 Un capacitor de 1.5 μF se carga a 57 V. La batería que lo carga se desconecta después y, en paralelo con el capacitor, se conecta una bobina de 12 mH, de modo que ocurren oscilaciones LC. ¿Cuál es la corriente máxima en la bobina? Suponga que el circuito no contiene resistencia.

Solución Según el principio de conservación de la energía, la energía almacenada máxima en el capacitor debe ser igual a la energía almacenada máxima en el inductor. Al aplicar las ecuaciones 31 y 34, obtenemos

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{1}{2} L i_m^2,$$

donde i_m es la corriente máxima y q_m es la carga máxima. Nótese que la corriente máxima y la carga máxima no ocurren al mismo tiempo sino separadas por un cuarto de ciclo; véanse las figuras 9 y 10. Al despejar para i_m y al sustituir a q_m por CV, hallamos que

$$i_m = V\sqrt{\frac{C}{L}} = (57\text{ V})\sqrt{\frac{1.5\times10^{-6}\text{ F}}{12\times10^{-3}\text{ H}}} = 0.64\text{ A}.$$

Analogía con el movimiento armónico simple

La figura 6 del capítulo 8 muestra que, en un sistema oscilatorio bloque-resorte, al igual que en un circuito oscilatorio LC, se presentan dos clases de energía. Una es la energía potencial del resorte comprimido o estirado; la otra es la energía cinética del bloque al moverse. Estas se obtienen de las fórmulas familiares en la primera columna de la tabla 1. La tabla indica que un capacitor es en cierto modo como un resorte, un inductor es como un objeto masivo (el bloque), y ciertas cantidades electromagnéticas "corresponden" a ciertas propiedades mecánicas, es decir,

TABLA 1 LA ENERGÍA EN LOS SISTEMAS OSCILATORIOS

Mecánica		*Electromagnética*	
Resorte	$U_s = \frac{1}{2}kx^2$	Capacitor	$U_E = \frac{1}{2}C^{-1}q^2$
Bloque	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Inductor	$U_B = \frac{1}{2}Li^2$
	$v = dx/dt$		$i = dq/dt$

$$\begin{aligned} &q \text{ corresponde a } x, && i \text{ corresponde a } v, \\ &1/C \text{ corresponde a } k, && L \text{ corresponde a } m. \end{aligned} \tag{35}$$

La comparación de la figura 9, que muestra las oscilaciones de un circuito LC que carece de resistencia, con la figura 6 del capítulo 8, la cual muestra las oscilaciones en un sistema bloque-resorte carente de fricción, indica cuán cercana es la correspondencia entre ambas. Nótese cómo v e i corresponden en las dos figuras; también x y q. Nótese también cómo en cada caso la energía alterna entre dos formas, la magnética y la eléctrica para el sistema LC, y cinética y potencial para el sistema bloque-resorte.

En la sección 15-3 vimos que la frecuencia angular natural de un oscilador armónico simple mecánico es

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La correspondencia entre los dos sistemas sugiere que para determinar la frecuencia de oscilación de un circuito LC (sin resistencia), k debería ser reemplazada por $1/C$ y m por L, lo cual da

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{36}$$

Esta fórmula también puede deducirse a partir de un riguroso análisis de la oscilación electromagnética, como se muestra en la siguiente sección.

38-6 OSCILACIONES ELECTROMAGNÉTICAS: ANÁLISIS CUANTITATIVO

Ahora deducimos una expresión para la frecuencia de oscilación de un circuito LC (sin resistencia) usando el

principio de conservación de la energía. La energía total U presente en cualquier instante en un circuito oscilatorio LC es

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}, \tag{37}$$

lo cual indica que, en cualquier tiempo arbitrario, la energía se almacena parcialmente en el campo magnético del inductor, y parcialmente en el campo eléctrico del capacitor. Si suponemos que la resistencia del circuito es cero, no se disipa energía, y U permanece constante con el tiempo, aunque i y q varían. En lenguaje más formal, dU/dt debe ser cero. Esto conduce a

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0. \tag{38}$$

Dejamos que q represente a la carga en una placa en particular del capacitor (por ejemplo, la placa superior en la Fig. 9), e i representa entonces la velocidad a la que la carga fluye dentro de esa placa (de modo que $i > 0$ cuando fluye carga positiva en la placa). En este caso

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

y al sustituir en la ecuación 38 obtenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{39}$$

La ecuación 39 describe las oscilaciones de un circuito LC (sin resistencia). Para resolverlo, notemos la semejanza de la ecuación 4 del capítulo 15,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{40}$$

la cual describe la oscilación mecánica de una partícula en un resorte. Fundamentalmente, cuando se comparan estas dos ecuaciones es cuando surgen las correspondencias de la ecuación 35.

La solución de la ecuación 40 obtenida en el capítulo 15 era

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

donde x_m es la amplitud del movimiento y ϕ es una constante de fase arbitraria. Puesto que q corresponde a x, podemos escribir la solución de la ecuación 39 como

$$q = q_m \cos(\omega t + \phi), \tag{41}$$

donde ω es todavía la desconocida frecuencia angular de las oscilaciones electromagnéticas.

Podemos probar si la ecuación 41 es realmente una solución de la ecuación 39 al sustituirla junto con su segunda derivada en aquella ecuación. Para hallar la segunda derivada, escribimos

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega q_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{42}$$

y

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_m \cos(\omega t + \phi). \tag{43}$$

al sustituir a q y d^2q/dt^2 en la ecuación 39 nos da

$$-L\omega^2 q_m \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}q_m \cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Cancelando a $q_m \cos(\omega t + \phi)$ y reordenando llegamos a

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{44}$$

Así, si a ω se le da el valor de $1/\sqrt{LC}$, la ecuación 41 es realmente una solución de la ecuación 39. Esta expresión de ω concuerda con la ecuación 36, a la cual llegamos por la correspondencia entre las oscilaciones mecánicas y electromagnéticas.

La constante de fase ϕ en la ecuación 41 está determinada por las condiciones en $t = 0$. Si la condición inicial es como se representó en la figura 9*a*, entonces ponemos $\phi = 0$ con objeto de que la ecuación 41 pueda predecir que $q = q_m$ en $t = 0$. ¿Qué condición física inicial está implicada por $\phi = 90°$? ¿$180°$? ¿$270°$? ¿Cuáles de los estados mostrados en la figura 9 corresponden a estas elecciones de ϕ?

La energía eléctrica almacenada en el circuito LC, usando la ecuación 41, es

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi), \tag{45}$$

y la energía magnética, usando la ecuación 42, es

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}L\omega^2 q_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi).$$

Al sustituir ω por la ecuación 44 en esta última ecuación da

$$U_B = \frac{q_m^2}{2C}\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \tag{46}$$

La figura 11 muestra gráficas de $U_E(t)$ y $U_B(t)$ para el caso de $\phi = 0$. Nótese que (1) los valores máximos de U_E y U_B son los mismos ($= q_m^2/2C$); (2) la suma de U_E y U_B es una constante ($= q_m^2/2C$); (3) cuando U_E tiene su valor máximo, U_B es cero y viceversa; y (4) U_B y U_E alcanzan cada una su valor máximo *dos veces* durante cada ciclo. Este análisis apoya el análisis cualitativo de la sección 38-5. Compárese esta explicación con la presentada en la sección 15-4 para las transferencias de energía en un oscilador armónico simple mecánico.

Problema muestra 9 (*a*) En un circuito oscilatorio LC, ¿qué valor de la carga, expresado en términos de la carga máxima, está presente en el capacitor cuando la energía se comparte por igual entre el campo magnético y el campo eléctrico? (*b*) ¿En qué tiempo t ocurrirá esta condición, suponiendo que el capaci-

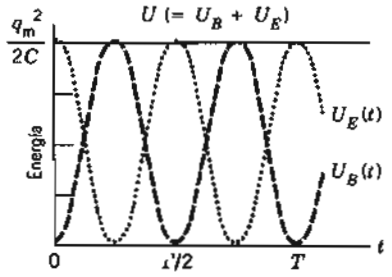


Figura 11 La energía magnética y la energía eléctrica almacenadas y su suma en un circuito LC como funciones del tiempo. $T\ (= 2\pi/\omega)$ es el periodo de la oscilación.

tor está totalmente cargado inicialmente? Suponga que $L = 12$ mH y $C = 1.7\ \mu$F.

Solución (*a*) La energía almacenada U_E y la energía almacenada *máxima* U_m en el capacitor son, respectivamente,

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \qquad \text{y} \qquad U_m = \frac{q_m^2}{2C}.$$

Al sustituir $U_E = \frac{1}{2}U_m$ da

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{2C}$$

o sea

$$q = \frac{q_m}{\sqrt{2}}.$$

(*b*) Puesto que $\phi = 0$ en la ecuación 41 porque $q = q_m$ en $t = 0$, tenemos

$$q = q_m \cos \omega t = \frac{q_m}{\sqrt{2}},$$

lo cual conduce a

$$\omega t = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

o, usando $\omega = 1/\sqrt{LC}$,

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(12 \times 10^{-3}\ \text{H})(1.7 \times 10^{-6}\ \text{F})}}{4}$$
$$= 1.1 \times 10^{-4}\ \text{s}.$$

38-7 OSCILACIONES AMORTIGUADAS Y FORZADAS

En cualquier circuito LC real siempre está presente una resistencia R. Cuando tomamos en cuenta esta resistencia, hallamos que la energía electromagnética total U no es constante sino que disminuye con el tiempo conforme se disipa como energía interna en el resistor. Como veremos, la analogía con el oscilador bloque-resorte amortiguado de la sección 15-8 es exacta. Como antes, tenemos

$$U = U_B + U_E = \tfrac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}. \tag{47}$$

U ya no es constante sino más bien

$$\frac{dU}{dt} = -i^2R, \tag{48}$$

significando el signo menos que la energía almacenada U disminuye con el tiempo, convirtiéndose en energía interna en el resistor con una velocidad de i^2R. Al derivar la ecuación 47 y al combinar el resultado con la ecuación 48, tenemos

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -i^2R.$$

Si se sustituye a i por dq/dt y a di/dt por d^2q/dt^2 y al dividir entre i, obtenemos

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0, \tag{49}$$

la cual describe las oscilaciones LC amortiguadas. Si $R = 0$, la ecuación 49 se reduce, como debe ser, a la ecuación 39, la cual describe las oscilaciones LC no amortiguadas.

Afirmamos sin demostrarlo que la solución general de la ecuación 49 puede escribirse en la forma

$$q = q_m e^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi), \tag{50}$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \tag{51}$$

Usando las analogías de la ecuación 35, vemos que la ecuación 50 es la equivalente exacta de la ecuación 38 del capítulo 15, la ecuación para el desplazamiento en función del tiempo en el movimiento armónico simple amortiguado. Al comparar la ecuación 51 con la ecuación 39 del capítulo 15, vemos que la resistencia R corresponde a la constante de amortiguamiento b del oscilador mecánico amortiguado.

La figura 12 muestra la corriente en un circuito LC amortiguado en función del tiempo. (Compárese con la Fig. 19 del capítulo 15.) La corriente oscila senoidalmente con una frecuencia ω', y la amplitud de la corriente disminuye exponencialmente con el tiempo. La frecuencia ω' es estrictamente menor que la frecuencia $\omega\ (= 1/\sqrt{LC})$ de las oscilaciones no amortiguadas, pero en la mayoría de los casos de interés podemos poner $\omega' = \omega$ con error despreciable.

Problema muestra 10 Un circuito tiene $L = 12$ mH, $C = 1.6\ \mu$F y $R = 1.5\ \Omega$. (*a*) ¿Después de qué tiempo t la amplitud de las

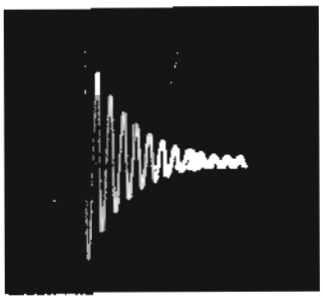


Figura 12 Fotografía del rastro de un osciloscopio mostrando la oscilación de un circuito *LC*. La oscilación disminuye en amplitud porque se disipa energía en la resistencia del circuito.

oscilaciones de la carga caerá a la mitad de su valor inicial? (*b*) ¿A cuántos periodos de oscilación corresponde esto?

Solución (*a*) Esto ocurrirá cuando el factor $e^{-Rt/2L}$ de la amplitud en la ecuación 50 tenga el valor 1/2, o sea

$$e^{-Rt/2L} = \tfrac{1}{2}.$$

Si se toma el logaritmo natural de cada lado nos da

$$-Rt/2L = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2,$$

o, despejando t,

$$t = \frac{2L}{R} \ln 2 = \frac{(2)(12 \times 10^{-3}\ \text{H})}{1.5\ \Omega} \ln 2 = 0.0111\ \text{s}.$$

(*b*) El número de oscilaciones es el tiempo transcurrido dividido entre el periodo, lo cual se relaciona con la frecuencia angular ω por $T = 2\pi/\omega$. La frecuencia angular es

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(12 \times 10^{-3}\ \text{H})(1.6 \times 10^{-6}\ \text{F})}} = 7220\ \text{rad/s}.$$

El periodo de oscilación es, entonces,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7220\ \text{rad/s}} = 8.70 \times 10^{-4}\ \text{s}.$$

El tiempo transcurrido, expresado en términos del periodo de oscilación, es entonces

$$\frac{t}{T} = \frac{0.0111\ \text{s}}{8.70 \times 10^{-4}\ \text{s}} \approx 13.$$

La amplitud cae a la mitad después de unos 13 ciclos de oscilación. Por comparación, en este ejemplo el amortiguamiento es menos severo que el mostrado en la figura 12, donde la amplitud cae a la mitad en unos tres ciclos.

En este problema muestra, hemos usado ω en lugar de ω'. De la ecuación 51, calculamos $\omega - \omega' = 0.27$ rad/s, y así cometemos un error despreciable al usar ω.

Oscilaciones forzadas y resonancia

Consideremos un circuito *LC* amortiguado que contiene una resistencia *R*. Si el amortiguamiento es pequeño, el

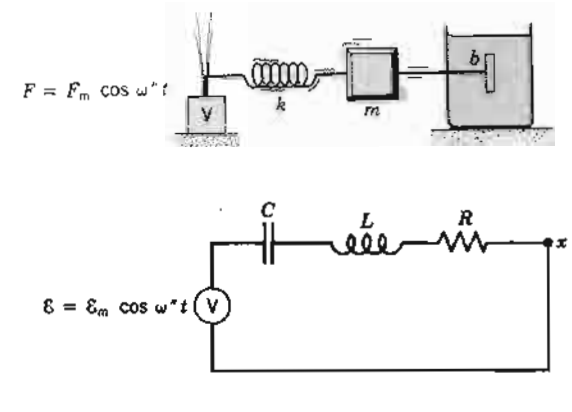


Figura 13 (*a*) Las oscilaciones electromagnéticas en un circuito se desencadenan con una frecuencia angular ω''. (*b*) Las oscilaciones mecánicas de un sistema de resortes se desencadenan con una frecuencia angular ω''. Los elementos correspondientes de los dos sistemas están dibujados uno frente al otro.

circuito oscila con una frecuencia $\omega = 1/\sqrt{LC}$, a la cual llamamos la *frecuencia natural* del sistema.

Supongamos ahora que excitamos el circuito con una fem variable en el tiempo dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega'' t \qquad (52)$$

usando un generador externo. Aquí ω'', que puede variarse a voluntad, es la frecuencia de esta fuente externa. Definimos tales oscilaciones como *forzadas*. Cuando la fem descrita por la ecuación 52 se aplica por vez primera, aparecen en el circuito corrientes transitorias variables en el tiempo. Nuestro interés, sin embargo, está en las corrientes senoidales que existen en el circuito después de que estas transitorias iniciales han desaparecido. Cualquiera que pueda ser la frecuencia natural ω, *estas oscilaciones de la carga, la corriente, o la diferencia de potencial en el circuito deben ocurrir a la frecuencia de excitación externa* ω''.

La figura 13 compara al sistema oscilatorio electromagnético con un sistema mecánico correspondiente. Un vibrador V, que imprime una fuerza externa alterna, corresponde al generador V, el cual imprime una fem externa alterna. Las demás cantidades "corresponden" como antes (véase la tabla 1): el desplazamiento a la carga y la velocidad a la corriente. La inductancia *L*, que se opone a los cambios en la corriente, corresponde a la masa (inercia) *m*, la cual se opone a los cambios en la velocidad. La constante *k* del resorte y el recíproco de la capacitancia C^{-1} representan la "rigidez" de sus sistemas, dando, respectivamente, la respuesta (desplazamiento) del resorte a la fuerza y la respuesta (carga) del capacitor a la fem.

En el capítulo 39 dedujimos la solución para la corriente en el circuito de la figura 13*a*, la cual podemos escribir en la forma

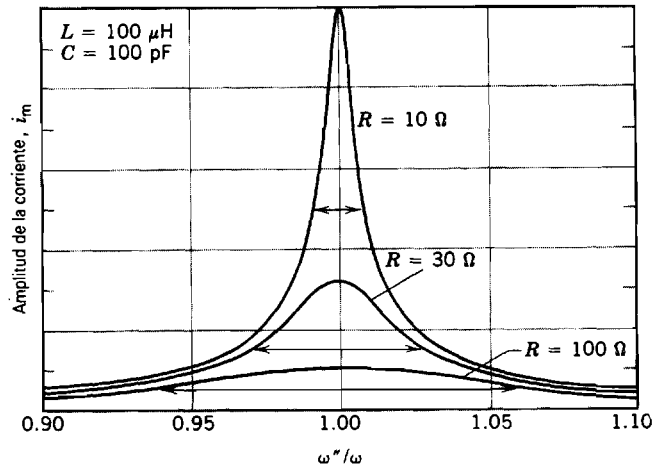


Figura 14 Curvas de resonancia del circuito oscilatorio forzado de la figura 13*a*. Las tres curvas corresponden a los diferentes valores de la resistencia del circuito. Las flechas horizontales indican la anchura o "finura" de cada resonancia.

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega'' t - \phi). \tag{53}$$

En la ecuación 53, la amplitud de la corriente i_m es una medida de la respuesta del circuito de la figura 13*a* a la fem de excitación. Es razonable suponer (por ejemplo, de la experiencia de impulsar un columpio) que i_m es grande cuando la frecuencia de excitación ω'' está cerca de la frecuencia natural ω del sistema. En otras palabras, esperamos que una gráfica de i_m contra ω'' exhiba un máximo cuando

$$\omega'' = \omega = 1/\sqrt{LC}, \tag{54}$$

a lo cual llamamos la condición de *resonancia*.

La figura 14 muestra tres gráficas de i_m en función de la razón ω''/ω, correspondiendo cada gráfica a un valor diferente de la resistencia R. Vemos que cada uno de estos picos tiene realmente un valor máximo cuando la condición de resonancia de la ecuación 54 se satisface. Notese que, al disminuir R, el pico de la resonancia se vuelve más agudo, como lo muestran las tres flechas dibujadas en el nivel a la mitad del máximo de cada curva.

La figura 14 indica la experiencia común de sintonizar un aparato de radio. Al girar el botón de sintonía, estamos ajustando la frecuencia natural ω de un circuito LC interno para que coincida con la frecuencia de excitación ω'' de la señal transmitida por la antena de la estación transmisora; estamos buscando la resonancia. En un área metropolitana, donde existen muchas señales cuyas frecuencias están a menudo muy cercanas entre sí, la finura de la sintonización resulta importante.

La figura 14 es semejante a la figura 20 del capítulo 15, que muestra los picos de resonancia de las oscilaciones forzadas de un oscilador mecánico como el de la figura 13*b*. También en este caso, la respuesta máxima ocurre cuando $\omega'' = \omega$, y los picos de resonancia se vuelven más agudos al reducirse el factor de amortiguamiento (el coeficiente b). Nótese que las curvas de la figura 14 y de la figura 20 del capítulo 15 no son exactamente iguales. La primera es una gráfica de la amplitud de la corriente, mientras que la última es una gráfica de la amplitud del desplazamiento. La variable mecánica que corresponde a la corriente no es el desplazamiento sino la velocidad. Sin embargo, ambos conjuntos de curvas ilustran el fenómeno de resonancia.

PREGUNTAS

1. Demuestre que las dimensiones de las dos expresiones para L, $N\Phi_B/i$ (Ec. 6) y $\mathcal{E}_L/(di/dt)$ (Ec. 2), son una misma.
2. Si el flujo que atraviesa a cada vuelta de una bobina es el mismo, la inductancia de la bobina puede calcularse de $L = N\Phi_B/i$ (Ec. 6). ¿Cómo podríamos calcular L en una bobina para la que esta hipótesis no es válida?
3. Dé ejemplos de cómo puede cambiar el flujo de eslabonado por una bobina debido al estiramiento o la compresión de la bobina.
4. Uno quiere devanar una bobina de modo que tenga resistencia pero que casi no tenga inductancia. ¿Cómo lo haría?
5. Un cilindro largo está devanado de izquierda a derecha con una capa de alambre, dándole n vueltas por unidad de longitud con una inductancia de L_1, como en la figura 15*a*. Si se continuara ahora el devanado, en el mismo *sentido* pero ahora de derecha a izquierda, como se muestra en la figura 15*b*, de modo que se tenga una segunda capa también de n vueltas por unidad de longitud, ¿cuál sería entonces el valor de la inductancia?
6. ¿Es la inductancia por unidad de longitud de un solenoide real, cerca de su centro, igual que, menor que, o mayor que la inductancia por unidad de longitud cerca de sus extremos? Justifique su respuesta.
7. Explique por qué se espera que la inductancia de un cable coaxial aumente cuando el radio del conductor exterior se aumenta, permaneciendo fijo el radio del conductor interior.
8. Se le da una longitud l de alambre de cobre. ¿Cómo lo dispondría para obtener la inductancia máxima?
9. Explique cómo un alambre recto largo puede exhibir efectos de inducción. ¿Cómo haría usted para buscarlos?
10. Se crea una corriente estacionaria en una bobina con una constante de tiempo inductiva muy grande. Cuando la corriente se interrumpe por medio de un interruptor, tiende

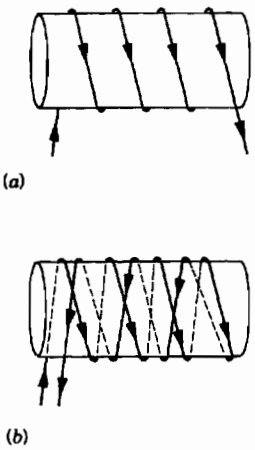


Figura 15 Pregunta 5.

a aparecer un arco intenso en las cuchillas del interruptor. Explique por qué. (*Nota*: La interrupción de las corrientes en circuitos altamente inductivos puede ser destructora y peligrosa.)

11. Supóngase que se conecta una bobina ideal (esto es, esencialmente sin resistencia) a una batería ideal (una vez más esencialmente sin resistencia). Podría pensarse que, puesto que no existe resistencia en el circuito, la corriente crecería rápidamente hasta un valor muy grande. Por otra parte, podría pensarse que, puesto que la constante de tiempo inductiva ($= L/R$) es muy grande, la corriente se elevaría muy lentamente, en caso de que sucediera. ¿Qué pasaría realmente?
12. En un circuito *LR* como el de la figura 5, ¿puede alguna vez la fem inducida ser mayor que la fem de la batería?
13. En un circuito *LR* como el de la figura 5, ¿es la corriente en el resistor siempre la misma que la corriente en el inductor?
14. En el circuito de la figura 4, la fem inducida adquiere un máximo en el instante en que se cierra el interruptor en *a*. ¿Cómo puede ser esto puesto que no existe corriente en el inductor en dicho instante?
15. El tiempo necesario para que la corriente en un circuito *LR* en particular aumente hasta una fracción dada de su equilibrio, ¿depende, acaso, del valor de la fem constante aplicada?
16. Si, en una fuente de fem, la corriente circula en la dirección de la fem, la energía de la fuente disminuye; si existe una corriente en una dirección opuesta a la fem (como al cargar una batería), la energía de la fuente aumenta. ¿Se aplican estas afirmaciones al inductor de las figuras 2*a* y 2*b*?
17. ¿Puede la fuerza contraelectromotriz en un inductor estar en el mismo sentido que la fem de la fuente, la cual proporciona al inductor su energía magnética?
18. El interruptor de la figura 4, que ha estado cerrado en *a* durante un tiempo "largo", se conecta a *b*. ¿Qué le pasa a la energía que está almacenada en el inductor?
19. Una bobina tiene una inductancia (medida) *L* y una resistencia (medida) *R*. ¿Está dada su constante de tiempo inductiva por $\tau_L = L/R$ necesariamente? Téngase en cuenta que esta ecuación se obtuvo (véase la Fig. 4) para una situación en la que los elementos inductivo y resistivo están separados físicamente. Analícelo.
20. La figura 6*a* en este capítulo y la figura 14*b* en el capítulo 33 son gráficas de $V_R(t)$ para un circuito *LR* y un circuito *RC*, respectivamente. ¿Por qué son diferentes estas dos curvas? Considérese cada una en términos de los procesos físicos que suceden en el circuito apropiado.
21. Dos solenoides, *A* y *B*, tienen el mismo diámetro y longitud y contienen sólo una capa de devanado de cobre, tocándose las vueltas contiguas, siendo insignificante el espesor del aislamiento. El solenoide *A* contiene muchas vueltas de alambre fino y el solenoide *B* contiene menos vueltas de un alambre más grueso. (*a*) ¿Cuál solenoide tiene la inductancia más grande? (*b*) ¿Cuál solenoide tiene la constante de tiempo inductiva más grande? Justifique sus respuestas.
22. ¿Puede usted dar un argumento basado en la manipulación de barras magnetizadas para indicar que en un campo magnético puede almacenarse energía?
23. Formule todas las analogías formales entre un capacitor de placas paralelas (para campos eléctricos) y un solenoide largo (para campos magnéticos) que usted pueda imaginarse.
24. En cada una de las operaciones siguientes se gasta energía. Parte de esta energía es reversible (puede reconvertirse) en forma de energía eléctrica que puede hacerse que efectúe un trabajo útil, y parte es inaccesible para el trabajo útil o se desperdicia de otras maneras. ¿En qué caso existirá la fracción *menor* de energía eléctrica reversible? (*a*) Al cargar un capacitor; (*b*) al cargar un acumulador; (*c*) al enviar una corriente por un resistor; (*d*) al crear un campo magnético; y (*e*) al mover un conductor dentro de un campo magnético.
25. En un solenoide se invierte la corriente. ¿Qué cambios se efectúan en el campo magnético **B** y en la densidad u_B de la energía en los diversos puntos a lo largo del eje del solenoide?
26. En los dispositivos comerciales como los motores y los generadores que forman parte de la transformación de energía entre las formas mecánica y eléctrica implican campos magnéticos más bien que campos electrostáticos. ¿Por qué es esto así?
27. ¿Por qué no simplemente cesa de oscilar el circuito *LC* de la figura 9 cuando el capacitor se ha descargado completamente?
28. ¿Cómo podría usted poner en oscilación a un circuito *LC* estando representada su condición inicial por la figura 9*c*? Idee un diseño de conmutación para llevarlo a cabo.
29. En la figura 10, la curva de abajo *b* es proporcional a la derivada de la curva de arriba *a*. Explique por qué.
30. En un circuito *LC* oscilatorio, supuesto sin resistencia, ¿qué determina (*a*) la frecuencia y (*b*) la amplitud de las oscilaciones?
31. En conexión con las figuras 9*c* y 9*g*, explique cómo puede existir una corriente en el inductor aun cuando no exista carga en el capacitor.

32. En la figura 9, ¿qué cambios se requieren si las oscilaciones han de proceder en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la figura?
33. En la figura 9, ¿qué constantes de fase ϕ en la ecuación 41 permitirían que las ocho situaciones de circuito mostradas sean suficientes como condiciones iniciales?
34. ¿Qué dificultades encontraría usted al tratar de construir un circuito LC del tipo mostrado en la figura 9 para oscilar (*a*) a 0.01 Hz o (*b*) a 10 GHz?
35. Dos inductores L_1 y L_2 y dos capacitores C_1 y C_2 pueden conectarse en serie de acuerdo a como se muestra en la figura 16*a* o 16*b*. ¿Son iguales las frecuencias de los dos circuitos oscilatorios? Considere los dos casos (*a*) $C_1 = C_2$, $L_1 = L_2$ y (*b*) $C_1 \neq C_2$, $L_1 \neq L_2$.

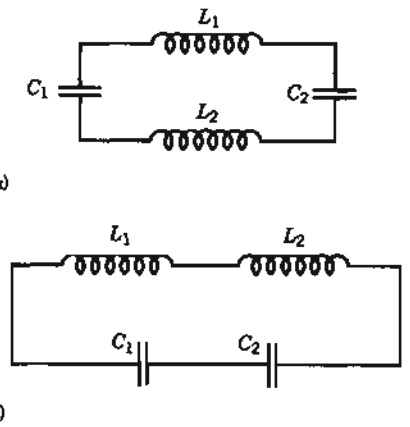


Figura 16 Pregunta 35.

36. En la analogía mecánica del circuito LC oscilatorio, ¿qué cantidad mecánica corresponde a la diferencia de potencial?
37. Al comparar el sistema oscilatorio electromagnético con un sistema oscilatorio mecánico, ¿a qué propiedades mecánicas equivalen en analogía las siguientes propiedades electromagnéticas: capacitancia, resistencia, carga, energía del campo eléctrico, energía del campo magnético, inductancia, y corriente?

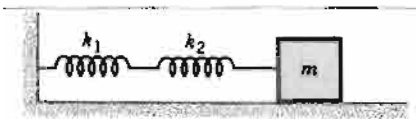


Figura 17 Pregunta 38.

38. Dos resortes se unen y se conectan a un objeto de masa m, de tal modo que pueda oscilar libremente sobre una superficie horizontal carente de fricción como se muestra en la figura 17. Dibuje el análogo electromagnético de este sistema oscilatorio mecánico.
39. Explique por qué no es posible tener (*a*) un circuito LC real sin resistencia, (*b*) un inductor real sin capacitancia inherente, o (*c*) un capacitor real sin inductancia inherente. Analice la validez práctica del circuito LC de la figura 9, donde se hace caso omiso a cada una de las realidades anteriores.
40. Todos los circuitos LC prácticos deben contener cierta resistencia. Sin embargo, podemos comprar un oscilador de audio integrado en el que la salida mantenga una amplitud constante indefinidamente y no disminuya, como sucede en la figura 12. ¿Cómo puede suceder esto?
41. ¿Cómo se vería la curva de resonancia para $R = 0$ si se le trazase en la figura 14?
42. ¿Puede imaginarse una razón física para suponer que R es "pequeña" en las ecuaciones 50 y 51? (*Sugerencia*: Considere lo que pasaría si la R de amortiguamiento fuera tan grande que la ecuación 50 no funcionara ni siquiera a través de un ciclo de oscilación antes de que q se reduzca esencialmente a cero. ¿Podría suceder esto? De ser así, ¿cómo se imagina que sería la figura 12?)
43. ¿Cuál es la diferencia entre los circuitos oscilatorios libre, amortiguado y forzado?
44. Haga una tabla de tantos sistemas mecánicos o eléctricos como pueda usted imaginarse que posean una frecuencia natural, y asocie su fórmula para esa frecuencia, si ésta se encuentra en el texto.
45. En el circuito oscilatorio de un receptor de radio, ¿es deseable tener un factor Q bajo o alto? Explíquelo. (Véase el problema 71.)

PROBLEMAS

Sección 38-2 Cálculo de la inductancia

1. La inductancia de una bobina compacta de 400 vueltas es de 8.0 mH. Calcule el flujo magnético a través de la bobina cuando la corriente es de 5.0 mA.
2. Una bobina circular tiene un radio de 10.3 cm y consta de 34 vueltas de alambre estrechamente devanadas. Un campo magnético de 2.62 mT, producido externamente, es perpendicular a la bobina. (*a*) Si no existe corriente en la bobina, ¿cuál es el número de enlaces (eslabones) del flujo? (*b*) Cuando la corriente en la bobina es de 3.77 A en una cierta dirección, se encuentra que el flujo neto a través de la bobina se anula. Determine la inductancia de la bobina.
3. Se devana un solenoide con una sola capa de alambre de cobre (diámetro = 2.52 mm) aislado. El solenoide tiene un diámetro de 4.10 cm y una longitud de 2.0 m. ¿Cuál es la inductancia por metro del solenoide cerca de su centro? Suponga que los alambres contiguos se tocan y que el espesor del aislamiento es despreciable.

4. En cierto instante la corriente y la fem inducida en un inductor son como se indica en la figura 18. (*a*) ¿Está la corriente aumentando o disminuyendo? (*b*) La fem es de 17 V, y la velocidad a la que cambia la corriente es de 25 kA/s; ¿cuál es el valor de la inductancia?

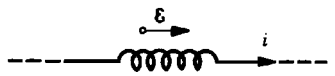


Figura 18 Problema 4.

5. La inductancia de una bobina de N vueltas estrechamente devanada es tal que se induce una fem de 3.0 mV cuando la corriente cambia a razón de 5.0 A/s. Una corriente estacionaria de 8.0 A produce un flujo magnético de 40 μWb a través de cada espira. (*a*) Calcule la inductancia de la bobina. (*b*) ¿Cuántas espiras tiene la bobina?
6. Un toroide de una sección transversal cuadrada de 5.20 cm y un radio interior de 15.3 cm tiene 536 vueltas de alambre y conduce una corriente de 810 mA. Calcule el flujo magnético a través de la sección transversal.
7. Un solenoide de 126 cm de longitud está formado por 1870 espiras que conducen una corriente de 4.36 A. El núcleo del solenoide está lleno de hierro, y la constante de permeabilidad efectiva es 968. Calcule la inductancia del solenoide, suponiendo que pueda considerarse como ideal, con un diámetro de 5.45 cm.
8. La corriente i que pasa por un inductor de 4.6 H varía con el tiempo t como se muestra en la gráfica de la figura 19. Calcule la fem inducida durante los intervalos de tiempo (*a*) $t = 0$ a $t = 2$ ms, (*b*) $t = 2$ ms a $t = 5$ ms, y (*c*) $t = 5$ ms a $t = 6$ ms. (No considere el comportamiento al final de los intervalos.)

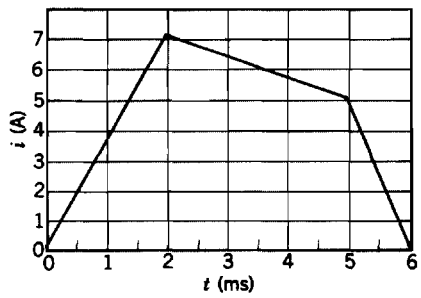


Figura 19 Problema 8.

9. Un solenoide delgado y largo se puede doblar para hacer un anillo para formar un toroide. Demuestre que si el solenoide es lo suficientemente largo y delgado, la ecuación para la inductancia de un toroide (Ec. 12) equivale a la de un solenoide de la longitud apropiada (Ec. 9).
10. Dos inductores L_1 y L_2 están conectados en serie y separados por una distancia grande. (*a*) Demuestre que la inductancia equivalente está dada por

$$L_{eq} = L_1 + L_2.$$

(*b*) ¿Por qué debe ser grande su separación para que esta relación se cumpla?

11. Dos inductores L_1 y L_2 están conectados en paralelo y separados por una gran distancia. (*a*) Demuestre que la inductancia equivalente está dada por

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(*b*) ¿Por qué debe ser grande su separación para que esta relación se cumpla?

12. Una cinta ancha de cobre de anchura W se dobla en forma de una pieza tubular esbelta de radio R con dos extensiones planas, como se muestra en la figura 20. Por la cinta fluye una corriente i, distribuida uniformemente sobre su anchura. De esta manera se ha formado un "solenoide de una sola espira". (*a*) Obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético **B** en la parte tubular (lejos de los bordes). (*Sugerencia*: Suponga que el campo en el exterior de este solenoide de una sola espira sea despreciable.) (*b*) Halle también la inductancia de este solenoide de una sola vuelta, despreciando las dos extensiones planas.

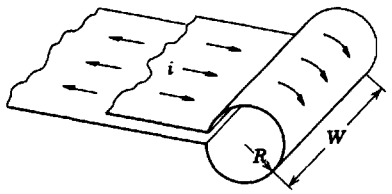


Figura 20 Problema 12.

13. Dos alambres paralelos largos, cada uno de radio a, cuyos centros están a una distancia d de separación, conducen corrientes iguales en direcciones opuestas. Demuestre que, despreciando el flujo entre los alambres mismos, la inductancia de una longitud l de tal par de alambres está dada por

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Véase el problema muestra 1, capítulo 35. (*Sugerencia*: Calcule el flujo a través de un rectángulo en el que los alambres formen dos lados opuestos.)

14. Dos alambres de cobre largos y paralelos (2.60 mm de diámetro) conducen corrientes de 11.3 A en direcciones opuestas. (*a*) Si sus centros están separados por 21.8 mm, calcule el flujo por metro de alambre que existe en el espacio entre los ejes de los alambres. (*b*) ¿Qué fracción de este flujo se encuentra dentro de los alambres y, por tanto, cuál es el error fraccionario cometido al despreciar este flujo cuando se calcula la inductancia de dos alambres paralelos? Véase el problema 13. (*c*) Repita los cálculos de (*a*) en el caso de corrientes paralelas.
15. Halle la inductancia del cable coaxial de la figura 8 directamente de la ecuación 6. (*Sugerencia*: Calcule el flujo a través de una superficie rectangular, perpendicular a **B**, de longitud l y anchura $b - a$.)

Sección 38-3 Circuitos LR

16. La corriente en un circuito *LR* aumenta a un tercio de su valor de estado estacionario en 5.22 s. Calcule la constante de tiempo inductiva.

17. La corriente en un circuito *LR* desciende desde 1.16 A a 10.2 mA en el 1.50 s que sigue inmediatamente al quitar la batería del circuito. Si L es de 9.44 H, encuentre la resistencia R en el circuito.

18. (*a*) Considere el circuito *LR* de la figura 4. En términos de la fem $\mathcal{E}$ de la batería, ¿cuál es la fem inducida $\mathcal{E}_L$ cuando el interruptor acaba de cerrarse sobre *a*? (*b*) ¿Cuál es $\mathcal{E}_L$ despúes de dos constantes de tiempo? (*c*) ¿Después de cuántas constantes de tiempo será $\mathcal{E}_L$ precisamente la mitad de la fem de la batería?

19. El número de eslabones o enlaces de flujo a través de una bobina de 745 mΩ de resistencia es de 26.2 mWb cuando existe una corriente de 5.48 A en ella. (*a*) Calcule la inductancia de la bobina. (*b*) Si se conecta súbitamente una batería de 6.00 V a la bobina, ¿cuánto tiempo le tomaría a la corriente subir de 0 a 2.53 A?

20. (*a*) Demuestre que la ecuación 20 puede escribirse

$$\frac{di}{i - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}\,dt.$$

(*b*) Integre esta ecuación para obtener la ecuación 21.

21. Supóngase que la fem de la batería en el circuito de la figura 5 varía con el tiempo t de modo que la corriente está dada por $i(t) = 3.0 + 5.0t$, donde i está en amperes y t en segundos. Considere $R = 4.0\ \Omega$, $L = 6.0$ H, y encuentre una expresión para la fem de la batería en función del tiempo. (*Sugerencia*: Aplique la regla del circuito cerrado.)

22. En $t = 0$ se conecta una batería a un inductor y un resistor conectados en serie. La tabla de abajo da la diferencia de potencial, en volts, medida en los extremos del inductor en función del tiempo, en ms, que sigue de la conexión de la batería. Deduzca (*a*) la fem de la batería y (*b*) la constante de tiempo del circuito.

t (ms)	V_L (V)	t (ms)	V_L (V)
1.0	18.2	5.0	5.98
2.0	13.8	6.0	4.53
3.0	10.4	7.0	3.43
4.0	7.90	8.0	2.60

23. A una bobina con $L = 50$ mH y $R = 180\ \Omega$ se le aplica súbitamente una diferencia de potencial de 45 V. ¿A qué velocidad está creciendo la corriente después de 1.2 ms?

24. Un toroide con un núcleo de madera de sección transversal cuadrada tiene un radio interior de 10 cm y un radio exterior de 12 cm. Está devanado con una capa de alambre (diámetro, 0.96 mm; resistencia por unidad de longitud, 21 mΩ/m). Calcule (*a*) la inductancia y (*b*) la constante inductiva de tiempo. No considere el espesor del aislamiento.

25. En la figura 21, $\mathcal{E} = 100$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, y $L = 2.0$ H. Halle los valores de i_1 e i_2 (*a*) inmediatamente después de haber sido cerrado el interruptor S; (*b*) un tiempo largo después; (*c*) inmediatamente después de que es abierto de nuevo el interruptor S; (*d*) un tiempo largo después.

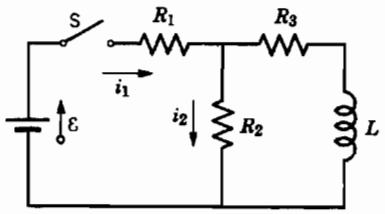


Figura 21 Problema 25.

26. En el circuito que se muestra en la figura 22, $\mathcal{E} = 10$ V, $R_1 = 5.0\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ y $L = 5.0$ H. Para las dos condiciones por separado (I) el interruptor S acaba de cerrarse y (II) el interruptor S ha estado cerrado durante un tiempo largo, calcule (*a*) la corriente i_1 que pasa por R_1, (*b*) la corriente i_2 que fluye por R_2, (*c*) la corriente i en el interruptor, (*d*) la diferencia de potencial a través de R_2, (*e*) la diferencia de potencial a través de L, y (*f*) di_2/dt.

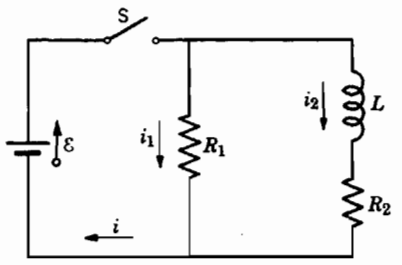


Figura 22 Problema 26.

27. Demuestre que la constante inductiva de tiempo τ_L puede definirse también como el tiempo que se requiere para que la corriente en un circuito *LR* alcance su valor de equilibrio *si continuase aumentando a su velocidad inicial.*

28. En la figura 23, el componente de la rama superior es un fusible ideal de 3.0 A. Tiene una resistencia nula en tanto que la corriente que pasa por él permanezca a menos de 3.0 A. Si la corriente alcanza 3.0 A, se "funde" y después tiene una resistencia infinita. El interruptor S se cierra en el tiempo $t = 0$. (*a*) ¿Cuándo se funde el fusible? (*b*) Trace una gráfica de la corriente i que pasa por el inductor en función del tiempo. Marque el momento en que se quema el fusible.

Sección 38-4 Almacenamiento de energía en un campo magnético

29. La energía magnética almacenada en cierto inductor es de 25.3 mJ cuando la corriente es de 62.0 mA. (*a*) Calcule la inductancia. (*b*) ¿Qué corriente se requiere para que la energía magnética sea de cuatro veces más?

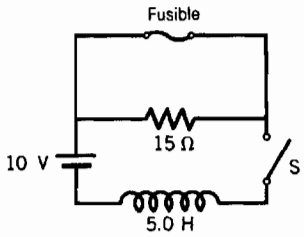


Figura 23 Problema 28.

30. Un inductor toroidal de 92 mH encierra un volumen de 0.022 m^3. Si la densidad promedio de la energía en el toroide es de 71 J/m^3, calcule la corriente.

31. Halle la densidad de la energía magnética en el centro de un electrón que gira en el átomo de hidrógeno (véase el problema muestra 2, capítulo 35).

32. Un solenoide de 85.3 cm de longitud tiene un área de su sección transversal de 17.2 cm^2. Hay 950 vueltas de alambre conduciendo una corriente de 6.57 A. (*a*) Calcule la densidad de energía del campo magnético dentro del solenoide. (*b*) Halle la energía total almacenada en el campo magnético dentro del solenoide. (Desprecie los efectos.)

33. ¿Cuál debe ser la magnitud de un campo eléctrico uniforme si se quiere que tenga la misma densidad de energía que aquél que posee un campo magnético de 0.50 T?

34. El campo magnético del espacio interestelar de nuestra galaxia tiene una magnitud de unos 100 pT. (*a*) Calcule la densidad de energía correspondiente, en eV/cm^3. (*b*) ¿Cuánta energía se almacena dentro de este campo en un cubo de 10 años luz por arista? (Para darnos una noción de la escala, nótese que la estrella más cercana, diferente al Sol, está a una distancia de 4.3 años luz y que el "radio" de nuestra galaxia es de unos 80,000 años luz.)

35. La bobina de un electroimán superconductor usado en las investigaciones de la resonancia magnética nuclear tiene una inductancia de 152 H y conduce una corriente de 32 A. La bobina se sumerge en helio líquido, el cual tiene un calor latente de vaporización de 85 J/mol. (*a*) Calcule la energía en el campo magnético de la bobina. (*b*) Halle la masa de helio que se desprende al hervir cuando el superconductor es sumergido y por ello aparece súbitamente una resistencia finita.

36. Supóngase que la constante inductiva de tiempo del circuito de la figura 5 es de 37.5 ms y que la corriente en el circuito es cero en el tiempo $t = 0$. ¿En qué tiempo es igual la velocidad a la que se disipa energía en el resistor a la velocidad a la que la energía está almacenándose en el inductor?

37. Una bobina está conectada en serie con un resistor de 10.4 kΩ. Al aplicar a ambos una batería de 55.0 V, la corriente alcanza un valor de 1.96 mA después de 5.20 ms. (*a*) Halle la inductancia de la bobina. (*b*) ¿Cuánta energía se almacena en la bobina en ese mismo instante?

38. En el circuito de la figura 5, suponga que $\mathcal{E} = 12.2$ V, $R = 7.34\ \Omega$, y $L = 5.48$ H. La batería se conecta en el tiempo $t = 0$. (*a*) ¿Cuánta energía entrega la batería durante los primeros 2.00 s? (*b*) ¿Cuánta de esta energía se almacena en el campo magnético del inductor? (*c*) ¿Cuánta ha aparecido en el resistor?

39. (*a*) Halle una expresión para la densidad de energía como función de la distancia radial r de un toroide de sección transversal rectangular. (*b*) Por integración de la densidad de energía en el volumen del toroide, calcule la energía total almacenada en el campo del toroide. (*c*) Usando la ecuación 12, calcule la energía almacenada en el toroide partiendo directamente de la inductancia, y compárela con (*b*).

40. Un tramo de alambre de cobre conduce una corriente de 10 A, distribuida uniformemente. Calcule (*a*) la densidad de energía magnética y (*b*) la densidad de energía eléctrica en la superficie del alambre. El diámetro del alambre es de 2.5 mm y su resistencia por unidad de longitud es de 3.3 Ω/km.

41. El campo magnético en la superficie de la Tierra tiene una intensidad de unos 60 μT. Suponiendo que éste sea relativamente constante para distancias radiales pequeñas en comparación con el radio de la Tierra y despreciando las variaciones cerca de los polos magnéticos, calcule la energía almacenada en una esfera hueca situada entre la superficie de la Tierra y 16 km por arriba de la superficie.

42. Demuestre que, después de conectar el interruptor S, de la figura 4, de *a* a *b*, toda la energía almacenada en el inductor aparece finalmente como energía interna en el resistor.

43. Un alambre largo conduce una corriente i distribuida uniformemente en una sección transversal del alambre. (*a*) Demuestre que la energía magnética de un tramo l almacenada *dentro* del alambre es igual a $\mu_0 i^2 l/16\pi$. (¿Por qué no depende del diámetro del alambre?) (*b*) Demuestre que la inductancia en un tramo l del alambre asociada con el flujo *dentro* del alambre es de $\mu_0 l/8\pi$.

Sección 38-5 Oscilaciones electromagnéticas: análisis cualitativo

44. ¿Cuál es la capacitancia de un circuito LC si la carga máxima en el capacitor es de 1.63 μC y la energía total de 142 μJ?

45. Un inductor de 1.48 mH en un circuito LC almacena un máximo de energía de 11.2 μJ? ¿Cuál es la corriente pico?

46. En un circuito oscilatorio LC, $L = 1.13$ mH y $C = 3.88$ μF. La carga máxima en el capacitor es de 2.94 μC. Calcule la corriente máxima.

47. Se han empleado osciladores LC en circuitos los cuales se conectan a altavoces para crear alguno de los sonidos de la "música electrónica". ¿Qué inductancia debe emplearse con un capacitor de 6.7 μF para producir una frecuencia de 10 kHz, cerca del extremo superior de la región de frecuencias audibles?

48. Se dispone de un inductor de 10.0 mH y de dos capacitores, de 5.00 μF y 2.00 μF de capacitancia. Haga una lista de las frecuencias de resonancia que pueden generarse al conectar estos elementos en varias combinaciones.

49. Considere el circuito mostrado en la figura 24. Con el interruptor S_1 cerrado y los otros dos interruptores abiertos, el circuito tiene una constante de tiempo τ_c. Con el

interruptor S_2 cerrado y los otros dos interruptores abiertos, el circuito tiene una constante de tiempo τ_L. Con el interruptor S_3 cerrado y los otros dos interruptores abiertos, el circuito oscila con un periodo T. Demuestre que $T = 2\pi\sqrt{\tau_C \tau_L}$.

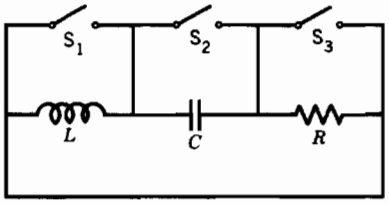


Figura 24 Problema 49.

50. Un cuerpo de 485 g oscila en un resorte que, cuando se le elonga 2.10 mm de su posición de equilibrio, tiene una fuerza de restitución de 8.13 N. (*a*) Calcule la frecuencia angular de la oscilación. (*b*) ¿Cuál es su periodo de oscilación? (*c*) ¿Cuál es la capacitancia del sistema *LC* análogo cuando se elige que *L* sea 5.20 H?

Sección 38-6 Oscilaciones electromagnéticas: análisis cuantitavo

51. En cierto circuito *LC* la energía total se transforma de energía eléctrica en el capacitor a energía magnética en el inductor en 1.52 μs. (*a*) ¿Cuál es el periodo de la oscilación? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación? (*c*) ¿Cuánto tiempo después de que la energía magnética sea un máximo volverá a ser un máximo otra vez?

52. En un circuito *LC* con $L = 52.2$ mH y $C = 4.21$ μF, la corriente es un máximo inicialmente. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el capacitor se cargue completamente por vez primera?

53. Un circuito oscilatorio *LC* está diseñado para operar con una corriente pico de 31 mA. La inductancia de 42 mH es fija y la frecuencia varía al cambiar *C*. (*a*) Si el capacitor tiene un voltaje pico de 50 V máximo, ¿puede operar el circuito con seguridad a una frecuencia de 1.0 MHz? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de operación segura máxima? (*c*) ¿Cuál es la capacitancia mínima?

54. Un circuito oscilatorio *LC* que consta de un capacitor de 1.13 nF y una bobina de 3.17 mH tiene una caída de potencial pico de 2.87 V. Halle (*a*) la carga máxima en el capacitor, (*b*) la corriente de pico en el circuito, y (*c*) la energía almacenada máxima en el campo magnético de la bobina.

55. Un circuito *LC* tiene una inductancia de 3.0 mH y una capacitancia de 10 μF. Calcule (*a*) la frecuencia angular y (*b*) el periodo de oscilación. (*c*) En el tiempo $t = 0$ el capacitor se carga a 200 μC, y la corriente es cero. Dibuje un bosquejo de la carga en el capacitor en función del tiempo.

56. En el circuito que se muestra en la figura 25, el interruptor ha estado en la posición *a* durante largo tiempo. Ahora se conecta a *b*. (*a*) Calcule la frecuencia de la corriente oscilatoria resultante. (*b*) ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones de la corriente?

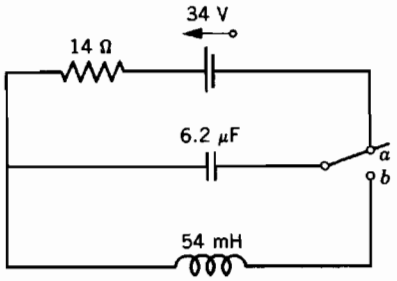


Figura 25 Problema 56.

57. (*a*) En un circuito oscilatorio *LC*, en términos de la carga máxima en el capacitor, ¿qué valor de la carga está presente cuando la energía en el campo eléctrico es la mitad de la energía en el campo magnético? (*b*) ¿Qué fracción de un periodo debe transcurrir para que se origine esta condición después del momento en que se haya cargado el capacitor completamente?

58. Un inductor está conectado en paralelo a un capacitor cuya capacitancia puede variarse al girar un botón. Deseamos hacer que la frecuencia de las oscilaciones *LC* varíe linealmente con el ángulo de rotación del botón, yendo de 200 a 400 kHz cuando el botón gira a 180°. Si $L = 1.0$ mH, grafique *C* en función del ángulo de rotación de 180°.

59. Se emplea un capacitor variable cuyo valor puede variar de 10 a 365 pF con una bobina para formar un circuito *LC* de frecuencia variable y sintonizar la entrada de un aparato de radio. (*a*) ¿Qué razón entre las frecuencias máxima y mínima puede sintonizarse con tal capacitor? (*b*) Si se desea que con este capacitor se sintonicen de 0.54 a 1.60 MHz, la razón calculada en (*a*) es demasiado grande. Esta banda puede ajustarse añadiendo un capacitor en paralelo al capacitor variable. ¿Cuán grande sería este capacitor y qué inductancia se elegiría con objeto de sintonizar la banda de frecuencias deseada?

60. En un circuito *LC*, $L = 24.8$ mH y $C = 7.73$ μF. En el tiempo $t = 0$ la corriente es de 9.16 mA, la carga en el capacitor es de 3.83 μC, y el capacitor se está cargando. (*a*) ¿Cuál es la energía total del circuito? (*b*) ¿Cuál es la carga máxima en el capacitor? (*c*) ¿Cuál es la corriente máxima? (*d*) Si la carga en el capacitor está dada por $q = q_m \cos(\omega t + \phi)$, ¿cuál es el ángulo de fase ϕ? (*e*) Supóngase que los datos sean los mismos, excepto que el capacitor se descarga en $t = 0$. ¿Cuál será entonces el ángulo de fase ϕ?

61. En un circuito oscilatorio *LC*, $L = 3.0$ mH y $C = 2.7$ μF. En $t = 0$ la carga en el capacitor es cero y la corriente es de 2.0 A. (*a*) ¿Cuál es la carga máxima que aparecerá en el capacitor? (*b*) En términos del periodo de oscilación *T*, ¿cuánto tiempo transcurrirá después de $t = 0$ hasta que la energía almacenada en el capacitor esté aumentando a su máxima velocidad? (*c*) ¿Cuál es la máxima velocidad a la que fluye la energía dentro del capacitor?

62. La frecuencia resonante de un circuito en serie que contiene una inductancia L_1 y una capacitancia C_1 es ω_0. Un

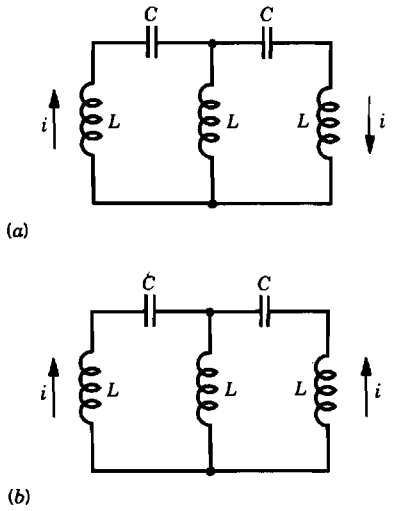


Figura 26 Problema 63.

segundo circuito en serie, que contiene una inductancia L_2 y una capacitancia C_2, tiene la misma frecuencia resonante. En términos de ω_0, ¿cuál es la frecuencia resonante de un circuito en serie que contenga a los cuatro de estos elementos? Desprecie la resistencia. (*Sugerencia*: Use las fórmulas para la capacitancia equivalente y la inductancia equivalente.)

63. Tres inductores idénticos L y dos capacitores idénticos C están conectados en un circuito de dos mallas como se muestra en la figura 26. (*a*) Supóngase que las corrientes sean como se muestra en la figura 26*a*. ¿Cuál es la corriente en el inductor del centro? Escriba las ecuaciones de la malla y demuestre que se satisfacen siempre y cuando la corriente oscile con una frecuencia angular de $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (*b*) Supóngase ahora que las corrientes son como se muestra en la figura 26*b*. ¿Cuál es la corriente en el inductor del centro? Escriba las ecuaciones de la malla y demuestre que se satisfacen siempre y cuando la corriente oscile con una frecuencia angular de $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. (*c*) En virtud de que el circuito puede oscilar a dos frecuencias diferentes, demuestre que no es posible reemplazar a este circuito de dos mallas por un circuito LC equivalente de una sola malla.

64. En la figura 27, el capacitor de 900 μF está inicialmente cargado a 100 V y el capacitor de 100 μF está descargado. Describa con detalle cómo podríamos cargar el capacitor de 100 μF a 300 V manipulando los interruptores S_1 y S_2.

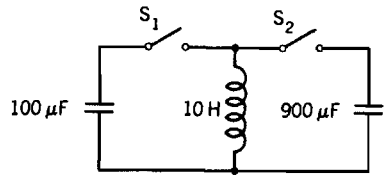


Figura 27 Problema 64.

Sección 38-7 Oscilaciones amortiguadas y forzadas

65. En un circuito LC amortiguado, calcule el tiempo necesario para que la energía máxima presente en el capacitor durante una oscilación caiga a la mitad de su valor inicial. Suponga que $q = q_m$ en $t = 0$.

66. Un circuito de una sola malla consta de un resistor de 7.22 Ω, un inductor de 12.3 H y un capacitor de 3.18 μF. Inicialmente, el capacitor tiene una carga de 6.31 μC y la corriente es cero. Calcule la carga en el capacitor después de N ciclos completos para $N = 5$, 10 y 100.

67. ¿Cuánta resistencia R debe conectarse a un inductor L = 220 mH y un capacitor C = 12 μF en serie con objeto de que la carga máxima en el capacitor decaiga al 99% de su valor inicial en 50 ciclos?

68. (*a*) Por sustitución directa de la ecuación 50 en la ecuación 49, demuestre que $\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}$. (*b*) ¿En qué fracción se recorre la frecuencia de oscilación cuando la resistencia aumenta de 0 a 100 Ω en un circuito con L = 4.4 H y C = 7.3 μF?

69. Un circuito tiene L = 12.6 mH y C = 1.15 μF. ¿Cuánta resistencia debe insertarse en el circuito para reducir la frecuecia resonante (no amortiguada) en 0.01%?

70. Supóngase que, en un circuito LC amortiguado, la amplitud de las oscilaciones de la carga caiga a la mitad de su valor inicial después de n ciclos. Demuestre que la reducción fraccionaria en la frecuencia de resonancia, causada por la presencia del resistor, está dada con una buena aproximación por

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{0.0061}{n^2},$$

la cual es independiente de L, C o R.

71. En un circuito LC amortiguado, demuestre que la fracción de la energía perdida por ciclo de oscilación, $\Delta U/U$, está dada con una aproximación suficiente por $2\pi R/\omega L$. A la cantidad $\omega L/R$ suele llamársele Q (la "calidad")* del circuito. Un circuito con "Q alta" tiene una resistencia baja y una pérdida fraccionaria de energía por ciclo baja ($= 2\pi/Q$).

* Se designa con una Q porque toma su nombre del inglés, *quality*. (N. del E.)

CAPÍTULO 39

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Los circuitos de corrientes alternas *(término comúnmente abreviado como CA) se usan en los sistemas de distribución de energía eléctrica, en la radio, en la televisión, y en otros dispositivos de comunicación, así como en una amplia variedad de motores eléctricos. El calificativo de "alterna" significa que la corriente cambia de dirección, alternando periódicamente de una dirección a la otra. Por lo general, trabajamos con corrientes que varían de forma senoidal con el tiempo; sin embargo, como hemos visto previamente en el caso del movimiento ondulatorio, las formas de onda complejas pueden considerarse como combinaciones de ondas senoidales (por medio del análisis de Fourier) y, por analogía, podemos entender el comportamiento de los circuitos que tienen corrientes que dependen de modo arbitrario del tiempo entendiendo primero el comportamiento de los circuitos que tienen corrientes que varían senoidalmente con el tiempo.*

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de circuitos simples que contienen resistores, inductores y capacitores cuando está presente una fuente de fem que varía senoidalmente.

39-1 CORRIENTES ALTERNAS

Previamente hemos analizado la corriente producida cuando se aplica una fem que varía con el tiempo en formas distintas a circuitos que contienen elementos individuales o combinados de resistencia R, inductancia L y capacitancia C. En el capítulo 33 hemos estudiado las corrientes estacionarias resultantes de la aplicación de fem estacionaria a redes puramente resistivas. En la sección 33-7 vimos la respuesta de un circuito RC, de una sola malla cuando se aplica súbitamente una fem y, por otra parte, en la sección 38-3 se consideró de manera similar el circuito LR. En las secciones 38-5 y 38-6 se analiza el comportamiento de un circuito LC sin una fuente de fem y el comportamiento de un circuito RLC frente a una fem senoidal en o muy próximo a la resonancia.

Ahora consideraremos el comportamiento de la corriente alterna en un circuito RLC de una sola malla cuando éste se excita por una fuente de fem que varía con el tiempo según

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t, \qquad (1)$$

donde $\mathcal{E}_m$ es la amplitud de la fem variable. La frecuencia angular ω (en rad/s) se relaciona con la frecuencia ν (en Hz) de acuerdo con $\omega = 2\pi\nu$.

En la figura 1 se indica una manera posible de producir una fem alterna senoidal. Al girar la bobina en un campo magnético uniforme, se induce una fem senoidal de acuerdo con la ley de Faraday (véase la Sec. 36-4). Éste es un ejemplo sencillo de *generador* de CA, del cual podría encontrarse una versión más compleja en una planta de suministro de energía. En un circuito, el símbolo de una fuente de fem alterna, como la de la figura 1, es —(~)—.

Nuestro objetivo en este capítulo es entender el resultado de aplicar una fem alterna de la forma de la ecuación 1, a un circuito que contiene elementos resistivos, inductivos y capacitivos. Existen muchas maneras de conectar estos elementos en un circuito; como ejemplo del análisis de los circuitos de CA, en este capítulo consideraremos el circuito en serie RLC que se muestra en la figura 2, donde están conectados en serie un resistor R, un inductor L y un capacitor C a una fem alterna de la forma de la ecuación 1.

Durante un breve espacio, una vez que se aplica la fem inicialmente, la coriente varía en forma errática con el

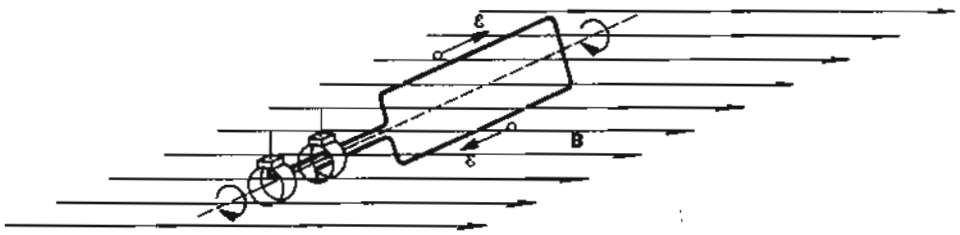


Figura 1 El principio básico de un generador de corriente alterna es una espira que gira en un campo magnético externo. La fem alterna aparece a través de los dos anillos en contacto con los extremos de la espira.

tiempo. Estas variaciones, llamadas *transitorios*, desaparecen rápidamente, después de lo cual vemos que *la corriente varía senoidalmente con la misma frecuencia angular que la fuente de fem*. Suponemos que analizamos el circuito después de que se ha llegado a esta condición, en la que la corriente puede escribirse como

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi), \tag{2}$$

donde i_m es la *amplitud de la corriente* (la magnitud máxima de la corriente) y ϕ es una constante de fase o ángulo de fase que indica la relación de fases entre $\mathcal{E}$ e i. (Nótese que en la Ec. 1 hemos supuesto una constante de fase de 0 para la fem. Adviértase también que en la Ec. 2 escribimos la constante de fase con un signo menos; esta elección es la acostumbrada al considerar la relación de fases entre la corriente y la fem.) En la ecuación 2, la frecuencia angular ω es igual que en la ecuación 1.

Supongamos que $\mathcal{E}_m$, ω, R, L y C son conocidas. El objetivo de nuestro cálculo es encontrar i_m y ϕ, de modo que la ecuación 2 caracterice completamente a la corriente. Usamos un método general para el circuito *RLC* en serie; puede emplearse un procedimiento similar para analizar circuitos más complicados (que contengan elementos en varias combinaciones en serie y en paralelo). También puede aplicarse a una fem no senoidal, porque pueden escribirse fem más complicadas en términos de las fem senoidales al aplicar las técnicas del análisis de Fourier (véase la Sec. 19-7), y puede considerarse, en forma semejante, que la corriente resultante es la superposición de muchos términos de la forma de la ecuación 2. Por lo tanto, es esencial la comprensión del circuito *RLC* en serie para entender el comportamiento que depende del tiempo en todos los circuitos.

En este capítulo no nos ocuparemos específicamente del fenómeno de la resonancia, el cual vimos en la sección 38-6. La frecuencia angular ω es completamente arbitraria y no está necesariamente relacionada con la frecuencia de oscilación angular natural del circuito. Nuestra deducción general de la ecuación 2 en las dos secciones siguientes abarca la resonancia como un caso especial, pero el resultado general permanece válido para cualquier ω.

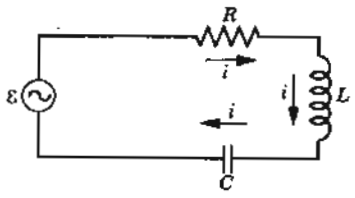


Figura 2 Circuito de una sola malla, que consta de resistor, inductor y capacitor. Un generador suministra la fuente de fem alterna que establece una corriente alterna.

39-2 TRES ELEMENTOS POR SEPARADO

Antes de analizar el circuito de la figura 2 es útil analizar la respuesta de cada uno de los tres elementos por separado cuando se aplica una corriente alterna de la forma de la ecuación 2. Suponemos que tratamos con elementos ideales; por ejemplo, el inductor tiene sólo inductancia y no tiene resistencia ni capacitancia.

Un elemento resistivo

La figura 3*a* muestra un resistor en una sección de un circuito en el que la corriente i (dada por la Ec. 2) se estableció por medios no ilustrados en la figura. Al definir V_R (= $V_a - V_b$) como la diferencia de potencial en el resistor, podemos escribir

$$V_R = iR = i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi). \tag{3}$$

La comparación entre las ecuaciones 2 y 3 demuestra que las cantidades V_R e i variables con el tiempo están *en fase*: alcanzan sus valores máximos al mismo tiempo. Esta relación de fases se ilustra en la figura 3*b*.

La figura 3*c* muestra otra manera de ver la situación. Se le llama *diagrama fasor*, donde los fasores, representados por las flechas vacías, giran en el sentido contrario a las manecillas del reloj con una frecuencia angular ω alrededor del origen. Los fasores tienen las propiedades siguien-

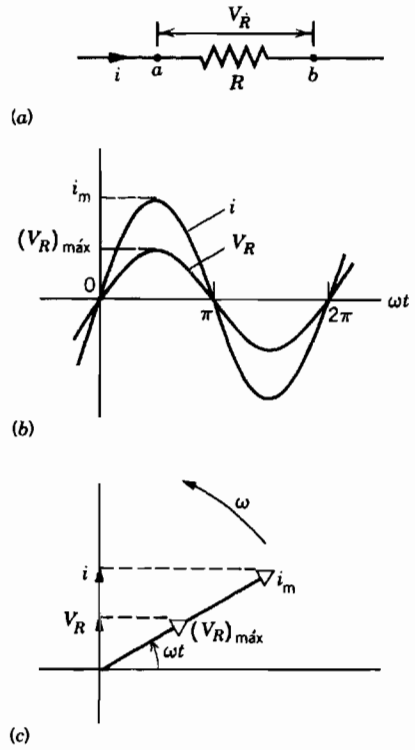


Figura 3 (*a*) Resistor en un circuito de CA. (*b*) La corriente y la diferencia de potencial en el resistor están en fase. (*c*) Diagrama fasor que representa la corriente y la diferencia de potencial.

tes. (1) La longitud del fasor es proporcional al valor *máximo* de la cantidad alternante que interviene: para la diferencia de potencial, $(V_R)_{máx} = i_m R$ de la ecuación 3, y para la corriente, i_m de la ecuación 2. (2) La proyección de un fasor sobre el eje vertical da el valor *instantáneo* de la cantidad alternante considerada. Las flechas sobre el eje vertical representan a las cantidades V_R e i variables con el tiempo, como en las ecuaciones 2 y 3, respectivamente. El hecho de que V_R e i estén en fase es consecuencia de que sus fasores estén a lo largo de la misma línea en la figura 3*c*.

El diagrama de fasores es muy semejante al de la figura 14 del capítulo 15, donde establecíamos la relación entre el movimiento circular uniforme y el movimiento armónico simple. Se recordará que la proyección sobre cualquier eje de la posición de una partícula que se mueva con un movimiento circular uniforme da un desplazamiento que varía senoidalmente, en analogía con el movimiento armónico simple. Aquí, al girar los fasores, sus proyecciones sobre el eje vertical dan una corriente o un voltaje que varían senoidalmente. Siga usted la rotación de los fasores en la figura 3*c* y convénzase por sí mismo de que este diagrama de fasores describe a las ecuaciones 2 y 3 completa y correctamente.

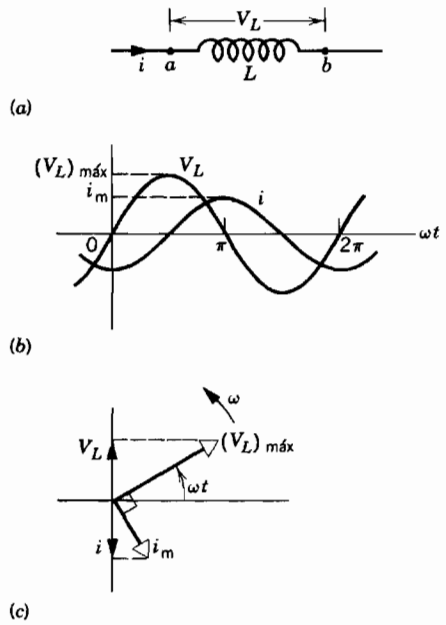


Figura 4 (*a*) Un inductor en un circuito de CA. (*b*) La corriente se atrasa en 90° con respecto a la diferencia de potencial en el inductor. (*c*) Un diagrama de fasores que representa a la corriente y a la diferencia de potencial.

Un elemento inductivo

La figura 4*a* muestra la parte de un circuito que contiene sólo un elemento inductivo. La diferencia de potencial V_L (= V_a - V_b) en el inductor se relaciona con la corriente según la ecuación 3 del capítulo 38:

$$V_L = L\frac{di}{dt} = Li_m\omega\cos(\omega t - \phi), \qquad (4)$$

usando la ecuación 2 para la corriente. La identidad trigonométrica $\cos\theta = \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)$ nos permite escribir la ecuación 4 como

$$V_L = Li_m\omega\operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2). \qquad (5)$$

La comparación entre las ecuaciones 2 y 5 demuestra que las cantidades V_L e i variables con el tiempo no están en fase; están un cuarto de ciclo fuera de fase, con V_L adelante de i (o i atrás de V_L). Se dice comúnmente que, en un inductor, la corriente *se atrasa* con respecto a la diferencia de potencial en 90°. Esto se muestra en la figura 4*b*, la cual es una gráfica de las ecuaciones 2 y 5. Obsérvese que, en el transcurso del tiempo, i alcanza su máximo un cuarto de ciclo *después* de que V_L lo hace.

En el diagrama de fasores de la figura 4*c* se indica esta relación de fase entre i y V_L. Al girar los fasores en el sentido contrario a las manecillas del reloj, es evidente que el fasor i sigue (es decir, se *atrasa*) al fasor V_L un cuarto de ciclo después.

Al analizar circuitos de CA, es conveniente definir la *reactancia inductiva* X_L:

$$X_L = \omega L, \tag{6}$$

en cuyos términos podemos reescribir la ecuación 5 como

$$V_L = i_m X_L \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2). \tag{7}$$

Al comparar las ecuaciones 3 y 7, vemos que la unidad del SI para X_L debe ser la misma que la de R, es decir, el ohm. Esto puede verse directamente al comparar la ecuación 6 con la expresión para la constante inductiva de tiempo, $\tau_L = L/R$. Si bien ambas se miden en ohms, una reactancia no es lo mismo que una resistencia.

El valor máximo de V_L es, de la ecuación 7,

$$(V_L)_{máx} = i_m X_L. \tag{8}$$

Un elemento capacitivo

La figura 5*a* muestra la sección de un circuito que contiene sólo un elemento capacitivo. Una vez más, se ha establecido una corriente i dada por la ecuación 2 por medios no ilustrados aquí.* Sea q la carga en la placa que está a la izquierda, de modo que una corriente positiva en esa placa provoca un aumento en q; esto es, $i = dq/dt$ implica que $dq > 0$ cuando $i > 0$. La diferencia de potencial V_C (= $V_a - V_b$) en los extremos del capacitor está dada por

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{\int i\,dt}{C}. \tag{9}$$

Al integrar la corriente i dada por la ecuación 2, obtenemos

$$\begin{aligned} V_C &= -\frac{i_m}{\omega C}\cos(\omega t - \phi) \\ &= \frac{i_m}{\omega C}\operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2), \end{aligned} \tag{10}$$

donde hemos usado la identidad trigonométrica $\cos\theta = -\operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$.

Al comparar las ecuaciones 2 y 10, vemos que i y V_C están a 90° fuera de fase, con i adelante de V_C. La figura 5*b* muestra a i y V_C graficadas en función del tiempo;

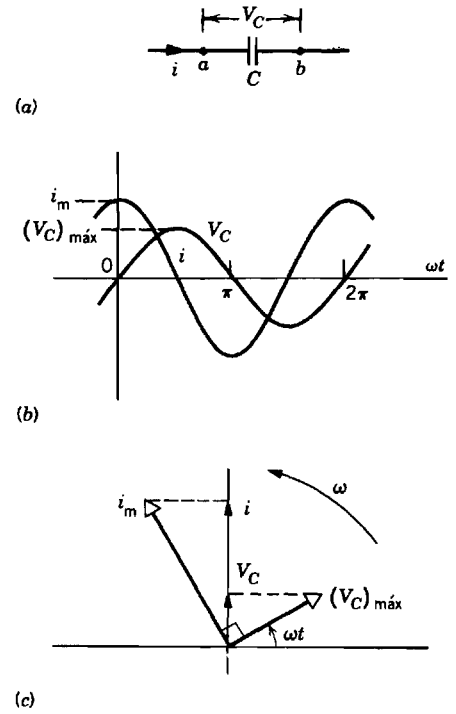


Figura 5 (*a*) Capacitor en un circuito de CA. (*b*) La corriente se adelanta en 90° a la diferencia de potencial entre los extremos del capacitor. (*c*) Diagrama de fasores que representa a la corriente y a la diferencia de potencial.

nótese que i alcanza su máximo un cuarto de ciclo antes que V_C, o sea 90°. De igual manera podemos decir que, en un capacitor, la corriente *se adelanta* a la diferencia de potencial en 90°.

En el diagrama de fasores de la figura 5*c* se muestra la relación de fase. Al girar los fasores en el sentido contrario a las manecillas del reloj, es evidente que el fasor i se adelanta al fasor V_C en un cuarto de ciclo.

En analogía con la reactancia inductiva, es conveniente definir a la *reactancia capacitiva* X_C:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \tag{11}$$

en cuyos términos podemos reescribir la ecuación 10 como

$$V_C = i_m X_C \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2). \tag{12}$$

Al comparar las ecuaciones 3 y 12, vemos que la unidad de X_C debe ser el ohm. Esta conclusión se deduce también cuando se compara a la ecuación 11 con la expresión $\tau_C = RC$ para la constante capacitiva de tiempo.

El valor máximo de V_C es, de la ecuación 12,

$$(V_C)_{máx} = i_m X_C. \tag{13}$$

La tabla 1 resume los resultados encontrados de los tres elementos individuales del circuito.

* Al principio puede ser difícil pensar en un capacitor como una parte de un circuito que conduce corriente; es evidente que la carga no fluye por el capacitor. Puede ser útil considerar el flujo de la carga de esta manera: la corriente i conduce a la carga q hacia la placa izquierda del capacitor, de modo que una carga $-q$ debe fluir hacia la placa que se encuentra a la derecha desde cualquier circuito que esté más allá a la derecha del capacitor. Este flujo de carga $-q$ de derecha a izquierda es enteramente equivalente a un flujo de carga $+q$ de izquierda a derecha, el cual es idéntico a la corriente en el lado izquierdo del capacitor. Así, una corriente en un extremo del capacitor puede aparecer en el otro lado, ¡incluso si no existe una trayectoria de conducción entre las dos placas!

TABLA 1 RELACIONES ENTRE LA FASE Y LA AMPLITUD PARA CORRIENTES Y VOLTAJES ALTERNOS

Elemento del circuito	*Símbolo*	*Impedancia*[a]	*Fase de la corriente*	*Relación de la amplitud*
Resistor	R	R	En fase con V_R	$(V_R)_{máx} = i_m R$
Inductor	L	X_L	Se atrasa de V_L en 90°	$(V_L)_{máx} = i_m X_L$
Capacitor	C	X_C	Se adelanta de V_C en 90°	$(V_C)_{máx} = i_m X_C$

[a] La *impedancia* es un término general que incluye tanto a la resistencia como a la reactancia.

Problema muestra 1 En la figura 4*a*, sea $L = 230$ mH, $\nu = 60$ Hz y $(V_L)_{máx} = 36$ V. (*a*) Halle la reactancia inductiva X_L. (*b*) Determine la amplitud de la corriente en el circuito.

Solución (*a*) De la ecuación 6

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L = (2\pi)(60\text{ Hz})(230 \times 10^{-3}\text{ H}) = 87\ \Omega.$$

(*b*) De la ecuación 8, la amplitud de la corriente es

$$i_m = \frac{(V_L)_{máx}}{X_L} = \frac{36\text{ V}}{87\ \Omega} = 0.41\text{ A}.$$

Vemos que, si bien la reactancia no es una resistencia, la reactancia inductiva desempeña el mismo papel en un inductor que la resistencia en un resistor. Nótese que, si se duplica la frecuencia, la reactancia inductiva se duplicará y la amplitud de la corriente será la mitad. Podemos entender esto físicamente: para obtener el mismo valor de V_L, debemos cambiar la corriente a la misma velocidad ($V_L = L\,di/dt$). Si la frecuencia se duplica, el tiempo del cambio se reduce a la mitad, de modo que la corriente máxima será también la mitad. En resumen: en los inductores, cuanto mayor sea la frecuencia tanto mayor será la reactancia.

Problema muestra 2 En la figura 5*a*, sea $C = 15\ \mu$F, $\nu = 60$ Hz y $(V_C)_{máx} = 36$ V. (*a*) Halle la reactancia capacitiva X_C. (*b*) Halle la amplitud de la corriente en este circuito.

Solución (*a*) De la ecuación 11, tenemos

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{(2\pi)(60\text{ Hz})(15 \times 10^{-6}\text{ F})} = 177\ \Omega.$$

(*b*) De la ecuación 13, tenemos para la amplitud de la corriente

$$i_m = \frac{(V_C)_{máx}}{X_C} = \frac{36\text{ V}}{177\ \Omega} = 0.20\text{ A}.$$

Nótese que, si la frecuencia se duplica, la reactancia capacitiva caerá a la mitad de su valor y la amplitud de la corriente se duplicará. Podemos entender esto físicamente: para obtener el mismo valor de V_C debemos entregar la misma carga al capacitor ($V_C = q/C$). Si la frecuencia se duplica, entonces se dispone sólo de la mitad del tiempo para entregar esta carga, de modo que la corriente máxima debe duplicarse. En resumen: en los capacitores, cuanto mayor sea la frecuencia tanto menor será la reactancia.

39-3 CIRCUITO *RLC* DE UNA SOLA MALLA

Una vez concluido nuestro análisis de los elementos R, L y C por separado, volvamos ahora al análisis del circuito de la figura 2, en el cual están presentes los tres elementos. La fem está dada por la ecuación 1

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t,$$

y la corriente en el circuito tiene la forma de la ecuación 2,

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi).$$

Nuestro objetivo es determinar i_m y ϕ.

Comenzamos aplicando el teorema del circuito cerrado al circuito de la figura 2, obteniendo $\mathcal{E} - V_R - V_L - V_C = 0$, o sea

$$\mathcal{E} = V_R + V_L + V_C. \tag{14}$$

La ecuación 14 puede resolverse para la amplitud de la corriente i_m y la fase ϕ usando una variedad de técnicas: análisis trigonométrico, análisis gráfico usando fasores y análisis diferencial.

Análisis trigonométrico

Ya hemos obtenido las relaciones entre la diferencia de potencial entre cada elemento y la corriente por cada elemento. Por tanto, sustituyamos las ecuaciones 3, 7 y 12 en la ecuación 14, de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t = {} & i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \\ & + i_m X_L \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2) \\ & + i_m X_C \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2),\end{aligned} \tag{15}$$

donde hemos sustituido la ecuación 1 para la fem. Si utilizamos identidades trigonométricas, la ecuación 15 puede escribirse

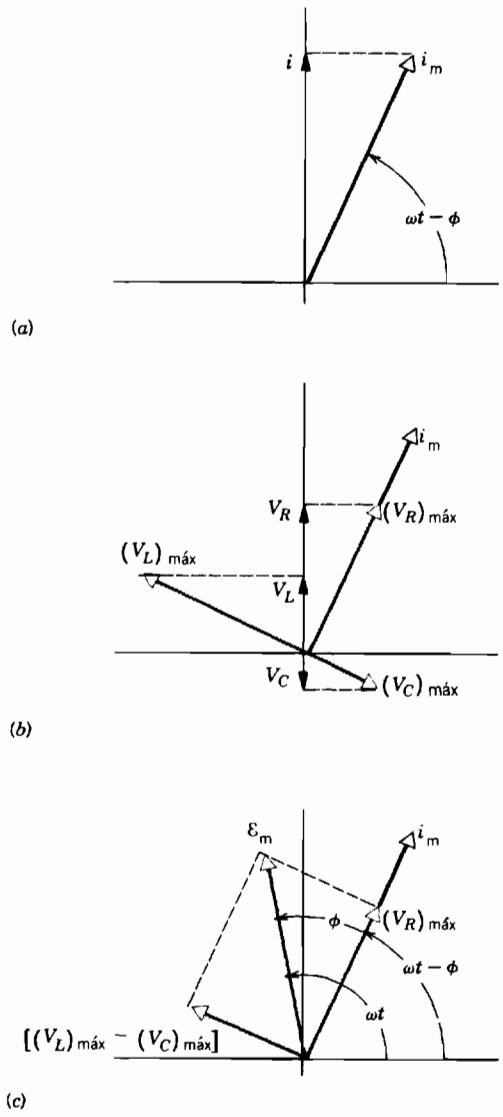


Figura 6 (*a*) Diagrama de fasores que representa a la corriente alterna en el circuito *RLC* de la figura 2. (*b*) Los fasores que representan a las diferencias de potencial en el resistor, el capacitor y el inductor. Nótense sus diferencias de fase con respecto a la corriente. (*c*) Se ha añadido un fasor que representa a la fem alterna.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t &= i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi) + i_m X_L \cos(\omega t - \phi) \\ &\quad - i_m X_C \cos(\omega t - \phi) \\ &= i_m[R \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \\ &\quad + (X_L - X_C)\cos(\omega t - \phi)].\end{aligned} \tag{16}$$

Llevando a cabo algunos pasos trigonométricos más (véase el problema 18), la ecuación 16 puede reducirse a

$$\mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\, \operatorname{sen}\omega t \tag{17}$$

toda vez que hemos elegido

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \tag{18}$$

La amplitud de la corriente se determina directamente de la ecuación 17:

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{19}$$

Esto completa el análisis del circuito *RLC* en serie, porque hemos alcanzado nuestro objetivo de expresar la amplitud de la corriente i_m y la fase ϕ en términos de los parámetros del circuito ($\mathcal{E}_m$, ω, R, L y C). Nótese que la fase ϕ no depende de la amplitud $\mathcal{E}_m$ de la fem aplicada; al cambiar $\mathcal{E}_m$ cambia i_m pero no ϕ: la *escala* del resultado cambia, pero no su *naturaleza*.

La cantidad en el denominador de la ecuación 19 se llama la *impedancia* Z del circuito *RLC* en serie:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \tag{20}$$

y por lo tanto, la ecuación 19 puede escribirse

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}, \tag{21}$$

lo que nos recuerda la relación $i = \mathcal{E}/R$ para redes resistivas de una sola malla con fem estacionaria. La unidad en el SI de la impedancia es, evidentemente, el ohm.

La ecuación 19 da la amplitud de la corriente en la ecuación 53 del capítulo 38, y la figura 14 del capítulo 38 es una gráfica de la ecuación 19. La corriente i_m tiene su valor máximo cuando la impedancia Z tiene su valor mínimo R, lo cual ocurre cuando $X_L = X_C$, o sea

$$\omega L = 1/\omega C,$$

de modo que

$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \tag{22}$$

que es la condición de la *resonancia* dada en la ecuación 54 del capítulo 38. Si bien la ecuación 19 es un resultado general válido para cualquier frecuencia de excitación, ésta incluye la condición de resonancia como un caso especial.

Análisis gráfico

Es instructivo usar un diagrama de fasores para analizar el circuito *RLC* en serie. La figura 6*a* muestra un fasor que representa a la corriente. Tiene la longitud i_m, y su proyección sobre el eje vertical es i_m sen (ωt - ϕ), que es la corriente i variable con el tiempo. En la figura 6*b* hemos dibujado fasores que representan a las diferencias de potencial individuales entre los extremos de R, L y C. Nótense sus valores máximos y las proyecciones variables con el tiempo sobre el eje vertical. Debemos asegurarnos de que las fases estén de acuerdo con nuestras conclusiones de la sección 39-2: V_R está en fase con la corriente, V_L

se adelanta a la corriente en 90°, y V_C *se atrasa* de la corriente en 90°.

De acuerdo con la ecuación 14, la suma *algebraica* de las proyecciones (instantáneas) de V_R, V_L y V_C sobre el eje vertical da el valor (instantáneo) de $\mathscr{E}$. En cambio, insistimos en que la suma *vectorial* de las amplitudes de los fasores $(V_R)_{máx}$, $(V_L)_{máx}$, y $(V_C)_{máx}$ da un fasor cuya amplitud es la $\mathscr{E}_m$ de la ecuación 1. La proyección de $\mathscr{E}_m$ sobre el eje vertical es la $\mathscr{E}$ variable con el tiempo de la ecuación 1; esto es, es $V_R + V_L + V_C$ como lo asevera la ecuación 14. En las operaciones con vectores, la suma (algebraica) de las proyecciones de cualquier número de vectores en una línea recta dada es igual a la proyección sobre esa línea de la suma (vectorial) de esos vectores.

En la figura 6c, hemos obtenido primero la suma vectorial de $(V_L)_{máx}$ y $(V_C)_{máx}$, que es el fasor $(V_L)_{máx} - (V_C)_{máx}$. En seguida obtenemos la suma vectorial de este fasor con $(V_R)_{máx}$. Puesto que estos dos fasores están en ángulo recto, la amplitud de su suma, la cual es la amplitud del fasor $\mathscr{E}_m$, es

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_m &= \sqrt{[(V_R)_{máx}]^2 + [(V_L)_{máx} - (V_C)_{máx}]^2} \\ &= \sqrt{(i_m R)^2 + (i_m X_L - i_m X_C)^2} \\ &= i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (23)\end{aligned}$$

usando las ecuaciones 3, 8, y 12 para reemplazar a las amplitudes de los fasores. La ecuación 23 es idéntica a la ecuación 19 que obtuvimos del análisis trigonométrico.

Como se muestra en la figura 6c, ϕ es el ángulo entre los fasores i_m y $\mathscr{E}_m$, y de la figura vemos que

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(V_L)_{máx} - (V_C)_{máx}}{(V_R)_{máx}} \\ &= \frac{i_m(X_L - X_C)}{i_m R} \\ &= \frac{X_L - X_C}{R}, \qquad (24)\end{aligned}$$

la cual es idéntica a la ecuación 18.

La figura 6b se dibujó arbitrariamente con $X_L > X_C$; esto es, supusimos que el circuito de la figura 2 es más inductivo que capacitivo. En esta hipótesis, i_m *se atrasa* de $\mathscr{E}_m$ (si bien no tanto como un cuarto de ciclo como lo hizo en el elemento puramente inductivo mostrado en la Fig. 4). El ángulo de fase ϕ en la ecuación 23 (así como en la Ec. 2) es positivo pero menor de + 90°.

Si, por otra parte, tenemos que $X_C > X_L$, el circuito sería más capacitivo que inductivo e i_m se adelantaría a $\mathscr{E}_m$ (si bien no tanto como un cuarto de ciclo, como lo hizo en el elemento puramente capacitivo mostrado en la Fig. 5). Consistente con este cambio de atrasado a adelantado, el ángulo ϕ en la ecuación 23 (así como en la Ec. 2) resultaría negativo automáticamente.

Otra manera de interpretar la condición de resonancia hace uso del diagrama de fasores de la figura 6. En la resonancia, $X_L = X_C$ y, de acuerdo con la ecuación 23, $\phi = 0$. En este caso, los fasores $(V_L)_{máx}$ y $(V_C)_{máx}$ en la figura 6 son iguales y opuestos, y así i_m está en fase con $\mathscr{E}_m$.

Una vez más, téngase presente que, mientras que las técnicas que hemos demostrado aquí son válidas para *cualquier* circuito de CA, los resultados son válidos *únicamente* para el circuito *RLC* en serie. Además, recuérdese que estamos examinando al circuito sólo en la situación de estado estacionario, o sea una vez que hayan desaparecido las variaciones transitorias breves.

Problema muestra 3 En la figura 2, sea $R = 160\ \Omega$, $C = 15\ \mu F$, $L = 230$ mH, $\nu = 60$ Hz y $\mathscr{E}_m = 36$ V. Halle (*a*) la reactancia inductiva X_L, (*b*) la reactancia capacitiva X_C, (*c*) la impedancia Z del circuito, (*d*) la amplitud de la corriente i_m, y (*e*) la constante de fase.

Solución (a) $X_L = 87\ \Omega$, como en el problema muestra 1.

(*b*) $X_C = 177\ \Omega$, como en el problema muestra 2. Nótese que $X_C > X_L$ de modo que el circuito es más capacitivo que inductivo.

(*c*) De la ecuación 20,

$$\begin{aligned}Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{(160\ \Omega)^2 + (87\ \Omega - 177\ \Omega)^2} = 184\ \Omega.\end{aligned}$$

(*d*) De la ecuación 21,

$$i_m = \frac{\mathscr{E}_m}{Z} = \frac{36\text{ V}}{184\ \Omega} = 0.196\text{ A}.$$

(*e*) De la ecuación 18 tenemos que

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{87\ \Omega - 177\ \Omega}{160\ \Omega} = -0.563.$$

Así pues, tenemos

$$\phi = \tan^{-1}(-0.563) = -29.4°.$$

Una constante de fase negativa es apropiada para una carga capacitiva, como puede inferirse de la tabla 1 y de la figura 6.

Problema muestra 4 (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia en Hz del circuito del problema muestra 3? (*b*) ¿Cuál es la amplitud de la corriente en resonancia?

Solución (*a*) De la ecuación 22,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.23\text{ H})(15 \times 10^{-6}\text{ F})}} = 538\text{ rad/s}.$$

Entonces

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 86\text{ Hz}.$$

(*b*) En resonancia, $X_L = X_C$, y por lo tanto, $Z = R$. De la ecuación 21,

$$i_m = \frac{\mathscr{E}_m}{R} = \frac{36\text{ V}}{160\ \Omega} = 0.23\text{ A}.$$

La frecuencia de 60 Hz del problema muestra 3 está muy cerca de la resonancia.

Análisis diferencial *(Opcional)*

Con $V_C = q/C$ y $V_L = L\,di/dt$, la ecuación 14 puede escribirse

$$\mathcal{E} = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}, \tag{25}$$

o, usando $i = dq/dt$,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t. \tag{26}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la del oscilador mecánico forzado que se analizó en la sección 15-9 (véase la Ec. 41 del capítulo 15). Llevando a cabo las analogías

$$x \to q, \quad m \to L, \quad b \to R, \quad \text{y} \quad k \to 1/C,$$

que ya habíamos usado en las secciones 38-5 a 38-7, podemos adaptar inmediatamente el resultado dado en la ecuación 42 del capítulo 15 para el oscilador mecánico amortiguado y forzado, al oscilador electromagnético amortiguado (esto es, resistivo) y excitado:

$$q = -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega Z}\cos(\omega t - \phi), \tag{27}$$

donde, como puede usted demostrarlo, ωZ es G según se definió en la ecuación 43 del capítulo 15. Al derivar la ecuación 27 para hallar la corriente, obtenemos la ecuación 2, $i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$, siendo $i_m = \mathcal{E}_m/Z$. Se encomienda también al lector demostrar que la fase ϕ dada por la ecuación 44 del capítulo 15 se reduce a la ecuación 18 cuando reemplazamos las cantidades mecánicas con sus análogas electromagnéticas.

Es una buena técnica buscar las analogías, como lo hicimos aquí, entre la resonancia mecánica y la electromagnética, lo cual no sólo proporciona un mayor acercamiento a los fenómenos nuevos sino que también ahorra trabajo en su análisis, puesto que podemos adaptar los resultados matemáticos obtenidos de un sistema al análisis del otro. Reconocemos las características comunes de los dos sistemas: un elemento excitador senoidal; un elemento inercial, que se resiste a los cambios de movimiento (m, que se resiste a los cambios en v, y L, que se resiste a los cambios en i); un elemento disipante (b y R, donde cada parte de los términos es lineal en cuanto a la velocidad de cambio de la coordenada); y un elemento de restitución (k y $1/C$, donde cada parte de los términos es lineal en cuanto a la coordenada). Las características comunes de ambas soluciones son: una oscilación senoidal estable a la frecuencia de excitación después de un periodo inicial de transitorios rápidamente decadentes; una diferencia de fase entre el excitador y la coordenada oscilatoria que es independiente de la amplitud de excitación; y la resonancia a una frecuencia en particular cuyo valor está determinado sólo por los elementos inercial y de restitución. ■

39-4 POTENCIA EN LOS CIRCUITOS DE CA

En un circuito eléctrico, la energía se suministra por la fuente de fem, almacenada por los elementos capacitivos e inductivos, y se disipa en los elementos resistivos. La conservación de la energía requiere que, en un tiempo en particular, la velocidad a la que se suministra la energía por la fuente de fem debe ser igual a la velocidad a la cual se almacena en los elementos capacitivos e inductivos más la velocidad a la que se disipa en los elementos resistivos. (Suponemos elementos capacitivos e inductivos ideales que carezcan de resistencia interna.)

Consideremos un resistor como un elemento aislado (como se muestra en la Fig. 3) en un circuito de CA en el que la corriente está dada por la ecuación 2. (Examinamos al circuito en su estado estacionario, un tiempo suficientemente largo después de que la fuente de fem haya sido conectada al circuito.) De igual modo que en un circuito de CC, la velocidad de disipación de energía (el calentamiento de Joule) en un resistor de un circuito de CA está dado por

$$P = i^2R = i_m^2 R\operatorname{sen}^2(\omega t - \phi). \tag{28}$$

La energía disipada en el resistor fluctúa con el tiempo, de igual modo que la energía almacenada en los elementos inductivos o capacitivos. En la mayoría de los casos de corrientes alternas, no merece atención la forma cómo varía la potencia durante cada ciclo; el interés principal está en la potencia *promedio* disipada durante cualquier ciclo en particular. La energía *promedio* almacenada en los elementos inductivos o capacitivos permanece constante durante cualquier ciclo completo; en efecto, la energía se transfiere de la fuente de fem a los elementos resistivos, en donde se disipa.

Por ejemplo, la compañía de suministro de energía proporciona una fuente de fem de CA a nuestros hogares que varía con una frecuencia de $\nu = 60$ Hz. Se nos cobra de acuerdo con la energía *promedio* que consumimos; a la compañía no le preocupa si estamos operando un aparato puramente resistivo, en el que se disipa la potencia máxima en fase con la fuente de fem, o un aparato parcialmente capacitivo y parcialmente inductivo como un motor, en donde la corriente máxima (y por lo tanto, la potencia máxima) puede ocurrir fuera de fase con la fem. Si la compañía que suministra la energía midió el uso de ésta en un tiempo menor que $\frac{1}{60}$ s, ellos observarán variaciones en la velocidad a la que usamos la energía, pero al medirla durante un tiempo mayor que $\frac{1}{60}$ s sólo la velocidad promedio del consumo de energía será de importancia.

Escribimos la potencia promedio P al considerar el valor promedio de la ecuación 28. El valor promedio del sen^2 durante cualquier número completo de ciclos es de $\frac{1}{2}$, independientemente de la constante de fase. La potencia promedio es, entonces,

$$\bar{P} = \tfrac{1}{2}i_m^2 R, \tag{29}$$

lo cual podemos escribir también como

$$\bar{P} = (i_m/\sqrt{2})^2 R. \tag{30}$$

La cantidad $i_m/\sqrt{2}$ es igual al valor de la *raíz media cuadrática* (rms, de *root-mean-square*) de la corriente:

$$i_{rms} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}. \tag{31}$$

Es el resultado que se obtendría al elevar primero al cuadrado la corriente, luego considerar su promedio (o media) durante un número completo de ciclos, y luego extraer la raíz cuadrada. (Definimos de la misma manera en el capítulo 24 la velocidad molecular rms.) Es conveniente escribir la potencia en términos de los valores rms, porque los medidores del voltaje y de la corriente de CA están diseñados para indicar los valores rms. La instalación común de 120 V en el hogar es un valor rms; el voltaje de pico es $\mathcal{E}_m = \sqrt{2}\mathcal{E}_{rms} = \sqrt{2}(120\text{ V}) = 170\text{ V}$.

En términos de i_{rms}, la ecuación 31 puede escribirse

$$\bar{P} = i_{rms}^2 R. \tag{32}$$

La ecuación 32 es semejante a la expresión $P = i^2R$, la cual describe la potencia disipada en un resistor en un circuito de CC. Si reemplazamos a las corrientes y voltajes de CC con los valores rms de las corrientes y voltajes de CA, pueden emplearse las expresiones de la disipación de potencia de CC para obtener la disipación promedio de potencia de CA.

Hasta ahora sólo hemos considerado la potencia disipada en un elemento resistivo aislado dentro de un circuito de CA. Consideremos ahora un circuito de CA completo desde el punto de vista de la disipación de potencia. Para este propósito elegimos de nuevo el circuito *RLC* en serie como ejemplo.

El trabajo dW efectuado por una fuente de fem $\mathcal{E}$ sobre una carga dq está dado por $dW = \mathcal{E}\,dq$. La potencia P ($= dW/dt$) es, entonces, $\mathcal{E}\,dq/dt = \mathcal{E}i$, o, usando las ecuaciones 1 y 2,

$$P = \mathcal{E}i = \mathcal{E}_m i_m \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}(\omega t - \phi). \tag{33}$$

Rara vez estamos interesados en esta potencia instantánea que, por lo general, es una función de tiempo rápidamente fluctuante. Para hallar la potencia *promedio*, usemos primero una identidad trigonométrica para desarrollar el factor sen $(\omega t - \phi)$:

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{E}_m i_m \operatorname{sen}\omega t\,(\operatorname{sen}\omega t\cos\phi - \cos\omega t\operatorname{sen}\phi) \\ &= \mathcal{E}_m i_m(\operatorname{sen}^2\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\operatorname{sen}\phi). \end{aligned} \tag{34}$$

Al promediar ahora para un ciclo completo, el término $\operatorname{sen}^2\omega t$ da el valor, $\frac{1}{2}$ mientras que el término sen ωt cos ωt da 0, como puede demostrarse (véase el problema 22). La potencia promedio es, entonces

$$\bar{P} = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_m i_m \cos\phi. \tag{35}$$

Reemplazando tanto $\mathcal{E}_m$ como i_m por sus valores rms ($\mathcal{E}_{rms} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2}$ e $i_{rms} = i_m/\sqrt{2}$), podemos escribir la ecuación 35 como

$$\bar{P} = \mathcal{E}_{rms} i_{rms} \cos\phi. \tag{36}$$

La cantidad cos ϕ en la ecuación 36 se llama *factor de potencia* del circuito de CA. Calculemos el factor de potencia para el circuito *RLC* en serie. De la ecuación 18, tan $\phi = (X_L - X_C)/R$, podemos demostrar que

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z}. \tag{37}$$

De acuerdo con la ecuación 36, la potencia entregada al circuito por la fuente de fem es máxima cuando cos $\phi = 1$, lo cual sucede cuando el circuito es puramente resistivo y no contiene capacitores ni inductores, o en la resonancia cuando $X_L = X_C$, de modo que $Z = R$. En este caso la potencia promedio es

$$\bar{P} = \mathcal{E}_{rms} i_{rms} \qquad \text{(carga resistiva)}. \tag{38}$$

Si la carga es fuertemente inductiva, como lo es a menudo en el caso de los motores, los compresores, etcétera, la potencia entregada a la carga puede llevarse al máximo aumentando la capacitancia del circuito. Las compañías de suministro de energía colocan a menudo capacitores a lo largo de sus sistemas de transmisión para conseguirlo.

Problema muestra 5 Considérese de nuevo el circuito de la figura 2, usando los mismos parámetros que usamos en el problema muestra 3, es decir, $R = 160\ \Omega$, $C = 15\ \mu\text{F}$, $L = 230$ mH, $\nu = 60$ Hz y $\mathcal{E}_m = 36$ V. Encuentre (*a*) la fem rms, (*b*) la corriente rms, (*c*) el factor de potencia, y (*d*) la potencia promedio disipada en el resistor.

Solución (*a*)

$$\mathcal{E}_{rms} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2} = 36\text{ V}/\sqrt{2} = 25.5\text{ V}.$$

(*b*) En el problema muestra 3 hallamos $i_m = 0.196$ A. Tenemos entonces que

$$i_{rms} = i_m/\sqrt{2} = (0.196\text{ A})/\sqrt{2} = 0.139\text{ A}.$$

(*c*) En el problema muestra 3 hallamos que la constante de fase ϕ era $-29.4°$. Entonces

$$\text{factor de potencia} = \cos(-29.4°) = 0.871.$$

(*d*) De la ecuación 32 tenemos que

$$\bar{P} = i_{rms}^2 R = (0.139\text{ A})^2(160\ \Omega) = 3.1\text{ W}.$$

Alternativamente, la ecuación 36 da

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \mathcal{E}_{rms} i_{rms}\cos\phi \\ &= (25.5\text{ V})(0.139\text{ A})(0.871) = 3.1\text{ W}, \end{aligned}$$

en completa concordancia. Es decir, la potencia promedio disipada en el resistor es igual a la potencia promedio suministrada por la fem. En efecto, la energía se transfiere de la fem a la carga resistiva, en donde se disipa. Nótese que, para obtener la concordancia de estos resultados a dos cifras significativas, tuvimos que usar tres cifras significativas para las corrientes y los voltajes. Aparte de ciertos errores numéricos de redondeo, las ecuaciones 32 y 36 dan resultados idénticos.

39-5 EL TRANSFORMADOR *(Opcional)*

En los circuitos de CC la disipación de la potencia en una carga resistiva está dada por la ecuación 21 del capítulo 32 ($P = iV$). Para determinada demanda de potencia, tenemos nuestra elección de una corriente i relativamente grande y una diferencia de potencial V relativamente pequeña, o a la inversa, siempre que su producto permanezca constante. Del mismo modo, en circuitos de CA puramente resistivos (en los que el factor de potencia, cos ϕ en la ecuación 36, es igual a 1), la disipación de la potencia promedio está dada por la ecuación 38 ($P = i_{rms}\mathcal{E}_{rms}$) y tenemos la misma elección en cuanto a los valores relativos de i_{rms} y $\mathcal{E}_{rms}$.

En los sistemas de distribución de energía eléctrica es deseable, tanto por razones de seguridad como de diseño eficiente del equipo, tener voltajes relativamente bajos tanto en el extremo generador (la planta de energía eléctrica) como en el extremo receptor (el hogar o la fábrica). Por ejemplo, nadie quiere que un tostador eléctrico o un tren eléctrico de juguete opere a, digamos, 10 kV.

Por otra parte, en la transmisión de la energía eléctrica desde la planta generadora hasta el consumidor, deseamos la corriente *mínima* práctica (y por tanto la diferencia de potencial *máxima* práctica) de tal modo que sea mínima la disipación i^2R de la energía en la línea de transmisión. Valores tales como $\mathcal{E}_{rms} = 350$ kV son típicos. Así, existe una desproporción fundamental entre los requisitos para una transmisión eficiente, por un lado, y la generación segura y eficiente y el consumo, por otro lado.

Para superar este problema, necesitamos un dispositivo que sea capaz, según lo requieran las consideraciones del diseño, de elevar (o bajar) la diferencia de potencial en un circuito, manteniendo al producto $i_{rms}\mathcal{E}_{rms}$ esencialmente constante. Tal dispositivo es el *transformador* de corriente alterna mostrado en la figura 7. Operando sobre la base de la ley de la inducción de Faraday, el transformador no tiene un equivalente para corriente continua, lo cual explica el por qué los sistemas de distribución de CC, vehementemente defendidos por Edison, han sido hoy día completamente reemplazados por sistemas de CA, sólidamente defendidos por Tesla y otros.*

En la figura 7 se muestran dos bobinas devanadas alrededor de un núcleo de hierro. El devanado *primario*, de N_p vueltas, está conectado a un generador de corriente alterna cuya fem está dada por $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t$. El devanado *secundario*, de N_s vueltas, es un circuito abierto en tanto esté abierto el interruptor S, lo cual suponemos por el momento. Entonces, no existe corriente en el devanado secundario. Suponemos además que podemos despreciar a todos los elementos de disipación, como las resistencias de los devanados del primario y del secundario. En realidad, los transformadores de alta capacidad, bien diseñados, pueden tener pérdidas de energía tan bajas como el 1%, de modo que nuestra hipótesis de un transformador ideal no es irrazonable.

Para las condiciones anteriores, el devanado del primario es una inductancia pura, como en la figura 4*a*. La corriente en el primario (muy pequeña), llamada la *corriente magnetizante* $i_{mag}(t)$, se atrasa con respecto a la diferencia de potencial del primario $V_p(t)$ en 90°; el factor de potencia (= cos ϕ en la ecuación 36) es cero, de modo que no hay una entrega de potencia del generador al transformador.

Sin embargo, la pequeña corriente alterna en el primario $i_{mag}(t)$ induce un flujo magnético alternante $\Phi_B(t)$ en el núcleo de hierro, y suponemos que este flujo eslabona o enlaza a las

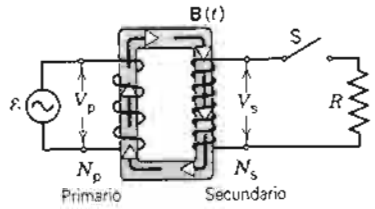


Figura 7 Transformador ideal, mostrando dos bobinas devanadas sobre un núcleo de hierro.

vueltas de los devanados del secundario. (Esto es, suponemos que todas las líneas del campo magnético forman anillos cerrados dentro del núcleo de hierro y que ninguna "escapa" a los alrededores.) De la ley de la inducción de Faraday la fem *por vuelta* $\mathcal{E}_T$ (igual a $-d\Phi_B/dt$) es la misma para ambos devanados, tanto para el primario como para el secundario, porque los flujos en el primario y en el secundario son iguales. Al considerar valores rms, podemos escribir

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{primario} = \left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{secundario} \tag{39}$$

o sea

$$(\mathcal{E}_T)_{rms,\,primario} = (\mathcal{E}_T)_{rms,\,secundario} \tag{40}$$

En cada devanado, la fem por vuelta es igual a la diferencia de potencial dividida entre el número de vueltas en el devanado; la ecuación 40 puede escribirse

$$\frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}. \tag{41}$$

Aquí V_p y V_s se refieren a cantidades rms. Al despejar V_s, obtenemos

$$V_s = V_p(N_s/N_p). \tag{42}$$

Si $N_s > N_p$ (en cuyo caso $V_s > V_p$), nos referimos a un *transformador elevador*; si $N_s < N_p$, nos referimos a un *transformador reductor*.

En todo lo anterior hemos supuesto un circuito secundario abierto de modo que no se transmite ninguna potencia por el transformador. Sin embargo, si ahora cerramos el interruptor S en la figura 7, tenemos una situación más práctica en la que el devanado del secundario está conectado a una carga resistiva R. En el caso general, la carga contendría también elementos inductivos y capacitivos, aunque por ahora sólo nos concretaremos a este caso especial de una carga puramente resistiva.

Suceden varias cosas al cerrar el interruptor S. (1) En el circuito del secundario surge una corriente i_s rms, con una disipación promedio de potencia i_s^2R (= V_s^2/R) en la carga resistiva. (2) La corriente alterna en el secundario induce su propio flujo magnético alterno en el núcleo de hierro, y este flujo induce (según las leyes de Faraday y de Lenz) una fem en oposición en los devanados del primario. (3) Sin embargo, V_p no puede cambiar su respuesta a esta fem de oposición porque siempre debe ser igual a la fem proporcionada por el generador; el cierre del interruptor S no puede cambiar este hecho. (4) Para asegurar esto, debe surgir en el circuito del primario una nueva corriente alterna i_p, siendo constantes su magnitud y fase precisamente en lo necesario para cancelar la fem de oposición generada en los devanados del primario por i_s.

* Véase "The Transformer", por John W. Coltman, *Scientific American*, enero de 1988, pág. 86.

En lugar de analizar el proceso anterior más bien complejo en detalle, tomamos ventaja de la visión general proporcionada por el principio de conservación de la energía. Éste nos dice que, en un transformador con una carga resistiva

$$i_p V_p = i_s V_s. \tag{43}$$

Puesto que la ecuación 42 es válida ya sea que el interruptor S de la figura 7 esté cerrado o no, tenemos entonces

$$i_s = i_p(N_p/N_s) \tag{44}$$

como la relación de transformación de las corrientes.

Por último, sabiendo que $i_s = V_s/R$, podemos usar las ecuaciones 42 y 44 para obtener

$$i_p = \frac{V_p}{(N_p/N_s)^2 R}, \tag{45}$$

que nos indica que, desde el punto de vista del circuito primario, la resistencia equivalente de la carga no es R sino

$$R_{eq} = (N_p/N_s)^2 R. \tag{46}$$

La ecuación 46 sugiere otra función más del transformador. Vemos que, para una transferencia de energía máxima de una fuente de fem hacia una carga resistiva, la resistencia del generador y la resistencia de la carga deben ser iguales. (Véase el problema 14 del capítulo 33.) La misma relación se cumple en los circuitos de CA excepto que la *impedancia* (en lugar de la resistencia) del generador debe igualarse a la de la carga. Sucede a menudo —como cuando deseamos conectar un altavoz a un amplificador— que esta condición está lejos de cumplirse, siendo el amplificador de una impedancia más elevada y el altavoz de una impedancia baja. Podemos igualar las impedancias de los dos dispositivos acoplándolos por medio de un transformador con una razón de vueltas apropiada. ■

Problema muestra 6 Un transformador que está en un poste de servicio funciona con una $V_p = 8.5$ kV en el devanado del primario y abastece de energía eléctrica a cierto número de casas cercanas a $V_s = 120$ V, siendo ambas cantidades valores rms. La tasa de consumo promedio de la energía en las casas servidas por el transformador en un momento dado es de 78 kW. Supóngase un transformador ideal, una carga resistiva, y un factor de potencia unitario. (*a*) ¿Cuál es la razón vueltas N_p/N_s de este transformador reductor? (*b*) ¿Cuáles son las corrientes rms en los devanados del primario y del secundario del transformador? (*c*) ¿Cuál es la carga resistiva equivalente en el circuito del secundario? (*d*) ¿Cuál es la carga resistiva equivalente en el circuito del primario?

Solución (*a*) De la ecuación 42 tenemos

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{V_p}{V_s} = \frac{8.5 \times 10^3 \text{ V}}{120 \text{ V}} = 70.8.$$

(*b*) De la ecuación 38,

$$i_p = \frac{\bar{P}}{V_p} = \frac{78 \times 10^3 \text{ W}}{8.5 \times 10^3 \text{ V}} = 9.18 \text{ A}$$

y

$$i_s = \frac{\bar{P}}{V_s} = \frac{78 \times 10^3 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 650 \text{ A}.$$

(*c*) En el circuito del secundario,

$$R_s = \frac{V_s}{i_s} = \frac{120 \text{ V}}{650 \text{ A}} = 0.185 \ \Omega.$$

(*d*) Aquí tenemos

$$R_p = \frac{V_p}{i_p} = \frac{8.5 \times 10^3 \text{ V}}{9.18 \text{ A}} = 930 \ \Omega.$$

Podemos verificarlo a partir de la ecuación 46, lo cual escribimos así:

$$R_p = (N_p/N_s)^2 R_s = (70.8)^2(0.185 \ \Omega) = 930 \ \Omega.$$

PREGUNTAS

1. En la relación $\omega = 2\pi\nu$ cuando empleamos unidades del SI medimos a ω en radianes por segundo y a ν en hertz o ciclos por segundo. El radián es una medida del ángulo. ¿Qué relación tienen los ángulos con la corriente alterna?
2. Si la salida de un generador de CA como el de la figura 1 se conecta a un circuito *RLC* como el de la figura 2, ¿cuál es la fuente última de la energía disipada en el resistor?
3. ¿Por qué serían menos eficaces los sistemas de distribución de energía si no existiese la corriente alterna?
4. En el circuito de la figura 2, ¿por qué es cierto suponer que (*a*) la corriente alterna de la ecuación 2 tiene la misma frecuencia angular ω que la fem alterna de la ecuación 1, y (*b*) que el ángulo de fase Φ en la ecuación 2 no varía con el tiempo? ¿Qué pasaría si cualquiera de estas afirmaciones (reales) fuera falsa?
5. ¿En qué difieren un diagrama de fasores de un diagrama de vectores? Sabemos, por ejemplo, que la fem, la diferencia de potencial y la corriente no son vectores. ¿Cómo pueden justificarse construcciones como las de la figura 6?
6. En el elemento de circuito puramente resistivo de la figura 3, ¿varía el valor máximo i_m de la corriente alterna con la frecuencia angular de la fem aplicada?
7. ¿Dejaría de ser válido cualquier análisis de la sección 39-3 si el diagrama de fasores girara en el sentido de las manecillas del reloj, más bien que en el sentido contrario como lo supusimos?
8. Supóngase que, en un circuito *RLC* en serie, la frecuencia del voltaje aplicado cambia continuamente de un valor muy bajo a uno muy alto. ¿Cómo cambiaría la constante de fase?

9. ¿Podría depender de la frecuencia la *resistencia* en corriente alterna de un dispositivo?
10. Del análisis de un circuito *RLC* podemos determinar el comportamiento de un circuito *RL* (sin capacitor) al hacer $C = \infty$, mientras que ponemos $L = 0$ para determinar el comportamiento de un circuito *RC* (sin inductor). Explique esta diferencia.
11. Durante la segunda Guerra Mundial, en un importante laboratorio de investigaciones en Estados Unidos, un generador de corriente alterna estaba ubicado más o menos a una milla del edificio del laboratorio al que abastecía. Un técnico aumentó la velocidad del generador para compensar lo que él llamó "la pérdida de frecuencia en la línea de transmisión" que unía al generador con el edificio del laboratorio. Comente sobre este procedimiento.
12. Conforme la velocidad de las aspas de un ventilador va aumentando desde cero, puede observarse una serie de patrones estacionarios al iluminar las aspas con luz de una fuente de corriente alterna. El efecto es más pronunciado cuando se emplean tubos fluorescentes o lámparas de neón que cuando se usa una lámpara de filamento de tungsteno. Explique estas observaciones.
13. Suponga que en la figura 2 hacemos que $\omega \to 0$. ¿Tiende la ecuación 19 a un valor esperado? ¿Cuál es este valor? Analícelo.
14. Describa brevemente qué significa decir que una corriente alterna "se adelanta" o "se atrasa" de una fem alterna.
15. Si, como afirmamos en la sección 39-3, un circuito dado es "más inductivo que capacitivo", es decir, que $X_L > X_C$, (*a*) ¿significa ello, para una frecuencia angular fija, que L es relativamente "grande" y C relativamente "pequeña", o que L y C son ambas relativamente "grandes"? (*b*) Para valores fijos de L y C, ¿significa que ω es relativamente "grande" o relativamente "pequeña"?
16. ¿Cómo podría usted determinar, en un circuito *RLC* en serie, si la frecuencia del circuito está arriba o abajo de la de resonancia?
17. Critique esta afirmación: "Si $X_L > X_C$, entonces debemos tener que $L > 1/C$."
18. ¿Cómo deben modificarse, si es necesario, las reglas de Kirchhoff (las reglas del circuito cerrado y del nodo) para circuitos de corriente continua, cuando se aplican a los circuitos de corriente alterna?
19. ¿Se aplican las reglas del circuito cerrado y del nodo a circuitos multimalla de CA igual que para los circuitos multimalla de CC?
20. En el problema muestra 5, ¿cuál sería el efecto sobre $\overline{P}$ al aumentar (*a*) R, (*b*) C y (*c*) L? (*d*) ¿Cómo cambiaría ϕ en la ecuación 36 en estos tres casos?
21. Si $R = 0$ en el circuito de la figura 2, no puede haber una disipación de la potencia en el circuito. Sin embargo, aún están presentes una fem alterna y una corriente alterna. Analice el flujo de la energía en el circuito en estas condiciones.
22. ¿Existe una *potencia* rms en un circuito de corriente alterna?
23. ¿Les gusta a los ingenieros de las plantas de suministro de energía tener un factor de potencia bajo o uno alto, o les es indiferente? ¿Entre qué valores puede variar al factor de potencia? Lo que determina el factor de potencia ¿es característico del generador, de la línea de transmisión, o del circuito al que está conectada la línea de transmisión, o de alguna combinación de éstos?
24. ¿Puede en algún caso ser negativa la potencia instantánea entregada por una fuente de corriente alterna? ¿Puede ser alguna vez negativo el factor de potencia? De ser así, explique el significado de estos valores negativos.
25. En un circuito *RLC* en serie la fem se adelanta a la corriente para una frecuencia de operación en particular. Ahora disminuimos la frecuencia ligeramente. ¿Aumenta, disminuye, o permanece igual la impedancia total del circuito?
26. Si conocemos el factor de potencia (= cos ϕ en la ecuación 36) para un circuito *RLC* dado, ¿podemos advertir si la fem alterna aplicada se adelanta o se atrasa con respecto a la corriente? Si lo podemos advertir, ¿cómo? Si no, ¿por qué no?
27. ¿Cuál es la gama permisible de valores del ángulo de fase ϕ de la ecuación 2? ¿Del factor de potencia de la ecuación 36?
28. ¿Por qué es útil usar la notación rms para corrientes y voltajes alternos?
29. Usted desea reducir su factura de consumo de electricidad. ¿Espera un factor de potencia bajo, un factor de potencia alto, o no hay diferencia? Si la hay ¿qué puede usted hacer al respecto? Analícelo.
30. En la ecuación 36, ¿está el ángulo de fase ϕ entre $\mathscr{E}(t)$ e $i(t)$ o entre $\mathscr{E}_{rms}$ e i_{rms}? Explíquelo.
31. El transformador de un timbre de puerta está diseñado para una entrada rms en el primario de 120 V, y una salida rms en el secundario de 6 V. ¿Qué pasaría si las conexiones del primario y del secundario se intercambiaran accidentalmente durante la instalación? ¿Tendría que esperar a que alguien oprimiera el botón para determinarlo? Analícelo.
32. Se le da a usted un transformador encerrado en una caja de madera, de cuyas dos caras opuestas salen las terminales del primario y las del secundario. ¿Cómo determinaría la razón entre el número de vueltas sin abrir la caja?
33. En el transformador de la figura 7, con el secundario en circuito abierto, ¿cuál es la relación de fases entre (*a*) la fem aplicada y la corriente del primario, (*b*) la fem aplicada y el campo magnético en el núcleo del transformador, y (*c*) la corriente del primario y el campo magnético en el núcleo del transformador?
34. ¿Cuáles son algunas aplicaciones de un transformador elevador? ¿Y de un transformador reductor?
35. ¿Qué es lo que determina cuál de los devanados de un transformador es el primario y cuál el secundario? ¿Puede tener un transformador un solo primario y dos secundarios? ¿Y un solo secundario y dos primarios?
36. En Europa se usan corrientes alternas de 240 V y 50 Hz en lugar de la corriente típica de 120 V y 60 Hz que se emplea en Estados Unidos. Imagine que vive usted en Estados Unidos y quiere ir de vacaciones a Europa. Durante sus vacaciones, usted desea usar algunos de sus aparatos americanos, como un reloj, una rasuradora eléctrica y un secador de pelo. ¿Podría usarlos simplemente conectando un transformador elevador de 2:1? Explique por qué puede ser o no suficiente este paso aparentemente sencillo.

PROBLEMAS

Sección 39-2 Tres elementos por separado

1. Considere que la ecuación 1 describe una fem efectiva disponible en un tomacorriente de CA ordinario de 60 Hz. ¿A qué frecuencia angular ω correspondería esto? ¿Cómo fija esta frecuencia la empresa de servicio de energía eléctrica?
2. Un inductor de 45.2 mH tiene una reactancia de 1.28 kΩ. (*a*) Halle la frecuencia. (*b*) ¿Cuál es la capacitancia de un capacitor con la misma reactancia a esa frecuencia? (*c*) Si la frecuencia se duplica, ¿cuáles son las reactancias del inductor y del capacitor?
3. (*a*) ¿A qué frecuencia angular tendrían la misma reactancia un inductor de 6.23 mH y un capacitor de 11.4 μF? (*b*) ¿Cuál sería esta reactancia? (*c*) Demuestre que esta frecuencia sería igual a la frecuencia natural de las oscilaciones *LC* libres.
4. La salida de un generador de CA es $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$ sen ωt, siendo $\mathcal{E}_m = 25.0$ V y $\omega = 377$ rad/s. Está conectada a un inductor de 12.7 H. (*a*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente? (*b*) Cuando la corriente es un máximo, ¿cuál es la fem del generador? (*c*) Cuando la fem del generador es −13.8 V y está aumentando en magnitud, ¿cuál es la corriente? (*d*) Para las condiciones de la parte (*c*), ¿está el generador abasteciendo energía o absorbiendo energía del resto del circuito?
5. El generador de CA del problema 4 está conectado a un capacitor de 4.15 μF. (*a*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente? (*b*) Cuando la corriente es un máximo, ¿cuál es la fem del generador? (*c*) Cuando la fem del generador es −13.8 V y está aumentando en magnitud, ¿cuál es la corriente? (*d*) Para las condiciones de la parte (*c*), ¿está el generador abasteciendo o absorbiendo energía del resto del circuito?
6. La salida de un generador de CA está dada por $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$ sen $(\omega t - \pi/4)$, en donde $\mathcal{E}_m = 31.4$ V y $\omega = 350$ rad/s. La corriente está dada por $i(t) = i_m$ sen $(\omega t - 3\pi/4)$, donde $i_m = 622$ mA. (*a*) ¿En qué tiempo, después de $t = 0$, alcanza primero un máximo la fem del generador? (*b*) ¿En qué tiempo, después de $t = 0$, alcanza primero un máximo la corriente? (*c*) El circuito contiene un solo elemento diferente al generador. ¿Es un capacitor, un inductor, o un resistor? Justifique su respuesta. (*d*) ¿Cuál es el valor de la capacitancia, la inductancia, o la resistencia, según fuera el caso?
7. Repita el problema anterior excepto que ahora $i = i_m$ sen $(\omega t + \pi/4)$.
8. Un generador trifásico G produce energía eléctrica que se transmite por medio de tres conductores como se muestra en la figura 8. Los potenciales (relativos a un nivel de referencia común) de estos conductores son $V_1 = V_m$ sen ωt, $V_2 = V_m$ sen $(\omega t - 120°)$, y $V_3 = V_m$ sen $(\omega t - 240°)$. Cierto equipo industrial (por ejemplo, unos motores) tiene tres terminales y está diseñado para conectarse directamente a estos tres conductores. Para usar un aparato de dos terminales más convencional (por ejemplo, un foco), lo conectamos a dos cualesquiera de los tres conductores. Demuestre que la diferencia de potencial entre *dos conductores cualesquiera* (*a*) oscila senoidalmente con una frecuencia angular de ω y (*b*) tiene una amplitud $V_m\sqrt{3}$.

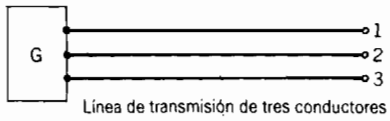


Figura 8 Problema 8.

Sección 39-3 Circuito RLC de una sola malla

9. Vuelva a dibujar un esquema de las figuras 6*b* y 6*c* para los casos de $X_C > X_L$ y $X_C = X_L$.
10. (*a*) Vuelva a calcular todas las cantidades pedidas en el problema muestra 3 para $C = 70$ μF, permaneciendo sin cambio los demás parámetros en ese problema muestra. (*b*) Dibuje a escala un diagrama de fasores como el de la figura 6*c* para esta nueva situación y compare los dos diagramas cuidadosamente.
11. Considere las curvas de resonancia de la figura 14, capítulo 38. (*a*) Demuestre que, para las frecuencias por arriba de la de resonancia, el circuito es predominantemente inductivo y que, para las frecuencias por abajo de la de resonancia, es predominantemente capacitivo. (*b*) ¿Cómo se comporta el circuito en resonancia? (*c*) Trace un diagrama de fasores como el de la figura 6*c* para las condiciones a una frecuencia más elevada que la de resonancia, en resonancia, y más baja que la de resonancia.
12. Verifique matemáticamente que la siguiente construcción geométrica da correctamente tanto la impedancia Z como la constante de fase ϕ. Refiriéndose a la figura 9, (1) dibuje una flecha en la dirección $+y$ de magnitud X_C, (2) dibuje una flecha en la dirección $-y$ de magnitud X_L, y (3) dibuje una flecha de magnitud R en la dirección $+x$. Entonces la magnitud de la "resultante" de estas flechas es Z y el ángulo (medido abajo del eje $+x$) de esta resultante es ϕ.
13. ¿Puede la amplitud del voltaje en un inductor ser mayor que la amplitud de la fem del generador en un circuito *RLC*? Considere un circuito con $\mathcal{E}_m = 10$ V, $R = 9.6\ \Omega$, L

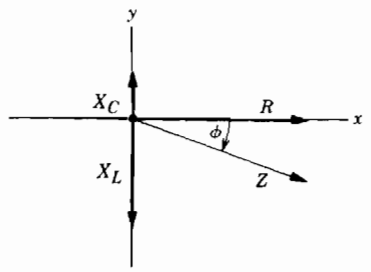


Figura 9 Problema 12.

= 1.2 H y C = 1.3 μF. Halle la amplitud del voltaje en el inductor en resonancia.

14. Una bobina de 88.3 mH de inductancia y resistencia desconocida y un capacitor de 937 nF están conectados en serie con un oscilador de 941 Hz de frecuencia. El ángulo de fase ϕ entre la fem aplicada y la corriente es de 75.0°. Determine la resistencia de la bobina.

15. Cuando la fem del generador en el problema muestra 3 es máxima, ¿cuál es el voltaje (*a*) en el generador, (*b*) en el resistor, (*c*) en el capacitor, y (*d*) en el inductor? (*e*) Verifique que la regla del circuito cerrado se satisface al sumar estos elementos con los signos apropiados.

16. Una combinación resistor-inductor-capacitor, R_1, L_1, C_1, tiene una frecuencia de resonancia que es precisamente la misma que la de una combinación diferente, R_2, L_2, C_2. Ahora se conectan estas dos combinaciones en serie. Demuestre que este nuevo circuito tiene también la misma frecuencia de resonancia que los circuitos individuales por separado.

17. En cierto circuito *RLC* la fem máxima del generador es de 125 V y la corriente máxima es de 3.20 A. Si la corriente se adelanta a la fem del generador en 56.3°, (*a*) ¿cuál es la impedancia y (*b*) cuál es la resistencia del circuito? (*c*) ¿Es el circuito predominantemente capacitivo o inductivo?

18. Use la ecuación 18 para obtener las relaciones para sen ϕ y cos ϕ en términos de R, X_L y X_C. Sustituya luego aquellas expresiones en la ecuación 16 para obtener la ecuación 17.

19. En cierto circuito *RLC*, que funciona a 60 Hz, el voltaje máximo en el inductor es el doble del voltaje máximo en el resistor, mientras que el voltaje máximo en el capacitor es el mismo que el voltaje máximo en el resistor. (*a*) ¿En qué ángulo de fase se atrasa la corriente con respecto a la fem del generador? (*b*) Si la fem máxima del generador es de 34.4 V, ¿cuál sería la resistencia del circuito para obtener una corriente máxima de 320 mA?

20. Un circuito *RLC* tiene R = 5.12 Ω, C = 19.3 μF, L = 988 mH y $\mathcal{E}_m$ = 31.3 V. (*a*) ¿A qué frecuencia angular ω tendrá la corriente su valor máximo, como en las curvas de resonancia de la figura 14 en el capítulo 38? (*b*) ¿Cuál es este valor máximo? (*c*) ¿A qué dos frecuencias angulares ω_1 y ω_2 tendrá la amplitud de la corriente la mitad de este valor máximo? (*d*) Halle la anchura fraccionaria [= $(\omega_1 - \omega_2)/\omega$] de la curva de resonancia.

21. (*a*) Demuestre que la anchura fraccionaria de las curvas de resonancia de la figura 14 en el capítulo 38 está dada, con una buena aproximación, por

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{3}R}{\omega L},$$

donde ω es la frecuencia de resonancia y $\Delta\omega$ es la anchura de resonancia pico en $i = \frac{1}{2}i_m$. Nótese (véase el problema 71 del capítulo 38) que esta expresión puede escribirse como $\sqrt{3}/Q$, la cual demuestra claramente que un circuito de "Q alta" tiene una resonancia pico pronunciada, esto es, un valor pequeño de $\Delta\omega/\omega$. (*b*) Use este resultado para comprobar la parte (*d*) del problema 20.

Sección 39-4 Potencia en los circuitos de CA

22. Demuestre que $\overline{\text{sen}^2\,\omega t} = \frac{1}{2}$ y que $\overline{\text{sen}\,\omega t \cos \omega t} = 0$, en donde los promedios se consideran durante uno o más ciclos completos.

23. Un motor eléctrico conectado a un tomacorriente de 120 V, 60 Hz efectúa un trabajo mecánico a razón de 0.10 hp (1 hp = 746 W). Si toma una corriente rms de 650 mA, ¿cuál es la resistencia, en términos de la transferencia de energía? ¿Sería ésta la misma que la resistencia de sus bobinas, medida con un ohmímetro estando el motor desconectado del tomacorriente?

24. Demuestre que la potencia promedio entregada a un circuito *RLC* puede también escribirse como

$$\overline{P} = \mathcal{E}_{rms}^2 R/Z^2.$$

Demuestre que esta expresión da resultados razonables para un circuito resistivo puro, para un circuito *RLC* en resonancia, para un circuito puramente capacitivo, y para un circuito puramente inductivo.

25. Calcule la potencia promedio disipada en el problema muestra 3, suponiendo (*a*) que se retire el inductor del circuito y (*b*) que se retire el capacitor.

26. Un acondicionador de aire conectado a una línea de CA de 120 V rms es equivalente a una resistencia de 12.2 Ω y una reactancia inductiva de 2.30 Ω en serie. (*a*) Calcule la impedancia del acondicionador de aire. (*b*) Halle la energía promedio abastecida al aparato. (*c*) ¿Cuál es el valor rms de la corriente?

27. Un voltímetro de CA de alta impedancia se conecta en sucesión a través del inductor, el capacitor y el resistor de un circuito en serie que tiene una fuente de CA de 100 V (rms) y da la misma lectura en volts en cada caso. ¿Cuál es la lectura?

28. Un granjero hace funcionar una bomba de agua a 3.8 A rms. La línea que la une al transformador tiene 1.2 km de longitud y consta de dos alambres de cobre de 1.8 mm de diámetro cada uno. La temperatura es de 5.4°C. ¿Cuánta potencia se pierde en la transmisión a lo largo de la línea?

29. En la figura 10 demuestre que la potencia disipada en el resistor R es máxima cuando $R = r$, donde r es la resistencia interna del generador de CA. En el texto hemos supuesto tácitamente, hasta ahora, que r = 0. Compare con la situación en CC.

30. Consideremos el circuito de antena de FM que se muestra en la figura 11, con L = 8.22 μH, C = 0.270 pF y R = 74.7 Ω. La señal de radio induce en la antena una fem alterna con $\mathcal{E}_{rms}$ = 9.13 μV. Halle (*a*) la frecuencia de las ondas incidentes para las que está "sintonizada" la antena,

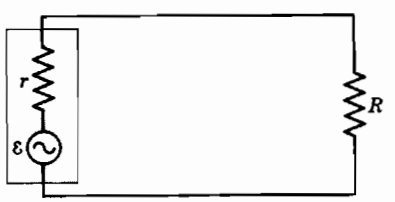


Figura 10 Problemas 29 y 43.

(*b*) la corriente rms en la antena, y (*c*) la diferencia de potencial rms en el capacitor.

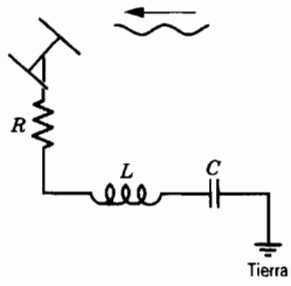


Figura 11 Problema 30.

31. La figura 12 muestra un generador de CA conectado a una "caja negra" por medio de un par de terminales. La caja contiene un circuito *RLC*, posiblemente incluso un circuito de múltiples mallas, cuyos elementos y ordenaciones no conocemos. Las medidas fuera de la caja revelan que

$$\mathcal{E}(t) = (75\ \text{V})\,\text{sen}\,\omega t$$

y

$$i(t) = (1.2\ \text{A})\,\text{sen}\,(\omega t + 42°).$$

(*a*) ¿Cuál es el factor de potencia? (*b*) ¿Se atrasa o se adelanta la corriente con respecto a la fem? (*c*) El circuito dentro de la caja, ¿es más inductivo o más capacitivo por naturaleza? (*d*) ¿Está el circuito de la caja en resonancia? (*e*) ¿Debe haber un capacitor dentro de la caja? ¿Un inductor? ¿Un resistor? (*f*) ¿Qué potencia promedio entrega el generador a la caja? (*g*) ¿Por qué no necesitamos conocer la frecuencia angular ω para responder todas estas preguntas?

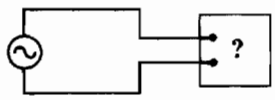


Figura 12 Problema 31.

32. En un circuito *RLC* como el de la figura 2, suponga que $R = 5.0\ \Omega$, $L = 60$ mH, $\nu = 60$ Hz y $\mathcal{E}_m = 30$ V. ¿Para qué valores de la capacitancia será la potencia media disipada en el resistor (*a*) máxima y (*b*) mínima? (*c*) ¿Cuáles son estas potencias máxima y mínima? (*d*) ¿Cuáles son los ángulos de fase correspondientes? (*e*) ¿Cuáles son los factores de potencia correspondientes?

33. En la figura 13, $R = 15.0\ \Omega$, $C = 4.72\ \mu$F, y $L = 25.3$ mH. El generador proporciona un voltaje senoidal de 75.0 V (rms) a una frecuencia $\nu = 550$ Hz. (*a*) Calcule la amplitud rms de la corriente. (*b*) Halle los voltajes rms V_{ab}, V_{bc}, V_{cd}, V_{bd}, V_{ad}. (*c*) ¿Qué potencia promedio se disipa en cada uno de los tres elementos del circuito?

34. En un circuito *RLC*, $R = 16.0\ \Omega$, $C = 31.2\ \mu$F, $L = 9.20$ mH, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m\,\text{sen}\,\omega t$ siendo $\mathcal{E}_m = 45.0$ V, y $\omega = 3000$ rad/s. Para el tiempo $t = 0.442$ ms, halle (*a*) la velocidad a la que el generador abastece energía, (*b*) la velocidad a la que está siendo almacenada la energía en el capacitor, (*c*) la velocidad a la que está siendo almacenada la energía en el inductor, y (*d*) la velocidad a la que está siendo disipada la energía en el resistor. (*e*) ¿Cuál es el significado del resultado negativo en cualquiera de las partes (*a*), (*b*) y (*c*)? (*f*) Demuestre que los resultados de las partes (*b*), (*c*) y (*d*) se suman al resultado de la parte (*a*).

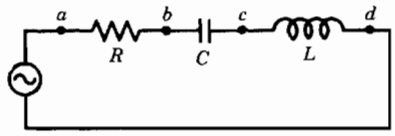


Figura 13 Problema 33.

35. Demuestre que, en un circuito *RLC*, en un ciclo de periodo T (*a*) la energía almacenada en el capacitor no cambia; (*b*) la energía almacenada en el inductor no cambia; (*c*) el generador suministra la energía $(\frac{1}{2}T)\mathcal{E}_m i_m \cos\phi$; y (*d*) el resistor disipa la energía $(\frac{1}{2}T)Ri_m^2$. (*e*) Demuestre que las cantidades obtenidas en (*c*) y (*d*) son iguales.

36. Un típico "interruptor de resistencia regulable" usado para reducir la luminosidad de las luces del escenario de un teatro consta de un inductor variable *L* conectado en serie con el reflector B como se muestra en la figura 14. La energía suministrada es de 120 V (rms) a 60 Hz; el reflector está marcado con "120 V, 1000 W". ¿Qué inductancia máxima *L* se requiere si la potencia del reflector se ha de variar según un factor de cinco? Suponga que la resistencia del reflector es independiente de su temperatura. (*b*) ¿Podríamos usar un resistor variable en lugar de un inductor? De ser así, ¿qué resistencia máxima se requiere? ¿Por qué no se hace así?

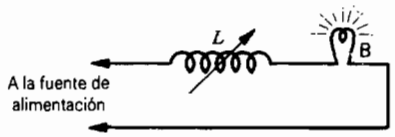


Figura 14 Problema 36.

37. El generador de CA de la figura 15 suministra 170 V (máx) a 60 Hz. Con el interruptor abierto como en el diagrama, la corriente resultante se adelanta a la fem del generador en 20°. Con el interruptor en la posición 1 la corriente se atrasa de la fem del generador en 10°. Cuando el interruptor está en la posición 2 la corriente máxima es de 2.82 A. Determine los valores de *R*, *L* y *C*.

Sección 39-5 El transformador

38. Un generador suministra 150 V a la bobina de 65 vueltas del primario de un transformador. Si la bobina del secundario tiene 780 vueltas, ¿cuál es el voltaje en el secundario?

39. Un transformador tiene 500 vueltas en el primario y 10 vueltas en el secundario. (*a*) Si V_p en el primario es de

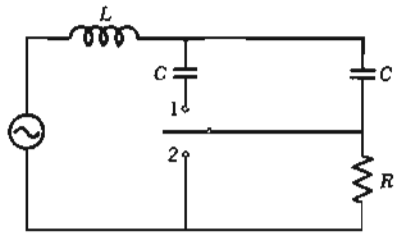


Figura 15 Problema 37.

120 V (rms), ¿cuál es V_s en el secundario, suponiendo un circuito abierto? (*b*) Si ahora se conecta una carga resistiva de 15 Ω al secundario, ¿cuáles son las corrientes en los devanados del primario y del secundario?

40. La figura 16 muestra un "autotransformador". Consta de una sola bobina (con un núcleo de hierro). Están provistas tres derivaciones. Entre las derivaciones T_1 y T_3 hay 200 vueltas y entre las derivaciones T_2 y T_3 hay 800 vueltas. Dos derivaciones cualesquiera pueden considerarse las "terminales del primario" y dos derivaciones cualesquiera pueden considerarse las "terminales del secundario". Haga una lista de todas las razones con las cuales el voltaje del primario puede intercambiarse con un voltaje del secundario.

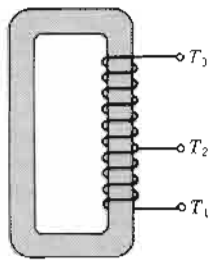


Figura 16 Problema 40.

41. En la figura 7 demuestre que $i_p(t)$ en el circuito del primario permanece sin cambio cuando se conecta una resistencia R' [$= R(N_p/N_s)^2$] directamente al generador, habiendo retirado al transformador y al circuito del secundario. Esto es,

$$i_p(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R'}.$$

En este sentido, vemos que un transformador no sólo "transforma" diferencias de potencial y corrientes, sino también resistencias. En el caso más general, en que la carga del secundario en la figura 7 contiene elementos capacitivos e inductivos así como resistivos, decimos que un transformador transforma *impedancias*.

42. Un ingeniero electricista diseña un transformador ideal para operar una máquina de rayos X a un potencial pico de 74 kV y una corriente rms de 270 mA. El transformador opera a partir de una fuente de alimentación de 220 V rms. Sin embargo, no se tuvo en cuenta la resistencia en los conductores que unen a ésta con el transformador. Al instalarlo, se comprueba que los conductores de la fuente tienen una resistencia de 0.62 Ω. ¿En cuánto debe aumentarse el voltaje de la fuente de alimentación con objeto de mantener los mismos parámetros operativos en el transformador?

43. En la figura 10, hagamos que la caja rectangular de la izquierda represente la salida (impedancia alta) de un amplificador de audio, siendo $r = 1000$ Ω. Hagamos también que $R = 10$ Ω represente a la bobina (impedancia baja) de un altavoz. Sabemos que un transformador puede usarse para "transformar" resistencias, haciendo que se comporten eléctricamente como si fuesen mayores o menores de lo que son realmente. Dibuje las bobinas del primario y del secundario de un transformador que vaya a colocarse entre el "amplificador" y el "altavoz" en la figura 10 para "igualar o acoplar las impedancias". ¿Cuál debe ser la razón de vueltas?

Proyectos para la computadora

44. Un resistor R se conecta en serie con un inductor L y una fem $\mathcal{E}$. La corriente i obedece a $L\,di/dt = -Ri + \mathcal{E}$, una ecuación que tiene la misma forma matemática que la segunda ley de Newton para el movimiento unidimensional. La corriente sustituye a la velocidad, $-Ri + \mathcal{E}$ sustituye a la fuerza y L sustituye a la masa. Usted puede usar el programa de computadora descrito en la sección 6-6 para hallar la corriente en función del tiempo. La carga neta que ha pasado por cualquier punto del circuito sustituye a la coordenada en la segunda ley de Newton. Puede omitirla del programa o retenerla y considerar que su valor inicial es 0. (*a*) Considere que $R = 100\ \Omega$, $L = 3.0 \times 10^{-2}$ H, y $\mathcal{E} = 15$ sen $(1.0 \times 10^4 t)$, en donde $\mathcal{E}$ está en volts y t está en segundos. La corriente es cero en $t = 0$. Use el programa para graficar $i(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 2.5 \times 10^{-3}$ s. Use $\Delta T = 2.0 \times 10^{-6}$ s como intervalo de la integración. Observe los transitorios: la corriente no es senoidal al principio pero finalmente se vuelve senoidal. Indique los tiempos cuando la fem tiene su valor máximo en la parte de la gráfica en que la corriente sea más aproximadamente senoidal. ¿Se adelanta la corriente con respecto a la fem o se atrasa? ¿Durante qué intervalo de tiempo? La diferencia de fase en radianes es 2π veces este intervalo de tiempo dividido entre el periodo. Calcule su valor. (*b*) Repita para una inductancia de 0.10 H. ¿Cómo afecta el cambio en la inductancia a la amplitud de la corriente? ¿Cómo afecta ello al intervalo de tiempo entre un máximo de la fem y el próximo máximo de la corriente?

45. Un resistor R, un inductor L y un capacitor C están conectados en serie con una fem $\mathcal{E}$. La carga q en el capacitor obedece a $L\,d^2q/dt^2 = \mathcal{E} - Ri - q/C$. Esta ecuación es matemáticamente idéntica a la segunda ley de Newton para el movimiento unidimensional: q sustituye a la coordenada, $i\,(= dq/dt)$ sustituye a la velocidad, L sustituye a la masa, y $\mathcal{E} - Ri - q/C$ sustituye a la fuerza. Use el programa de computadora descrito en el capítulo 6 para hallar la carga y la corriente en función del tiempo. (*a*) Considere $R = 100\ \Omega$, $L = 3.0 \times 10^{-2}$ H, $C = 3.0 \times 10^{-6}$ F,

y $\mathcal{E} = 15$ sen $(1.0 \times 10^4 t)$, donde $\mathcal{E}$ está en volts y t está en segundos. Considere que tanto la corriente como la carga son nulas en el tiempo $t = 0$ y use el programa para graficar a q e i desde $t = 0$ hasta $t = 2.5 \times 10^{-3}$ s. Use $\Delta T = 2 \times 10^{-6}$ s como intervalo de la integración. Nótese que los transitorios desaparecen y que la corriente y la carga se vuelven senoidales después de un tiempo. Mida en la gráfica la amplitud de la corriente, use luego $\mathcal{E}_m = i_m Z$ para calcular la impedancia Z del circuito. Compare sus resultados con $Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$. ¿Se adelanta la corriente a la fem o se atrasa? ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre un máximo de la fem y el próximo máximo de la corriente? (*b*) Repita el cálculo y conteste las preguntas para una fem dada por 15 sen $(2.0 \times 10^4 t)$. (*c*) Repita el cálculo y conteste las preguntas para una fem dada por 15 sen $\omega_0 t$, donde ω_0 es la frecuencia angular natural del circuito. Extienda la gama de la gráfica para que se tracen unos 3 ciclos.

46. Considere el circuito descrito en el problema anterior y use los valores dados en la parte (*a*) de ese problema. (*a*) Modifique el programa de la computadora para calcular y exhibir la energía suministrada por la fuente de la fem ($\mathcal{E}i$), la velocidad a la que disipa la energía en el resistor (i^2R), la velocidad a la que se almacena la energía en el campo eléctrico del capacitor (iq/C) y la velocidad a la que se almacena la energía en el campo magnético del inductor ($Li\,di/dt = \mathcal{E}i - i^2R - iq/C$). Use el programa para graficar estas cantidades en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 2.5 \times 10^{-3}$ s. (*b*) Identifique los intervalos de tiempo durante los que la fuente de fem está suministrando energía al circuito y los intervalos durante los cuales está absorbiendo energía. Una vez que los transitorios se hayan extinguido, ¿cree usted que la fuente de fem suministra más energía de la que absorbe, absorbe más energía de la que suministra, o suministra y absorbe la misma energía? (*c*) Identifique los intervalos de tiempo durante los cuales se está transfiriendo energía del circuito al campo magnético del inductor y los intervalos durante los cuales se está transfiriendo energía desde el campo magnético al circuito. Antes de que se extingan los transitorios, ¿existe un flujo neto de energía hacia o desde el inductor? ¿Qué sucede después de que se hayan extinguido los transitorios? (*d*) Identifique los intervalos de tiempo durante los cuales la energía se está transfiriendo desde el circuito al campo eléctrico del capacitor. Antes de que los transitorios se extingan, ¿existe un flujo neto de energía hacia o desde el capacitor? ¿Qué sucede después de que se hayan extinguido los transitorios?

CAPÍTULO 40

ECUACIONES DE MAXWELL

En mecánica clásica y en termodinámica hemos tratado de obtener el conjunto mínimo y más compacto de ecuaciones o leyes que nos permitieran analizar el comportamiento de los sistemas físicos. En mecánica clásica, las tres leyes del movimiento de Newton proporcionan el marco o sistema de referencia. En termodinámica se emplean las tres leyes (llamadas cero, uno y dos) para interpretar una amplia variedad de experimentos.

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo, las cuales hemos tratado por separado en capítulos anteriores, se conocen como las ecuaciones de Maxwell, *en honor del físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), quien fue el primero en hacer de las ecuaciones que formaran parte de una teoría simétrica y amplia del electromagnetismo. En este capítulo resumimos las ecuaciones de Maxwell y demostramos que un argumento basado en la simetría conduce a un término importante faltante en una de nuestras ecuaciones previas. En el capítulo que sigue a éste demostraremos lo sumamente importantes que son estas ecuaciones, incluyendo al término adicional, para entender las ondas electromagnéticas, y de allí traer a los dominios del electromagnetismo la óptica, las transmisiones de radio y TV, los hornos de microondas y los trenes suspendidos magnéticamente.*

40-1 ECUACIONES BÁSICAS DEL ELECTROMAGNETISMO

En este capítulo buscaremos identificar un grupo básico de ecuaciones para el electromagnetismo. Consideraremos diversas etapas para alcanzar este objetivo. Mostramos primero, en la tabla 1, un grupo *tentativo* de ecuaciones. Éstas se obtuvieron en los 13 capítulos anteriores. Téngase en cuenta que cada una de estas cuatro ecuaciones es un enunciado de un grupo diferente de resultados experimentales. Después de estudiar esta tabla, concluiremos, partiendo de un argumento basado en la simetría, que estas ecuaciones no son aún completas y que debe existir (y en realidad *existe*) un término faltante en una de ellas.

El término faltante demuestra no ser una corrección insignificante: completa la descripción del electromagnetismo y establece a la óptica como una parte integral del electromagnetismo. En particular, nos permite predecir que la velocidad de la luz c (y de todas las ondas electromagnéticas) en el vacío se relaciona con cantidades puramente eléctricas y magnéticas mediante

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \tag{1}$$

Esta relación, junto con las predicciones adicionales de las ecuaciones electromagnéticas, fue más tarde comprobada por experimentación con la luz, las ondas de radio y otras ondas electromagnéticas.

Ya hemos visto que el principio de simetría está aunado con la física y cómo condujo a menudo a nuevos conocimientos y descubrimientos. Por ejemplo, si el cuerpo A atrae al cuerpo B con una fuerza de magnitud F, entonces cabe esperar, por simetría, que el cuerpo B atraiga al cuerpo A con una fuerza de la misma magnitud. Sucede que así es en realidad. En otro ejemplo, la simetría de la teoría que describe a los electrones ordinarios cargados negativamente sugiere que el electrón tendría una contraparte cargada positivamente; el posterior descubrimiento del positrón demostró que esta predicción era correcta.

Examinemos la tabla 1 desde el punto de vista de la simetría. Haremos caso omiso de cualquier falta de simetría en las ecuaciones que provienen de ϵ_0 y μ_0; estas constantes son el resultado de nuestra elección de los sistemas de unidades y no desempeñan un papel en las

TABLA 1 ECUACIONES TENTATIVAS[a] BÁSICAS DEL ELECTROMAGNETISMO

Símbolo	*Nombre*	*Ecuación*	*Sección de referencia*
I	Ley de Gauss de la electricidad	$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$	29-3
II	Ley de Gauss del magnetismo	$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	37-1
III	Ley de la inducción de Faraday	$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$	36-2
IV	Ley de Ampère	$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$	35-5

[a] "Tentativas" indica que, como lo veremos más adelante, la ecuación IV no está aún completa y que requiere un término más; véase la tabla 2.

consideraciones de la simetría. (De hecho existen sistemas de unidades en los que $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.)

Teniendo esto en cuenta vemos que los miembros izquierdos de las ecuaciones de la tabla 1 son completamente simétricos, en parejas. Las ecuaciones I y II son integrales de superficie de **E** y de **B**, respectivamente, calculadas para superficies cerradas. Las ecuaciones III y IV son integrales de líneas de **E** y de **B**, respectivamente, calculadas para trayectorias cerradas.

Por otro lado, los miembros derechos de estas ecuaciones *no* son simétricos. Existen dos clases de asimetrías:

1. La primera asimetría, que en realidad no es de interés en este capítulo, trata del hecho evidente de que no existen centros de carga magnética (monopolos magnéticos; véase la Sec. 37-1) aislados análogos a los centros de carga eléctrica (por ejemplo, los electrones) aislados. Así, podemos explicar la q del miembro derecho de la ecuación I y el 0 en el miembro derecho de la ecuación II. De igual modo, el término $i(= dq/dt)$, que representa la corriente de las cargas eléctricas, aparece en el miembro derecho de la ecuación IV, pero no existe un término correspondiente que represente una corriente de las cargas magnéticas en el miembro derecho de la ecuación III. El deseo de simetría en estas ecuaciones condujo a la predicción de que los monopolos magnéticos deberían existir. A pesar de muchas investigaciones experimentales para descubrir los monopolos, todavía no existe una confirmación de su existencia. Más adelante, en este mismo capítulo, veremos cómo convertir en simétricas las ecuaciones de Maxwell en caso de probarse que los monopolos magnéticos existen.

2. La segunda asimetría, que es la más significativa en el estudio de este capítulo, es igualmente prominente. En el miembro derecho de la ecuación III hallamos el término $-d\Phi_B/dt$. Esta ecuación, conocida también como la ley de la inducción de Faraday, puede interpretarse vagamente diciendo:

Si un campo magnético cambia ($d\Phi_B/dt$), se produce un campo eléctrico ($\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$).

Aprendimos esto en la sección 36-1 donde demostrábamos que, al empujar a una barra magnetizada a través de un anillo conductor cerrado, realmente se induce un campo eléctrico, y por lo tanto una corriente, en ese anillo.

Según el principio de la simetría estamos obligados a pensar que la relación análoga es cierta, esto es:

Si un campo eléctrico ($d\Phi_E/dt$) cambia, se produce un campo magnético ($\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$).

Esta hipótesis, la cual estudiaremos más plenamente en la sección siguiente, nos proporciona el término faltante en la ecuación IV y resulta satisfacer la prueba del experimento.

40-2 CAMPOS MAGNÉTICOS INDUCIDOS Y LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

Aquí veremos en detalle la prueba de la hipótesis de la sección anterior: es decir, un campo eléctrico variable induce un campo magnético. Si bien nos guiamos primordialmente por consideraciones de simetría, también hallamos una verificación experimental directa.

La figura 1*a* muestra un capacitor circular de placas paralelas. En la placa de la izquierda (que suponemos contiene una carga negativa) entra una corriente i, y de la placa de la derecha sale una corriente igual i. Un anillo amperiano rodea al conductor en la figura 1*a* y forma los límites de una superficie que es atravesada por el conductor. La corriente en el conductor crea un campo magnético; en la sección 35-5 vimos que el campo magnético y la corriente se relacionan por la ley de Ampère,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i. \qquad (2)$$

Es decir, la integral de línea del campo magnético que rodea al anillo es proporcional a la corriente total que pasa por la superficie limitada por el anillo.

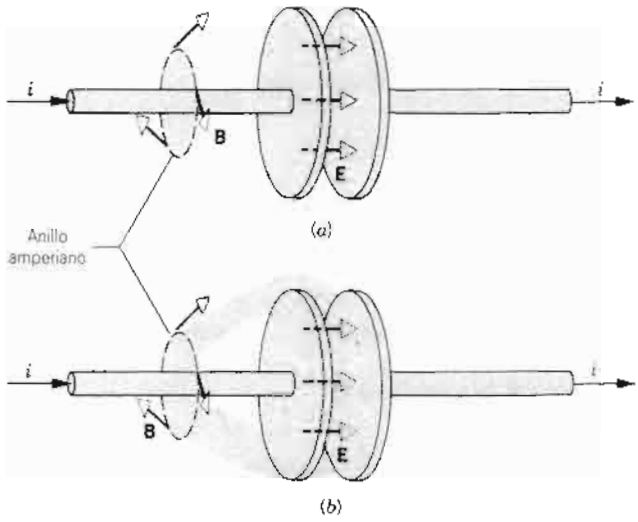


Figura 1 (*a*) Un anillo amperiano encierra una superficie a través de la cual pasa un alambre conduciendo una corriente. (*b*) El mismo anillo amperiano encierra una superficie que pasa entre las placas del capacitor. Por la superficie no pasa una corriente de conducción.

En la figura 1*b*, hemos conservado el mismo anillo pero hemos estirado a la superficie limitada por el anillo, de modo que encierre a toda la placa izquierda del capacitor. Puesto que el anillo no ha cambiado (como tampoco el campo magnético), el lado izquierdo de la ley de Ampère da el mismo resultado, pero el lado derecho da un resultado muy diferente, es decir, cero, porque no pasa ningún alambre conductor a través de la superficie. ¡Esto parece a todas luces una violación a la ley de Ampère!

Para restituir la ley de Ampère, de modo que describa correctamente la situación de la figura 1*b*, confiamos en la conclusión dada en la sección anterior basada en la simetría: *un campo eléctrico variable crea un campo magnético*. Consideremos con mayor detalle la situación de la figura 1. Cuando la carga se transporta al capacitor, el campo eléctrico en su interior cambia con cierta velocidad dE/dt. Las líneas del campo eléctrico atraviesan la superficie de la figura 1*b*; tenemos en cuenta el paso de las líneas de campo a través de esta superficie en términos del flujo eléctrico Φ_E, y un campo eléctrico variable debe dar un flujo eléctrico variable correspondiente, $d\Phi_E/dt$.

Para describir cuantitativamente este nuevo efecto, nos guiamos por la analogía con la ley de la inducción de Faraday,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \tag{3}$$

que afirma que un campo magnético variable (lado derecho) produce un campo eléctrico (lado izquierdo). Para la contraparte simétrica escribimos*

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{4}$$

La ecuación 4 afirma que un campo eléctrico variable (término derecho) puede producir un campo magnético (término izquierdo).

La situación mostrada en la figura 1*a* se describe según la ley de Ampère en la forma de la ecuación 1, mientras que la situación de la figura 1*b* está descrita por la ecuación 4. En el primer caso, es la corriente que atraviesa la superficie la que da el campo magnético, mientras que en el segundo caso, es el flujo eléctrico variable que atraviesa la superficie el que da el campo magnético. En general, debemos tener en cuenta *ambas* maneras de producir un campo magnético: (*a*) por medio de una corriente y (*b*) por medio de un flujo eléctrico variable, y así debemos modificar la ley de Ampère para leer

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{5}$$

Maxwell es el responsable de esta importante generalización de la ley de Ampère. Es una contribución central y vital, como ya lo habíamos señalado.

En el capítulo 35 supusimos que no había campos eléctricos variables presentes de modo que el término $d\Phi_E/dt$ en la ecuación 5 era cero. En el análisis de la figura 1*b* supusimos que no existían corrientes de conducción en el espacio que contiene al campo eléctrico. Entonces el término i en la ecuación 5 es cero en este caso. Vemos ahora que cada una de estas situaciones es un caso especial. Si hubiera alambres delgados conectando a las dos placas en la figura 1*b*, no habría contribuciones a partir de ambos términos en la ecuación 5.†

La figura 2 indica una manera alternativa de interpretar la ecuación 5; esa figura muestra el campo eléctrico en la

* Nuestro sistema de unidades requiere que incluyamos las constantes ϵ_0 y μ_0 en la ecuación 4. En algunos sistemas de unidades no aparecen.

† Existe una tercera manera de crear un campo magnético: el uso de materiales magnéticos. Por ejemplo, la ecuación 5 no considera el campo entero en un solenoide devanado sobre un núcleo de hierro. El efecto del material magnético puede incluirse al agregar un tercer término en la ecuación 5, la cual puede, entonces, escribirse así

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_M,$$

donde i_M es la *corriente de magnetización* o de imantación, la cual puede verse como la corriente adicional que debe de fluir por el solenoide vacío para producir el mismo campo que produce la corriente i cuando está presente el material magnético. Suponemos que no hay materiales magnéticos presentes, de modo que no se necesita incluir este término.

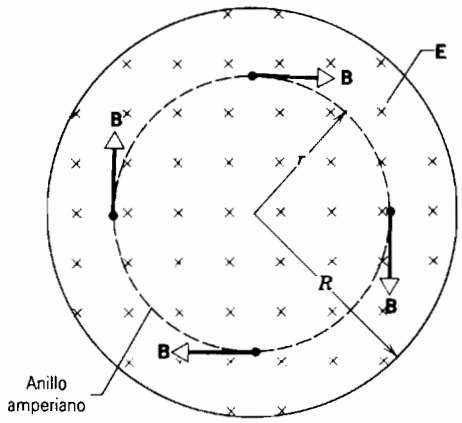


Figura 2 El campo magnético inducido **B**, mostrado en cuatro puntos, producido por el campo eléctrico variable **E** dentro del capacitor de la figura 1. El campo eléctrico está creciendo en magnitud. Compárese con la figura 12 del capítulo 36.

región situada entre las placas del capacitor de la figura 1. Consideremos ahora que nuestro anillo amperiano es una trayectoria circular en esta región. En el lado derecho de la ecuación 5, el término i es cero, pero el término $d\Phi_E/dt$ no lo es. De hecho, el flujo que atraviesa la superficie es positivo si las líneas de campo son como se muestra, y el flujo está aumentando (en correspondencia con el campo eléctrico que aumenta) cuando la carga positiva es transportada a la placa de la izquierda en la figura 1. La integral de línea de **B** calculada para el anillo debe ser también positiva, y las direcciones de **B** deben ser como se muestra en la figura 2.

La figura 2 sugiere un bello ejemplo de la simetría de la Naturaleza. Un campo *magnético* variable induce un campo *eléctrico* (ley de Faraday); vemos ahora que un campo *eléctrico* variable induce un campo *magnético*. Compárese cuidadosamente la figura 2 con la figura 12 del capítulo 36, la cual ilustra la producción de un campo eléctrico mediante un campo magnético variable. En cada caso el flujo Φ_B o Φ_E apropiado está *aumentando*. Sin embargo, la experimentación demuestra que las líneas de **E** en la figura 12 del capítulo 36 están *en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*, mientras que las de **B** en la figura 2 están *en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj*. Esta diferencia requiere que el signo menos de la ecuación 3 se omita de la ecuación 4.

Problema muestra 1 Un capacitor de placas paralelas con placas circulares está siendo cargado como se muestra en la figura 2. (*a*) Deduzca una expresión para el campo magnético inducido en varios radios r de la región entre las placas. Considérese tanto $r \leq R$ como $r \geq R$. (*b*) Encuentre B para $r = R$ cuando $dE/dt = 10^{12}$ V/m · s y $R = 5.0$ cm.

Solución (*a*) De la ecuación 4,

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

podemos escribir, para $r \leq R$,

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi r^2)] = \mu_0\epsilon_0\pi r^2 \frac{dE}{dt}.$$

Al despejar B tenemos

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 r \frac{dE}{dt} \qquad (r \leq R).$$

Para $r \geq R$, la ecuación 4 da

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi R^2)] = \mu_0\epsilon_0\pi R^2 \frac{dE}{dt},$$

o sea

$$B = \frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt} \qquad (r \geq R).$$

(*b*) Para $r = R$ las dos ecuaciones para B se reducen a la misma expresión, o sea

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 R \frac{dE}{dt} \\ &= \tfrac{1}{2}(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}) \\ &\quad \times (5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})(10^{12}\ \mathrm{V/m\cdot s}) \\ &= 2.8 \times 10^{-7}\ \mathrm{T} = 280\ \mathrm{nT}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que en este ejemplo los campos magnéticos inducidos son tan pequeños que apenas pueden ser medidos con aparatos sencillos, en aguda contraposición con los campos *eléctricos* inducidos (ley de Faraday), lo cual puede demostrarse fácilmente. Esta diferencia experimental se debe, en parte, al hecho de que las fem inducidas pueden multiplicarse fácilmente usando una bobina de muchas vueltas. No existe una técnica de tal simplicidad comparable para los campos magnéticos. En los experimentos que implican oscilaciones a frecuencias muy elevadas, dE/dt puede ser muy grande, dando por resultado valores del campo magnético significativamente grandes.

Corriente de desplazamiento

La ecuación 5 muestra que el término $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ tiene las dimensiones de una corriente. Aunque no esté implicado un movimiento de carga, existen ventajas al dar a este término el nombre de *corriente de desplazamiento*.* La corriente de desplazamiento i_d se define de acuerdo con

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{6}$$

Entonces podemos decir que puede crearse un campo magnético ya sea por medio de una corriente de conduc-

* La palabra "desplazamiento" tiene razones históricas. No tiene nada que ver con nuestro uso anterior del desplazamiento para indicar la posición de una partícula.

ción i o por medio de una corriente de desplazamiento i_d, y podemos reescribir la ecuación 5 así:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0(i + i_d). \tag{7}$$

El concepto de corriente de desplazamiento nos permite conservar la noción de que *la corriente tiene continuidad*, un principio establecido en la sección 32-1 para las corrientes de conducción estacionarias. En la figura 1*b*, por ejemplo, entra una corriente de conducción i en la placa positiva y sale por la placa negativa. Esta corriente *de conducción no* es continua en el espacio entre las placas del capacitor porque por este espacio no pasa ninguna carga. Sin embargo, la corriente de desplazamiento i_d en el espacio prueba ser exactamente igual a i, conservando así el concepto de la continuidad de la corriente.

Calculemos la corriente de desplazamiento i_d en el espacio del capacitor de la figura 1*b*. La carga q en las placas se relaciona con el campo eléctrico E en el espacio por medio de la ecuación 3 del capítulo 31,

$$q = \epsilon_0 EA.$$

Al derivar nos da

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt}.$$

La cantidad EA es el flujo eléctrico Φ_E, y entonces

$$i = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

La comparación con la ecuación 6 demuestra que

$$i = i_d.$$

Entonces, la corriente de desplazamiento en el espacio entre las placas es igual a la corriente de conducción por los alambres, lo que demuestra que la corriente tiene continuidad.

Cuando el capacitor está completamente cargado, la corriente de conducción cae a cero (no fluye corriente por los alambres). El campo eléctrico entre las placas se vuelve constante; entonces $dE/dt = 0$, y por lo tanto, la corriente de desplazamiento cae también a cero.

La corriente de desplazamiento i_d, dada por la ecuación 6, tiene tanto dirección como magnitud. La dirección de la corriente de conducción i es la del vector $\mathbf{j}$ de la densidad de la corriente de conducción. De manera similar, la dirección de la corriente de desplazamiento i_d es la del vector $\mathbf{j}_d$ de la densidad de la corriente de conducción, el cual, como se infiere de la ecuación 6, es precisamente $\epsilon_0(d\mathbf{E}/dt)$. La regla de la mano derecha, aplicada a $\mathbf{j}_d$ da la dirección del campo magnético asociado, de igual manera como lo hace para el vector $\mathbf{j}$ de la densidad de la corriente de conducción.

Problema muestra 2 ¿Cuál es la corriente de desplazamiento en la situación del problema muestra 1?

Solución De la ecuación 6, la definición de la corriente de desplazamiento,

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi R^2)] = \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

$$= (8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(\pi)(5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2(10^{12}\ \mathrm{V/m\cdot s})$$

$$= 0.070\ \mathrm{A} = 70\ \mathrm{mA}.$$

Ésta es una corriente razonablemente grande y, sin embargo, determinamos en el problema muestra 1 que produce un campo magnético de apenas 280 nT. Una corriente de 70 mA que fluya por un alambre delgado produciría un campo magnético grande cerca de la superficie del alambre, fácilmente detectable por medio de la aguja de una brújula.

La diferencia *no* proviene del hecho de que una corriente sea una corriente de conducción y la otra sea una corriente de desplazamiento. Para las mismas condiciones, ambas clases de corriente son igualmente efectivas en la generación de un campo magnético. La diferencia se origina porque la corriente de conducción, en este caso, está confinada a un alambre delgado, pero la corriente de desplazamiento está esparcida en un área igual al área superficial de las placas del capacitor. Entonces, el capacitor se comporta como un "alambre grueso" de 5 cm de radio, conduciendo una corriente (de desplazamiento) de 70 mA. Su mayor efecto magnético, que ocurre en los bordes del capacitor, es mucho menor de lo que sería el caso en la superficie de un alambre delgado. (Véase también el problema 12.)

40-3 ECUACIONES DE MAXWELL

La ecuación 5 completa nuestra presentación de las ecuaciones básicas del electromagnetismo, llamadas *ecuaciones de Maxwell*. Se resumen en la tabla 2, la cual sustituye al grupo "tentativo" de la tabla 1, siendo la diferencia entre los dos grupos el término de la corriente de desplazamiento "faltante" en la ecuación IV de la tabla 1. Además, en la tabla 2 se presenta una lista de los experimentos cruciales que condujeron a cada una de las ecuaciones de Maxwell. Esta lista de experimentos nos recuerda que las ecuaciones de Maxwell no fueron simples especulaciones teóricas sino que se desarrollaron para explicar los resultados de los experimentos de laboratorio.

Maxwell describió su teoría del electromagnetismo en un extenso *Tratado de la electricidad y el magnetismo*, publicado en 1873, seis años antes de su muerte. El *Tratado* no contiene las cuatro ecuaciones en la forma en que las hemos presentado. Fue el físico inglés Oliver Heaviside (1850-1925), descrito como "un antiguo telegrafista, desempleado, en buen grado autodidacta", quien señaló la simetría entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en las ecuaciones y expresó las cuatro ecuaciones en la forma en que las conocemos hoy día.

TABLA 2 ECUACIONES BÁSICAS DEL ELECTROMAGNETISMO (ECUACIONES DE MAXWELL)[a]

Número	*Nombre*	*Ecuación*	*Describe*	*Experimento crucial*	*Capítulo de referencia*
I	Ley de Gauss de la electricidad	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$	La carga y el campo eléctrico	(*a*) Cargas iguales se repelen y cargas opuestas se atraen, según el cuadrado de los inversos de su separación. (*b*) En un conductor aislado, una carga se mueve a su superficie exterior.	29
II	Ley de Gauss del magnetismo	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	El campo magnético	Hasta ahora no ha sido posible verificar la existencia de un monopolo magnético.	37
III	Ley de la inducción de Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$	El efecto eléctrico de un campo magnético variable	Una barra imantada, empujada a través de un anillo de alambre cerrado, creará una corriente en el anillo.	36
IV	Ley de Ampère (con la generalización de Maxwell)	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \, d\Phi_E/dt$	El efecto magnético de una corriente o de un campo eléctrico variable	(*a*) Una corriente que pase por un alambre genera un campo magnético cerca del alambre. (*b*) La velocidad de la luz puede calcularse mediante mediciones puramente electromagnéticas.	35 41

[a] Escritas suponiendo que no esté presente un material dieléctrico o magnético.

Consideremos algunas características de estas notables ecuaciones.

1. *La simetría.* La inclusión del término de la corriente de desplazamiento en la ecuación IV de la tabla 2 ciertamente hace parecer a las ecuaciones III y IV más semejantes, mejorando por ello la simetría del grupo de ecuaciones. Sin embargo, todavía no son completamente simétricas. Resultaría un grupo completamente simétrico si se confirmase la existencia de cargas magnéticas individuales (monopolos). De descubrirse tales cargas magnéticas sería posible experimentar con ellas. Acuden a la mente dos experimentos por analogía con nuestro desarrollo previo del electromagnetismo. Un experimento, similar al experimento original de Coulomb, sería la medición de la fuerza entre los monopolos para determinar si obedecen una ley del inverso de los cuadrados. De ser así, entonces la ecuación II se podría escribir $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 q_m$. Esta forma de la ley de Gauss para el magnetismo afirmaría que el flujo del campo magnético que atraviesa a cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga magnética neta q_m encerrada por la superficie. En este caso las ecuaciones I y II serían más simétricas.

El segundo experimento, similar al que realizó Oersted, sería para demostrar que una corriente de cargas magnéticas produce un campo eléctrico. En este caso se sumaría al lado derecho de la ecuación III un término que incluya $i_m = dq_m/dt$, la corriente de cargas magnéticas. Con esta adición, las ecuaciones III y IV serían más simétricas.

Hasta ahora no existe una prueba concluyente de los monopolos magnéticos, así que los experimentos descritos permanecen como especulaciones, y el grupo de ecuaciones de la tabla 2 es nuestra mejor descripción de las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos. Sin embargo, nótese cuán fácilmente podría incorporarse un descubrimiento tan importante como el del monopolo magnético en las ecuaciones básicas del electromagnetismo.

2. *Las ondas electromagnéticas.* Las cuatro ecuaciones de la tabla 1 se conocían, por supuesto, mucho antes de los tiempos de Maxwell (él nació en el año en que Faraday descubrió la ley de la inducción). Consideradas juntas, no sugieren nuevos efectos más allá de los experimentos originales que representan. Es sólo al sumar la corriente de desplazamiento cuando emerge la nueva física. Esta nueva física incluye la predicción de la existencia de las ondas electromagnéticas, que fueron descubiertas experimentalmente por Heinrich Hertz en 1888, 15 años después de haberse publicado el *Tratado* de Maxwell. En el capítulo siguiente demostraremos cómo se deducen de las ecuaciones de Maxwell las ondas electromagnéticas, las cuales transportan energía y cantidad de movimiento a través del espacio vacío mediante campos electromagnéticos.

3. *El electromagnetismo y la relatividad.* Ya hemos dicho en la introducción de este capítulo que las ecuacio-

nes de Maxwell son para el electromagnetismo lo que las leyes de Newton son para la mecánica. Sin embargo, existe una diferencia importante. La teoría de la relatividad de Einstein fue presentada en 1905, más de 30 años despúes del trabajo de Maxwell y más de 200 años después del de Newton. La relatividad requería de cambios importantes en las leyes de Newton para el movimiento a velocidades cercanas a la de la luz, pero *no se requirió cambio alguno en las ecuaciones de Maxwell.* Las ecuaciones de Maxwell son totalmente consistentes con la teoría especial de la relatividad, y de hecho la teoría de Einstein se originó en sus reflexiones sobre las ecuaciones de Maxwell. En el lenguaje de la física decimos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes conforme a una transformación de Lorentz, pero las leyes de Newton no. (Véase la Sec. 35-7 para un estudio de la transformación relativista de los campos **E** y **B**.)

40-4 ECUACIONES DE MAXWELL Y OSCILACIONES EN CAVIDADES *(Opcional)*

Existen muchas situaciones en las que intervienen campos magnéticos que podemos usar como una demostración de las ecuaciones de Maxwell. Dejamos hasta el capítulo 41 cualquier consideración de las pruebas que implican ondas magnéticas. Aquí veremos una cavidad resonante, la cual podemos considerar que es un oscilador electromagnético con elementos distribuidos.

A modo de analogía, consideremos la cavidad resonante *acústica* de la figura 3. (Un tubo de órgano, cerrado en ambos extremos, es un ejemplo de tal resonador acústico.) En un oscilador simple, como un bloque unido a un resorte o un circuito *LC*, podemos "concentrar" la energía almacenada en elementos por separado: la energía cinética del bloque y la energía potencial del resorte, o la energía magnética almacenada en el inductor y la energía eléctrica almacenada en el capacitor. En el resonador acústico no es posible esta división. Cada diminuto elemento de gas dentro del tubo tiene tanto energía potencial como energía cinética; se dice que tal sistema tiene elementos *distribuidos*. La cavidad resonante electromagnética tiene igualmente elementos distribuidos.

Una característica de un sistema distribuido es que tiene un gran número de modos resonantes (en contraste, el sistema concentrado tiene pocos, a menudo apenas uno). La figura 3 muestra el modo fundamental de la cavidad acústica. Ilustra una serie de "instantáneas" de las variaciones de la presión y la velocidad a través de un ciclo. Nótese que la presión y la velocidad varían con el tiempo y con la ubicación a lo largo del tubo. En cada extremo de un tubo cerrado existe un antinodo de presión. Donde la variación de la presión es máxima, la velocidad es cero (Figs. 3*a* y 3*e*), en analogía con el sistema bloque-resorte a su máximo desplazamiento. Cuando la presión es uniforme, las velocidades tienen sus valores máximos (Figs. 3*c* y 3*g*).

Como lo muestran las gráficas de barras que acompañan a cada "instantánea" de la figura 3, la energía del resonador oscila entre la energía cinética del gas en movimiento y la energía potencial asociada con la compresión y el enrarecimiento del gas. La energía puede ser totalmente potencial (Figs. 3*a* y 3*e*), totalmente cinética (Figs. 3*c* y 3*g*), o una combinación de ambas.

Por analogía con la cavidad acústica, podemos considerar una cavidad resonante electromagnética cilíndrica. En lugar de la presión y la velocidad, describimos el estado del resonador mediante sus campos eléctrico y magnético. Para iniciar las oscilaciones del campo, conectamos una fuente de fem que varía senoidalmente. Esto da lugar a un campo eléctrico variable en la cavidad. Como era el caso en la figura 2, el campo eléctrico variable provoca un campo magnético, y así dentro de la cavidad existen campos magnéticos y eléctricos que varían con la posición y con el tiempo.

Al igual que el resonador acústico, el resonador electromagnético almacena su energía en dos formas: en este caso las energías están asociadas con el campo eléctrico y el campo magnético. Cada elemento de volumen de la cavidad contribuye a ambas clases de energía, y así la cavidad electromagnética tiene elementos distribuidos.

La figura 4 muestra, de manera semejante a la figura 3, una serie de "instantáneas" de la cavidad que ilustran los campos eléctrico y magnético en varios momentos durante un ciclo de oscilación del modo fundamental. Nótese la oscilación de la energía entre las dos formas, correspondientes a las densidades de la energía eléctrica y magnética,

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \text{y} \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Al integrar para el volumen de la cavidad, hallamos la energía total en cada una de las dos formas.

La figura 5 muestra una representación más detallada de los campos eléctrico y magnético en un instante de la oscilación en particular, correspondiendo a la figura 4*d*. Nótese en la figura 4*d* que el campo magnético está disminuyendo, y que el campo eléctrico está creciendo. Apliquemos la ley de Faraday,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

al rectángulo de trazos de dimensiones h y $a - r$. Existe un campo magnético definido Φ_B en esta área rectangular, y este flujo está disminuyendo con el tiempo porque **B** está disminuyendo.

En una cavidad hecha de un material conductor, podemos hacer que **E** sea cero en la pierna superior de la trayectoria de integración, la cual se encuentra dentro de las paredes de la cavidad. También, **E** y $d\mathbf{s}$ están en ángulo recto en las dos piernas laterales, de modo que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ en esa parte de la trayectoria rectangular. La única contribución a la integral de línea de **E** alrededor del perímetro del rectángulo se deduce del segmento inferior, y así

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = hE(r),$$

donde $E(r)$ es el valor de E en un radio r desde el eje de la cavidad. Al incorporar este resultado de la integral de línea en la ley de Faraday, obtenemos

$$E(r) = -\frac{1}{h}\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{8}$$

La ecuación 8 muestra que $E(r)$ depende de la velocidad a la que el Φ_B que atraviesa la trayectoria mostrada está cambiando con el tiempo y que tiene su magnitud máxima cuando $d\Phi_B/dt$ es máxima. Esto ocurre cuando **B** es cero, esto es, cuando **B** está cambiando su dirección; recordemos que un seno o un coseno cambia más rápidamente (tiene la pendiente más pronuncia-

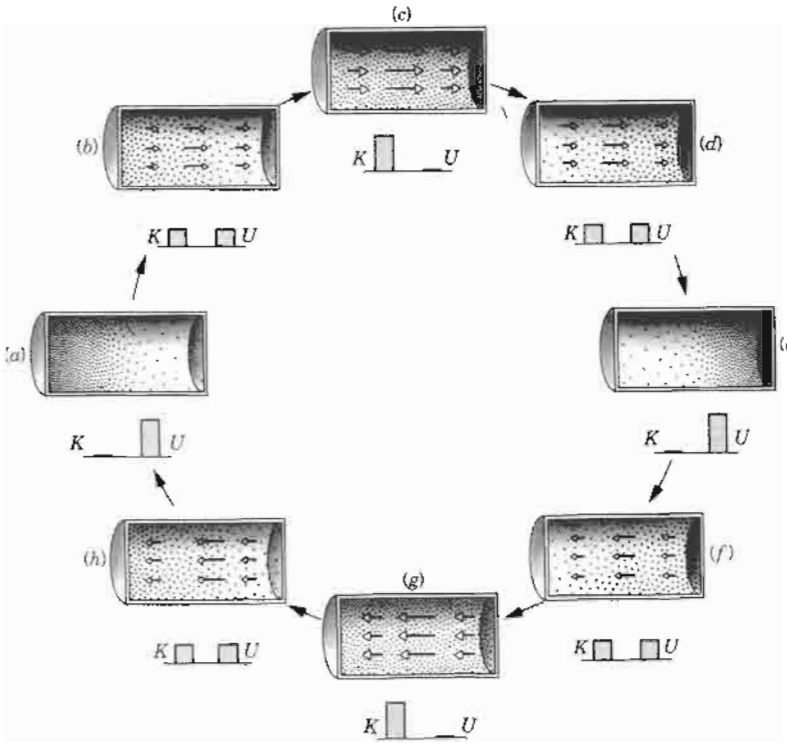


Figura 3 Ocho etapas en un ciclo de oscilación de una cavidad resonante acústica cilíndrica (como un tubo de órgano cerrado). Las gráficas de barras debajo de cada figura muestran la energía cinética K y la energía potencial U. Las flechas representan las velocidades dirigidas de pequeños elementos de volumen del gas.

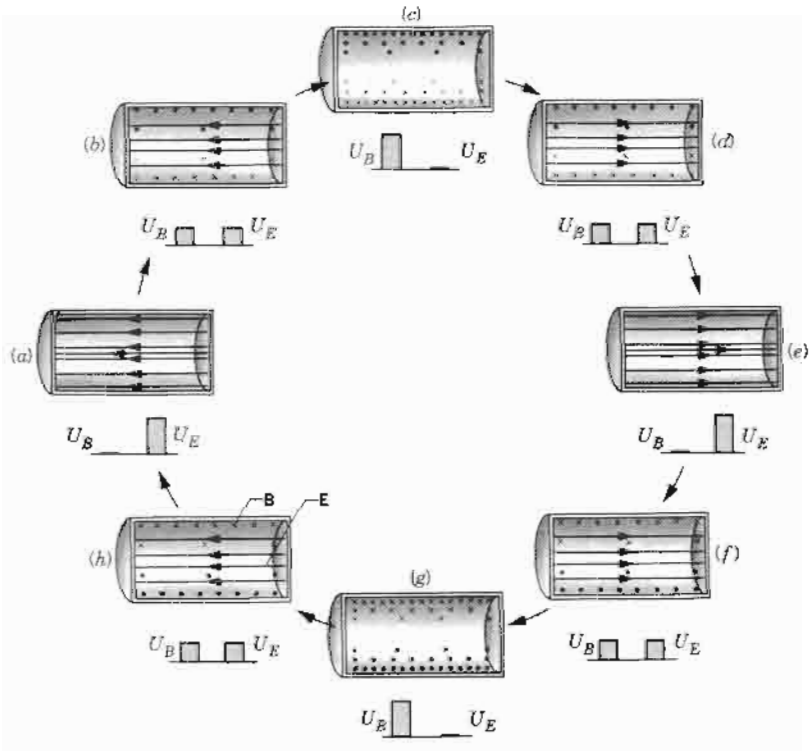


Figura 4 Ocho etapas en un ciclo de oscilación de una cavidad resonante electromagnética cilíndrica. Las gráficas de barras debajo de cada figura muestran la energía eléctrica U_E y la energía magnética U_B almacenadas. Las líneas de **B** son círculos concéntricos con el eje, y las líneas de **E** son paralelas al eje. Compárese con la figura 3; ambas figuras son ejemplos de oscilaciones en los que intervienen elementos distribuidos.

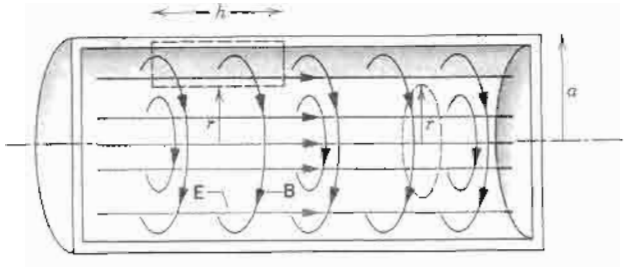


Figura 5 Representación más detallada de una cavidad resonante electromagnética cilíndrica en el instante de la figura 4*d*. El rectángulo de trazos se emplea para aplicar la ley de Faraday, y el círculo de trazos se usa para la ley de Ampère.

da) en el instante en que cruza el eje entre los valores positivo y negativo. El patrón del campo eléctrico en la cavidad tiene su valor *máximo* cuando el campo magnético es *cero* en todas partes, consistente con las figuras 4*a* y 4*e* y con el concepto del intercambio de la energía entre los campos magnético y eléctrico. Al aplicar la ley de Lenz puede demostrarse que el campo eléctrico en la figura 5 apunta realmente hacia la *derecha*, como se muestra, si el campo magnético está *disminuyendo*.

Apliquemos la ley de Ampére en la forma

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

a la trayectoria circular de trazos de radio r que se muestra en la figura. No se transporta ninguna carga a través del área limitada por la trayectoria circular, de modo que la corriente de conducción i es cero. La integral de línea de la izquierda es $(B)(2\pi r)$, y por lo tanto la ecuación se reduce a

$$B(r) = \frac{\mu_0\epsilon_0}{2\pi r}\frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad (9)$$

La ecuación 9 muestra que el campo magnético $B(r)$ es proporcional a la velocidad a la que el flujo eléctrico Φ_E a través del anillo está cambiando con el tiempo. El campo $B(r)$ tiene su valor máximo cuando $d\Phi_E/dt$ está en su máximo; esto ocurre cuando $\mathbf{E} = 0$, esto es, cuando $\mathbf{E}$ está invirtiendo su dirección. Así pues, vemos que $\mathbf{B}$ tiene su valor *máximo* cuando $\mathbf{E}$ es *cero* en todos los puntos de la cavidad. Esto es consistente con las figuras 4*c* y 4*g* y con el concepto del intercambio de la energía entre las formas eléctrica y magnética. Una comparación con la figura 2, la cual, al igual que la figura 5, corresponde a un campo eléctrico creciente, muestra que las líneas de $\mathbf{B}$ giran en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj vistas a lo largo de la dirección del campo eléctrico.

La comparación entre las ecuaciones 8 y 9 indica la completa interdependencia de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ en la cavidad. El campo magnético, al cambiar con el tiempo, induce el campo eléctrico de un modo descrito por la ley de Faraday. El campo eléctrico, que también cambia con el tiempo, induce el campo magnético de un modo descrito por la generalización de Maxwell a la ley de Ampère. Las oscilaciones, una vez establecidas, se soportan una a la otra y continuarían indefinidamente si no fuese por las pérdidas debidas a la producción de energía interna en las paredes de la cavidad conductora o la pérdida de energía en las aberturas que pudiera haber en las paredes. En el capítulo 41 demostramos que ocurre una acción recíproca entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ no sólo en ondas

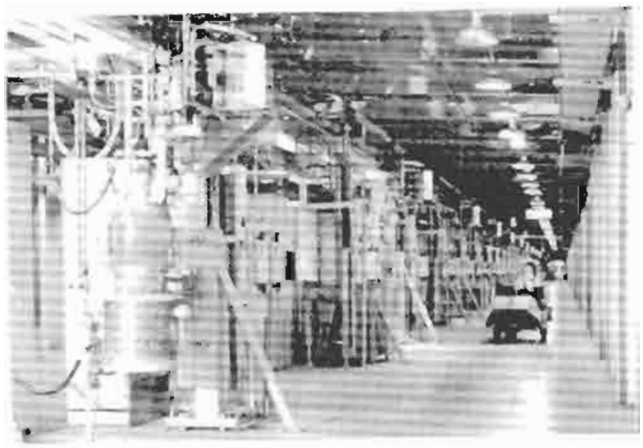


Figura 6 El interior del acelerador lineal de 2 millas de Stanford. El cilindro vertical grande es una de los varios cientos de cavidades electromagnéticas resonantes (klistrones) que abastecen los campos eléctricos necesarios para acelerar a los electrones. Cada klistrón produce una potencia pico de 67 MW.

electromagnéticas estacionarias en las cavidades sino también en las ondas electromagnéticas viajeras, como las ondas de radio o la luz visible.

En una cavidad acústica resonante, como un tubo de órgano, proporcionamos una fuente de energía (por ejemplo, dirigiendo un chorro de aire contra un borde agudo), dejamos que se establezca una onda estacionaria en la cavidad con una frecuencia determinada por la geometría de la cavidad, y hacemos que una porción de la energía de la onda salga del tubo, donde es oída por un oyente. La secuencia de los sucesos es semejante en una cavidad electromagnética. Las oscilaciones deben estimularse externamente, como por una corriente. Se establece una onda electromagnética estacionaria cuya frecuencia depende de las dimensiones de la cavidad cilíndrica. Así se permite que una porción de la onda deje la cavidad. Un uso común de tales cavidades resonantes se tiene en los aceleradores que producen haces de partículas cargadas con alta energía. La figura 6 muestra el interior del acelerador de electrones de 2 millas en Stanford, en donde una serie de cientos de cavidades resonantes (llamadas *klistrones*) alimentan ondas electromagnéticas en el acelerador. Los electrones viajan a lo largo de la trayectoria recta de 2 millas, sometidos a una secuencia de campos eléctricos acelerantes, que disparan la energía de los electrones a cerca de 50 GeV. ■

Problema muestra 3 Analice en la figura 5 las corrientes (tanto de conducción como de desplazamiento) que ocurren en la cavidad (tanto en sus paredes conductoras como en su volumen). Demuestre la relación entre estas corrientes y los campos magnético y eléctrico y también que, al considerar las corrientes tanto de conducción como de desplazamiento juntas, es razonable concluir que la corriente tiene continuidad alrededor de anillos cerrados.

Solución La figura 7 muestra dos vistas de la cavidad, en un instante correspondiente al de la figura 5. Para simplificar, no mostramos los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$; las flechas representan a las

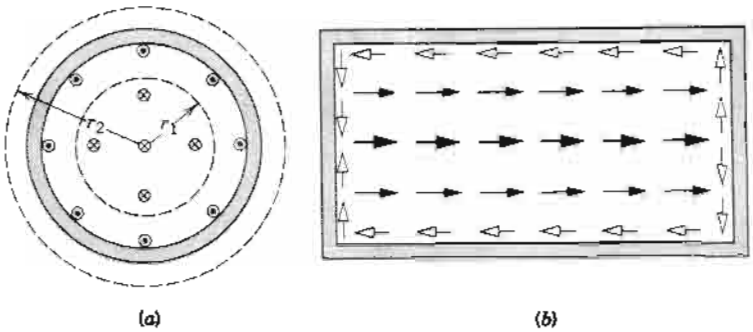


Figura 7 Problema muestra 3. Las secciones transversales de la cavidad de las figuras 4 y 5, que muestran (*a*) la corriente de conducción que sube por las paredes y la corriente de desplazamiento que baja por el volumen de la cavidad, y (*b*) la corriente de desplazamiento (las flechas oscuras) en el volumen de la cavidad y la corriente de conducción (las flechas claras) en las paredes. Las flechas representan las densidades de la corriente. Nótese que la corriente total (conducción + desplazamiento) tiene continuidad; esto es, es posible formar anillos de corriente cerrados.

corrientes. Puesto que E está creciendo en las figuras 5 y 7, la carga positiva en la tapa del lado izquierdo debe estar creciendo. Entonces, debe haber corrientes de conducción en las paredes que apuntan de derecha a izquierda en la figura 7*b*. Estas corrientes se muestran también mediante puntos (que representan las puntas de las flechas) cerca de las paredes de la cavidad en la figura 7*a*.

Teniendo en mente que $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ es una corriente de desplazamiento, podemos escribir la ecuación 9 como

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_d.$$

Esta ecuación recalca que **B** en la cavidad está asociada con una corriente de desplazamiento; compárese con la ecuación 11 del capítulo 35, $B = \mu_0 i/2\pi r$. Al aplicar la regla de la mano derecha en la figura 5 se muestra que la corriente de desplazamiento i_d debe estar dirigida hacia el plano de la figura 7*a* si ha de estar asociada con las líneas de **B** que están presentes y que siguen el movimiento de las manecillas del reloj.

La corriente de desplazamiento se representa en la figura 7*b* por medio de flechas que apuntan hacia la derecha y en la figura 7*a* por medio de cruces que representan a flechas que entran en la página. La figura 7 muestra que la corriente tiene continuidad, se dirige hacia arriba de las paredes como una corriente de conducción y luego regresa a través del volumen de la cavidad como una corriente de desplazamiento. Al aplicar la ley de Ampère generalizada por Maxwell,

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0(i_d + i), \tag{10}$$

a la trayectoria circular de radio r_1 en la figura 7*a*, vemos que **B** en esa trayectoria se debe por completo a la corriente de desplazamiento, siendo cero la corriente de conducción *i dentro de la trayectoria*.

En la trayectoria de radio r_2, la corriente *neta* encerrada es cero porque la corriente de conducción en las paredes es exactamente igual y opuesta a la corriente de desplazamiento en el volumen de la cavidad. Puesto que i es igual a i_d en magnitud, pero su dirección es opuesta, se deduce de la ecuación 10 que B debe ser cero en todos los puntos fuera de la cavidad, de acuerdo con la observación.

PREGUNTAS

1. Explique a su propio modo por qué puede interpretarse la ley de la inducción de Faraday (véase la tabla 2) al decir que "un campo magnético variable genera un campo eléctrico".
2. Si un flujo uniforme Φ_E a través de un anillo circular plano disminuye con el tiempo, ¿está el campo magnético inducido (visto a lo largo de la dirección de **E**) en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?
3. Si (como es cierto) existen sistemas de unidades en los que ϵ_0 y μ_0 no aparecen, ¿cómo puede ser cierta la ecuación 1?
4. Compare las tablas 1 y 2. ¿Es suficiente confiar sólo en el principio de la simetría o necesitamos realmente de la verificación experimental del término "faltante" en la ecuación IV?
5. ¿Por qué es tan fácil demostrar que "un campo magnético variable produce un campo eléctrico" pero es tan difícil demostrar en forma sencilla que "un campo eléctrico variable produce un campo magnético"?
6. En la figura 2, considere un círculo con $r > R$. ¿Cómo puede inducirse un campo magnético alrededor de este círculo, como lo demuestra el problema muestra 1? Al fin y al cabo, no existe un campo eléctrico en la ubicación de este círculo y $dE/dt = 0$ aquí.
7. En la figura 2, **E** va hacia adentro de la figura y aumentando en magnitud. Halle la dirección de **B** si, en su lugar, (*a*) **E** va hacia adentro de la figura y disminuyendo, (*b*) **E** va hacia afuera de la figura y aumentando, (*c*) **E** va hacia afuera de la figura y disminuyendo, y (*d*) **E** permanece constante.
8. En la figura 9*c* del capítulo 38, se necesita una corriente de desplazamiento para que se cumpla el concepto de continuidad de la corriente en el capacitor. ¿Cómo puede existir una, considerando que no existe carga en el capacitor?
9. (*a*) En la figura 2, ¿cuál es la dirección de la corriente de desplazamiento i_d? En esta misma figura, ¿puede usted

hallar una regla que relacione a las direcciones (*b*) de **B** y **E** y (*c*) de **B** y $d\mathbf{E}/dt$?

10. ¿Qué ventajas hay en llamar al término $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ en la ecuación IV, tabla 2, una corriente de desplazamiento?

11. ¿Puede medirse una corriente de desplazamiento con un amperímetro? Explique.

12. ¿Por qué son tan fáciles de detectar los campos magnéticos de las corrientes de conducción en los alambres pero tan difíciles de detectar los efectos magnéticos de la corriente de desplazamiento en los capacitores?

13. En la tabla 2 hay tres clases de falta evidente de simetría en las ecuaciones de Maxwell. (*a*) Las cantidades ϵ_0 y/o μ_0 aparecen en I y IV pero no en II y III. (*b*) Existe un signo menos en III pero no un signo menos en IV. (*c*) Existen "términos de polos magnéticos" faltantes en II y III. ¿Cuál de estos apartados representa una genuina falta de simetría? Si se descubriesen los monopolos magnéticos, ¿cómo reescribiríamos estas ecuaciones para incluirlos? (*Sugerencia*: Sea q_m la intensidad del polo magnético, análoga al cuanto de carga e; ¿qué unidades tendría q_m en el SI?)

14. Las ecuaciones de Maxwell como se presentan en la tabla 2 están expresadas suponiendo que no hay materiales dieléctricos presentes. ¿Cómo se escribirían las ecuaciones si desaparece esta restricción?

15. Haga una lista de tantos sistemas oscilatorios mecánicos (*a*) concentrados y (*b*) distribuidos como pueda.

16. Una bobina tiene una inductancia medida L. En un caso práctico también tiene una capacitancia C, al comportarse los devanados contiguos como "placas". Puede hacerse que la bobina oscile con cierta frecuencia sin unirla a un capacitor externo. ¿Es éste un caso de elementos distribuidos? ¿Supone usted que puede oscilar con más de una frecuencia? Analícelo.

17. ¿Puede un elemento de circuito dado (digamos, un capacitor) comportarse como un elemento "concentrado" en ciertas circunstancias y como un elemento "distribuido" en otras?

18. ¿Son los sistemas (digamos, mecánicos) oscilatorios *o bien* concentrados *o bien* distribuidos? Esto es, ¿no existen casos intermedios? (*a*) Considérese un sistema aglomerado como puede ser una ordenación bloque-resorte idealizada. ¿Cómo podría usted cambiarlo físicamente para hacerlo más distribuido? (*b*) Considérese un sistema distribuido como una cuerda vibratoria. ¿Cómo podría usted cambiarlo físicamente para hacerlo más concentrado?

19. Analice el flujo periódico de energía, de existir alguno, entre puntos de una cavidad resonante acústica.

20. Una cavidad resonante acústica llena de aire y una cavidad resonante electromagnética del mismo tamaño tienen frecuencias de resonancia que están en razón de 10^6 más o menos. ¿Cuál tiene la frecuencia más alta y por qué?

21. A menudo se recubren con una capa de plata las cavidades electromagnéticas en el interior. ¿Por qué?

22. ¿En qué partes del ciclo serán cero (*a*) la corriente de conducción y (*b*) la corriente de desplazamiento en la cavidad de la figura 4?

23. Analice la variación del tiempo durante un ciclo completo de las cargas que aparecen en varios puntos de las paredes internas de la cavidad electromagnética oscilatoria de la figura 4.

24. ¿Cabe esperar que el arreglo o disposición de los campos magnético y eléctrico en la figura 5 sea la única manera posible? Si existen otros arreglos, ¿cabe esperar que tengan frecuencias más altas o más bajas que las mostradas en la figura 5?

25. En relación con la figura 7, ¿en qué sentido pueden considerarse las tapas de los extremos como placas de un capacitor? ¿En qué sentido pueden considerarse las paredes cilíndricas como un inductor? (*Nota*: La figura 7 es claramente un caso de elementos distribuidos, pero debe existir una transición suave entre elementos distribuidos y concentrados.)

26. (*a*) En la figura 5, ¿es posible aplicar útilmente la ley de Faraday al círculo de trazos? (*b*) ¿Es posible aplicar útilmente la ley de Ampère al rectángulo de trazos? Analícelo.

PROBLEMAS

Sección 40-1 Ecuaciones básicas del electromagnetismo

1. Verifique el valor numérico de la velocidad de la luz en la ecuación 1 mediante la sustitución de los valores numéricos de ϵ_0 y μ_0 usados en los capítulos anteriores y demuestre que la ecuación es dimensionalmente correcta.

2. (*a*) Demuestre que $\sqrt{\mu_0/\ _0} = 377\ \Omega$ (llamada la "iinpedancia del vacío"). (*b*) Demuestre que la frecuencia angular de 60 Hz de la CA ordinaria es de 377 rad/s. (*c*) Compárese (*a*) con (*b*). ¿Cree usted que esta coincidencia es la razón por la cual se eligió originalmente 60 Hz como la frecuencia en los generadores de CA? Recuérdese que en Europa se usan 50 Hz.

Sección 40-2 Campos magnéticos inducidos y la corriente de desplazamiento

3. En la situación del problema muestra 1, ¿en dónde es el campo magnético inducido igual a la mitad de su valor máximo?

4. Demuestre que la corriente de desplazamiento en un capacitor de placas paralelas puede escribirse

$$i_d = C\frac{dV}{dt}.$$

5. Se le da un capacitor de placas paralelas de 1.0 μF. ¿Cómo se establecería una corriente de desplazamiento (instantánea) de 1.0 mA en el espacio entre sus placas?

6. En el problema muestra 1, demuestre que la *densidad* j_d *de la corriente de desplazamiento* está dada, para $r < R$, por

$$j_d = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}.$$

7. Un capacitor de placas paralelas tiene placas cuadradas de 1.22 m de lado como en la figura 8. Hay una corriente de carga de 1.84 A que entra al capacitor y sale de él. (*a*) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento a través de la región entre las placas? (*b*) ¿Cuál es dE/dt en esta región? (*c*) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento a través de la trayectoria de trazos cuadrada entre las placas? (*d*) ¿Cuál es $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ alrededor de esta trayectoria de trazos cuadrada?

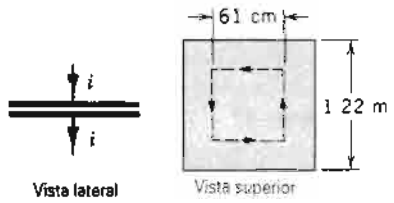


Figura 8 Problema 7.

8. La figura 9 muestra las placas P_1 y P_2 de un capacitor circular de placas paralelas de radio R. Están conectadas, como se muestra, a conductores rectos largos en los que existe una corriente de conducción i constante. También se muestran tres círculos hipotéticos de radio r, dos de ellos fuera del capacitor y uno entre las placas. Demuestre que el campo magnético en la circunferencia de cada uno de estos círculos está dado por

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

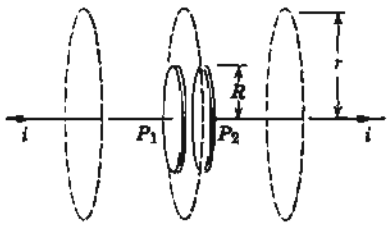


Figura 9 Problema 8.

9. Un campo eléctrico uniforme se colapsa a cero desde una intensidad inicial de 0.60 MV/m en un tiempo de 15 μs de la manera mostrada en la figura 10. Calcule la corriente de desplazamiento, a través de una región de 1.9 m^2 perpendicular al campo, durante cada uno de los intervalos de tiempo (*a*), (*b*) y (*c*) mostrados en la gráfica. (Haga caso omiso del comportamiento en los extremos de los intervalos.)

10. En el problema muestra 1, demuestre que las expresiones obtenidas para $B(r)$ pueden escribirse

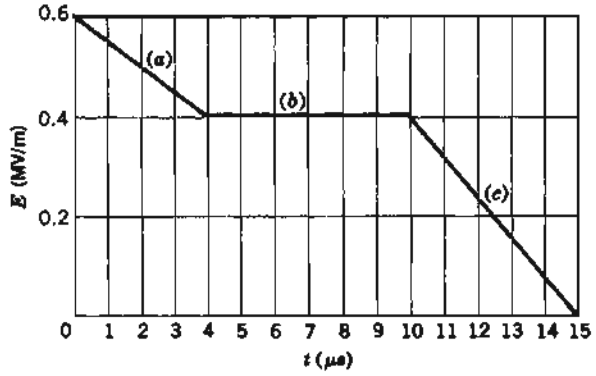


Figura 10 Problema 9.

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \qquad (r \geq R),$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d r}{2\pi R^2} \qquad (r \leq R).$$

Nótese que estas expresiones son precisamente de la misma forma que las encontradas en el capítulo 35 excepto que la corriente de conducción i se sustituyó por la corriente de desplazamiento i_d.

11. Un capacitor de placas paralelas con placas circulares de 21.6 cm de diámetro está siendo cargado como en la figura 2. La densidad de la corriente de desplazamiento a través de la región es uniforme, hacia el papel en el diagrama, y tiene un valor de 1.87 mA/cm^2. (*a*) Calcule el campo magnético B a una distancia r = 53.0 mm del eje de simetría de la región. (*b*) Calcule dE/dt en esta región.

12. En 1929 M. R. Van Cauwenberghe logró medir directamente, por vez primera, la corriente de desplazamiento i_d entre las placas de un capacitor de placas paralelas al cual se le aplicó una diferencia de potencial alterna, como lo indica la figura 2. Empleó placas circulares cuyo radio efectivo era de 40.0 cm y cuya capacitancia de 100 pF. La diferencia de potencial aplicada tenía un valor máximo V_m de 174 kV a una frecuencia de 50.0 Hz. (*a*) ¿Qué corriente de desplazamiento máxima estaba presente entre las placas? (*b*) ¿Por qué se eligió que la diferencia de potencial aplicada fuera tan elevada como lo es? (La delicadeza de estas mediciones es tal que únicamente se llevaron a cabo en forma directa ¡más de 60 años después de que Maxwell enunciara el concepto de la corriente de desplazamiento! El experimento se describe en *Journal de Physique*, No. 8, 1929.)

13. Supóngase que un capacitor de placas paralelas tiene un radio R de 32.1 mm y una separación de 4.80 mm entre placas. Se aplica entre las placas una diferencia de potencial senoidal con un valor máximo de 162 V y una frecuencia de 60.0 Hz. Halle el valor máximo del campo magnético inducido para $r = R$.

14. El capacitor de la figura 11, que consta de dos placas circulares de radio R = 18.2 cm, está conectado a una fuente de fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t$, donde $\mathcal{E}_m$ = 225 V y ω =

128 rad/s. El valor máximo de la corriente de desplazamiento es $i_d = 7.63\ \mu A$. Desprecie el efecto de borde del campo eléctrico en los bordes de las placas. (*a*) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente *i*? (*b*) ¿Cuál es el valor máximo de $d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo eléctrico a través de la región entre las placas? (*c*) ¿Cuál es la separación *d* entre las placas? (*d*) Encuentre el valor máximo de la magnitud de **B** entre las placas a una distancia $r = 11.0$ cm del centro.

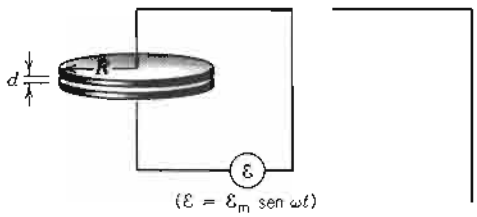


Figura 11 Problema 14.

Sección 40-3 Ecuaciones de Maxwell

15. Reúna y tabule expresiones para las cuatro cantidades siguientes, considerando tanto $r < R$ como $r > R$. Coloque las deducciones una al lado de la otra y estúdielas como aplicaciones interesantes de las ecuaciones de Maxwell a problemas que tengan simetría cilíndrica. (*a*) $B(r)$ para una corriente *i* en un conductor largo de radio *R*. (*b*) $E(r)$ para un cilindro de carga uniforme, largo, de radio *R*. (*c*) $B(r)$ para un capacitor de placas paralelas, con placas circulares de radio *R*, donde *E* está cambiando con una velocidad constante. (*d*) $E(r)$ para una región cilíndrica de radio *R* en donde un campo magnético uniforme *B* está cambiando con una velocidad constante.

16. Una barra conductora cilíndrica y larga con radio *R* está centrada en el eje *x* como se muestra en la figura 12. En la barra se practica un corte de sierra angosto en $x = b$. Hacia la derecha de la barra fluye una corriente de conducción *i*, creciente con el tiempo y dada por $i = \alpha t$; α es una constante (positiva) de proporcionalidad. En $t = 0$ no existe una carga en las caras del corte próximas a $x = b$. (*a*) Halle la magnitud de la carga en estas caras, en función del tiempo. (*b*) Use la ecuación I de la tabla 2 para encontrar *E* en el claro en función del tiempo. (*c*) Dibuje las líneas de **B** para $r < R$, donde *r* es la distancia desde el eje *x*. (*d*) Aplique la ecuación IV de la tabla 2 para determinar $B(r)$ en el espacio o separación de las caras para $r < R$. (*e*) Compare la respuesta anterior con $B(r)$ en la barra cuando $r < R$.

17. Dos trayectorias cerradas contiguas *abefa* y *bcdeb* comparten el mismo lado común *be* como se muestra en la figura 13. (*a*) Podemos aplicar $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$ (la ecuación III de la tabla 2) a cada una de estas dos trayectorias cerradas por separado. Demuestre que, sólo a partir de esto, la ecuación III se satisface *automáticamente* para la trayectoria compuesta *abcdefa*. (*b*) Repita usando la ecuación IV. (*c*) Esta relación se llama propiedad de "autoconsistencia"; ¿por qué debe ser autoconsistente cada una de las ecuaciones de Maxwell?

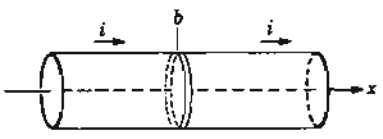


Figura 12 Problema 16.

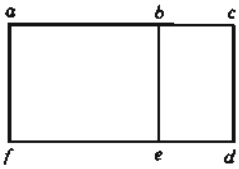


Figura 13 Problema 17.

18. Dos paralelepípedos contiguos comparten una cara común como se muestra en la figura 14. (*a*) Podemos aplicar $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$ (la ecuación I en la tabla 2) a cada una de estas dos superficies cerradas por separado. Demuestre que, sólo a partir de esto, la ecuación I se satisface *automáticamente* para la superficie cerrada compuesta. (*b*) Repita usando la ecuación II. Véase el problema 17.

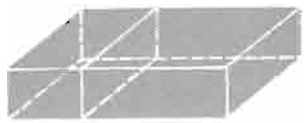


Figura 14 Problema 18.

Sección 40-4 Ecuaciones de Maxwell y oscilaciones en cavidades

19. ¿Cuáles serían las dimensiones de una cavidad electromagnética cilíndrica resonante (como la descrita en el texto) que opere a 60 Hz, en el modo fundamental, la frecuencia de la corriente alterna de uso doméstico? (La frecuencia angular está dada por $\omega = 2.41c/a$, donde *a* es el radio de la cavidad, en metros.)

20. Una cavidad electromagnética cilíndrica de 4.8 cm de diámetro y 7.3 cm de longitud está oscilando en el modo mostrado en la figura 4. (*a*) Supóngase que, en los puntos en el eje de la cavidad, $E_m = 13$ kV/m. La frecuencia de oscilación es de 2.4 GHz. Para tales puntos axiales, ¿cuál es la velocidad máxima $(dE/dt)_m$ con la que cambia *E*? (*b*) Supóngase que el valor promedio de $(dE/dt)_m$, en todos los puntos de una sección transversal de la cavidad, sea la mitad del valor hallado anteriormente para los puntos axiales. Basados en esta hipótesis, ¿cuál es el valor máximo de *B* en la superficie cilíndrica de la cavidad?

21. En términos microscópicos el principio de continuidad de la corriente puede expresarse como

$$\oint (\mathbf{j} + \mathbf{j}_d) \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

donde $\mathbf{j}$ es la densidad de corriente de conducción y $\mathbf{j}_d$ es la densidad de la corriente de desplazamiento. La integral ha de considerarse para cualquier superficie cerrada; la ecuación dice esencialmente que cualquiera que sea la corriente que fluya dentro del volumen encerrado debe también de fluir fuera. (*a*) Aplique esta ecuación a la superficie mostrada por las líneas de trazos en la figura 15 poco después de haber sido cerrado el interruptor S. (*b*) Aplíquela a las diversas superficies que puedan ser trazadas dentro de la cavidad de la figura 7, incluyendo alguna que corte a las paredes de la cavidad.

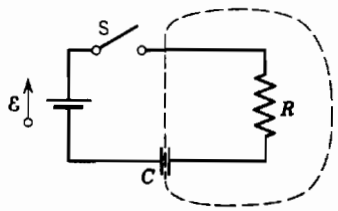


Figura 15 Problema 21.

22. Trace diagramas como los mostrados en la figura 4 que muestren un ciclo de oscilación de una cavidad cilíndrica electromagnética resonante que opere, no en el modo fundamental como en esa figura, sino en el primer sobretono (armónico superior).

CAPÍTULO 41

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ecuaciones de Maxwell, el tema del capítulo anterior, no sólo resumen las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos de una manera compacta, sino que conducen también a fenómenos completamente nuevos. El logro supremo de la teoría de Maxwell fue quizá la predicción de la existencia de las ondas electromagnéticas y darse cuenta de que la luz podía comprenderse como un tipo de onda electromagnética.

En el presente capítulo demostraremos la forma en que, de las ecuaciones de Maxwell, se deducen las ecuaciones para las ondas electromagnéticas, y estudiaremos las propiedades de las ondas resultantes. Nuestra descripción de las ondas electromagnéticas emplea muchos de los términos empleados previamente en nuestro estudio de las ondas mecánicas en los capítulos 19 y 20; trataremos aquí de las ondas senoidales y las describiremos en términos familiares como amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de fase. Consideraremos ahora las ondas electromagnéticas en términos generales, y en el capítulo siguiente trataremos las propiedades de las ondas de luz con más detalle. Estos dos capítulos constituyen un puente al estudio de la óptica en los capítulos que seguirán después.

41-1 EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO*

En tiempos de Maxwell la luz y las radiaciones infrarrojas y ultravioletas que la acompañan eran los únicos tipos de radiaciones electromagnéticas conocidos. Hoy en día el espectro electromagnético, que se muestra en la figura 1, abarca una amplia gama de diferentes clases de radiaciones provenientes de una variedad de fuentes. De acuerdo con la teoría de Maxwell concluimos que, si bien estas radiaciones difieren en gran manera en cuanto a sus propiedades, sus medios de producción, y las maneras en que las observamos, comparten otras características en común: todas pueden describirse en términos de campos eléctricos y magnéticos, y todas viajan a través del vacío con la misma velocidad (la velocidad de la luz). De hecho, desde el punto de vista fundamental, difieren *sólo* en la longitud de onda o en la frecuencia. Los nombres dados a las diversas regiones del espectro en la figura 1 tienen que ver únicamente con la manera en que se producen u observan los diferentes tipos de onda; no tienen nada que ver con cualquier propiedad fundamental de las ondas. Aparte de la diferencia en sus longitudes de onda, no existe una manera experimental de distinguir una onda en la región visible de otra en la región infrarroja; las ondas tienen formas idénticas y descripciones matemáticas idénticas. No existen espacios en el espectro, como tampoco límites bien definidos entre las diversas categorías. (Ciertas regiones del espectro están asignadas por la ley para usos comerciales u otros usos, tales como la transmisión por TV, AM o FM.)

Consideremos algunos de estos tipos de radiación electromagnética con más detalle.

* El término *espectro* procede del latín *spectrum*, que significa "forma" o "apariencia". Entre las muchas otras palabras que provienen de la misma raíz se encuentran: "espectáculo" y "especie". Newton introdujo el término para describir la imagen iridiscente que resultaba cuando un haz de luz solar atravesaba un prisma de vidrio. Hoy día nos referimos al *espectro electromagnético* para indicar las muchas clases diferentes de radiación electromagnética, clasificadas de acuerdo con su frecuencia o longitud de onda en una escala de pequeña a grande. Hablamos también del *espectro político*, que indica similarmente la amplia gama de puntos de vista políticos en una escala que va desde lo ultraconservador hasta lo ultraliberal.

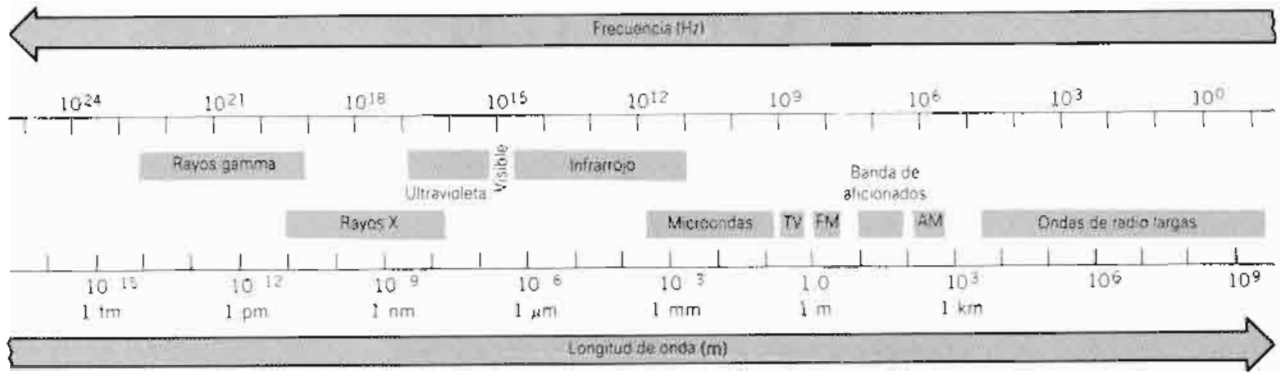


Figura 1 El espectro electromagnético. Nótese que tanto la longitud de onda como la frecuencia son logarítmicas.

1. *La luz.* La región visible del espectro es la más familiar para nosotros, porque como especie hemos adaptado receptores (los ojos) que son sensibles a la radiación electromagnética más intensa emitida por el Sol, la fuente extraterrestre más cercana. Los límites de la longitud de onda de la región visible van desde 400 nm (el violeta) hasta unos 700 nm (el rojo).

La luz se emite a menudo cuando los electrones exteriores (o de valencia) de los átomos cambian su estado de movimiento; por esta razón, estas transiciones en el estado del electrón se llaman *transiciones ópticas*. El color de la luz nos dice algo acerca de los átomos o del objeto del cual se emitió. El estudio de la luz emitida desde el Sol y desde las estrellas distantes da una información con respecto a su composición.

2. *Infrarrojos.* La radiación infrarroja, que tiene longitudes de onda mayores que la de lo visible (desde 0.7 μm hasta 1 mm aproximadamente), se emite comúnmente por átomos o moléculas cuando cambian su movimiento vibratorio o rotatorio. Este cambio ocurre a menudo como un cambio en la energía interna del objeto emisor y se observa como un cambio en la energía interna del objeto que detecta la radiación. En este caso, la radiación infrarroja es un medio importante de transferencia de calor, y a veces se le llama *radiación térmica*. El calor que sentimos al acercar la mano a un foco encendido es primordialmente resultado de la radiación infrarroja emitida por el bulbo y absorbida por la mano. Todos los objetos emiten radiación electromagnética (llamada "radiación térmica"; véase el capítulo 49) a causa de su temperatura. Los objetos de temperaturas en la zona que encontramos normalmente (digamos, de 3 K a 3000 K) emiten su radiación térmica más intensa en la región infrarroja del espectro. Un mapa de la radiación infrarroja que procede del espacio nos ha dado la información que suplementa la obtenida de la radiación visible (Fig. 2).

3. *Microondas.* Las microondas pueden considerarse como ondas cortas de radio, con longitudes de onda típicas

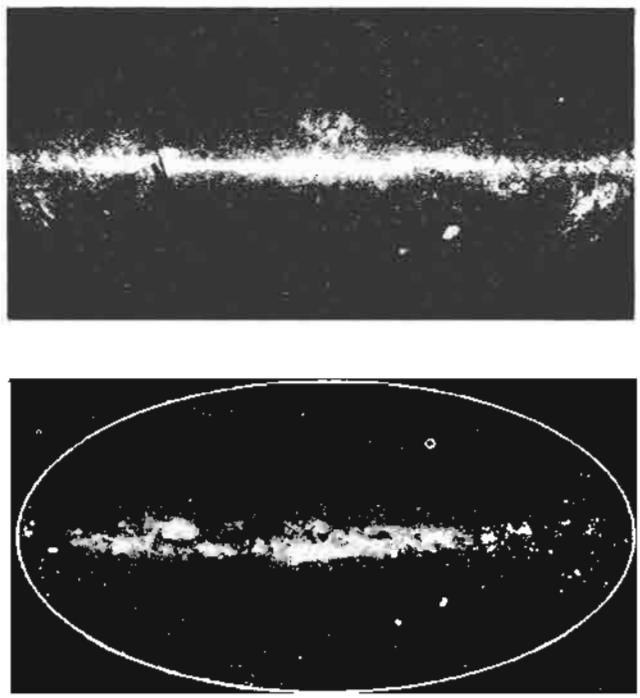


Figura 2 (*a*) Imagen infrarroja de nuestra galaxia Vía Láctea tomada por el satélite IRAS. (*b*) Imagen de luz visible de la Vía Láctea. Partes de la imagen visible, especialmente aquéllas cerca del centro de la galaxia, están oscurecidas por nubes de polvo, lo cual no afecta la imagen infrarroja. Los dos objetos grandes que se ven abajo de la galaxia y a la derecha del centro son las Nubes Magallánicas Grande y Pequeña, galaxias acompañantes de la Vía Láctea.

en la zona de 1 mm a 1 m. Comúnmente se producen por osciladores electromagnéticos en circuitos eléctricos, como en el caso de los hornos de microondas. Las microondas se usan a menudo para transmitir conversaciones por teléfono; la figura 3 muestra una estación de microondas que sirve para retransmitir llamadas por teléfono. La

Figura 3 Una estación retransmisora (repetidora) de microondas, la cual recibe y luego retransmite señales que conducen las llamadas telefónicas a grandes distancias.

componente más abundante es la *radiación de microondas de fondo*, que se cree es la radiación electromagnética asociada con el "Big Bang", la bola de fuego que marcó el nacimiento del Universo hace unos 10^{10} años; cuando el Universo se expandió y enfrió, la longitud de onda de esta radiación se estiró hasta estar ahora en la región de las microondas, con una longitud de onda pico de alrededor de 1 mm. Los átomos de hidrógeno neutrales, que ocupan las regiones entre las estrellas de nuestra galaxia, son otra fuente extraterrestre de microondas común, emitiendo radiación con una longitud de onda de 21 cm.

4. *Ondas de radio.* Las ondas de radio tienen longitudes de onda mayores de 1 m. Se producen a partir de fuentes terrestres mediante electrones que oscilan en conductores de circuitos eléctricos. Mediante una elección cuidadosa de la geometría de estos circuitos, como en una antena, podemos controlar la distribución en el espacio de

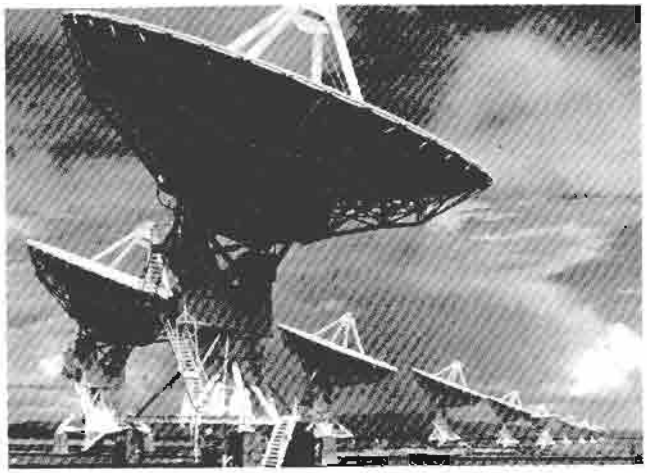


Figura 4 Uno de los 27 paraboloides radiotelescópicos, de 25 m de diámetro, en la *Very Large Array*, cerca de Socorro, Nuevo México. Los 27 paraboloides están dispuestos sobre una vía de rieles en forma de Y, cada uno de cuyos ramales tiene 10 millas de longitud. Esta disposición equivale a un solo plato de 20 millas de diámetro.

la radiación emitida (si la antena actúa como transmisor) o la sensibilidad del detector (si la antena actúa como receptor). Viajando al exterior a la velocidad de la luz, el frente expansivo de las ondas de las señales de TV transmitidas en la Tierra desde alrededor de 1950 ha llegado ahora a 400 estrellas aproximadamente, portando información a sus habitantes, de haberlos, con respecto a nuestra civilización.

De fuentes extraterrestres nos llegan ondas de radio, siendo el Sol una fuente principal que a menudo interfiere con la recepción de radio o de TV en la Tierra. Júpiter es también una fuente activa de emisiones de radio. El trazado de mapas de las emisiones de radio procedentes de fuentes extraterrestres, una ciencia conocida como *radioastronomía*, ha proporcionado información acerca del Universo que no suele obtenerse mediante el uso de telescopios ópticos. Además, puesto que la atmósfera de la Tierra no absorbe mucho las longitudes de onda de radio, la radioastronomía proporciona ciertas ventajas sobre la astronomía óptica, o infrarroja, o de microondas en la Tierra. La figura 4 muestra un ejemplo de un radiotelescopio, y la figura 5 ofrece un resultado típico de las observaciones de nuestra galaxia para las longitudes de onda de radio.

Uno de los descubrimientos más sorprendentes de la radioastronomía fue la existencia de fuentes pulsadas de ondas de radio, observada por primera vez en 1968. Estos objetos, conocidos como *pulsares*, emiten ráfagas muy cortas de ondas de radio separadas en tiempo por intervalos del orden de segundos. Este intervalo de tiempo entre pulsaciones es extremadamente estable, variando en me-

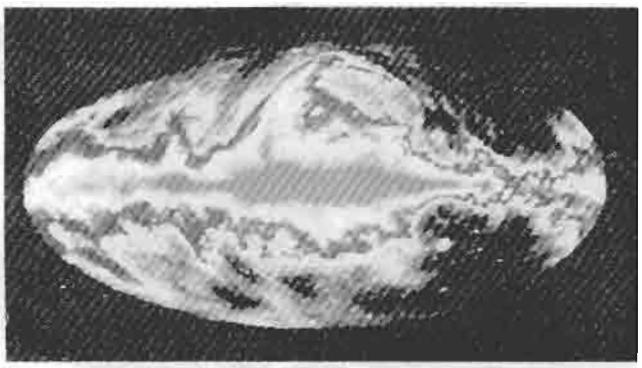


Figura 5 Radioimagen de la Vía Láctea. (Compárese con la Fig. 2.) Esta imagen fue captada a una longitud de onda de 73 cm. Esta radiación se origina en su mayor parte de electrones de alta energía que son desviados por los campos magnéticos de la galaxia. Nótense las intensas emisiones que salen fuera del plano de la galaxia, las cuales no aparecen en la figura 2.

nos de 10^{-9} s. Se cree que los pulsares se originan de estrellas de neutrones en rotación, en donde los electrones atrapados por el campo magnético experimentan aceleraciones centrípetas grandes debidas a la rotación. Las emisiones de radio altamente direccionales barren a la Tierra como si fuesen un faro buscador cuando la estrella gira. Los pulsares se han observado dentro de toda la zona del espectro, incluyendo longitudes de onda visibles y de rayos X.

5. *Ultravioleta.* Las radiaciones de longitudes de onda más cortas de lo visible comienzan con la ultravioleta (1 nm a 400 nm), la cual puede producirse por las transiciones atómicas de los electrones exteriores así como en la radiación que parte de fuentes térmicas como el Sol. Puesto que nuestra atmósfera absorbe fuertemente las longitudes de onda ultravioletas, poca de esta radiación del Sol llega a la superficie. Sin embargo, el principal agente de esta absorción es el ozono atmosférico, que en años recientes se ha estado agotando como resultado de las reacciones químicas con los fluorocarbonos liberados de los rociadores con aerosoles, los equipos de refrigeración y otras fuentes. Una exposición breve a la radiación ultravioleta provoca quemaduras comunes en la piel, pero la exposición prolongada puede producir efectos más graves, entre los que se encuentra el cáncer de la piel. La astronomía del ultravioleta se lleva a cabo usando observatorios transportados por satélites a la órbita terrestre.

6. *Rayos X.* Los rayos X (con longitudes de onda típicas entre 0.01 nm y 10 nm) pueden producirse con longitudes de onda discretas en transiciones individuales entre los electrones interiores (los más fuertemente ligados) de un átomo, y también pueden producirse al desacelerar partículas cargadas (como los electrones). Las longitudes de onda de los rayos X corresponden aproximadamente al espaciamiento entre los átomos de los sólidos; por lo tanto la dispersión de los rayos X de los materiales es una manera útil de estudiar su estructura. Los rayos X pueden penetrar fácilmente en tejidos blandos pero son detenidos por los huesos y otras materias sólidas; por esta razón han encontrado un uso amplio en los diagnósticos médicos.

La astronomía de rayos X, al igual que la astronomía del ultravioleta, se efectúa con observatorios en órbita. La mayoría de las estrellas, como el Sol, no son emisoras potentes de rayos X; sin embargo, en ciertos sistemas que constan de dos estrellas vecinas que giran alrededor de su centro de masa común (llamado sistema *binario*), el material de una estrella puede calentarse y acelerarse mientras cae en la otra, emitiendo rayos X en el proceso. Si bien no se dispone aún de una prueba que lo confirme, se cree que el miembro más masivo de ciertas binarias de rayos X debe ser un hoyo negro.

7. *Rayos gamma.* Los rayos gamma son radiaciones electromagnéticas con las longitudes de onda más cortas (menos de 10 pm). Son las más penetrantes entre las radiaciones electromagnéticas, y la exposición a una radiación gamma intensa puede tener un efecto perjudicial sobre el cuerpo humano. Estas radiaciones pueden emitirse en las transiciones de un núcleo atómico de un estado a otro y también pueden ocurrir en las desintegraciones de ciertas partículas elementales; por ejemplo, un pión neutral puede desintegrarse en dos rayos gamma de acuerdo con

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma,$$

y un electrón y un positrón (la antipartícula del electrón) pueden aniquilarse mutuamente en dos rayos gamma:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

En general, cada uno de tales procesos emite rayos gamma de una longitud de onda única. En la astronomía de rayos gamma, la detección de tales radiaciones (y las mediciones de su longitud de onda) sirve como prueba de procesos nucleares particulares en el Universo.

Con base en las descripciones anteriores puede verse que existen fuentes, tanto naturales como artificiales, de todos los tipos de radiaciones electromagnéticas, y también que el estudio de las radiaciones electromagnéticas de todas las longitudes de onda se ha empleado en años recientes para proporcionar una imagen más precisa de la estructura y evolución del Universo.

Al describir las emisiones de radiación electromagnética como un fenómeno ondulatorio, nos estamos concentrando en un aspecto particular. Consideramos los átomos del sistema que emite la radiación como si se comportasen cooperativamente; por ejemplo, se necesita la participación de los electrones de muchos átomos para la emisión de la luz a partir del filamento caliente de

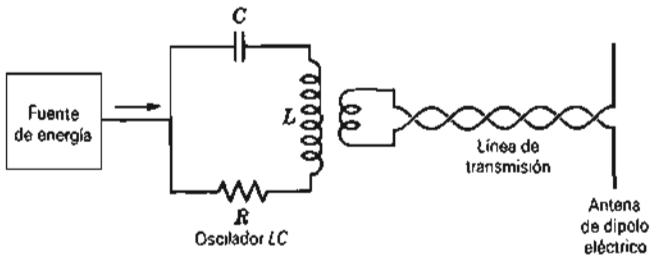


Figura 6 Circuito que genera una onda electromagnética viajera, en este caso una onda corta de radio.

un foco. Como alternativa, podemos estudiar la emisión de radiación electromagnética por un solo átomo. En este caso, centraremos nuestra atención en un paquete de energía electromagnética (llamado *cuanto*), y observaremos generalmente la radiación no como una onda que varía suavemente sino como un paquete concentrado de energía electromagnética. Ciertos experimentos parecen inconsistentes con la interpretación de la onda y pueden explicarse sólo en términos de partículas o cuantos de radiación electromagnética. En el presente capítulo hacemos hincapié en los aspectos de onda y hacemos caso omiso de los aspectos de la partícula. En el capítulo 49 de este mismo texto consideramos los aspectos de la partícula, que son complementarios a los aspectos de la onda en la adquisición de una comprensión completa de la radiación electromagnética.

41-2 GENERACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Una carga eléctrica en reposo crea un patrón de líneas de un campo eléctrico. Una carga en movimiento a velocidad constante genera un patrón de líneas de un campo magnético, además de las líneas del campo eléctrico. Una vez que se haya alcanzado una condición estacionaria (esto es, después de que la carga está en movimiento y se han creado los campos en el espacio), existe una densidad de energía en el espacio asociada con los campos eléctrico y magnético, pero la densidad de energía permanece constante en el tiempo. No se transporta ninguna señal, tan sólo la prueba de su presencia, de la carga a puntos distantes; no existe un transporte de energía o de cantidad de movimiento y tampoco radiación electromagnética.

Si, por otra parte, moviéramos rápidamente la carga de un lado a otro, podríamos enviar señales a una persona distante que tuviera el equipo necesario para detectar cambios en los campos eléctrico y magnético. Con un código preconcertado, usted podría enviar información al menear rápidamente la carga a determinada velocidad o en cierta dirección. En este caso, usted estaría emitiendo señales por medio de una onda electromagnética. Para producir esta onda es necesario acelerar la carga. Esto es, *las cargas estáticas y las cargas en movimiento a velocidad constante no se radian; se radian las cargas aceleradas*. Dicho de otro modo, el movimiento uniforme de la carga es una corriente que no cambia con el tiempo, y el movimiento acelerado de la carga es, por consiguiente, una corriente que varía con el tiempo; entonces, podemos considerar igualmente a la radiación como si fuese producida por corrientes variables con el tiempo.

En el laboratorio, una manera conveniente de generar una onda electromagnética es hacer que las corrientes en los conductores varíen con el tiempo. Para simplificar, suponemos una variación senoidal del tiempo. La figura 6 muestra un circuito que puede emplearse con este propósito. Consta de un circuito *RLC* oscilatorio, con una fuente externa que restituye la energía que se disipa en el circuito o se escapa como radiación. La corriente en el circuito varía senoidalmente con la frecuencia circular resonante ω, la cual es, aproximadamente, $1/\sqrt{LC}$ cuando la carga resistiva es pequeña (véase la Sec. 38-7). El oscilador se acopla con un transformador a una *línea de transmisión*, la cual sirve para conducir la corriente a una *antena*. (Los cables coaxiales que conducen señales de TV a muchos hogares son ejemplos comunes de líneas de transmisión.)

La geometría de la antena determina las propiedades geométricas de los campos eléctricos y magnéticos radiados. Suponemos una *antena de dipolo*, la cual, como lo muestra la figura 6, puede considerarse simplemente como dos conductores rectos. En estos dos conductores fluyen cargas que oscilan a la frecuencia ω, excitadas por el oscilador. Podemos ver a la antena como un dipolo eléctrico oscilatorio, en donde una rama conduce una carga instantánea q, y la otra rama conduce $-q$. La carga q varía senoidalmente con el tiempo y cambia de signo en cada semiciclo. Las cargas se aceleran ciertamente al moverse de un lado al otro en la antena, y como resultado la antena es una fuente de *radiación dipolar eléctrica*. En cualquier punto en el espacio existen campos eléctricos y magnéticos que varían senoidalmente con el tiempo.*

* La mayoría de las radiaciones que encontramos, desde las ondas de radio hasta la de la luz, los rayos X y los rayos gamma, son del tipo dipolar. Las antenas de radio y TV se diseñan generalmente para transmitir una radiación dipolar. Los átomos y núcleos individuales pueden considerarse a menudo como dipolos oscilatorios desde el punto de vista de la radiación emisora.

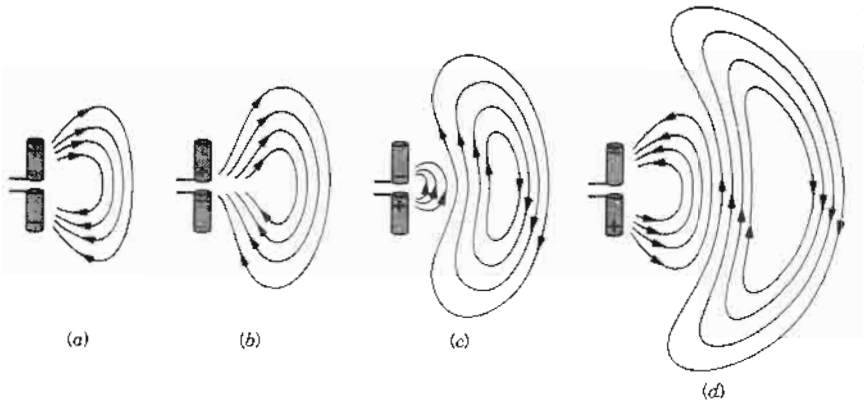


Figura 7 Etapas sucesivas en la emisión de una onda viajera, como la que parte de la antena de la figura 6. Se muestran sólo los patrones del campo eléctrico.

La figura 7 muestra una serie de "instantáneas" que dan una representación esquemática de cómo se forma el campo de radiación. Se muestra únicamente el campo eléctrico; el campo magnético correspondiente puede inferirse a partir de la corriente en los conductores, usando la regla de la mano derecha. La figura 8 da una imagen más completa de la onda electromagnética que podría generarse por la antena. La figura es un corte a través del plano *xy*; para obtener un cuadro más completo del campo, debemos imaginar que la figura gira alrededor del eje *y*. Suponemos que observamos el campo a distancias del dipolo grandes comparadas con sus dimensiones y con la longitud de onda de la radiación; el campo observado en estas condiciones se llama *campo de radiación*. A distancias más pequeñas, observaríamos el *campo vecino* más complicado, el cual no se verá aquí. Nótese que el campo "se desprende" de la antena y forma anillos cerrados, en contraste con el campo estático de un dipolo eléctrico, donde las líneas de campo comienzan siempre en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

En la figura 9 se ofrece una visión alternativa del campo de radiación; esta figura representa una serie de "instantáneas" de los campos eléctrico y magnético que pasan barriendo a un observador ubicado en el punto *P* sobre el eje *x* de la figura 8. Suponemos que el observador está ubicado tan lejos del dipolo que los frentes de onda pueden considerarse como planos. Como es siempre el caso, la densidad de las líneas de campo indica la intensidad del campo. Nótese especialmente que (1) **E** y **B** están en fase (ambos alcanzan sus máximos en el mismo instante, y ambos son cero en el mismo instante), y (2) **E** y **B** son perpendiculares entre sí. Estas conclusiones se deducen de un análisis de las ondas electromagnéticas que viajan en el vacío usando las ecuaciones de Maxwell, las cuales se tratan en la sección 41-3.

Una característica más de esta radiación, la cual analizaremos con más detalle en el capítulo 48, es que está *polarizada linealmente*; es decir, el vector **E** apunta en todas partes a lo largo de la misma línea, en este caso en la dirección *y*. Esto sigue siendo así en todos los puntos sobre el eje *x* y en todo momento. Esta dirección de la polarización está determinada por la dirección del eje del dipolo. La luz emitida por un conjunto desordenado de átomos, como el filamento de un foco eléctrico ordinario, no está

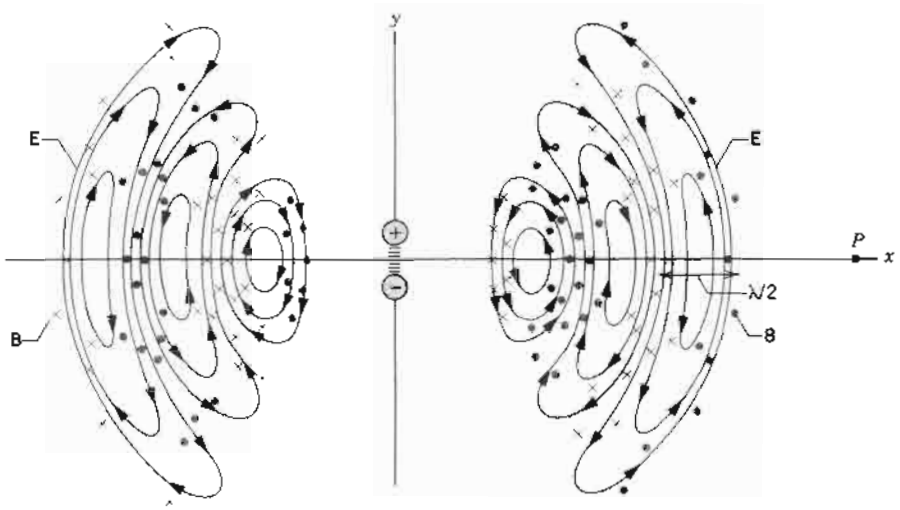


Figura 8 Los campos **E** y **B** radiados desde un dipolo eléctrico. Los campos se muestran a distancias grandes en comparación con las dimensiones del dipolo. Un observador distante en el punto *P* registra una onda plana que se mueve en la dirección *x*.

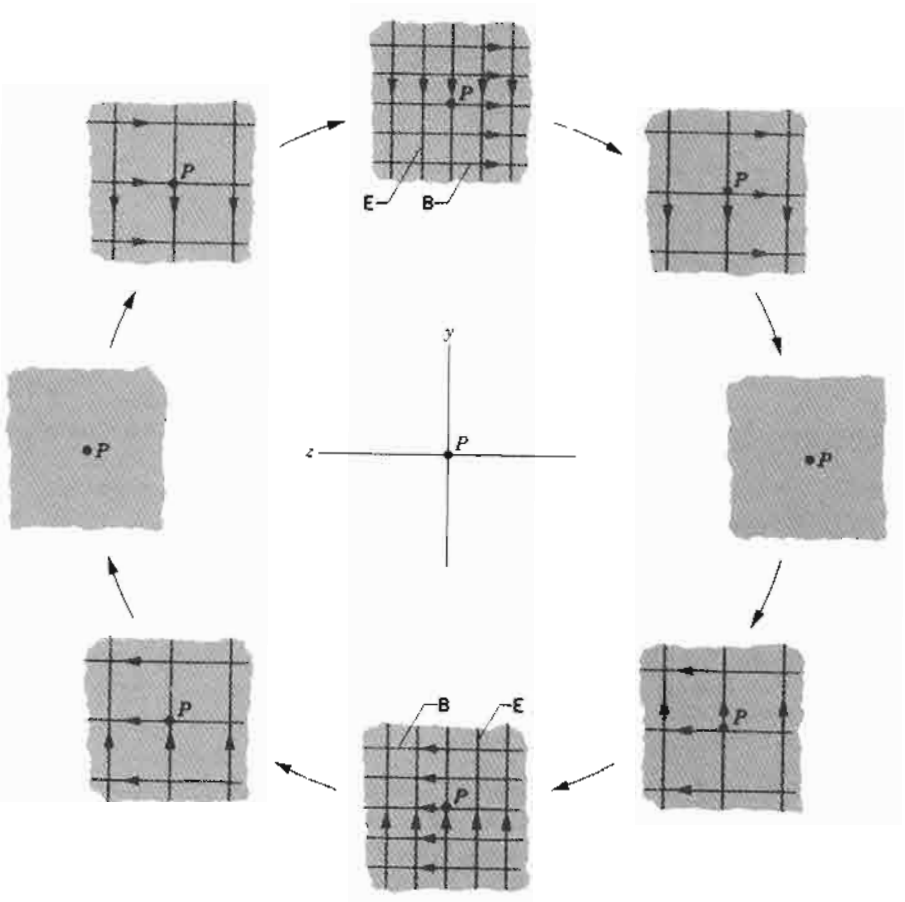


Figura 9 Ocho "instantáneas" cíclicas de la onda electromagnética plana radiada a partir del dipolo oscilante de la figura 8 observado en el punto *P*. La dirección del viaje de la onda (la dirección *x* en la figura 8) está fuera del plano de la página. Las líneas de **E** son verticales, y las líneas de **B** son horizontales.

polarizada; en efecto, los dipolos atómicos individuales están orientados al azar en el espacio. En un láser, los átomos se estimulan para que emitan radiación con sus ejes dipolares alineados; por lo tanto, la luz láser está polarizada.

41-3 ONDAS VIAJERAS Y LAS ECUACIONES DE MAXWELL

El estudio precedente nos ofreció un cuadro cualitativo de un tipo de onda viajera electromagnética. En esta sección consideramos ahora la descripción matemática de la onda y demostramos que es consistente con las ecuaciones de Maxwell. Al hacerlo, demostraremos también que la velocidad de tales ondas por el espacio vacío es la misma que la velocidad de la luz, lo cual nos lleva a concluir que la luz es, en sí misma, una onda electromagnética.

Supongamos que el observador en la figura 8 está a una distancia tan grande del dipolo oscilatorio que los frentes de onda que pasan por el punto *P* (mostrados en la Fig. 9) son planos. Las líneas de **E** son paralelas al eje *y*, y las líneas de **B** son paralelas al eje *z*. Escribimos los campos **E** y **B** en la forma matemática usual de una onda viajera senoidal (véase la Sec. 19-3):

$$E(x,t) = E_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \tag{1}$$

$$B(x,t) = B_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{2}$$

Aquí ω es la frecuencia angular asociada con el dipolo oscilatorio, y el número de onda k tiene su significado usual de $2\pi/\lambda$. Si la onda se propaga a una velocidad de fase c, entonces ω y k se relacionan de acuerdo con $c = \omega/k$. La figura 10 representa la oscilación senoidal de los campos **E** y **B** en función de x en un instante de tiempo en particular.

Más adelante se demostrará que las amplitudes E_m y B_m se relacionan entre sí. Nótese que al escribir estas ecuaciones para las magnitudes de **E** y **B** hemos supuesto que E y B están en fase, esto es, las constantes de fase en las ecuaciones 1 y 2 tienen el mismo valor (el cual hemos considerado como cero). Más adelante demostraremos que esta elección se deduce de las ecuaciones de Maxwell.

La figura 11 muestra una "instantánea" tridimensional de una onda plana que viaja a lo largo de la dirección x. Representa una manera diferente de mostrar a la misma

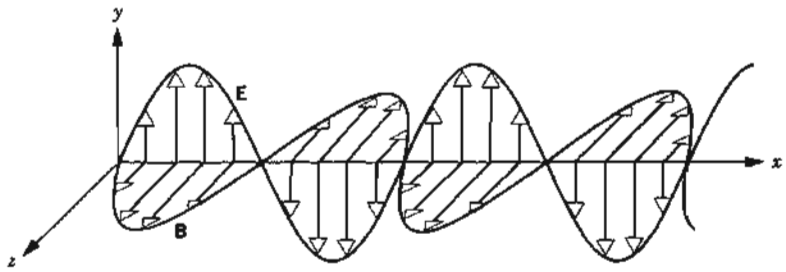


Figura 10 Una onda plana que varía senoidalmente, polarizada linealmente, y que se propaga en la dirección x. La figura representa una instantánea en un tiempo en particular.

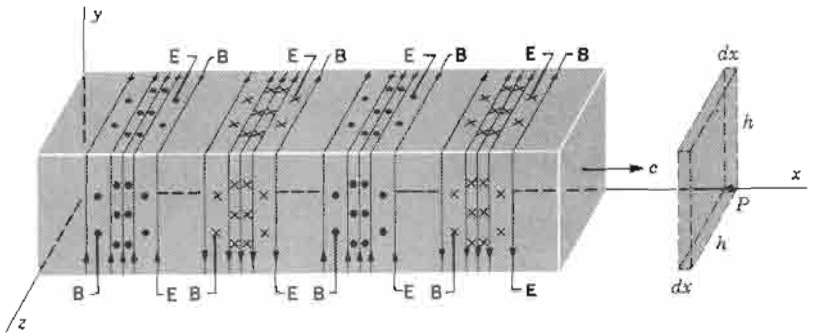


Figura 11 Otra representación de la onda plana de la figura 10. La energía es transportada a través de una caja rectangular delgada hipotética situada en P. Nótese que, en todos los puntos de la onda, el vector $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ apunta en la dirección en que se mueve la onda.

onda ilustrada en la figura 10. Consideremos a la onda al pasar a través de la caja rectangular delgada situada en el punto P en la figura 11. En la figura 12 hemos vuelto a dibujar dos secciones a través de la onda tridimensional. La figura 12*a* muestra una sección paralela al plano xy; las líneas de **E** se encuentran en esta sección, mientras que las líneas de **B** son perpendiculares a ella. La figura 12*b* muestra una sección paralela al plano xz; aquí las líneas de **B** se encuentran en la sección, y las líneas de **E** son perpendiculares.

A medida que la onda pasa por el rectángulo fijo de la figura 12*a*, el flujo magnético a través del rectángulo cambia, lo cual debe dar origen a un campo eléctrico inducido alrededor del rectángulo, de acuerdo con la ley de la inducción de Faraday. Este campo eléctrico inducido es simplemente el campo eléctrico asociado con la onda viajera.

Para ver esto con más detalle apliquemos la ley de Lenz al proceso de inducción. El flujo Φ_B en el rectángulo sombreado de la figura 12*a* está *disminuyendo* con el tiempo, porque la onda se mueve a través del rectángulo hacia la derecha, y una región del campo magnético, más débil, se mueve dentro del rectángulo. El campo inducido actúa oponiéndose a este cambio, lo que significa que, si imagináramos al límite del rectángulo sombreado como un anillo conductor, aparecería en él una corriente inducida *en sentido contrario al de las manecillas del reloj*. Esta corriente induciría un campo **B** que, dentro del rectángulo, apuntaría hacia afuera de la página, oponiéndose así a la disminución en Φ_B. Por supuesto, no existe un anillo conductor, pero el campo eléctrico inducido neto sería consistente con esta explicación, porque el campo más grande $E + dE$ en el lado derecho del anillo originaría una corriente neta en dirección contraria a las manecillas. Así pues, la configuración del campo eléctrico en la figura 12*a* es consistente con el concepto de que se induce en virtud del campo magnético cambiante.

De una manera parecida, a medida que la onda pasa por el rectángulo sombreado en la figura 12*b*, el flujo eléctrico a través del rectángulo cambia, por tanto originando un campo magnético inducido. (Este efecto depende del término de la corriente de desplazamiento en la ecuación IV de la tabla 2 en el capítulo 40, y puede verse ahora su importancia en la forma de la ley de Ampère modificada por Maxwell.) El campo magnético inducido es simplemente el campo magnético asociado con la onda viajera.

Puede verse que las variaciones en **E** y **B** están estrechamente relacionadas entre sí: un campo **E** variable genera un campo **B** variable, el que a su vez origina un campo **E** variable, y así sucesivamente. De este modo los campos eléctrico y magnético de la onda se sostienen entre sí a través del vacío, y no se requiere ningún medio para que la onda se propague.

Descripción matemática

Para un análisis más detallado, apliquemos la ley de la inducción de Faraday,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \tag{3}$$

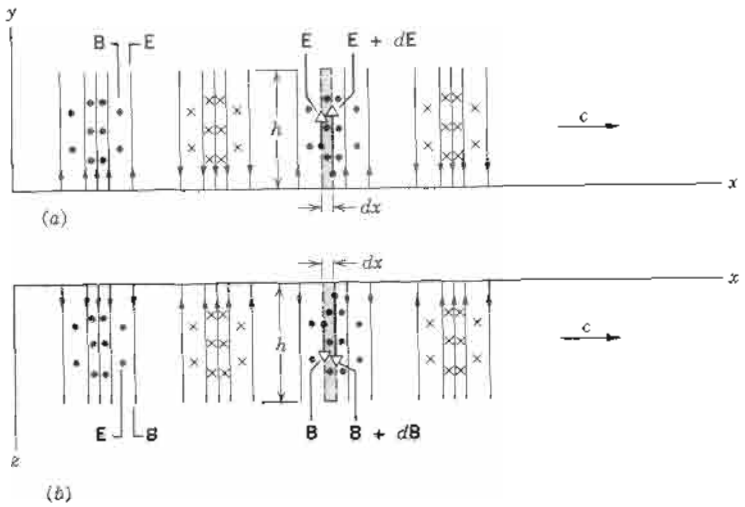


Figura 12 (*a*) La onda de la figura 11 vista en el plano *xy*. A medida que la onda pasa por esta posición, el flujo magnético a través del rectángulo sombreado cambia, induciendo un campo eléctrico. (*b*) La onda de la figura 11 vista en el plano *xz*. Conforme la onda pasa por esta posición, el flujo eléctrico a través del rectángulo sombreado cambia, induciendo un campo magnético.

girando hacia la izquierda alrededor del rectángulo sombreado de la figura 12*a*. No existe una contribución a la integral desde la parte superior o la parte inferior del rectángulo porque **E** y *d*s están en ángulo recto aquí. La integral es, entonces,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = (E + dE)h - Eh = dE\,h.$$

El flujo Φ_B para el rectángulo es*

$$\Phi_B = (B)(dx\,h),$$

donde B es la magnitud de **B** en el elemento rectangular y $dx\,h$ es el área del elemento. Al derivar tenemos que

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = h\,dx\,\frac{dB}{dt}.$$

De la ecuación 3 tenemos

$$dE\,h = -h\,dx\,\frac{dB}{dt},$$

o sea

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}. \tag{4}$$

En realidad, tanto B como E son funciones de x y t; véanse las ecuaciones 1 y 2. Al calcular dE/dx, suponemos que t es constante porque la figura 12*a* es una "instantánea". Igualmente, al calcular dB/dt suponemos que x es constante puesto que lo que se requiere es la velocidad a la que B cambia en el tiempo en un lugar en particular, el elemento de la figura 12*a*. En estas circunstancias, las derivadas son *derivadas parciales*,† y se emplea una notación un tanto diferente para ellas; véanse, por ejemplo, las secciones 19-4 y 19-5. Al utilizar esta notación la ecuación 4 es

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{5}$$

El signo menos en esta ecuación es apropiado y necesario, ya que, si bien E está aumentando con x en el lugar del rectángulo sombreado en la figura 12*a*, B está disminuyendo con t. Puesto que $E(x,t)$ y $B(x,t)$ son conocidas (véanse las ecuaciones 1 y 2), la ecuación 5 se reduce a

$$kE_m \cos(kx - \omega t) = \omega B_m \cos(kx - \omega t).$$

Si hubiésemos empleado constantes de fase diferentes en las ecuaciones 1 y 2, los términos de coseno en esta ecuación estarían fuera de fase, y los dos miembros no podrían ser iguales a x y t en lo absoluto. La ecuación 5, que se deduce directamente de la aplicación de las ecuaciones de Maxwell, demuestra que E y B deben estar en fase.

Al eliminar el término de coseno, obtenemos

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} = c. \tag{6}$$

La razón de las amplitudes de las componentes eléctrica y magnética de la onda es la velocidad c de la onda. De las ecuaciones 1 y 2 vemos que la razón de las amplitudes es la misma que la razón de los valores instantáneos, o sea

$$E = cB. \tag{7}$$

Este importante resultado será útil en secciones venideras.

* Usamos la regla de la mano derecha para el signo del flujo: si los dedos de la mano derecha apuntan en la dirección en que integramos alrededor de la trayectoria, entonces el pulgar indica la dirección en que el campo a través del área encerrada da un flujo positivo.

† Al considerar una derivada parcial con respecto a cierta variable, como $\partial E/\partial x$, tratamos a las demás variables (por ejemplo, y, z y t) como si fuesen constantes.

Ahora volvamos nuestra atención a la figura 12*b*, en la que el flujo eléctrico Φ_E para el rectángulo sombreado está disminuyendo con el tiempo conforme la onda se mueve a través de ella. De acuerdo con la forma de la ley de Ampère modificada por Maxwell (con $i = 0$, porque no existe una corriente de conducción en la onda electromagnética viajera),

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \tag{8}$$

este flujo cambiante induce un campo magnético en los puntos que rodean la periferia del rectángulo.

La comparación de los rectángulos sombreados en la figura 12 muestra que en cada uno el flujo apropiado, Φ_B o Φ_E está *disminuyendo* con el tiempo. Sin embargo, si procedemos en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de los rectángulos sombreados superior e inferior, vemos que $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ es *positiva*, mientras que $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ es *negativa*, como lo veremos en seguida. Así es como debe ser. Al comparar la figura 12*b* del capítulo 36 con la figura 2 del capítulo 40, observamos que, si bien los flujos Φ_B y Φ_E en aquellas figuras están cambiando con el tiempo de igual forma (ambos están aumentando), las líneas de los campos inducidos **E** y **B** circulan en direcciones opuestas.

La integral en la ecuación 8, valuada al proceder en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del rectángulo sombreado de la figura 12*b*, es

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -(B + dB)h + Bh = -h\, dB,$$

donde B es la magnitud de **B** en el borde izquierdo del elemento y $B + dB$ es su magnitud en el borde derecho.

El flujo Φ_E a través del rectángulo de la figura 12*b* es

$$\Phi_E = (E)(h\, dx).$$

Al derivar tenemos

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = h\, dx \frac{dE}{dt}.$$

Así, podemos escribir la ecuación 8 como

$$-h\, dB = \mu_0 \epsilon_0 \left(h\, dx \frac{dE}{dt} \right)$$

o, sustituyendo por derivadas parciales,

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{9}$$

Nuevamente, el signo menos en esta ecuación es apropiado y necesario, ya que, si bien B está aumentando con x en el lugar del rectángulo sombreado en la figura 12*b*, E está disminuyendo con t.

Al combinar esta ecuación con las ecuaciones 1 y 2, hallamos que

$$-kB_m \cos(kx - \omega t) = -\mu_0 \epsilon_0 \omega E_m \cos(kx - \omega t),$$

o sea

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{k}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c}. \tag{10}$$

Al suprimir E_m/B_m entre las ecuaciones 6 y 10 tenemos que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \tag{11}$$

Si sustituimos los valores numéricos, obtenemos

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})}}$$
$$= 3.0 \times 10^8\ \mathrm{m/s},$$

¡que es la velocidad de la luz en el vacío! Este surgimiento de la velocidad de la luz a partir de consideraciones puramente electromagnéticas es un logro culminante de la teoría electromagnética de Maxwell. Maxwell hizo esta predicción antes de que las ondas de radio se conociesen y antes de que se creyera que la luz era de naturaleza electromagnética. Su predicción condujo al concepto del espectro electromagnético y al descubrimiento de las ondas de radio por Heinrich Hertz en 1890. Permitió que la óptica se estudiara como una rama del electromagnetismo y que sus leyes fundamentales se obtuvieran de las ecuaciones de Maxwell.

Puesto que μ_0 se define exactamente como $4\pi \times 10^{-7}$ H/m, y que a la velocidad de la luz se le da ahora el valor exacto de 299,792,458 m/s, la ecuación 11 nos permite obtener un valor definido de ϵ_0:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = 8.85418782 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}.$$

Curiosamente, el propio Maxwell no vio la propagación de las ondas electromagnéticas y los fenómenos electromagnéticos en general en los términos sugeridos por, digamos, la figura 11. Al igual que todos los físicos de su tiempo, él creía firmemente que el espacio estaba impregnado de una sustancia sutil llamada *éter* y que los fenómenos electromagnéticos podían explicarse en términos de vórtices girando en este éter.

Es un tributo al genio de Maxwell que, con tales modelos mecánicos en su mente, haya sido capaz de deducir las leyes del electromagnetismo que llevan su nombre. Estas leyes, como lo hemos señalado, no sólo no requirieron ningún cambio cuando se introdujo la teoría especial de la relatividad tres décadas más tarde sino que, en realidad, quedaron sólidamente confirmadas por esa teoría. Hoy en día, como se vio en el capítulo 21, ya no es necesario considerar el concepto del éter para explicar la propagación de las ondas electromagnéticas.

41-4 TRANSPORTE DE ENERGÍA Y EL VECTOR DE POYNTING

Al igual que cualquier otra forma de onda, una onda electromagnética puede transportar energía de un lugar a

otro. La luz de un foco eléctrico y el calor que se irradia de una hoguera son ejemplos comunes de energía que fluye por medio de ondas electromagnéticas.

El flujo de energía en una onda electromagnética se mide comúnmente en términos de la velocidad a la que fluye la energía por unidad de área (o, lo que es igual, la potencia electromagnética por unidad de área). Describimos la magnitud y dirección del flujo de energía en términos de un vector llamado *vector de Poynting** **S**, definido como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{12}$$

Los vectores **E** y **B** se refieren a los campos de una onda en un punto del espacio en particular, y **S** indica el vector de Poynting en ese punto. Nótese que, de acuerdo con nuestras reglas usuales para el producto cruz de dos vectores, **S** debe ser perpendicular al plano formado por **E** y **B**, y la dirección de **S** está determinada por la regla de la mano derecha. Compruébense estas relaciones direccionales con la onda plana mostrada en las figuras 10 y 11; obsérvese que, aunque las direcciones de **E** y **B** pueden cambiar, su producto cruz apunta siempre en la dirección x positiva, que es la dirección de propagación de la onda.

Una onda electromagnética puede especificarse en forma única dando su campo **E** y su dirección de propagación (que es la misma que la dirección de **S**). No es necesario especificar **B**, porque la magnitud de **B** se determina de la magnitud de **E** usando la ecuación 7, y la dirección de **B** puede encontrarse de las direcciones de **E** y **S** con base en la ecuación 12.

La dimensión de B es la misma que la dimensión de E/c. Usando este resultado y las dimensiones de E y μ_0, podemos demostrar que la dimensión de **S** es de potencia por unidad de área. Su unidad en el SI es watts/metro^2.

Para la onda electromagnética plana de la figura 10, la ecuación 12 se reduce a

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB, \tag{13}$$

la cual puede también escribirse, usando la ecuación 7,

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \quad \text{o bien} \quad S = \frac{c}{\mu_0} B^2, \tag{14}$$

donde S, E y B son valores instantáneos en el punto de observación. Demostremos que estos resultados son consistentes con nuestros resultados previos para la densidad de energía asociada con los campos eléctricos y magnéticos en el caso especial de una onda plana. Consideremos la energía electromagnética en la caja rectangular de la figura 11 al pasar la onda por ella. En cualquier instante, la energía electromagnética en la caja es

$$dU = dU_E + dU_B = (u_E + u_B)(A\,dx), \tag{15}$$

donde $A\,dx$ es el volumen de la caja, y u_E y u_B son, las densidades de energía eléctrica y magnética, respectivamente. Usando la ecuación 28 del capítulo 31 para u_E y la ecuación 32 del capítulo 38 para u_B, obtenemos

$$dU = \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2\right) A\,dx. \tag{16}$$

La ecuación 7 ($E = cB$) puede emplearse para eliminar *una* E en el primer término y *una* B en el segundo término, lo cual da

$$dU = \left[\frac{1}{2}\epsilon_0 E(cB) + \frac{1}{2\mu_0} B\left(\frac{E}{c}\right)\right] A\,dx$$
$$= \frac{(\mu_0\epsilon_0 c^2 + 1)(EBA\,dx)}{2\mu_0 c}.$$

De la ecuación 11, sin embargo, $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$, de modo que

$$dU = \frac{EBA\,dx}{\mu_0 c}. \tag{17}$$

Esta energía dU pasa a través de la caja en un tiempo dt igual a dx/c. La magnitud de S, dada en términos del flujo de energía por unidad de tiempo y por unidad de área, es

$$S = \frac{dU}{dt\,A} = \frac{EBA\,dx}{(\mu_0 c)(dx/c)A} = \frac{1}{\mu_0} EB,$$

en acuerdo con la ecuación 13.

Esta expresión relaciona las magnitudes de E, B y S en un instante de tiempo en particular. Las frecuencias de muchas ondas electromagnéticas (por ejemplo, las ondas de luz) son tan grandes que E y B fluctúan demasiado rápidamente para que su variación de tiempo pueda medirse directamente. Por lo tanto, en muchos experimentos nos interesa más conocer el *tiempo promedio* de S, considerado en uno o más ciclos de la onda. El tiempo promedio $\bar{S}$ se conoce también como la *intensidad* I de la onda. De la ecuación 14 y de la ecuación 1, obtenemos

$$I = \bar{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\overline{E^2} = \frac{1}{\mu_0 c} E_m^2 \overline{\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)}.$$

El tiempo promedio del sen^2 durante cualquier número entero de ciclos es $\frac{1}{2}$, y así

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2 = \frac{1}{2\mu_0} E_m B_m. \tag{18}$$

La intensidad puede expresarse también en términos de las magnitudes rms (raíz media cuadrática) de los campos. Recordando que $E_m = \sqrt{2}E_{rms}$, obtenemos

$$I = \bar{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{rms}^2 = \frac{1}{\mu_0} E_{rms} B_{rms}. \tag{19}$$

* El vector de Poynting se llama así en honor de John Henry Poynting (1852-1914), quien fue el primero en analizar sus propiedades. Poynting fue un físico inglés conocido por sus estudios sobre el electromagnetismo y de la gravitación.

Problema muestra 1 Un observador está a 1.8 m de una fuente de luz (de dimensiones mucho menores que 1.8 m) cuya salida de potencia P es de 250 W. Calcule los valores rms de los campos eléctrico y magnético en la posición del observador. Suponga que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones.

Solución La intensidad de la luz a una distancia r de la fuente está dada por

$$I = \frac{P}{4\pi r^2},$$

donde $4\pi r^2$ es el área de una esfera de radio r centrada en la fuente. La intensidad está dada también por la ecuación 19, de modo que

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rms}}^2.$$

El campo eléctrico rms es

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{P\mu_0 c}{4\pi r^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(250\ \text{W})(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{(4\pi)(1.8\ \text{m})^2}}$$
$$= 48\ \text{V/m}.$$

El valor rms del campo magnético se deduce de la ecuación 7 y es

$$B_{\text{rms}} = \frac{E_{\text{rms}}}{c} = \frac{48\ \text{V/m}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}$$
$$= 1.6 \times 10^{-7}\ \text{T} = 0.16\ \mu\text{T}.$$

Nótese que E_{rms} (= 48 V/m) es apreciable para condiciones de laboratorio ordinarias pero que B_{rms} (= 0.16 μT) es muy pequeño. Esto ayuda a explicar por qué muchos de los instrumentos que se utilizan en la detección y medición de las ondas electromagnéticas responden a la componente eléctrica de la onda. Sin embargo, es un error decir que la componente eléctrica de una onda electromagnética es "más potente" que la componente magnética. No es posible comparar las cantidades que se miden en unidades diferentes. Como lo hemos visto, las componentes eléctrica y magnética están en una base de absoluta igualdad en cuanto se refiere a la propagación de la onda. Sus energías promedio, que *pueden* compararse, son exactamente iguales.

41-5 ÍMPETU Y PRESIÓN DE LA RADIACIÓN *(Opcional)*

Además de transportar energía, las ondas electromagnéticas pueden también transportar un ímpetu lineal. En otras palabras, es posible ejercer una presión (*presión de radiación*)* sobre un objeto, apuntando un rayo de luz sobre él. Tales fuerzas deben ser pequeñas en relación con las fuerzas de nuestras experiencias diarias porque no nos percatamos de ellas ordinariamente. Después de todo, no nos caemos de espaldas al subir la persiana en un cuarto oscuro y dejar que la luz nos inunde. Sin embargo, los efectos de la presión de radiación son importantes en los ciclos de vida de las estrellas a causa de las temperaturas increíblemente elevadas (2×10^7 K en nuestro Sol) que asociamos con los interiores estelares. Las primeras mediciones de la presión de radiación se llevaron a cabo en 1901-1903 por Nichols y Hull en Estados Unidos y por Lebedev en Rusia, unos 30 años después de que la existencia de tales efectos habían sido predichos teóricamente por Maxwell.

Hagamos que un haz paralelo de luz incida sobre un objeto durante un tiempo t, siendo la luz incidente *completamente absorbida* por el objeto. El campo eléctrico de la luz provoca que las cargas (electrones) del material se muevan en una dirección transversal a la dirección del haz. La fuerza $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sobre esas cargas en movimiento debida al campo *magnético* de la luz actúa en la dirección del haz. La absorción de la luz transfiere, en correspondencia, en ímpetu en la dirección del haz a las partículas del absorbedor. Si la energía U se absorbe, el ímpetu p transmitido al objeto durante este tiempo está dado, de acuerdo con la predicción de Maxwell, por

$$p = \frac{U}{c} \qquad \text{(absorción total)}, \tag{20}$$

en donde c es la velocidad de la luz. La dirección de $\mathbf{p}$ es la dirección del haz incidente. Más adelante, en esta sección, deduciremos rigurosamente este resultado.

Si la energía U de la luz se *refleja por completo*, el ímpetu transmitido será el doble del dado arriba, o sea

$$p = \frac{2U}{c} \qquad \text{(reflexión total)}. \tag{21}$$

Del mismo modo, se comunica el doble de ímpetu a un objeto cuando desde éste rebota una pelota de tenis perfectamente elástica al ser golpeada por una pelota perfectamente inelástica (una bola de plastilina, por ejemplo) de la misma masa y a la misma velocidad. Si la energía U de la luz en parte se refleja y en parte se absorbe, el ímpetu transmitido está entre U/c y $2U/c$.

Nichols y Hull, en 1903, midieron las presiones de radiación y verificaron la ecuación 21 usando la técnica de una balanza de torsión. Hicieron que la luz incidiera sobre un espejo M como se muestra en la figura 13; la presión de radiación causó que el brazo de la balanza girara en un ángulo θ medido, retorciendo la fibra de torsión F. Al conocer la constante de torsión de la fibra, los experimentadores pudieron calcular un valor numérico para esta presión. Nichols y Hull midieron la intensidad de su haz de luz haciendo que incidiera sobre un disco de metal ennegrecido de poder de absorción conocido y midiendo la elevación de temperatura resultante del disco. En una corrida en particular estos experimentadores midieron una presión de radiación de 7.01×10^{-6} N/m^2; en cuanto al haz de luz, el valor predicho, usando la ecuación 21, fue de 7.05×10^{-6} N/m^2, en excelente concordancia. Suponiendo un área del espejo de 1 cm^2, esto representa una fuerza sobre el espejo de tan solo 7×10^{-10} N, una fuerza notablemente pequeña.

El éxito del experimento de Nichols y Hull fue, en gran parte, el resultado del cuidado que tuvieron en eliminar los efectos de desviación espurios causados por los cambios en la distribución de la velocidad de las moléculas en el gas que rodeaba al espejo. Estos cambios ocurrían por la pequeña elevación en la temperatura del espejo al absorber la energía de la luz que procedía del haz incidente. Este "efecto de radiómetro" es el causante de la acción de giro de los conocidos radiómetros de juguete cuando se colocan bajo un haz de luz solar. En un vacío perfecto no ocurrirían tales efectos, pero en los mejores vacíos

* Véase "Radiation Pressure", por G. E. Henry, *Scientific American*, junio de 1957, pag. 99; véase también "The Pressure of Laser Light", por Arthur Ashkin, *Scientific American*, febrero de 1972, pág. 63.

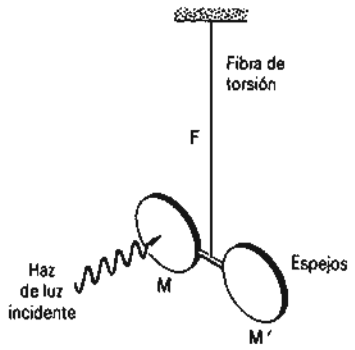


Figura 13 El dispositivo de Nichols y Hull para medir la presión de radiación. En el dibujo se han omitido muchos detalles de este delicado experimento.

disponibles en 1903 los efectos de radiómetro se presentaron y tuvieron que tomarse en cuenta específicamente en el diseño del experimento.

Problema muestra 2 Un haz de luz con una intensidad I (= $\bar{S}$) de 12 W/cm² incide perpendicularmente sobre un espejo plano perfectamente reflejante de 1.5 cm² de área. ¿Qué fuerza actúa sobre el espejo?

Solución De la segunda ley de Newton, la fuerza promedio sobre el espejo está dada por

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

donde Δp es el ímpetu transmitido al espejo en el tiempo Δt. De la ecuación 21 tenemos

$$\Delta p = \frac{2\,\Delta U}{c} = \frac{2\bar{S}A\,\Delta t}{c}.$$

Para la fuerza tenemos, entonces,

$$F = \frac{2\bar{S}A}{c} = \frac{(2)(12 \times 10^4\ \text{W/m}^2)(1.5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}$$
$$= 1.2 \times 10^{-7}\ \text{N}.$$

Ésta es una fuerza muy pequeña, casi igual al peso de un grano de sal de mesa muy pequeño. Nótese que la presión ejercida por la radiación, la cual podemos definir de la manera usual como fuerza por unidad de área de F/A, está dada por $2S/c$.

Deduzcamos ahora la ecuación 20 en el caso particular de una onda electromagnética plana en la dirección x que incide sobre una lámina delgada grande de un material de alta resistividad como se muestra en la figura 14. Una pequeña parte de la energía incidente es absorbida en la lámina, pero la mayor parte es transmitida si la lámina es lo suficientemente delgada. (Parte de la energía incidente se refleja también, pero la onda reflejada es de una intensidad tan baja que podemos no tomarla en cuenta en la deducción que sigue a continuación.)

Los vectores **E** y **B** de la onda incidente varían con el tiempo en la lámina según

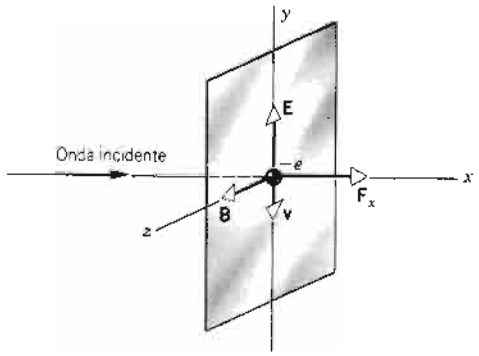


Figura 14 Una onda de luz plana incidente cae sobre un electrón alojado en una lámina resistiva delgada. Se muestran los valores instantáneos de **E**, **B**, la velocidad **v** del electrón y la fuerza de radiación $\mathbf{F}_x$.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \operatorname{sen} \omega t \tag{22}$$

y

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_m \operatorname{sen} \omega t, \tag{23}$$

en donde **E** es paralelo al eje ±y y **B** es paralelo al eje ±z.

En la sección 32-5 vimos que el efecto de una fuerza eléctrica (constante) (= $-eE$) sobre un electrón de conducción en un metal era el de hacer que el electrón se mueva a una velocidad de arrastre (constante) v_d. El electrón se comporta como si estuviese inmerso en un fluido viscoso, siendo contrabalanceada la fuerza eléctrica que actúa sobre él por una fuerza "viscosa", que puede considerarse como proporcional a la velocidad del electrón. Entonces, para un campo constante E, una vez establecido el equilibrio,

$$eE = bv_d, \tag{24}$$

donde b es un coeficiente de amortiguamiento resistivo. La velocidad de equilibrio del electrón, eliminando el subíndice d, es, entonces,

$$v = \frac{eE}{b}. \tag{25}$$

Si el campo eléctrico aplicado varía con el tiempo y si la variación es lo suficientemente lenta, la velocidad del electrón puede autoajustarse continuamente al valor cambiante de E de modo que su velocidad continúe estando dada esencialmente por su valor de equilibrio (Ec. 25) en todo momento. Estos reajustes se efectúan más rápidamente en un medio de mayor viscosidad, del mismo modo que una piedra lanzada al aire alcanza una velocidad constante de equilibrio de descenso sólo con relativa lentitud, y, sin embargo, aquella que cae en un aceite viscoso lo hace rápidamente. Suponemos que la lámina en la figura 14 es tan viscosa, es decir, su resistividad es tan elevada, que la ecuación 25 permanece aplicable aun para las oscilaciones rápidas de E en el haz de luz incidente.

Al vibrar el electrón paralelamente al eje y, experimenta una *segunda* fuerza debida a la componente *magnética* de la onda. Esta fuerza $\mathbf{F}_x$ (= $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) apunta en la dirección x, formando un ángulo recto con el plano formado por **v** y **B**, o sea, el plano yz. La magnitud instantánea de $\mathbf{F}_x$ está dada por

$$F_x = evB = \frac{e^2EB}{b}. \tag{26}$$

$\mathbf{F}_x$ apunta siempre en la dirección x positiva porque $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ invierten sus direcciones simultáneamente; esta fuerza es, de hecho, el mecanismo por el cual la presión de radiación actúa sobre la lámina en la figura 14.

Según la segunda ley de Newton, F_x es la velocidad dp_e/dt a la que la onda incidente comunica un ímpetu a cada electrón en la lámina, o sea

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{e^2EB}{b}. \tag{27}$$

El ímpetu se transmite con esta velocidad a cada electrón en la lámina y por tanto a la propia lámina. Queda por relacionar la transferencia de la cantidad de movimiento a la lámina a la absorción de energía en la lámina.

La componente eléctrica de la onda incidente efectúa un trabajo sobre cada electrón oscilatorio con una velocidad instantánea dada por

$$\frac{dU_e}{dt} = F_E v = (eE)\left(\frac{eE}{b}\right) = \frac{e^2E^2}{b}.$$

Nótese que la fuerza magnética $\mathbf{F}_x$, por estar siempre en ángulo recto con la velocidad $\mathbf{v}$, no efectúa un trabajo sobre el electrón oscilatorio. La ecuación 7 muestra que, para una onda plana en el vacío, B y E se relacionan por

$$E = Bc.$$

La sustitución de *una* de las E de arriba nos conduce a

$$\frac{dU_e}{dt} = \frac{e^2EBc}{b}. \tag{28}$$

Esta ecuación representa la velocidad, por electrón, con la que la energía se absorbe de la onda incidente.

La comparación de las ecuaciones 27 y 28 nos demuestra que

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dU_e}{dt}.$$

La integración nos da

$$\int \frac{dp_e}{dt}\,dt = \frac{1}{c}\int \frac{dU_e}{dt}\,dt,$$

o sea

$$p_e = \frac{U_e}{c}, \tag{29}$$

donde p_e es el ímpetu transmitido a un solo electrón en cualquier tiempo t dado y U_e es la energía absorbida por ese electrón en el mismo intervalo de tiempo. La multiplicación de cada lado por el número de electrones libres en la lámina conduce a la ecuación 20.

Si bien se ha deducido la ecuación 29 para una clase de absorbente en perticular, ninguna de las características del absorbente —por ejemplo, el coeficiente de amortiguamiento resistivo b— queda en la expresión final. Así es como debe ser, puesto que la ecuación 29 es una propiedad general de la radiación absorbida por *cualquier* material. ■

PREGUNTAS

1. Las ondas electromagnéticas llegan a nosotros desde los confines más alejados del espacio. De la información que portan, ¿podemos decir cómo es el Universo en el momento presente? ¿En cualquier tiempo seleccionado del pasado?
2. Si se le preguntara en un examen qué fracción del espectro electromagnético se encuentra en la región visible, ¿qué contestaría?
3. Haga una lista de las varias maneras en que las ondas de radio difieren de las ondas de la luz visible. ¿En qué modo son lo mismo?
4. ¿Cómo caracterizaría usted a una radiación electromagnética que tenga una frecuencia de 10 kHz? ¿De 10^{20} Hz? ¿Una longitud de onda de 500 nm? ¿De 10 km? ¿De 0.50 nm?
5. ¿Qué determina la longitud y orientación deseables de la antena de "orejas de conejo" en un receptor de TV?
6. ¿Cómo se cuecen los alimentos en un horno de microondas? En este horno se puede hervir agua dentro de una bolsa de plástico. ¿Cómo puede suceder esto?
7. Hablando informalmente podemos decir que las componentes eléctrica y magnética de una onda electromagnética viajera "se alimentan entre sí". ¿Qué significa esto?
8. "En una onda electromagnética viajera existen corrientes de desplazamiento y éstas podemos asociarlas a la componente del campo magnético de la onda." ¿Es verdad este enunciado? Analícelo en detalle.
9. ¿Puede ser desviada una onda electromagnética por un campo magnético? ¿Y por un campo eléctrico?
10. ¿Por qué es necesaria la modificación que le hizo Maxwell a la ley de Ampère (esto es, el término $\mu_0\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ en la tabla 2 del capítulo 40) para entender la propagación de las ondas electromagnéticas?
11. ¿Es concebible que la teoría electromagnética podría algún día predecir el valor de c (3×10^8 m/s), no en términos de μ_0 y ϵ_0, sino directa y numéricamente sin el recurso de alguna medición?
12. Si se fuera a calcular el vector de Poynting para varios puntos de un transformador y alrededor de éste, ¿cómo cree usted que se vería el patrón del campo? Suponga que se aplicó una diferencia de potencial en el devanado del primario y que se conectó una carga resistiva en el secundario.
13. Nombre dos experimentos históricos, además de las mediciones de la presión de radiación de Nichols y Hull, en que se haya empleado una balanza de torsión. Ambos se describen en este libro, uno en el volumen 1 y otro en el volumen 2.
14. En la sección 41-5 se estableció que la fuerza sobre el espejo en el experimento de la presión de radiación de

Nichols y Hull (véase la Fig. 13) era de unos 7×10^{-10} N. Identifique un objeto cuyo peso en la superficie de la Tierra sea de esta magnitud aproximadamente.

15. ¿Puede un objeto absorber energía lumínica sin tener un ímpetu lineal transferido a él? De ser así, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.
16. Cuando uno enciende una linterna, ¿experimenta ésta alguna fuerza asociada con la emisión de la luz?
17. Asociamos la energía y el ímpetu lineal con las ondas electromagnéticas. ¿Está también presente un ímpetu angular?
18. ¿Cuál es la relación, si es que la hay, entre la intensidad I de una onda electromagnética y la magnitud S de su vector de Poynting?
19. Cuando usted se reclina en una silla de playa bajo el sol, ¿por qué está usted tan consciente de la energía térmica que recibe pero no se preocupa en absoluto por el ímpetu lineal transmitido por la misma fuente? ¿Es verdad que cuando usted atrapa una pelota de beisbol lanzada con fuerza está consciente de la energía recibida pero no del ímpetu?
20. Cuando un haz paralelo de luz incide sobre un objeto, las transferencias de ímpetu están dadas por las ecuaciones 20 y 21. ¿Estas ecuaciones se cumplen incluso si la fuente de luz se mueve rápidamente hacia o alejándose del objeto, quizás, con una velocidad de $0.1c$?
21. Se cree que la presión de radiación es responsable de fijar un límite superior (de unos $100M_{Sol}$) a la masa de una estrella. Explique.

PROBLEMAS

Sección 41-1 El espectro electromagnético

1. Demuestre que las designaciones de la frecuencia y la longitud de onda en la figura 1 obedecen a la relación $\nu\lambda = c$.
2. El proyecto Seafarer (navegante) fue un programa ambicioso para construir una antena enorme, enterrada en un terreno de unas 4000 millas cuadradas de área. Su objetivo era transmitir señales a submarinos mientras estaban profundamente sumergidos. Si la longitud de onda efectiva era de 1.0×10^4 radios de la Tierra, ¿cuáles serían (*a*) la frecuencia y (*b*) el periodo de las radiaciones emitidas? De ordinario, las radiaciones electromagnéticas no penetran mucho en conductores como el agua de mar. ¿Puede usted pensar en alguna razón por la cual tales radiaciones de ELF (*extremely low frequency*, frecuencia extremadamente baja) penetrarían más fácilmente? Piense en el caso limitante de frecuencia cero. (¿Por qué no se transmiten señales con frecuencia cero?)
3. (*a*) La longitud de onda de los rayos X más energéticos producidos cuando los electrones acelerados a 18 GeV en el Acelerador Lineal de Stanford golpean contra un blanco sólido es de 0.067 fm. ¿Cuál es la frecuencia de estos rayos X? Una onda de radio de VLF (*very low frecuency*, frecuencia muy baja) tiene una frecuencia de sólo 30 Hz. ¿Cuál es su longitud de onda?
4. La radiación desde cierto láser HeNe, si bien centrada en 632.8 nm, tiene una "anchura de línea" finita de 0.010 nm. Calcule la anchura de la línea en unidades de frecuencia.

Sección 41-2 Generación de una onda electromagnética

5. ¿Qué inductancia se requiere con un capacitor de 17 pF para construir un oscilador capaz de generar ondas electromagnéticas de 550 nm (es decir, visibles)? Haga comentarios de su respuesta.
6. La figura 15 muestra un oscilador LC conectado por medio de una línea de transmisión a una antena de tipo dipolar *magnético*. Compárese con la figura 6, la cual muestra un dispositivo similar pero con un tipo de antena dipolar *eléctrica*. (*a*) ¿Cuál es la base para los nombres de estos dos tipos de antena? (*b*) Dibuje figuras que correspondan a las figuras 8 y 9 para describir la onda electromagnética que barre al observador en el punto P de la figura 15.

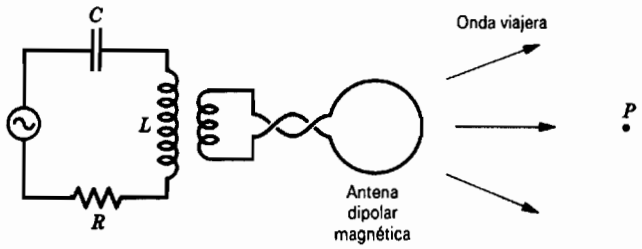


Figura 15 Problema 6.

Sección 41-3 Ondas viajeras y las ecuaciones de Maxwell

7. Cierta onda electromagnética plana tiene un campo eléctrico máximo de 321 μV/m. Halle el campo magnético máximo.
8. El campo eléctrico asociado con una onda electromagnética plana está dado por $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = E_0 \operatorname{sen} k(x - ct)$, donde $E_0 = 2.34 \times 10^{-4}$ V/m y $k = 9.72 \times 10^6$ m^{-1}. La onda se está propagando en la dirección $+x$. (*a*) Escriba expresiones para las componentes del campo magnético de la onda. (*b*) Determine la longitud de onda de la onda.
9. Comience por las ecuaciones 5 y 9 y demuestre que $E(x, t)$ y $B(x, t)$, las componentes eléctrica y magnética de una onda electromagnética viajera plana, deben satisfacer las "ecuaciones de onda"

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}.$$

10. (*a*) Demuestre que las ecuaciones 1 y 2 satisfacen las ecuaciones de onda presentadas en el problema 9. (*b*) Demuestre que cualesquier expresiones de la forma

$$E = E_m f(kx \pm \omega t)$$

y

$$B = B_m f(kx \pm \omega t),$$

donde $f(kx \pm \omega t)$ denota una función arbitraria, satisfacen también a estas ecuaciones de onda.

Sección 41-4 Transporte de energía y el vector de Poynting

11. Los láseres vidrio-neodimio que operan en la actualidad pueden proporcionar una potencia de 100 TW en impulsos de 1.0 ns con una longitud de onda de 0.26 μm. ¿Cuánta energía está contenida en un solo impulso?

12. Demuestre, hallando la dirección del vector de Poynting **S**, que las direcciones de los campos eléctrico y magnético en todos los puntos de las figuras 8, 9, 10, 11 y 12 son consistentes en todo momento con las direcciones de propagación supuestas.

13. Nuestro vecino estelar más próximo, α-Centauro, está a 4.30 años luz. Se ha sugerido que han llegado a esta estrella programas de TV desde nuestro planeta y que pueden haber sido vistos por habitantes hipotéticos de un planeta hipotético en órbita alrededor de esta estrella. Una estación de TV en la Tierra tiene una potencia útil de 960 kW. Halle la intensidad de esta señal en α-Centauro.

14. Una onda electromagnética plana está viajando en la dirección *y* negativa. En una posición y tiempo en particular, el campo magnético está a lo largo del eje *z* positivo y tiene una magnitud de 28 nT. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud del campo eléctrico en esa posición y en ese momento?

15. La intensidad de la radiación solar directa que no fue absorbida por la atmósfera en determinado día de verano es de 130 W/m^2. ¿Que tan cerca de un calentador eléctrico de 1.0 kW tendría uno que pararse para sentir la misma intensidad? Supóngase que el calentador irradia uniformemente en todas direcciones.

16. (*a*) Demuestre que, en una onda electromagnética viajera plana, la intensidad promedio, es decir, la velocidad promedio de transporte de energía por unidad de área, está dada por

$$\bar{S} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0}.$$

(*b*) ¿Cuál es la intensidad promedio de una onda electromagnética que viaja en un plano si B_m, el valor máximo de su componente del campo magnético, es de 1.0×10^{-4} T (= 1.0 gauss)?

17. Uno camina 162 m directamente hacia una lámpara de alumbrado público y encuentra que la intensidad aumenta a 1.50 veces la intensidad en su posición inicial. (*a*) ¿A que distancia de la lámpara estaba usted primero? (La lámpara irradia uniformemente en todas direcciones.) (*b*) ¿Puede usted hallar la potencia útil de la lámpara? Si no, explique por qué.

18. Demuestre que, en cualquier punto de una onda electromagnética como la de la figura 10, la densidad de la energía almacenada en el campo eléctrico es igual a la de la energía almacenada en el campo magnético.

19. El campo eléctrico máximo a una distancia de 11.2 m de una fuente de luz puntual es de 1.96 V/m. Calcule (*a*) el valor máximo del campo magnético, (*b*) la intensidad, y (*c*) la potencia útil de la fuente.

20. La luz del Sol incide en la Tierra, justo afuera de su atmósfera, con una intensidad de 1.38 kW/m^2. Calcule (*a*) E_m y (*b*) B_m de la luz solar, suponiendo que sea una onda plana.

21. Un cubo de arista *a* tiene sus aristas paralelas a los ejes *x*, *y* y *z* de un sistema de coordenadas rectangulares. Un campo eléctrico uniforme **E** es paralelo al eje *y* y un campo magnético uniforme **B** es paralelo al eje *x*. Calcule (*a*) la velocidad a la que, de acuerdo con el punto de vista del vector de Poynting, puede decirse que la energía pasa a través de cada cara del cubo y (*b*) la velocidad a la que puede decirse que cambia la energía almacenada en el cubo.

22. La radiación emitida por un láser no es exactamente un haz paralelo; más bien, el haz se esparce en forma de cono con sección transversal circular. El ángulo θ del cono (véase la Fig. 16) se llama *divergencia del haz en la amplitud del ángulo*. Un láser de argón de 3.85 kW, que irradia a 514.5 nm, se dirige hacia la Luna en un experimento para determinar la distancia; el láser tiene una divergencia del haz en la amplitud del ángulo de 0.880 μrad. Halle la intensidad del haz en la superficie de la Luna.

Figura 16 Problema 22.

23. Un láser HeNe, que irradia a 632.8 nm, tiene una potencia útil de 3.10 mW y una divergencia en la amplitud del ángulo (véase el problema 22) de 172 μrad. (*a*) Halle la intensidad del haz a 38.2 m del láser. (*b*) ¿Cuál sería la potencia útil de una fuente isotrópica que proporcione esta misma intensidad a la misma distancia?

24. Frank D. Drake, un activo investigador del programa SETI (*Search for extra-terrestrial intelligence*, búsqueda de seres inteligentes extraterrestres), ha dicho que el gran radiotelescopio de Arecibo, Puerto Rico, "puede detectar una señal que se proyecte sobre toda la superficie de la Tierra con una potencia de apenas un picowatt". Véase la figura 17. (*a*) ¿Cuál es la potencia de esta clase de señal

recibida en realidad por la antena de Arecibo? El diámetro de la antena es de 305 m. (*b*) ¿Cuál sería la potencia útil de una fuente situada en el centro de nuestra galaxia que pudiese proporcionar una señal así? El centro galáctico está a una distancia de unos 2.3×10^4 años luz. Considere que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones.

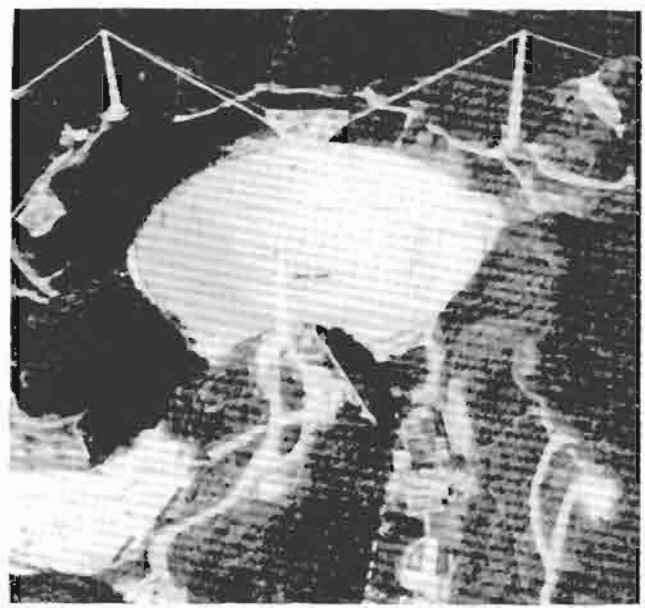


Figura 17 Problema 24.

25. Un aeroplano que vuela a una distancia de 11.3 km de un transmisor de radio recibe una señal de 7.83 $\mu W/m^2$. Calcule (*a*) la amplitud del campo eléctrico en el aeroplano debido a esta señal; (*b*) la amplitud del campo magnético en el aeroplano; (*c*) la potencia total radiada por el transmisor, suponiendo que el transmisor irradie uniformemente en todas direcciones.
26. Durante una prueba, un sistema de vigilancia por radar de la OTAN, que opera a 12 GHz con 183 kW de potencia de salida, intenta detectar una aeronave "enemiga" entrante situada a 88.2 km. La nave blanco está diseñada para que tenga un área efectiva muy pequeña de reflejo de las ondas de radar de 0.222 m^2. Suponga que el haz del radar se dispersa isotrópicamente en el hemisferio frontal tanto en la transmisión como en la reflexión y haga caso omiso de la absorción en la atmósfera. Para un haz reflejado como se recibe de regreso en el lugar del radar, calcule (*a*) la intensidad, (*b*) el valor máximo del vector del campo eléctrico, y (*c*) el valor rms del campo magnético.
27. La intensidad promedio de la luz solar, que llega con una incidencia normal justo afuera de la atmósfera de la Tierra, varía durante el año debido a una distancia Tierra-Sol cambiante. Demuestre que la fracción de la variación anual está dada por $\Delta I/I = 4e$ aproximadamente, donde e es la excentricidad de la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol.
28. Un alambre de cobre (diámetro = 2.48 mm; resistencia 1.00 Ω por 300 m) conduce una corriente de 25.0 A. Calcule (*a*) el campo eléctrico, (*b*) el campo magnético, y (*c*) la magnitud del vector de Poynting en un punto de la superficie del alambre.
29. Considérese la posibilidad de las ondas magnéticas estacionarias:

$$E = E_m(\operatorname{sen}\omega t)(\operatorname{sen} kx),$$

$$B = B_m(\cos\omega t)(\cos kx).$$

(*a*) Demuestre que éstas satisfacen a las ecuaciones 5 y 9 si E_m se relaciona apropiadamente con B_m y ω se relaciona apropiadamente con k. ¿Cuáles son estas relaciones? (*b*) Halle el vector de Poynting (instantáneo). (*c*) Demuestre que el flujo de potencia en un tiempo promedio que atraviesa cualquier área es cero. (*d*) Describa el flujo de energía en esta situación.

30. La figura 18 muestra un resistor cilíndrico de longitud l, radio a y resistividad ρ, por el cual fluye una corriente i. (*a*) Demuestre que el vector de Poynting **S** en la superficie del resistor se dirige en todas partes normalmente a la superficie, como se muestra. (*b*) Demuestre que la velocidad a la que fluye la energía en el resistor a través de su superficie cilíndrica, calculada al integrar el vector de Poynting para esta superficie, es igual a la velocidad a la que se produce la energía interna; esto es,

$$\int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A} = i^2R,$$

donde $d\mathbf{A}$ es un elemento de área de la superficie cilíndrica. Esto indica que, de acuerdo con el punto de vista del vector de Poynting, la energía que surge en un resistor como energía interna no penetra a través de los alambres conductores sino a través del espacio que rodea a los alambres y al resistor.

31. Un cable coaxial (radio interior a, radio exterior b) se emplea como una línea de transmisión entre una batería $\mathcal{E}$

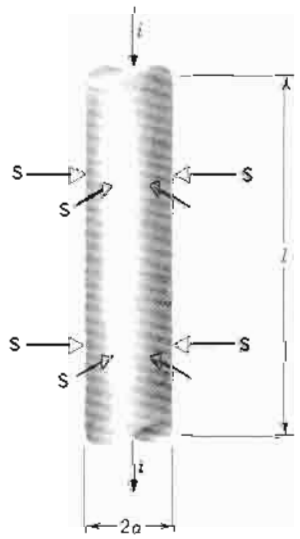


Figura 18 Problema 30.

y un resistor R, como se muestra en la figura 19. (*a*) Calcule E, B para $a < r < b$. (*b*) Calcule el vector de Poynting S para $a < r < b$. (*c*) Integrando apropiadamente el vector de Poynting, demuestre que la potencia total que fluye a través de la sección transversal anular $a < r < b$ es $\mathcal{E}^2/R$. ¿Es esto razonable? (*d*) Demuestre que la dirección de S es siempre desde la batería hacia el resistor, sin importar de qué modo esté conectada la batería.

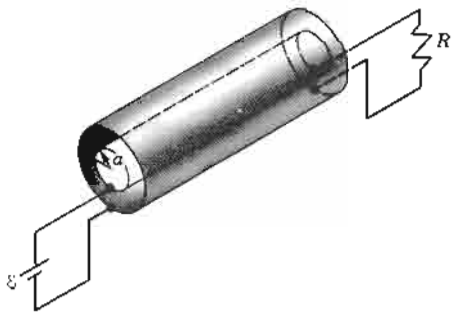


Figura 19 Problema 31.

32. La figura 20 muestra un capacitor de placas paralelas que está siendo cargado. (*a*) Demuestre que el vector de Poynting S apunta en todas partes radialmente hacia el volumen del cilindro. (*b*) Demuestre que la velocidad a la que fluye energía hacia este volumen, calculada al integrar el vector de Poynting para todos los límites cilíndricos de este volumen, es igual a la velocidad a la que aumenta la energía electrostática almacenada; esto es,

$$\int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A} = Ad\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right),$$

donde Ad es el volumen del capacitor y $\frac{1}{2}\ _0E^2$ es la densidad de energía en todos los puntos dentro de ese volumen. Este análisis demuestra que, de acuerdo con el punto de vista del vector de Poynting, la energía almacenada en el capacitor no penetra a través de los alambres sino a través del espacio que rodea a los alambres y a las placas. (*Sugerencia*: Para hallar S debemos hallar primero B, que es el campo magnético generado por la corriente de desplazamiento durante el proceso de carga; véase la figura 2 del capítulo 40. No considere el efecto de borde de las líneas de E.)

Sección 41-5 Ímpetu y presión de la radiación

33. Supóngase que usted se halla tendido bajo el sol durante 2.5 h, exponiendo una superfice de 1.3 m² a 90° a sus rayos, de 1.1 kW/m² de intensidad. Suponiendo una absorción completa de los rayos, ¿cuánto ímpetu se transmite a su cuerpo?

34. Demuestre (*a*) que la fuerza F ejercida por un haz láser de intensidad I sobre un objeto perfectamente reflejante de área A normal al haz está dada por $F = 2IA/c$ y (*b*) que la presión $P = 2I/c$.

35. Se usa láser de alta potencia para comprimir plasmas de gas mediante la presión de la radiación. La reflectividad de un plasma es la unidad cuando la densidad de los electrones es lo suficientemente alta. Un láser que genera impulsos de radiación de una potencia pico de 1.5 GW se enfoca sobre 1.3 mm² de plasma de alta densidad de electrones. Halle la presión ejercida sobre el plasma.

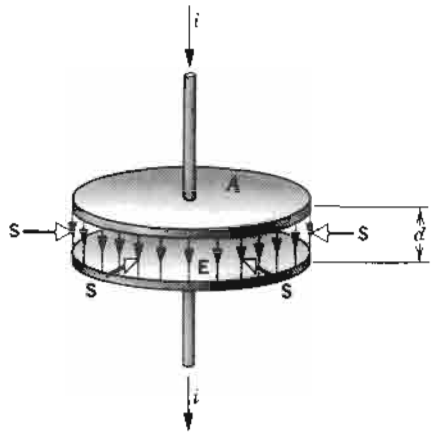


Figura 20 Problema 32.

36. (*a*) Demuestre que la intensidad promedio de la radiación solar que recae normalmente sobre una superficie justo fuera de la atmósfera de la Tierra es de 1.38 kW/m². (*b*) ¿Qué presión de radiación se ejerce sobre esta superficie, suponiendo una absorción completa? (*c*) ¿Cómo se compara esta presión con la presión atmosférica en la Tierra al nivel del mar, la cual es de 101 kPa?

37. La radiación del Sol que llega a la Tierra tiene una intensidad de 1.38 kW/m². (*a*) Suponiendo que la Tierra se comporte como un disco plano en ángulo recto con los rayos del Sol y que toda la energía incidente sea absorbida, calcule la fuerza sobre la Tierra debida a la presión de la radiación. (*b*) Compárela con la fuerza debida a la atracción gravitatoria del Sol mediante el cálculo de la razón F_{rad}/F_{grav}.

38. Calcule la presión de la radiación a 1.50 m de un foco eléctrico de 500 W. Suponga que la superficie sobre la cual la presión se ejerce encara al foco y es perfectamente absorbente y que el foco irradia de manera uniforme en todas direcciones.

39. Una onda electromagnética plana, con longitud de onda de 3.18 m, viaja en el vacío en la dirección $+x$ con su vector eléctrico E, de 288 V/m de amplitud, dirigido a lo largo del eje y. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de la onda? (*b*) ¿Cuál es la dirección y la amplitud del campo magnético asociado con la onda? (*c*) Si $E = E_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, ¿cuáles son los valores de k y ω? (*d*) Halle la intensidad de la onda. (*e*) Si la onda incide sobre una lámina perfectamente absorbente de 1.85 m² de área, ¿con qué velocidad se comunicará el ímpetu a la lámina y cuál es la presión de la radiación ejercida sobre la lámina?

40. Demuestre que el vector $c\epsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ tiene las dimensiones de ímpetu/(área · tiempo), mientras que $(1/\mu_0)\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ tiene las dimensiones de energía/(área · tiempo). (El vector $c\epsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ debe emplearse para calcular el flujo del ímpetu de

igual manera que $\mathbf{S} = (1/\mu_0)\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ se usa para determinar el flujo de energía.)

41. Una radiación de intensidad I incide normalmente sobre un objeto que absorbe una fracción f de ella y refleja el resto. ¿Cuál es la presión de radiación?

42. Para una onda plana que incida normalmente sobre una superficie plana, demuestre que la presión de la radiación sobre la superficie es igual a la densidad de energía del haz en el exterior de la superficie. Esta relación se cumple y es independiente de la fracción de energía incidente que se refleje.

43. Para una corriente de balas que choca contra una superficie plana sobre la cual inciden perpendicularmente, demuestre que la "presión" es el doble de la densidad de energía cinética de la corriente sobre la superficie; suponga que las balas se absorban por completo en la superficie. Contraste esto con el comportamiento de la luz; véase el problema 42.

44. Una pequeña nave espacial cuya masa, con su ocupante, es de 1500 kg, deriva por el espacio exterior, en donde el campo gravitatorio es despreciable. Si el astronauta enciende un haz láser de 10.0 kW, ¿qué velocidad adquirirá la nave en un día a causa de la fuerza de reacción asociada con el ímpetu que se lleva el haz?

45. Un láser helio-neón del tipo hallado a menudo en los laboratorios de física tiene una salida de potencia del haz de 5.00 mW con una longitud de onda de 633 nm. El haz se enfoca por una lente hacia un punto circular cuyo diámetro efectivo puede considerarse de 2.10 longitudes de onda. Calcule (*a*) la intensidad del haz enfocado, (*b*) la presión de radiación ejercida sobre una esfera diminuta, perfectamente absorbente cuyo diámetro sea el del punto focal, (*c*) la fuerza ejercida sobre esta esfera, y (*d*) la aceleración que se le imprime. Supóngase que la densidad de la esfera es de 4.88 g/cm³.

46. Un láser tiene una salida de potencia de 4.6 W y un diámetro del haz de 2.6 mm. Si se le dirige verticalmente hacia arriba, ¿cuál es la altura H de un cilindro perfectamente reflejante que pueda hacerse "revolotear" en virtud de la presión de radiación ejercida por el haz? Suponga que la densidad del cilindro es de 1.2 g/cm³. Véase la figura 21.

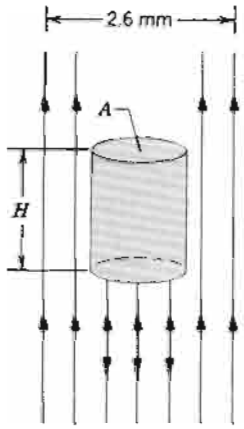


Figura 21 Problema 46.

47. Se ha propuesto que un vehículo espacial puede impulsarse en el sistema solar mediante la presión de la radiación, usando una gran vela hecha de hoja delgada metálica. ¿Qué tan grande tendrá que ser la vela si la fuerza de la radiación debe tener la misma magnitud que la de atracción gravitatoria del Sol? Suponga que la masa del vehículo + la vela es de 1650 kg, que la vela es perfectamente reflejante, y que la vela está orientada en ángulo recto a los rayos del Sol. Consulte el apéndice C para los datos necesarios.

48. Verifique el valor de la fuerza de radiación sobre el yate solar *Diana*, descrito en el problema 9 del capítulo 5.

49. Una partícula en el sistema solar está sometida a la influencia combinada de la atracción gravitatoria del Sol y a la fuerza de la radiación debida a los rayos del Sol. Suponga que la partícula es una esfera de 1.00 g/cm³ de densidad y que toda la luz incidente se absorbe. (*a*) Demuestre que todas las partículas con un radio menor que cierto radio crítico R_0 serán expulsadas del sistema solar. (*b*) Calcule R_0. Obsérvese que R_0 no depende de la distancia de la partícula al Sol.

CAPÍTULO 42

NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ

No existe nada en su naturaleza fundamental que distinga a la luz de cualquier otra onda electromagnética. Las descripciones de las ondas electromagnéticas presentadas en el capítulo anterior se aplican igualmente bien a las ondas de luz. Lo que distingue a la luz de las demás ondas electromagnéticas es que tenemos receptores (los ojos) que son sensibles a la radiación electromagnética sólo en una gama estrecha de longitudes de onda desde unos 400 nm (el violeta) hasta unos 700 nm (el rojo).

En el presente capítulo, estudiaremos algunas de las características de las ondas de luz, incluyendo las fuentes de radiación visible, la velocidad de propagación en el vacío y en la materia, y el efecto Doppler en la luz que ocurre cuando la fuente y el observador están en movimiento relativo. En los capítulos siguientes trataremos de la óptica, la cual prolonga nuestro estudio de la propagación de la luz. Este capítulo sirve como puente entre nuestro estudio previo de las ondas electromagnéticas en general y el estudio posterior de la óptica. Sin embargo, deberá tenerse en cuenta que mucho de lo que tratamos en este capítulo se aplica igualmente a otras clases de ondas electromagnéticas.

42-1 LA LUZ VISIBLE

Podemos definir operativamente que la luz visible es una radiación electromagnética a la cual el ojo es sensible. La sensibilidad de los observadores individuales puede variar, pero los humanos típicos pueden observar la radiación en la gama de longitudes de onda de 400 nm a 700 nm (correspondiente a una gama de frecuencias de 7×10^{14} Hz a 4×10^{14} Hz). Dentro de esa gama, la sensibilidad a las diferentes longitudes de onda no es de ninguna manera constante. La figura 1 muestra una representación de la variación en la sensibilidad de un observador normal para radiaciones de longitudes de onda diferentes pero de intensidad radiante constante dentro de la región visible del espectro. La mayor sensibilidad ocurre cerca de 555 nm, correspondiente a la luz de un color verde amarillento. Los límites de la región visible no están bien definidos, porque la curva de la sensibilidad se aproxima al eje asintóticamente a longitudes de onda tanto largas como cortas. Los límites que corresponden a una sensibilidad igual al 1% de la del pico son de 430 nm (el violeta) y 690 nm (el rojo). Téngase en cuenta que la figura 1 se aplica sólo a un observador humano normal; el órgano de vista en los animales puede presentar sensibilidades diferentes, y los dispositivos electrónicos pueden tener curvas de sensibilidad más anchas o más angostas.* (Compárese la gama de las longitudes de onda *visibles*, menores en un factor de 2, con la gama de las longitudes de onda o frecuencias *audibles*, que son de un factor de 100 aproximadamente en el límite del 1%, según se muestra en la figura 4 del capítulo 20 de este mismo libro.)

Las fuentes de la luz visible dependen finalmente del movimiento de los electrones. Los electrones de los átomos pueden ser elevados desde su estado de mínima energía a los estados más altos por varios medios, como al calentar la sustancia o cuando se hace pasar una corrien-

* La asignación del color a las diversas regiones del espectro visible es bastante arbitraria, porque el color es en primer lugar una etiqueta psicológica más bien que una cualidad física. Así como no existe una distinción física fundamental entre la luz y otras ondas electromagnéticas, no existe una distinción física fundamental entre la luz azul y la luz roja. Para mayor información sobre la percepción del color, véase "The Retinex Theory of Color Vision", por Edwin H. Land, *Scientific American*, diciembre de 1977, pág. 108, y *Eye, Brain, and Vision*, por David H. Hubel (Scientific American Library Series, 1988), capítulo 8.

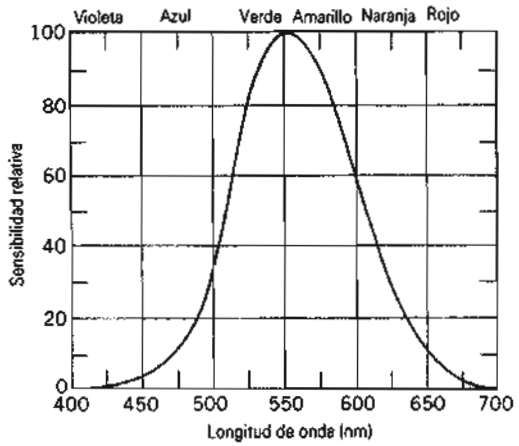


Figura 1 La sensibilidad del ojo humano en relación a la longitud de onda.

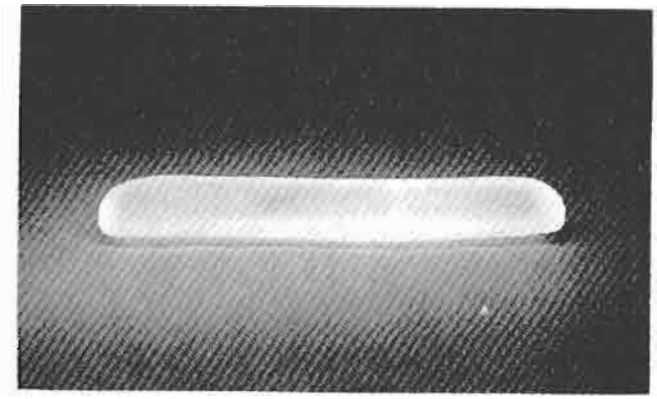


Figura 2 Un material fosforescente, un cristal de borato de sodio, emite luz visible al absorber radiación ultravioleta.

te eléctrica por ella. Cuando los electrones retornan finalmente a sus niveles más bajos, los átomos emiten radiación que puede estar en la región visible del espectro. La emisión de la luz visible es particularmente probable cuando los electrones exteriores (los de valencia) son los que realizan las transiciones.

La fuente más familiar de luz visible es el Sol. Su superficie emite radiación en todo el espectro electromagnético, pero su radiación más intensa está en la región que definimos como visible, y la intensidad radiante del Sol tiene su pico a unos 550 nm, correspondiente precisamente al pico de la sensibilidad de nuestro observador normal (Fig. 1). Esto indica que, por medio de la selección natural, nuestros ojos evolucionaron de tal manera que su sensibilidad se igualó a la del espectro del Sol.

Todos los objetos emiten radiación electromagnética, llamada *radiación térmica*, debido a su temperatura. Los objetos como el Sol, cuya radiación térmica es visible, se llaman *incandescentes*. Otros objetos incandescentes comunes son los filamentos de los focos de luz ordinarios y el rescoldo reluciente de un fuego de carbón vegetal. La incandescencia está asociada por lo general con los objetos calientes; típicamente, son necesarias temperaturas de más de 1000°C.

También es posible que ciertos objetos fríos emitan luz; este fenómeno se llama *luminiscencia*. Entre algunos ejemplos están los tubos fluorescentes comunes, el relámpago, las manecillas y carátulas brillantes de algunos relojes, y los receptores de televisión. En el caso de un tubo fluorescente, la corriente eléctrica que pasa por el gas contenido en el tubo causa que los electrones pasen a los estados de energía más altos; cuando los electrones retornan a sus estados de energía iniciales, ceden su exceso de energía en forma de radiación ultravioleta. Esta radiación es absorbida por los átomos del recubrimiento que hay en el interior del tubo de vidrio, el cual emite entonces luz visible. En el caso de las carátulas de los relojes, es la luz *incidente* la causante de la excitación.

Los objetos luminiscentes pueden clasificarse en dos categorías que dependen de la duración de la emisión de luz una vez que se haya suprimido la fuente de excitación. Los objetos en los que la emisión de luz cesa de inmediato (dentro de 10^{-8} s) después de haber sido retirada la excitación se llaman *fluorescentes*, como en el caso de la lámpara fluorescente. Los objetos que continúan luciendo durante más de 10^{-8} s después que la fuente de la excitación fue retirada (como la carátula de un reloj) se llaman *fosforescentes*, y el material que causa este efecto se llama *fósforo* (Fig. 2).

La luminiscencia puede tener una variedad de causas. Cuando la energía que excita a los átomos se origina a partir de una reacción química, se le llama *quimioluminiscencia*. A menudo el efecto ocurre en seres vivos, como las luciérnagas y muchos organismos marinos, en cuyo caso se le llama *bioluminiscencia* (Fig. 3). Cuando ciertos cristales, por ejemplo, de azúcar, son triturados, también emiten luz; el efecto, llamado *triboluminiscencia*, puede observarse en un cuarto oscuro al masticar ciertos dulces llamados "salvavidas" (Wintergreen Life-Savers^{MR}) entre los dientes. Otras causas de la luminiscencia incluyen a las corrientes eléctricas (como en el relámpago o en los diodos emisores de luz LED) y el impacto de partículas de energía elevada (como en la aurora boreal).

42-2 LA VELOCIDAD DE LA LUZ

De acuerdo con la teoría de Maxwell, todas las ondas electromagnéticas viajan en el vacío a la misma velocidad. Llamamos a ésta la "velocidad de la luz", aun cuando abarque todas las radiaciones electromagnétcias, no sólo la luz. Esta velocidad es una de las constantes fundamentales de la naturaleza. Su conocimiento preciso es impor-

Figura 3 Los puntos de luz son luciérnagas en una caverna en Nueva Zelanda. Su luz atrae a los insectos, que quedan atrapados y sirven de alimento a las larvas de luciérnaga.

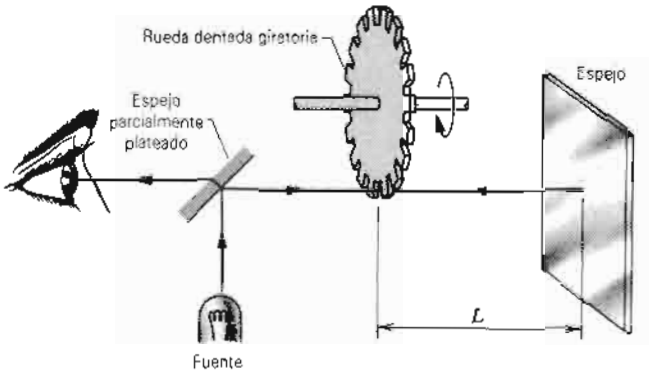


Figura 4 Un diagrama esquemático del aparato de Fizeau para medir la velocidad de la luz.

tante para relacionar la frecuencia y la longitud de onda de las ondas electromagnéticas (de acuerdo con $c = \lambda\nu$). En los primeros años de este siglo, la precisión de las longitudes de onda medidas excedía a la de la velocidad de la luz como se la conocía entonces, y como resultado no podía calcularse la frecuencia de las ondas electromagnéticas con gran precisión. (Las frecuencias se expresaban, generalmente, en unidades recíprocas de la longitud, por esta razón.) Hoy en día, la medición de la frecuencia (y por lo tanto, de los intervalos de tiempo) puede realizarse con una precisión que supera a la de las longitudes de onda; como resultado, el metro ya no es más el patrón primario (véase la Sec. 1-4).

Hasta el siglo XVII, se creía generalmente que la luz se propagaba instantáneamente; esto es, se pensaba que la velocidad de la luz era infinita. Galileo analizó esta cuestión en su famoso trabajo, *Diálogo sobre dos ciencias nuevas*, publicado en 1638. Presentó sus argumentos en forma de diálogo entre varios personajes, entre los que se encuentra Simplicio (que representaba al científicamente ignorante) y Sagredo (que representaba a la voz de la razón y probablemente al propio Galileo):

SIMPLICIO: La experiencia diaria demuestra que la propagación de la luz es instantánea; ya que, cuando vemos el disparo de una pieza de artillería, a gran distancia, el destello llega a nuestros ojos sin tardanza, pero el sonido llega a nuestros oídos sólo después de un intervalo notable.

SAGREDO: Bien, Simplicio, lo único que soy capaz de inferir de esta minúscula experiencia es que el sonido, para llegar a nuestros oídos, viaja más lentamente que la luz; esto no me informa de si la llegada de la luz es instantánea o si, aunque extremadamente rápida, le toma cierto tiempo.

Así, Galileo llegó a describir un experimento (que él en efecto llevó a cabo) para medir la velocidad de la luz. Él y un asistente se colocaron una noche uno frente al otro, separados por una distancia de una milla más o menos, llevando cada uno una linterna que podía ser cubierta o descubierta a voluntad. Galileo empezó descubriendo su linterna, y el asistente descubriría la suya al ver la luz de la de Galileo. Galileo trató entonces de medir el intervalo de tiempo entre el instante en que descubrió su linterna y el instante en que la luz de la linterna de su asistente llegó hasta él. Si bien Galileo no pudo determinar el valor de la velocidad de la luz (el tiempo del recorrido completo en una separación de 1 milla es tan sólo de 11 μs, varios órdenes de magnitud menor que el tiempo de reacción del ser humano), se le reconoce haber sido el primero en realizar el intento de medir la velocidad de la luz.

En 1676, Ole Roemer, un astrónomo danés que trabajaba en París, usó las observaciones astronómicas para deducir que la velocidad de la luz es finita. Su conclusión se basó en una discrepancia entre los tiempos observados y predichos de los eclipses de la luna de Júpiter más próxima a ese planeta, Io (véase el problema 6). Unos 50 años más tarde James Bradley, astrónomo inglés, usó una

técnica diferente basada en la luz de las estrellas para obtener un valor de 3×10^8 m/s.

El siguiente avance de importancia para medir la velocidad de la luz no llegó sino luego de más de un siglo más tarde. En 1849, el físico francés Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) usó un dispositivo mecánico, ilustrado en la figura 4. En esencia, hizo que un haz de luz recorriera una trayectoria larga de viaje redondo (de longitud $L = 8630$ m en cada sentido) pasando por una rueda dentada en cada dirección. La rueda dentada recortaba el haz que iba hacia el espejo en pulsaciones cortas. Si, durante el tiempo que la pulsación viaja hasta el espejo y regresa, la rueda gira de modo que uno de los dientes bloquee en ese momento el paso de la luz, el observador no ve la pulsación de luz. Cuando ocurre esto, el tiempo $2L/c$ que le toma al haz de luz realizar el viaje redondo entre la rueda y el espejo debe ser igual al tiempo θ/ω que le toma a la rueda girar a una velocidad angular ω en un ángulo θ entre el centro de un diente y el centro de un espacio. Es decir,

$$\frac{2L}{c} = \frac{\theta}{\omega}$$

o bien

$$c = \frac{2L\omega}{\theta}. \qquad (1)$$

Los haces recortados se usan de varias maneras para medir las velocidades de los neutrones y otras partículas. (Se empleó una variante de este método para verificar la distribución de velocidades de Maxwell; véase la figura 12 del capítulo 24.)

Usando este método, el resultado de Fizeau fue de 3.133×10^8 m/s. Otros experimentadores, entre los que estuvo el físico estadounidense Albert A. Michelson, usaron técnicas mecánicas similares durante los últimos años del siglo XIX y primeros del siglo XX. El trabajo de Michelson fue digno de mención en cuanto al cuidado y precisión con que lo realizó, y fue galardonado con el premio Nobel en 1907 de física por su investigación usando técnicas ópticas para llevar a cabo mediciones precisas. Como resultado de estas investigaciones, la incertidumbre en c se redujo en unos 1000 m/s.

El desarrollo de las técnicas electrónicas, especialmente aplicadas a las microondas, permitieron realizar una nueva clase de mediciones en los años cincuenta de este siglo. Estas mediciones dieron resultados que concordaron con los de Michelson y tuvieron límites de incertidumbre semejantes.

El avance sensacional en las mediciones de la velocidad de la luz llegó en los años setenta con la aplicación de los rayos láser. Al medir la frecuencia y la longitud de onda directamente, pudo obtenerse la velocidad de la luz de $c = \lambda\nu$. Los refinamientos de esta técnica han dado por resultado valores de c con incertidumbres menores a 1 m/s. La tabla 1 resume algunas de las mediciones de c que hemos estudiado.* Nótese la reducción del límite de incertidumbre a través de los años.

La precisión de la medición de la frecuencia (alrededor de 1 parte en 10^{13}) ha excedido en mucho a la de la medición de la longitud de onda (alrededor de 1 parte en 10^9). Como resultado, definimos ahora que la velocidad de la luz tiene el valor exacto de

$$c = 299{,}792{,}458 \text{ m/s},$$

y el segundo se define con base en las mediciones de la frecuencia, de modo que el metro es ahora un patrón secundario, definido en términos de segundos y del valor de c.

La velocidad de la luz en la materia

Cuando nos referimos a "la velocidad de la luz", por lo general queremos decir la velocidad *in vacuum* (en el vacío). En el capítulo 41 estudiamos la propagación de la radiación electromagnética, la cual ocurre mediante el acoplamiento entre sus campos eléctrico y magnético. En los materiales dieléctricos, vimos en la sección 31-7 que el campo eléctrico se altera por un factor κ_e, la constante dieléctrica del material. Una manera conveniente de modificar las ecuaciones para campos eléctricos en el vacío para explicar la presencia de materiales dieléctricos es, como se demostró en la sección 31-5, reemplazar la constante de permitividad ϵ_0 con la cantidad $\kappa_e\epsilon_0$.

También debemos explicar de las propiedades *magnéticas* del medio sobre el campo magnético de la onda electromagnética al propagarse. Como vimos en la sección 37-3, los materiales magnéticos se caracterizan por una constante de permeabilidad relativa κ_m, y en analogía con el campo eléctrico, podemos modificar las ecuaciones del campo magnético en la materia al reemplazar la constante de permeabilidad μ_0 con la cantidad $\kappa_m\mu_0$.

Llevando a cabo estas sustituciones, podemos ciertamente modificar la ecuación 11 del capítulo 41 para obtener la velocidad de la luz en la materia:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\kappa_m\kappa_e}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_m\kappa_e}}. \qquad (2)$$

Los materiales que transmiten luz no son magnéticos normalmente y, por tanto, κ_m difiere de 1 típicamente en no más de 10^{-4} (véanse las tablas 2 y 3 del capítulo 37). Así, la constante dieléctrica κ_e es la que determina la velocidad de la luz en un material. Sin embargo, las constantes dieléctricas que se muestran en la tabla 1 del capítulo 31 no pueden emplearse en la ecuación 2, porque

* Para referencias de algunas de estas mediciones, véase "Resource Letter RMSL-1: Recent Measurements of the Speed of Light and the Redefinition of the Meter", por Harry E. Bates, *American Journal of Physics*, agosto de 1988, pág. 682.

TABLA 1 LA VELOCIDAD DE LA RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA EN EL VACÍO (ALGUNAS MEDICIONES SELECCIONADAS)

Fecha	*Experimentador*	*País*	*Método*	*Velocidad* (km/s)	*Incertidumbre* (km/s)
1600(?)	Galileo	Italia	Linternas y persianas	"Extraordinariamente rápida"	
1676	Roemer	Francia	Las lunas de Júpiter	"Finita"	
1729	Bradley	Inglaterra	La aberración de la luz de las estrellas	304,000	
1849	Fizeau	Francia	La rueda dentada	313,300	
1862	Foucault	Francia	El espejo giratorio	298,000	500
1880	Michelson	E.U.A.	El espejo giratorio	299,910	50
1906	Rosa y Dorsey	E.U.A.	La teoría electromagnética	299,781	10
1923	Mercier	Francia	Ondas estacionarias en alambres	299,782	15
1926	Michelson	E.U.A.	El espejo giratorio	299,796	4
1950	Bergstrand	Suecia	El geodímetro	299,792.7	0.25
1950	Essen	Inglaterra	La cavidad de microondas	299,792.5	3
1950	Bol y Hansen	E.U.A.	La cavidad de microondas	299,789.3	0.4
1951	Aslakson	E.U.A.	El radar Shoran	299,794.2	1.9
1952	Rank y otros	E.U.A.	Los espectros moleculares	299,766	7
1952	Froome	Inglaterra	El interferómetro de microondas	299,792.6	0.7
1958	Froome	Inglaterra	El interferómetro de microondas	299,792.50	0.10
1967	Grosse	Alemania	El geodímetro	299,792.5	0.05
1973	Evenson y otros	E.U.A.	Las técnicas del láser	299,792.4574	0.0012
1978	Woods y otros	Inglaterra	Las técnicas del láser	229,792.4588	0.0002
1987	Jennings y otros	E.U.A.	Las técnicas del láser	299,792.4586	0.0003

aquellos valores son característicos de situaciones *estáticas*. Recordemos que la constante dieléctrica es, en efecto, una medida de la respuesta de los dipolos (permanentes o inducidos) a un campo eléctrico aplicado. Si el campo aplicado varía con una frecuencia elevada, los dipolos pueden no tener tiempo para responder, y no podemos emplear las constantes dieléctricas estáticas en este caso de un campo **E** rápidamente variante. A las frecuencias características de una onda de luz (10^{15} Hz), el campo oscila demasiado rápidamente para que los dipolos lo sigan por completo. Además, en la ecuación 2 κ_e varía con la frecuencia, de modo que la velocidad de la luz en la materia depende de la longitud de onda o de la frecuencia de la luz.

La tabla 2 muestra los valores de la velocidad de la luz en diversos materiales.

Problema muestra 1 La velocidad de la luz de color amarillo (λ = 589 nm) en el agua es de 2.26×10^8 m/s. ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva para el agua a esta frecuencia?

Solución Usamos la ecuación 2 y suponemos que, con la precisión suficiente para este cálculo, $\kappa_m = 1$. Al despejar la ecuación para κ_e, obtenemos

$$\kappa_e = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \left(\frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.26 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2 = 1.76.$$

Esto es muy diferente de la constante dieléctrica *estática* del agua, la cual tiene un valor de unos 80 a la temperatura ambiente, lo cual nos indica la dificultad que tienen los momentos dipolares de las moléculas de agua para seguir la variación del campo eléctrico para esta frecuencia. En general, las constantes dieléctricas para frecuencias altas son menores que los valores estáticos correspondientes, lo que significa que el campo eléctrico inducido de frecuencias elevadas es menor que el campo eléctrico inducido estático.

TABLA 2 VELOCIDAD DE LA LUZ EN MATERIALES SELECTOS[a]

Material	*Velocidad de la luz* (10^8 m/s)
Vacío	3.00
Aire	3.00
Agua	2.26
Solución de azúcar (50%)	2.11
Vidrio refractario	1.97
Diamante	1.24

[a] En la luz amarilla (λ = 589 nm).

La propagación de la luz en la materia *(Opcional)*
El mecanismo responsable de la propagación de la luz en la materia es el de dispersión (en efecto, absorción de la luz incidente por medio de los átomos o las moléculas del medio y reemisión de la luz dispersada). Las fases de las ondas dispersas que viajan transversalmente a la dirección de la luz incidente causa una interferencia casi por completo destructiva en las direcciones transversales. Las ondas dispersadas que viajan paralelas a la dirección de la luz incidente no están en fase con la luz incidente; como resultado de la interferencia entre las dos ondas, la fase de su combinación difiere de la fase de la onda incidente. Observamos este cambio de fase como un cambio en la velocidad.

El campo eléctrico de la luz incidente causa que los electrones del átomo oscilen con la frecuencia de la luz incidente. Es razonable esperar que la fase de la onda reemitida dependa de la frecuencia de la oscilación atómica y, por lo tanto, de la frecuencia de la onda original. Cuando las ondas incidente y dispersada interfieren, la fase de su combinación depende de la diferencia de fase y, por lo tanto, de la frecuencia. Como resultado, la velocidad de la luz en un material depende de la frecuencia o de la longitud de onda. Este fenómeno, que se llama *dispersión*, se estudia en el capítulo 43.

En un sólido típico, la distancia sobre la que la luz original se absorbe y reemite es del orden de micrometros, y en el aire es del orden de milímetros. En efecto, la luz que vemos procedente del Sol llega a nuestros ojos no directamente del Sol sino de las moléculas de aire que están a unos cuantos milímetros enfrente de nuestros ojos. ■

42-3 EL EFECTO DOPPLER EN LA LUZ

En la sección 20-7 demostramos que si una fuente de *sonido* se mueve hacia un observador a una velocidad u, la frecuencia que el observador escucha es (véase la Ec. 39 del capítulo 20, la cual hemos reordenado y en la que hemos sustituido a v_s por u)

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 - u/v} \quad \begin{matrix}\text{(onda de sonido, observador fijo,} \\ \text{fuente acercándose.)}\end{matrix} \tag{3}$$

En esta ecuación ν_0 es la frecuencia escuchada cuando la fuente está en reposo, y v es la velocidad del sonido. Este cambio de frecuencia debido al movimiento relativo se llama *efecto Doppler*.

Si la fuente está en reposo en el medio transmisor pero el observador se mueve hacia la fuente con una velocidad u, la frecuencia observada (véase la Ec. 36 del capítulo 20, donde u se ha sustituido por v_0) es

$$\nu = \nu_0(1 + u/v) \quad \begin{matrix}\text{(onda de sonido, fuente fija,} \\ \text{observador acercándose.)}\end{matrix} \tag{4}$$

Para valores idénticos de la velocidad de separación relativa u entre la fuente y el observador, las frecuencias predichas por las ecuaciones 3 y 4 son diferentes. Esto no debe sorprendernos, porque una fuente de sonido que se mueve a través de un medio en el que el observador está en reposo es físicamente diferente a un observador que se mueve a través de ese medio con la fuente en reposo, como vemos al comparar las figuras 12 y 13 del capítulo 20 y como demostramos en el problema muestra 5 del capítulo 20.

Podríamos estar tentados a aplicar las ecuaciones 3 y 4 a la luz, sustituyendo c, la velocidad de la luz, por v, la velocidad del sonido. Sin embargo en la luz, al contrario de con el sonido, se ha probado que es imposible identificar un medio de transmisión en relación con el cual se muevan tanto la fuente como el observador. Esto significa que "la fuente aproximándose al observador" y "el observador aproximándose a la fuente" son, físicamente, situaciones idénticas y que deben exhibir *exactamente el mismo corrimiento* de la frecuencia Doppler. Aplicadas a la luz, la ecuación 3 o la ecuación 4 o ambas deben ser incorrectas. Como lo demostraremos en la sección siguiente, el efecto Doppler predicho por la teoría de la relatividad es

$$\begin{aligned}\nu &= \nu_0 \frac{1 + u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \nu_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \quad \begin{matrix}\text{(onda de luz, fuente y} \\ \text{observador aproximándose.)}\end{matrix} \\ &= \nu_0 \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c}\end{aligned} \tag{5}$$

La ecuación 5 se aplica sólo al caso especial en que la dirección de propagación de la luz es la misma que la dirección del movimiento relativo de S y S'. En la sección siguiente obtendremos un resultado más general válido para cualquier dirección. Podemos modificar las ecuaciones 3, 4 y 5 si la fuente y el observador *se están alejando* entre sí al reemplazar u por $-u$.

Las ecuaciones 3, 4 y 5 producen resultados similares si la razón u/c es pequeña, como podemos verlo al desarrollar las ecuaciones usando el teorema del binomio, al sustituir v por c, lo cual da

$$\text{Ecuación 3:} \quad \nu = \nu_0 \left[1 + \frac{u}{c} + \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \cdots\right], \tag{6}$$

$$\text{Ecuación 4:} \quad \nu = \nu_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right), \tag{7}$$

$$\text{Ecuación 5:} \quad \nu = \nu_0 \left[1 + \frac{u}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \cdots\right]. \tag{8}$$

Para la mayoría de las fuentes de luz, aun aquéllas de dimensiones atómicas, la razón u/c es pequeña. En tales casos, los términos en u^2/c^2 (y términos de órdenes mayo-

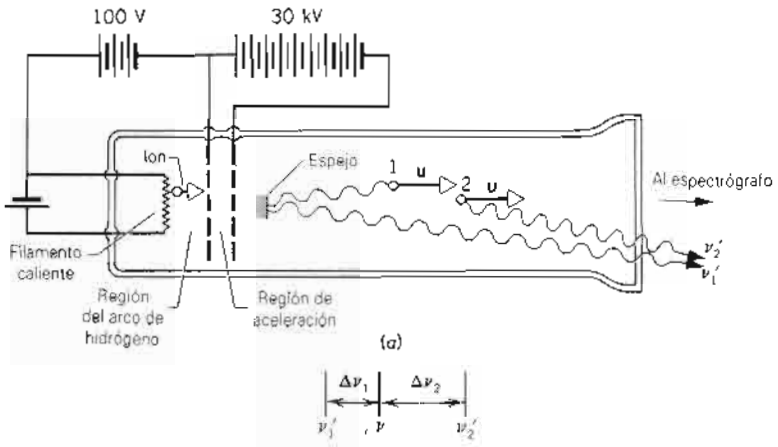


Figura 5 El aparato empleado en el experimento de Ives y Stilwell.

res) son despreciables, y el término de primer orden u/c da una estimación razonable del corrimiento Doppler.

En casi todas las circunstancias las diferencias entre estas ecuaciones no es importante. No obstante, es de extraordinario interés realizar al menos un experimento lo suficientemente preciso que sirva como prueba de la ecuación 5 y así, en parte, de la teoría de la relatividad.

La prueba experimental clásica fue llevada a cabo en 1938 por H. E. Ives y G. R. Stilwell, quienes enviaron un haz de átomos de hidrógeno, generado en una descarga de un gas, a lo largo de un tubo con velocidad u, como en la figura 5. Pudieron observar la luz emitida por estos átomos en una dirección opuesta a **u** (por ejemplo, el átomo 1) usando un espejo, y también en una dirección paralela a **u** (por ejemplo, el átomo 2). Con un espectrógrafo preciso, pudieron fotografiar una línea espectral característica particular de esta luz, obteniendo, en una escala de frecuencias, las líneas marcadas ν_1' y ν_2' en la figura 5*b*. Es también posible fotografiar, en la misma placa fotográfica, una línea que corresponda a la luz emitida de los átomos *en reposo*; tal línea aparece como ν en la figura 5*b*. Una cantidad fundamental medida en este experimento es $\Delta\nu/\nu$, definida por

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\nu_2 - \Delta\nu_1}{\nu}, \tag{9}$$

(véase la Fig. 5*b*). Mide el grado al que la frecuencia de la luz procedente de átomos en reposo no logra quedar a la mitad entre las frecuencias ν_1' y ν_2'. La tabla 3 muestra que los resultados medidos concuerdan con la fórmula predicha por la teoría de la relatividad (Ec. 5) y no con la fórmula clásica prestada de la teoría de la propagación del sonido en un medio material (Ec. 3).

Ives y Stilwell no presentaron sus resultados experimentales como una prueba para apoyar la teoría de la relatividad de Einstein sino que más bien le dieron una explicación teórica alternativa. Los observadores modernos, viendo no únicamente su excelente experimento sino a toda una gama amplia de prueba experimental, le dan ahora al experimento de Ives y Stilwell la interpretación que hemos descrito, como una prueba del efecto Doppler relativista.

Problema muestra 2 Un cuásar distante se aleja de la Tierra a una velocidad u. Un astrónomo está buscando cierta línea espectral en la luz del cuásar. Esa línea, emitida por hidrógeno atómico, se observa usando tubos de descarga de hidrógeno en la Tierra que tienen una longitud de onda $\lambda_0 = 121.6$ nm. El astrónomo halla que la línea espectral del hidrógeno emitida por el cuásar tiene una longitud de onda de $\lambda = 460.9$ nm. Si se supone que el cuásar se aleja radialmente de la Tierra, ¿cuál es su velocidad relativa a la Tierra?

Solución Usamos la ecuación 5, la cual reescribimos en términos de la longitud de onda y sustituimos $-u$ por u, porque la fuente y el observador se están separando:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

o sea

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}. \tag{10}$$

Al despejar para la velocidad, hallamos

$$\frac{u}{c} = \frac{(\lambda/\lambda_0)^2 - 1}{(\lambda/\lambda_0)^2 + 1}. \tag{11}$$

TABLA 3 EL EXPERIMENTO DE IVES Y STILWELL

Velocidad u (10^6 m/s)	$\Delta\nu/\nu$, 10^{-5}		
	Clásica	*Relativista*	*Experimento*
0.865	1.67	0.835	0.762
1.01	2.26	1.13	1.1
1.15	2.90	1.45	1.42
1.33	3.94	1.97	1.9

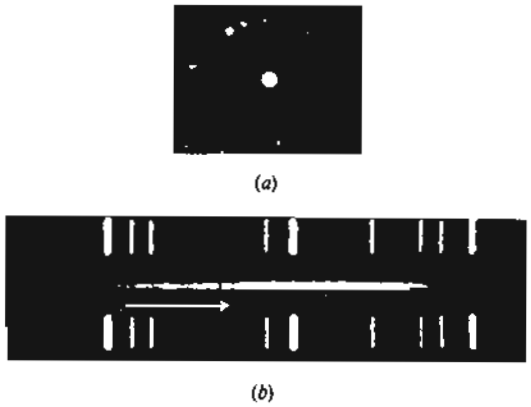


Figura 6 (*a*) Una galaxia en la constelación Corona Borealis. (*b*) La raya central muestra el espectro de la longitud de onda de la luz emitida por esta galaxia. Las dos bandas verticales oscuras muestran las líneas de absorción asociadas con el calcio, el cual está presente en la galaxia. Los espectros de las líneas de arriba y de abajo se registraron de una fuente en el laboratorio para proporcionar una calibración de la longitud de onda. La flecha horizontal muestra lo lejos que se desplazan las líneas del calcio de donde cabría esperar que aparecieran si fuesen emitidas por una fuente en reposo en el laboratorio. De este corrimiento Doppler, se deduce que la velocidad de alejamiento de la galaxia es de unos 21,000 km/s.

Con $\lambda/\lambda_0 = 460.9\text{ nm}/121.6\text{ nm} = 3.79$, obtenemos

$$\frac{u}{c} = \frac{(3.79)^2 - 1}{(3.79)^2 + 1} = 0.87.$$

El cuásar se aleja de la Tierra al 87% de la velocidad de la luz. Este cálculo determina sólo la componente radial o de visual de la velocidad relativa.

El efecto Doppler provoca que las longitudes de onda de la luz procedente de objetos que se alejan de la Tierra se alarguen o se recorran hacia el extremo rojo (longitud de onda larga) del espectro visible. De aquí que se le conozca como el *corrimiento al rojo*. La figura 6 muestra un ejemplo del espectro recorrido al rojo, según el cual es posible determinar la velocidad de la galaxia en relación a la Tierra. La prueba que proviene de muchas de tales observaciones demuestra que todos los objetos distantes se alejan de nosotros, y que existe una relación directa (lineal) entre la velocidad del objeto y su distancia de la Tierra: cuanto más distante esté el objeto, más rápidamente se aleja de nosotros. Este comportamiento lineal, deducido de lás mediciones del corrimiento al rojo, es la prueba principal de la expansión del Universo.

42-4 DEDUCCIÓN DEL EFECTO DOPPLER RELATIVISTA *(Opcional)*

En esta sección empleamos dos postulados de Einstein junto con las ecuaciones de transformación de Lorentz para deducir la ecuación del efecto Doppler relativista.

En el capítulo 21 ilustramos con un gran número de ejemplos el modo en que pueden emplearse las ecuaciones de transformación de Lorentz para realizar las mediciones llevadas a cabo por un observador inercial S con las de otro observador S' que se mueva con velocidad constante en relación a S. Aquí comparamos los resultados de los dos observadores al medir la misma longitud de onda. Como en el capítulo 21, suponemos que el movimiento relativo entre S y S' ocurre en la dirección común xx' con una velocidad u.

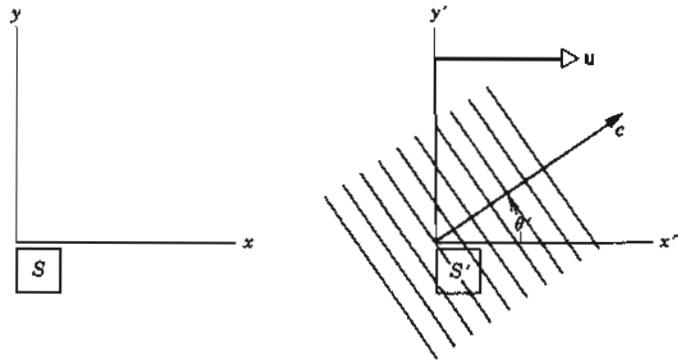


Figura 7 Una fuente en reposo en S' emite frentes de onda planos que viajan en una dirección formando un ángulo θ' con respecto al eje x'. El marco de S' (que incluye a la fuente) se mueve con una velocidad **u** relativa a S.

Consideremos el caso de un tren de ondas electromagnéticas planas que viaja con una velocidad c' en el marco S'. La fuente de las ondas planas está en reposo de acuerdo con S', quien mide un número de onda k' ($= 2\pi/\lambda'$) y una frecuencia angular ω'($= 2\pi\nu'$); por supuesto, ambas están relacionadas por $c' = \omega'/k'$. Si la onda viajó a lo largo de la dirección x', la variación en el espacio y el tiempo del campo eléctrico de la onda en S' estaría dado por una expresión senoidal de la forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_m \operatorname{sen}(k'x' - \omega't'),$$

y si la onda viajó a lo largo de la dirección y', el campo eléctrico sería de la forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_m \operatorname{sen}(k'y' - \omega't').$$

Se obtienen expresiones similares para $\mathbf{B}'$.

Consideremos ahora un caso más general, en el que la onda viaje paralela al plano $x'y'$ en una dirección que forma un ángulo de θ' con el eje x' (Fig. 7). En este caso puede demostrarse que la parte de los campos que varía senoidalmente está dada por

$$\operatorname{sen}(k'x' \cos\theta' + k'y' \operatorname{sen}\theta' - \omega't').$$

Nótese que esta expresión se reduce a las expresiones previas de una onda que viaja en la dirección x' ($\theta = 0$) o en la dirección y' ($\theta' = 90°$). Es más conveniente expresar la variación senoidal como

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x' \cos\theta' + y' \operatorname{sen}\theta'}{\lambda'} - \nu't'\right), \qquad (12)$$

donde $c' = \lambda'\nu'$.

Ahora deseamos observar esta onda desde el marco de referencia S del laboratorio, en relación al cual S' (que incluye la fuente de ondas) se mueve con velocidad u en la dirección x. ¿Cómo se observa la onda en el marco S en relación con la onda observada en S'?

Veamos primero lo que nos dicen los postulados de Einstein acerca de la forma de la onda en el marco S. El primer postulado exige que, si la onda satisface una ecuación de la onda (véase, por ejemplo, la ecuación 25 del capítulo 19) en S', entonces debe satisfacer una ecuación de la onda en S. Es decir, en el marco S, la variación de la onda debe ser de la forma

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta}{\lambda} - \nu t\right), \tag{13}$$

donde $c = \lambda\nu$. El segundo postulado exige que la velocidad de fase en S sea igual a la velocidad de fase en S'; esto es, $c = c'$.

Procedamos ahora a aplicar la trasformación de Lorentz. Obtenemos las ecuaciones de transformación de Lorentz para x', y' y t' de la tabla 2 del capítulo 21. Sustituimos esas expresiones en la ecuación 12, lo cual da

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{\gamma(x-ut)\cos\theta' + y\operatorname{sen}\theta'}{\lambda'} - \nu'\gamma(t - ux/c^2)\right),$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Después de ciertos pasos algebraicos, se obtiene

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{\gamma(\cos\theta' + u/c)}{\lambda'}x + \frac{\operatorname{sen}\theta'}{\lambda'}y - \gamma\nu'[1 + (u/c)\cos\theta']t\right). \tag{14}$$

Consistente con el primer postulado, la ecuación 14 tiene realmente la misma forma que la ecuación 13, si los coeficientes de x, y y t son iguales en las dos expresiones. Es decir

$$\frac{\cos\theta}{\lambda} = \frac{\gamma(\cos\theta' + u/c)}{\lambda'}, \tag{15}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\lambda} = \frac{\operatorname{sen}\theta'}{\lambda'}, \tag{16}$$

$$\nu = \gamma\nu'[1 + (u/c)\cos\theta']. \tag{17}$$

Puesto que estamos buscando un resultado de una medición en el marco S, eliminamos al ángulo θ', desconocido, de las ecuaciones 15 y 17 y despejamos ν, lo cual da

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - (u/c)\cos\theta}. \tag{18}$$

Hemos reemplazado a la frecuencia ν' con la frecuencia ν_0, para que no olvidemos que está medida en un marco de referencia en el que la fuente está en reposo. Por lo tanto, puede considerarse una frecuencia propia, análoga al tiempo propio. Volveremos a este punto más tarde.

La ecuación 18 es la expresión relativista del efecto Doppler, escrita para el caso en que la fuente y el observador se estén moviendo uno *hacia* el otro; en este caso, el observador en S mide una frecuencia *mayor*. Nótese que la ecuación 18 se reduce a la ecuación 5 si ponemos $\theta = 0$. Para el movimiento de la fuente *alejándose* del observador, sustituimos a u por $-u$, en cuyo caso el observador en S mediría una frecuencia *menor*.

Las ecuaciones 15 a 17 nos permiten también relacionar las direcciones de propagación θ y θ' vistas desde dos marcos de referencia diferentes. Este efecto relativista se llama *aberración*. (Véase el problema 22.) Es decir, a partir del marco de referencia de S en la figura 7, la onda de luz se propaga con una longitud de onda λ diferente (el corrimiento Doppler) y en una dirección θ diferente (aberración).

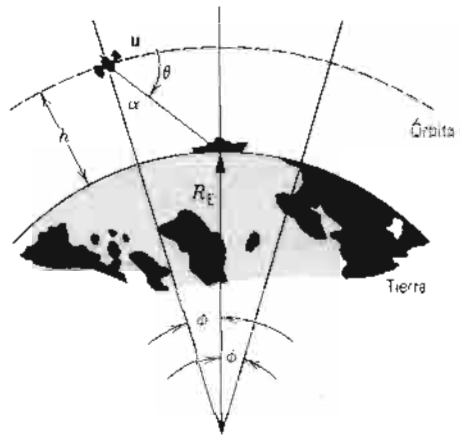


Figura 8 Problema muestra 3. Un satálite está en una órbita circular a una altitud h sobre la superficie de la Tierra. Un navío situado en la superficie observa las señales radiadas por el satélite.

Problema muestra 3 Un satélite de la Tierra gira en órbita de oeste a este a una altitud de $h = 153$ km en una órbita circular sobre el Ecuador (véase la Fig. 8). Un navío rastreador está ubicado en el Ecuador sobre el meridiano origen a 0° de longitud (justo afuera de la costa occidental de África). El satélite emite ondas de radio con una frecuencia de 122.450 MHz. ¿A qué frecuencia debería sintonizar su receptor el navío cuando el satélite está (*a*) directamente arriba; (*b*) a 10° de longitud Oeste del navío; y (*c*) a 10° de longitud Este del navío?

Solución (*a*) Hagamos que el marco S' se mueva con el satélite en el instante en que está directamente arriba; el marco S es el del navío directamente abajo. La frecuencia ν_0 observada en el marco S' (el satélite) es de 122.450 MHz. La velocidad relativa u entre los marcos está determinada por la velocidad orbital del satélite a una altitud h o en un radio $R = R_E + h$, donde R_E es el radio de la Tierra. La aceleración gravitatoria en un radio R es MG/R^2, la cual debe proporcionar la aceleración centrípeta u^2/R necesaria para una órbita circular. Entonces

$$\frac{MG}{R^2} = \frac{u^2}{R}$$

o sea

$$u = \sqrt{\frac{MG}{R}} = \sqrt{\frac{MG}{R_E + h}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5.98\times10^{24}\ \text{kg})(6.67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)}{6370\ \text{km} + 153\ \text{km}}}$$

$$= 7.82\times10^3\ \text{m/s} = 2.61\times10^{-5}c.$$

Cuando el satélite está directamente arriba, el corrimiento Doppler se obtiene de la ecuación 18 cuando $\theta = 90°$:

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Con $u/c = 2.61\times10^{-5}$, tenemos $u^2/c^2 = 6.8\times10^{-10}$. La cantidad bajo el radical difiere de 1 por sólo unas cuantas partes en 10^{10}, de modo que, con la precisión deseada,

$$\nu \approx \nu_0 = 122.450\ \text{MHz}.$$

(*b*) Cuando el satélite no está directamente arriba, es necesario calcular el ángulo θ entre la velocidad del satélite y la línea directa al navío rastreador (véase la Fig. 8). Podemos hallar el ángulo α ($= \pi/2 - \theta$) si se aplica la ley de los senos al triángulo formado por el satélite, el navío y el centro de la Tierra:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{R_E} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha - \phi)}{R_E + h}.$$

Resolviendo, hallamos que

$$\tan\alpha = \frac{R_E \operatorname{sen}\phi}{h + R_E(1 - \cos\phi)} = \frac{(6370\text{ km})(\operatorname{sen}10°)}{153\text{ km} + (6370\text{ km})(1 - \cos 10°)} = 4.428,$$

o sea

$$\alpha = \tan^{-1} 4.428 = 77.3°$$

y así

$$\theta = \pi/2 - \alpha = 90° - 77.3° = 12.7°.$$

Podemos calcular el corrimiento Doppler de la frecuencia usando la ecuación 18, despreciando el factor de Lorentz γ, el cual demostramos en la parte (*a*) que no difería de 1 significativamente. El corrimiento Doppler restante es

$$\nu \approx \frac{\nu_0}{1 - (u/c)\cos\theta} = \frac{122.450\text{ MHz}}{1 - (2.61 \times 10^{-5})(\cos 12.7°)} = 122.453\text{ MHz}.$$

(*c*) Una vez que el satélite haya pasado directamente por encima y se mueva hacia el Este de la estación rastreadora, su movimiento se aleja del observador, y podemos calcular el corrimiento Doppler al sustituir $u \to -u$. El resultado es

$$\nu \approx \frac{\nu_0}{1 + (u/c)\cos\theta} = \frac{122.450\text{ MHz}}{1 + (2.61 \times 10^{-5})(\cos 12.7°)} = 122.447\text{ MHz}.$$

Vemos que la frecuencia detectada en la Tierra varía entre 122.453 MHz (cuando el satélite se acerca) y 122.450 MHz (cuando el satélite está directamente encima) y 122.447 MHz (cuando el satélite se aleja). Una medición del corrimiento Doppler de la frecuencia es, pues, suficiente para ubicar al satélite. ■

42-5 CONSECUENCIAS DEL EFECTO DOPPLER RELATIVISTA *(Opcional)*

Ya hemos estudiado dos consecuencias muy importantes y comúnmente observadas del efecto Doppler relativista: el movimiento del corrimiento al rojo de objetos distantes en el Universo (véase el problema muestra 2) y el corrimiento de la frecuencia, que puede emplearse para rastrear satélites (véase el problema muestra 3). Ahora consideraremos dos consecuencias más: el efecto Doppler transversal y la paradoja de los gemelos.

El efecto Doppler transversal

Al considerar el caso cuando $\theta = 90°$, para el cual el movimiento relativo de la fuente y el observador está en ángulo recto con la dirección de la propagación de los frentes de onda, surge una diferencia importante entre las expresiones clásica y relativista del efecto Doppler. Al realizar el análisis clásico del capítulo 20, podemos determinar que no existe un corrimiento Doppler (clásico) en este caso. La expresión relativista (Ec. 18), por otra parte, predice que el observador mide una frecuencia de

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{19}$$

La ecuación 19 se conoce como el *efecto Doppler transversal* y es un efecto puramente relativista con ninguna contraparte clásica. Nótese que la frecuencia observada ν es siempre menor que la frecuencia ν_0 emitida por la fuente.

Si desarrollamos la ecuación 19 usando el teorema del binomio, obtenemos

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\right). \tag{20}$$

Al comparar la ecuación 20 con las ecuaciones 6 a 8, vemos que el corrimiento Doppler transversal no contiene un término proporcional a la primera potencia de u/c. Tanto el efecto Doppler relativista longitudinal como el efecto Doppler clásico contienen tal término. La ausencia de este término en la ecuación 20 es consistente con la falla de la teoría clásica en predecir dicho efecto.

De los experimentos llevados a cabo en 1963 por Walter Kundig se desprende una confirmación particularmente sorprendente del efecto Doppler transversal. En el centro del rotor de una centrífuga se colocó una fuente de rayos gamma. En el aro de la centrífuga se colocó una hoja metálica que absorbió los rayos gamma emitidos por la fuente. La absorción depende de la frecuencia de la radiación que llega a la hoja metálica, y con un detector situado en la parte posterior de la hoja metálica se midió la absorción mientras se variaba la velocidad del rotor. Cuando la centrífuga está girando, la hoja metálica en el aro está en movimiento transversal relativo a la fuente situada en el centro, y la radiación que llega a la hoja metálica está sujeta al corrimiento Doppler transversal. Aun cuando la velocidad tangencial del absorbente era de tan sólo unos cuantos cientos de metros por segundo, correspondiente a un valor de u^2/c^2 de unos 10^{-12}, este experimento sensible fue capaz de dar una prueba clara del corrimiento Doppler transversal. La figura 9 muestra un resumen de los resultados de Kundig, que concuerdan con la fórmula relativista y discrepan de la fórmula clásica, la cual no predice un efecto tranversal.

El corrimiento Doppler transversal puede interpretarse también como un efecto de dilatación del tiempo. La fuente de ondas en S' puede considerarse como un reloj, sonando con un tictac con una frecuencia determinada por el periodo $T_0 = 1/\nu_0$, un tiempo propio en S'. El observador en S mide un periodo mayor (dilatado) T y por lo tanto una frecuencia menor $\nu = 1/T$. La confirmación del efecto Doppler transversal puede, por consiguiente, considerarse otra confirmación relativista de la dilatación del tiempo.

Otra revisión de la paradoja de los gemelos

El efecto Doppler nos permite analizar nuevamente la paradoja de los gemelos, estudiada en la sección 21-7, en forma tal que revela sin ambigüedades cuál de los dos gemelos se está moviendo "realmente". Supongamos que Federico y Ethel tienen relojes idénticos que fueron previamente calibrados para marcar el tiempo de la Tierra. Los relojes pueden usarse, en sus respectivos marcos, para registrar el paso del tiempo en ese marco en unidades de años de la Tierra (pero, por supuesto, los años

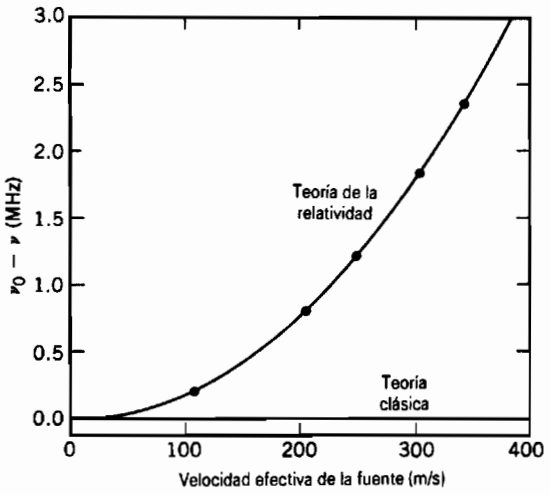


Figura 9 Los resultados del experimento de Kundig para el efecto Doppler transversal concuerdan con la teoría de la relatividad y no con la teoría clásica, la cual no predice ningún efecto.

parecen tener duraciones diferentes si los marcos tienen un movimiento relativo). Supongamos que Ethel se aleja de Federico en su nave espacial y la plataforma espacial de él a una velocidad relativa $u = 0.6c$ hacia una estrella cuya distancia de la plataforma se mide (por Federico) que es de 12 años luz. (Supóngase que la estrella está en reposo con respecto a Federico.) De acuerdo con Federico, el viaje de Ethel al exterior le toma un tiempo de (12 años luz)/0.6c = 20 años, y el viaje de retorno con la misma velocidad le toma un tiempo igual. Por lo tanto, Federico mide el transcurso de 40 años en su reloj, y durante el viaje de Ethel envejece 40 años. En el marco de referencia de Ethel, la distancia a la estrella se contrae por el factor de $\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.8$, y así la distancia contraída a la estrella es de (12 años luz)(0.8) = 9.6 años luz, de acuerdo con Ethel. Mirando viajar el escenario del espacio con una velocidad de 0.6c, Ethel llega a la estrella después del transcurso de (9.6 años luz)/0.6c = 16 años en su reloj, y ella mide un intervalo igual para el viaje de regreso. Por lo tanto, Ethel envejece solamente 32 años durante el viaje redondo.

Supongamos que Federico le envíe a Ethel una pulsación de luz cada año (en su cumpleaños, quizá). La frecuencia de la señal de luz transmitida por Federico es (como la mide Federico) $\nu_0 = 1$ año^{-1}, pero el corrimiento Doppler de la frecuencia, como la observa Ethel es, de acuerdo con la ecuación 5,

$$\nu = (1 \text{ y}^{-1})\sqrt{\frac{1 - 0.6}{1 + 0.6}} = 0.5 \text{ y}^{-1}$$

durante el viaje de ida. Entonces Ethel recibe, durante el viaje de ida que ella mide como de 16 años de duración, un total de (0.5 años^{-1})(16 años) = 8 señales. Durante su viaje de regreso, el corrimiento Doppler de la frecuencia se convierte en 2 años^{-1}, el cual obtenemos al sustituir u por $-u$ en el cálculo anterior. El número de señales que ella recibe durante el viaje de regreso es, entonces, (2 años^{-1})(16 años) = 32 señales. Entonces Ethel, que envejece solamente 32 años según su reloj durante el viaje de ida y vuelta, recibe un total de 8 + 32 = 40 señales de Federico, demostrando que Federico ha celebrado 40 cumpleaños durante el viaje que Ethel midió que era de 32 años de duración. Ethel, la viajera, es la más joven cuando se encuentran de nuevo.

En el problema 28 se le pide a usted llevar a cabo un análisis similar cuando es Ethel la que envía las señales. Debe hallar, claro está, el mismo resultado, estando de acuerdo ambos gemelos en que Ethel es la más joven. ■

PREGUNTAS

1. ¿Cómo puede medirse una curva sensible al ojo como la mostrada en la figura 1?
2. ¿Por qué son de color rojo las señales de peligro, si el ojo es más sensible al amarillo verdoso?
3. Comente esta definición de los límites del espectro de la luz visible dada por un médico: "Los límites del espectro visible ocurren cuando el ojo no está mejor adaptado que cualquier otro órgano del cuerpo para servir como detector".
4. En relación con la figura 1, (*a*) ¿Es posible pensar que la onda de luz de máxima sensibilidad puede variar si se cambia la intensidad de la luz? (*b*) ¿Cómo se vería la curva de la figura 1 por un grupo de personas ciegas al color (daltónicas) que no pudiesen, por ejemplo, distinguir el rojo del verde?
5. Supóngase que los ojos humanos fueran insensibles a la luz visible pero muy sensibles a la radiación infrarroja. ¿Qué cambios en el entorno se necesitarían (*a*) al caminar por un pasillo largo y (*b*) al conducir un automóvil? ¿Existiría el fenómeno del color? ¿Cómo tendrían que modificarse los semáforos?
6. ¿Qué característica de la luz corresponde al ruido en el sonido?
7. ¿Cómo podría Galileo haber puesto a prueba experimentalmente si los tiempos de reacción eran una fuente de error notable en su intento por medir la velocidad de la luz, descrito en la sección 42-2?
8. ¿Puede usted pensar en una observación "ordinaria" (esto es, sin aparatos experimentales) para demostrar que la velocidad de la luz no es infinita? Piense en los relámpagos, las posibles discrepancias entre el tiempo predicho y el tiempo observado para la salida del Sol, las comunicaciones de radio entre la Tierra y los astronautas en sus vehículos espaciales en órbita, y así sucesivamente.
9. Comente esta aseveración: Debido a la manera en que se definió el metro, ya no es posible medir la velocidad de la luz.
10. El hecho de que muchas estrellas parezcan blancas, ¿es una prueba de que las ondas electromagnéticas de todos los colores viajan en el vacío con la misma velocidad?

11. Se ha sugerido que la velocidad de la luz puede cambiar de valor ligeramente en el transcurso del tiempo. ¿Puede usted hallar alguna prueba de esto en la tabla 1?
12. En el vacío, ¿depende la velocidad de la luz de (*a*) la longitud de onda, (*b*) la frecuencia, (*c*) la intensidad, (*d*) la velocidad de la fuente o de (*e*) la velocidad del observador?
13. Los átomos son en gran parte espacio vacío. Sin embargo, la velocidad de la luz que pasa por un sólido transparente compuesto de dichos átomos es a menudo considerablemente menor a la velocidad de la luz en el espacio libre ¿Cómo puede ser esto?
14. ¿Es el efecto Doppler simplemente un efecto de dilatación del tiempo y nada más, o hay algo más?
15. Un miembro de un sistema binario de estrella doble emite luz visible. Muestre en una gráfica simple cómo el corrimiento Doppler de la frecuencia sobre la Tierra varía con el tiempo.
16. ¿Puede una galaxia estar tan distante, que su velocidad de alejamiento sea igual a *c*? De ser así, ¿cómo podemos ver la galaxia? Es decir ¿alguna vez nos llegará su luz?
17. Los rayos gamma son radiación electromagnética emitida por núcleos radiactivos. En el espacio libre, ¿viajan con la misma velocidad que la luz visible? ¿Depende su velocidad de la velocidad del núcleo que los emite?
18. Quizás la observación astronómica más sencilla que se puede hacer es ésta: cuando se pone el Sol, el cielo se oscurece. Esto es real y parece obvio pero se puede entablar una discusión afirmando que no debería ser así. Considérese: "Suponiendo un Universo infinito, poblado uniformemente de estrellas más o menos como el Sol, podemos decir que una línea recta proyectada desde el observador en cualquier dirección incidirá eventualmente en una estrella. Las *distancias R* para la mayoría de estas estrellas, serán realmente muy grandes de manera que las estrellas iluminarán al observador muy ligeramente, variando la iluminación en $1/R^2$. Por otra parte, el *número* de estrellas distantes ubicadas dentro de una esfera hueca cuyos radios sean R y $R + dR$ aumenta según R^2 (suponiendo que dR sea constante). ¿Puede usted demostrar esta última aseveración? Estos dos efectos parecen cancelarse precisamente. Por lo tanto, el cielo nocturno sería virtualmente infinitamente brillante, siendo el observador iluminado por una infinidad de soles". ¿Puede usted ver alguna falla en este argumento (por lo común llamado *paradoja de Olber*)? Piense en la velocidad finita de la luz, el enorme tamaño del Universo, el Universo en expansión y el corrimiento al rojo asociado, el tiempo de vida finito de las estrellas, y así sucesivamente. (Véase "The Dark Sky Paradox", por E. R. Harrison, *American Journal of Physics*, febrero de 1977, pág. 119, para una excelente revisión histórica y una explicación lúcida.)

PROBLEMAS

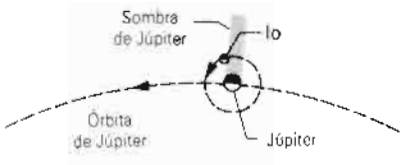
Sección 42-1 La luz visible

1. (*a*) ¿A qué longitudes de onda tiene el ojo de un observador normal la mitad de su sensibilidad máxima? (*b*) ¿Cuáles son la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de la luz para los que el ojo es más sensible?
2. ¿Cuántas vibraciones completas están contenidas en el tren de ondas de luz de 520 nm de longitud de onda emitido por un átomo en un tiempo de 430 ps?

Sección 42-2 La velocidad de la luz

3. (*a*) Supóngase que nos fuese posible establecer comunicación por radio con los habitantes hipotéticos de un planeta hipotético que gira en órbita a nuestra estrella más cercana, α Centauro, que está a 4.34 años luz de nosotros. ¿Cuánto tiempo tomaría recibir una respuesta a un mensaje? (*b*) Repita para la Gran Nebulosa de Andrómeda, uno de nuestros vecinos extragalácticos apenas distante 2.2×10^6 años luz. ¿Qué le conducen a concluir acerca de la naturaleza de nuestra posible comunicación con seres extragalácticos estas consideraciones?
4. (*a*) ¿Cuánto tiempo le toma a una señal de radio recorrer 150 km desde una antena transmisora hasta una receptora? (*b*) Vemos la Luna llena mediante la luz solar reflejada. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde que la luz salió del Sol hasta que entra en sus ojos? (*c*) ¿Cuál es el tiempo de viaje redondo de la luz entre la Tierra y un vehículo espacial que gira en torno a Saturno, distante 1.3×10^9 km? (*d*) Se cree que la nebulosa del Cangrejo, que está a unos 6500 años luz de distancia, es el resultado de la explosión de una supernova registrada por astrónomos chinos en 1054 D.C. ¿En qué año, aproximadamente, ocurrió realmente la explosión?
5. La incertidumbre de la distancia a la Luna, medida por el reflejo de luz láser a partir de reflectores situados en la Luna por los astronautas del *Apolo 11*, es de unos 2 cm. Esta incertidumbre está asociada con la medición del tiempo transcurrido; ¿qué incertidumbre se halla implicada en este tiempo?
6. En 1676, Ole Roemer dedujo que la velocidad de la luz es finita observando el tiempo del eclipse de uno de los satélites de Júpiter, Io (véase la Fig. 10). Basado en las propiedades orbitales de Io conocidas, se predijo que emergería de la sombra de Júpiter en un tiempo en particular, correspondiente a la posición x de la Tierra en su órbita. Cuando la Tierra estuvo realmente en la posición y, Io emergió de la sombra de Júpiter unos 10 minutos tarde. Roemer concluyó que la discrepancia se explicaba por el tiempo de más necesario para que la luz de Io viajara la distancia adicional del radio de la órbita de la Tierra. ¿Qué valor puede calcularse para la velocidad de la luz a

partir de esta observación? (Estas observaciones pueden interpretarse también en términos del efecto Doppler de la luz. Véase " The Doppler Interpretation of Roemer's Method", por V. M. Babovicić, D. M. Davidović, y B. A. Aničin, *American Journal of Physics*, junio de 1991, pág. 515.)



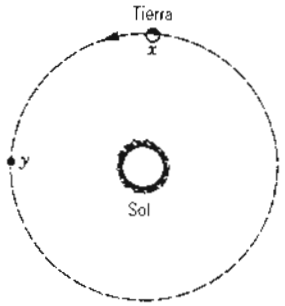


Figura 10 Problema 6.

7. Considérese una estrella situada en una línea que pase por el Sol, trazada perpendicularmente al plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. La distancia de la estrella es mucho mayor que el diámetro de la órbita de la Tierra. Demuestre que, debido a la velocidad finita de la luz, un telescopio mediante el cual se vea esa estrella debe estar inclinado a un ángulo $\alpha = 20.5''$ con respecto a la perpendicular, en la dirección en que se mueve la Tierra; véase la figura 11. Este fenómeno, llamado *aberración*, es notable y lo explicó por vez primera James Bradley en 1729. (Véase el problema 22 para una descripción de la aberración basada en la relatividad.)

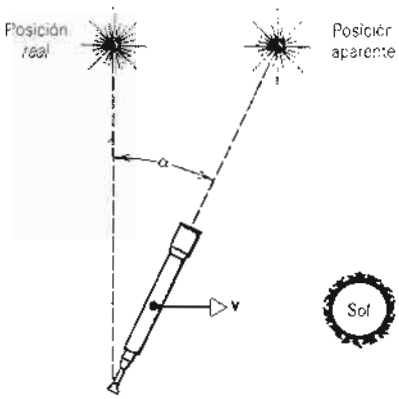


Figura 11 Problema 7.

Sección 42-3 El efecto Doppler en la luz

8. Demuestre que, para velocidades $u \ll c$, el corrimiento Doppler puede escribirse en la forma aproximada

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c},$$

donde $\Delta\lambda$ es el cambio en la longitud de onda.

9. Demuestre que, en la línea de 21.1 cm tan usada por los radioastrónomos, un corrimiento Doppler de la frecuencia, en kHz, puede convertirse en una velocidad radial en km/s al multiplicar por 0.211, siempre y cuando $u \ll c$.

10. Un vehículo espacial, que se aleja de la Tierra con una velocidad de $0.892c$, se reporta transmitiendo con una frecuencia (medida en el marco del vehículo espacial) de 100 MHz. ¿A qué frecuencia deben sintonizarse los receptores en la Tierra para recibir estas señales?

11. Un vehículo cohete se está alejando de la Tierra a una velocidad de $0.20c$. Los pasajeros del vehículo ven aparecer una luz azul en el cohete. ¿Qué color parecería ver un observador en la Tierra? (Véase la Fig. 1.)

12. El "corrimiento al rojo" de radiación de una galaxia distante consiste en luz H_γ, que se sabe tiene una longitud de onda de 434 nm cuando se observa en el laboratorio, y que muestra tener una longitud de onda de 462 nm. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la galaxia en la visual relativa a la Tierra? (*b*) ¿Se está acercando o alejando?

13. En el espectro del cuásar 3C9, aparecen algunas de las familiares líneas de hidrógeno pero tienen un corrimiento muy grande hacia el rojo que se puede ver que sus longitudes de onda son tres veces más largas que las observadas en la luz de los átomos de hidrógeno en reposo en el laboratorio. (*a*) Demuestre que la ecuación Doppler clásica, que supone que la luz se comporta como el sonido, da una velocidad de alejamiento mayor de c. (*b*) Suponiendo que el movimiento relativo de 3C9 con respecto a la Tierra sea por completo de alejamiento, halle la velocidad de alejamiento predicha por la ecuación Doppler relativista.

14. ¿A qué velocidad tendría usted que ir hacia una luz roja con objeto de que ésta aparezca verde? Considere 620 nm como la longitud de onda de la luz roja y 540 nm como la longitud de onda de la luz verde.

15. Calcule los corrimientos Doppler de la longitud de onda esperada para la luz de 553 nm de longitud de onda emitida desde el borde del disco solar en el Ecuador debido a la rotación del Sol. Consulte el apéndice C para los datos necesarios.

16. Las moléculas de hidrógeno a 700 K emiten luz de una frecuencia de 457 THz. (*a*) Determine el cambio en la frecuencia de la luz observada debido al movimiento de una molécula que se mueva hacia un observador con una velocidad raíz media cuadrática. (*b*) Halle el corrimiento de la frecuencia si esta luz se originara en los átomos de hidrógeno en lugar de originarse en las moléculas.

17. En el experimento de Ives y Stilwell la velocidad u de los átomos de hidrógeno en una corrida en particular fue de 8.65×10^5 m/s. Calcule $\Delta\nu/\nu$, suponiendo que (*a*) la ecuación 6 sea correcta y (*b*) que la ecuación 8 sea correcta; compare sus resultados con los que aparecen en la tabla 3 para esta velocidad. Retenga sólo los tres primeros términos en las ecuaciones 6 y 8.

18. Desde un aeroplano distante que se aproxima a la fuente de las ondas, se reflejan microondas, que viajan a la velocidad de la luz. Se encuentra que, cuando las ondas reflejadas chocan contra la ondas que irradian desde la fuente, la frecuencia del choque es de 990 Hz. Si las microondas tienen una longitud de onda de 12.0 cm, ¿cuál es la velocidad de llegada del aeroplano? (*Sugerencia*: Véase el problema 65 del capítulo 20.)

19. En la Tierra, A envía señales con una linterna cada 6 min. B está en una estación espacial que está estacionaria con respecto a la Tierra. C está en un vehículo espacial que viaja de A a B con una velocidad constante de $0.60c$ relativa a A; véase la figura 12. (*a*) ¿A qué intervalo recibe B señales de A? (*b*) ¿A qué intervalos recibe C señales de A? (*c*) Si C enciende su linterna cada vez que se recibe un destello de A, ¿a qué intervalos recibe B destellos de C?

20. Un transmisor de radar T está fijo a un marco de referencia S' que se mueve hacia la derecha con una velocidad u con relación al marco de referencia S (véase la Fig. 13). Un reloj mecánico en el marco S', que tiene un periodo τ_0 (medido en S'), causa que el transmisor T emita pulsaciones de radar, las cuales viajan a la velocidad de la luz y son recibidas por R, un receptor fijo en el marco S. (*a*) ¿Cuál sería el periodo τ del reloj relativo al observador A, quien está fijo en el marco S? Demuestre que el receptor R observaría el intervalo de tiempo entre las pulsaciones que llegan de T, no como τ o como τ_0, sino como

$$\tau_R = \tau_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}.$$

(*c*) Explique por qué el observador en R mide un periodo diferente del transmisor que el que mide el observador A, quien está en el mismo marco de referencia. (*Sugerencia*: Un reloj y un pulso de radar no son lo mismo.)

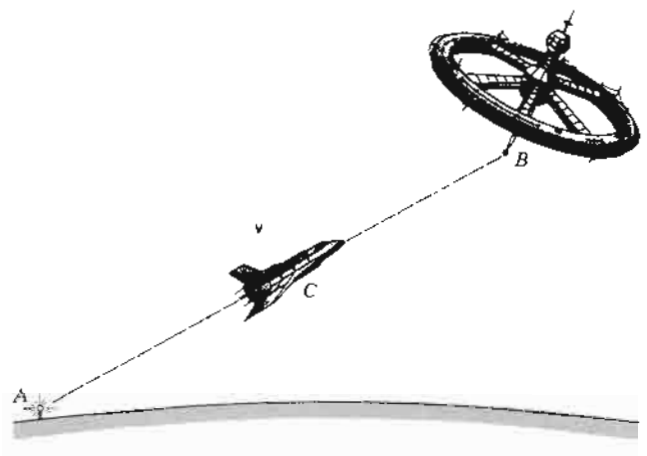


Figura 12 Problema 19.

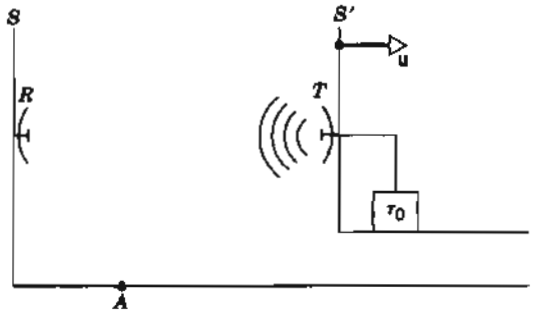


Figura 13 Problema 20.

Sección 42-4 Deducción del efecto Doppler relativista

21. Un satélite de la Tierra, transmitiendo con una frecuencia de 40 MHz, pasa directamente sobre una estación receptora de radio a una altitud de 400 km y con una velocidad de 2.8×10^4 km/h. Grafique el cambio en la frecuencia, atribuible al efecto Doppler, en función del tiempo, contando $t = 0$ como el instante en que el satélite está arriba de la estación. (*Sugerencia*: En la fórmula Doppler, la velocidad no es la velocidad real del satélite sino su componente en la dirección de la estación. Desprecie la curvatura de la Tierra y de la órbita del satélite.)

22. (*a*) Combinando las ecuaciones 15 y 16, demuestre que la relación entre θ y θ' puede escribirse

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta'\sqrt{1-u^2/c^2}}{\cos\theta' + u/c}.$$

Este efecto relativista se llama *aberración*. Da el ángulo de emisión de acuerdo con S cuando el ángulo de emisión es θ' de acuerdo con S' (véase la Fig. 7). ¿Se reduce esta ecuación al resultado esperado cuando $u = 0$? (*b*) Sin hacer ningún cálculo más, invierta esta expresión para que dé el ángulo θ' observado por S' cuando el ángulo de emisión θ es observado por S.

23. Una fuente de luz, en reposo en el marco S', emite radiación uniformemente en todas direcciones. (*a*) Demuestre que la fracción de luz emitida hacia un cono de semiángulo θ' está dada por

$$f = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta').$$

Calcule f para $\theta' = 30°$. (*b*) La fuente se ve desde el marco S, siendo $0.80c$ la velocidad relativa de los dos marcos. Determine el valor de θ (en el marco S) al que corresponde este valor de f, usando la fórmula de la aberración; véase el problema 22. Repítase el cálculo para $u/c = 0.90$ y para $u/c = 0.990$. ¿Puede usted ver por qué a menudo se le conoce a este fenómeno de aberración como el "efecto de fanal"?

24. Un núcleo radiactivo se mueve con una velocidad uniforme de $0.050c$ en el marco del laboratorio. Se desintegra emitiendo un rayo gamma. Encuentre la dirección de la

propagación del rayo gamma en el marco del laboratorio. Suponga que el rayo gamma se emite (*a*) paralelo a la dirección del movimiento del núcleo, visto en el marco en que el núcleo está en reposo, (*b*) a 45° de esta dirección, y (*c*) a 90° de esta dirección.

Sección 42-5 Consecuencias del efecto Doppler relativista

25. Dé el corrimiento Doppler de la longitud de onda $\lambda - \lambda_0$, de haber alguno, para la línea de sodio D_2 (589.0 nm) emitida desde una fuente que se mueve en un círculo con velocidad constante de $0.122c$ medida por un observador fijo en el centro del círculo.

26. Una fuente de luz se mueve en ángulo recto con la visual de un detector. La velocidad de la fuente es de $0.662c$. ¿Con qué velocidad debe moverse una fuente idéntica a 75.0° de la visual si los corrimientos Doppler como los registra el detector para las dos fuentes son iguales?

27. Una fuente de ondas de radio, con frecuencia en reposo de 188 MHz, se mueve con una velocidad de $0.717c$ en dirección transversal a la visual de un detector. ¿A qué ángulo con la visual debe moverse una segunda fuente, con frecuencia en reposo de 162 MHz, y también a $0.717c$ si las frecuencias recibidas de las dos fuentes por el detector deben ser iguales?

28. Considere una vez más la paradoja de los gemelos. Suponga ahora que Ethel envíe una señal de cumpleaños a Federico una vez cada año (de acuerdo con su reloj). (*a*) ¿A qué frecuencia recibe Federico las señales durante el viaje de Ethel al exterior? (*b*) ¿Cuántas señales recibe Federico durante el viaje de Ethel al exterior? (*Sugerencia*: De acuerdo con el reloj de Federico, ¿cuándo llega la señal que muestra la llegada de Ethel a la estrella distante)? (*c*) ¿A qué frecuencia recibe Federico las señales durante el viaje de regreso de Ethel? (*d*) ¿Cuál es el número total de señales de cumpleaños enviadas por Ethel que recibe Federico durante el viaje de ella?

CAPÍTULO 43

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN EN SUPERFICIES PLANAS

La óptica *se ocupa del estudio de las propiedades de la luz y su propagación a través de diversos materiales. Entre las aplicaciones tradicionales de la óptica se encuentran las lentes de corrección para la visión y la formación de la imagen en telescopios y microscopios. En las aplicaciones modernas se incluyen el almacenamiento y recuperación de información, como en los discos compactos (CD) o los detectores del código de barras en los supermercados, y la transmisión de señales mediante cables de fibra óptica, los cuales pueden llevar una densidad de información mayor que los alambres de cobre, y son de peso más ligero y menos susceptibles de interferencia electrónica.*

En el presente capítulo y en el siguiente a éste consideraremos los casos en que la luz viaja en línea recta y encuentra objetos cuyo tamaño es mucho mayor que la longitud de onda de la luz. Éste es el reino de la óptica geométrica, *que incluye el estudio de las propiedades de los espejos y de las lentes. El paso de la luz por rendijas muy angostas o en torno a barreras muy angostas, cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda de la luz, forma parte de la* óptica física (*u* óptica ondulatoria), *la cual comenzamos a estudiar en el capítulo 45.*

43-1 ÓPTICA GEOMÉTRICA Y ÓPTICA ONDULATORIA

En nuestra descripción del movimiento ondulatorio en el capítulo 19, usamos el *rayo* como una manera conveniente de representar el movimiento de un tren de ondas; el rayo es perpendicular a los frentes de ondas e indica la dirección de viaje de la onda. Un rayo es una construcción geométrica conveniente que, como lo veremos en el capítulo que sigue a éste, suele ser útil en el estudio del comportamiento óptico de un sistema como una lente. Sin embargo, el rayo no constituye una entidad física, y no es posible aislarlo.

Consideremos un tren de ondas planas de luz de longitud de onda λ incidente sobre una barrera en la que existe una rendija de anchura a. Como lo sugiere la figura 1*a*, si $\lambda \ll a$, las ondas pasan por la rendija, y la barrera forma una "sombra" bien definida. Conforme la rendija se hace más pequeña hallamos que la luz se esparce en lo que antes era la sombra de la barrera, como se muestra en la figura 1*b*. Este fenómeno, que se conoce como *difracción*, ocurre cuando el tamaño de una rendija (o de un obstáculo) en el camino o trayectoria de la onda es comparable con la longitud de onda. Consideraremos la difracción en detalle en el capítulo 46. Nótese (Fig. 1*c*) que la difracción se vuelve más pronunciada cuando la anchura de la rendija se hace menor; así, un intento para aislar un solo rayo sería vano.

La difracción no es propiedad exclusiva de las ondas de luz. De hecho, los fenómenos que estudiamos en la luz (reflexión, refracción, interferencia, difracción y polarización) pueden presentarse en otras clases de movimiento ondulatorio, incluso en las ondas mecánicas. A modo de ejemplo, la figura 2 muestra que la difracción puede ocurrir en las ondas de agua. En otro ejemplo, cuando usted grita a través del vano de una puerta abierta, las ondas de sonido se difractan (siendo la longitud de onda comparable al tamaño del vano de la puerta), y una amiga podrá oírle aunque no pueda verle (por tener las ondas de luz una longitud de onda demasiado pequeña para que sea notablemente difractada al pasar por la abertura).

Si a es una medida de la mínima dimensión transversal de una rendija o de un obstáculo, entonces los efectos de la difracción pueden dejar de considerarse cuando la razón de a/λ es lo suficientemente grande. En este caso, la luz viaja siguiendo trayectorias en línea recta, que podemos representar como rayos. Ésta es la condición de la *óptica*

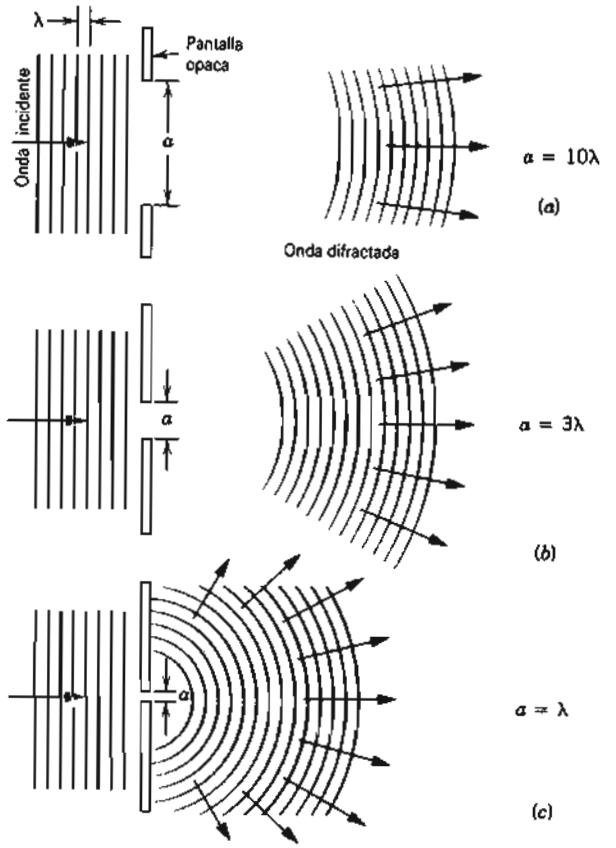


Figura 1 El intento por aislar un rayo mediante la reducción de la anchura de la rendija no sirve a causa de la difracción, la cual es más pronunciada para una longitud de onda λ fija al reducirse la anchura a de la rendija.

geométrica, conocida también como la *óptica de rayos*. Podemos usar con seguridad las ecuaciones de la óptica geométrica cuando un haz de luz se encuentra con obstáculos como espejos, lentes o prismas cuyo tamaño lateral sea mucho mayor que la longitud de onda de la luz.

Si la condición de la óptica geométrica no se cumple, no podemos describir el comportamiento de la luz mediante rayos, sino que debemos considerar específicamente su naturaleza ondulatoria. En este caso, nos encontramos en el reino de la *óptica física* u *óptica ondulatoria*, que comprende la óptica geométrica como un caso límite, en forma semejante a como la mecánica relativista comprende a la mecánica clásica como un caso límite. En el capítulo 45 iniciaremos nuestro estudio de la óptica ondulatoria.

43-2 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

Cuando usted mira hacia una ventana de vidrio, advierte que la luz le llega a usted desde el otro lado del vidrio, y un amigo que esté parado en el otro lado de la ventana puede verle a usted. Sin embargo, si usted observa con cuidado es posible que vea también su propio reflejo en el vidrio. Si usted quisiera dirigir la luz de una linterna hacia el vidrio, su amigo vería el haz de luz, pero usted vería también que parte de la luz se refleja de regreso hacia usted.

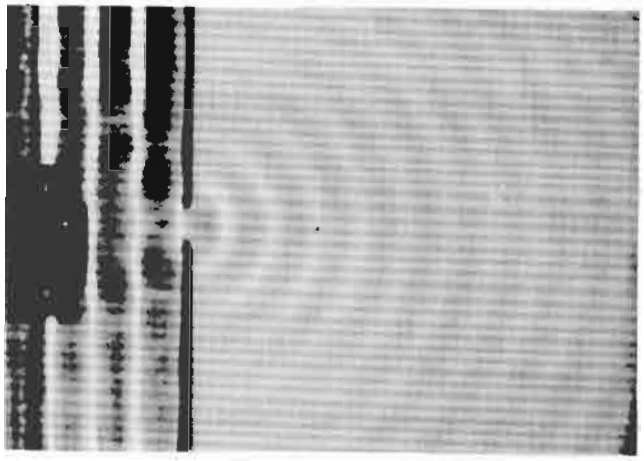


Figura 2 Difracción de las ondas de agua en una rendija en una cuba de ondas. Nótese que el ancho de la rendija es casi del mismo tamaño que la longitud de onda. Compárese con la figura 1*c*.

En general, estos dos efectos pueden observarse siempre que un haz de luz viaja de un medio (por ejemplo, el aire) a otro (el vidrio). Parte del haz debe reflejarse de regreso al primer medio, y parte debe transmitirse al segundo medio. La figura 3 ilustra estos dos efectos. Observe que el haz de luz debe desviarse o *refractarse* al entrar al segundo medio.*

La óptica geométrica estudia de la reflexión y la refracción. En esta sección resumimos las leyes de la reflexión y de la refracción; más adelante, en este mismo capítulo, deduciremos estas leyes y daremos ejemplos de sus aplicaciones cuando la frontera entre los dos medios es un plano. Los casos en que la frontera es curva, como en los espejos esféricos o en las lentes esféricas, se estudiarán en el capítulo que sigue a éste.

En la figura 3, los haces se representan mediante rayos. Los rayos, que están trazados como líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda (planos), indican la dirección del movimiento de los frentes de onda. Observe los tres rayos que se muestran en la figura 3: el rayo original o *incidente*, el rayo *reflejado* y el rayo *refractado*, el cual cambia de dirección al entrar en el segundo medio.

* *Refractado* viene del latín *fractum*, que significa "roto"; la misma raíz dio origen a la palabra "fractura". Si usted sumerge la parte de un lápiz en el agua, de modo que quede inclinado, el lápiz parece estar "roto".

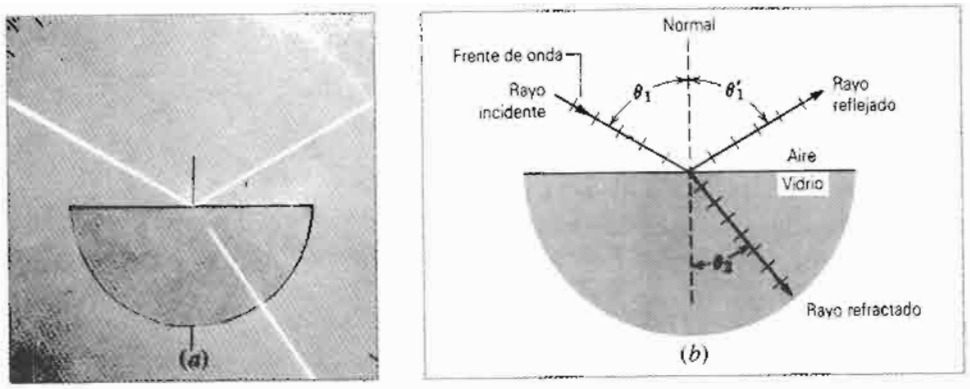


Figura 3 (*a*) Fotografía que muestra la reflexión y la refracción de un haz de luz incidente en una superficie de vidrio plana. (*b*) Una representación usando rayos. Se marcan los ángulos de incidencia θ_1, de reflexión θ_1' y de refracción θ_2. Nótese que los ángulos se miden entre la normal a la superficie y el rayo apropiado.

En el punto en que el rayo incidente choca con la superficie, dibujamos una línea normal (perpendicular) a la superficie, y definimos tres ángulos medidos con respecto a la normal: el *ángulo de incidencia* θ_1, el *ángulo de reflexión* θ_1' y el *ángulo de refracción* θ_2. (Los subíndices de los ángulos indican el medio por el cual viaja el rayo. En nuestro caso, el rayo incide desde el medio 1, el aire, y entra al medio 2, el vidrio.) El plano formado por el rayo incidente y la normal se llama *plano de incidencia*, y es el plano de la página en la figura 3.

Del experimento, deducimos las siguientes leyes que describen la reflexión y la refracción:

Ley de la reflexión El rayo reflejado se encuentra en el plano de incidencia, y

$$\theta_1' = \theta_1. \tag{1}$$

Ley de la refracción El rayo refractado se encuentra en el plano de incidencia, y

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2. \tag{2}$$

La ecuación 2 es lo que llamamos la ley de Snell. Aquí n_1 y n_2 son constantes adimensionales llamadas *índice de refracción* del medio 1 y del medio 2. El índice de refracción n de un medio es la razón entre la velocidad de la luz c en el vacío y la velocidad de la luz v en el medio:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{3}$$

En la sección 42-2 hemos visto la velocidad de la luz en varios materiales. Es justo decir que la refracción ocurre gracias a que la velocidad de la luz cambia de un medio al otro. Esta idea la desarrollaremos en detalle en la sección 43-5.

La tabla 1 muestra algunos ejemplos del índice de refracción de varios materiales. Nótese que, para la mayoría de los propósitos, el aire puede considerarse como equivalente al vacío en su refracción de la luz. El índice de refracción de un material varía generalmente con la longitud de onda de la luz (véase la figura 4). La refracción puede emplearse entonces para analizar un haz de luz en sus longitudes de onda constituyentes, como ocurre en un arco iris.

Reflexión y refracción de ondas magnéticas *(Opcional)*

Las leyes de la reflexión y de la refracción se cumplen en todas las regiones del espectro electromagnético, no sólo en la de la luz. De hecho, las ecuaciones 1 y 2 pueden obtenerse de las ecuaciones de Maxwell, lo cual las hace aplicables en general a las ondas electromagnéticas. La prueba experimental de esta aplicabilidad general incluye la reflexión de las microondas o de las ondas de radio desde la ionosfera y la refracción de los rayos X por cristales.

Normalmente pensamos que las superficies lisas o muy pulidas son "buenos" reflectores, pero otras superficies pueden reflejar también, por ejemplo, una hoja de papel. La reflexión mediante el papel (que se llama *reflexión difusa*) dispersa la luz más o menos en todas las direcciones. El hecho de que podamos ver los objetos no luminosos que nos rodean se debe en gran

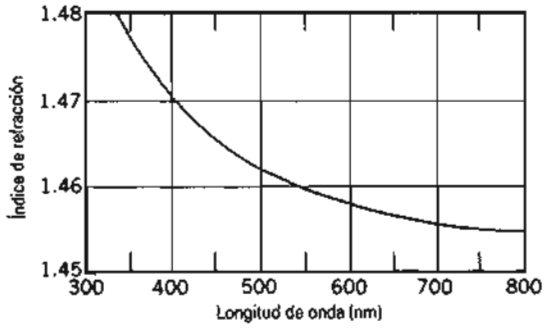


Figura 4 Indice de refracción del cuarzo fundido en función de la longitud de onda.

TABLA 1 ALGUNOS ÍNDICES DE REFRACCIÓN[a]

Medio	*Índice*	*Medio*	*Índice*
Vacío (exactamente)	1.00000	Vidrio refractario típico	1.52
Aire (1 atm y 20°C)	1.00029	Cloruro de sodio	1.54
Agua (20°C)	1.33	Poliestireno	1.55
Acetona	1.36	Bisulfuro de carbono	1.63
Alcohol etílico	1.36	Cristal de roca denso	1.65
Solución de azúcar (30%)	1.38	Zafiro	1.77
Cuarzo fundido	1.46	El cristal de roca más denso	1.89
Solución de azúcar (80%)	1.49	Diamante	2.42

[a] Para una longitud de onda de 589 nm (luz amarilla del sodio).

parte a las reflexiones difusas. La diferencia entre la reflexión difusa y la especular (como de espejo) depende de la rugosidad de la superficie: se forma un haz reflejado sólo si las dimensiones típicas de las irregularidades de la superficie reflectora son sustancialmente menores que la longitud de onda de la luz incidente. Así, la clasificación de las propiedades reflejantes de una superficie dependen de la longitud de onda de la radiación que choca con la superficie. Por ejemplo, el fondo de un recipiente de hierro fundido puede ser un buen reflector de las microondas de 0.5 cm de longitud de onda pero no es un buen reflector de la luz visible.

Las ecuaciones de Maxwell nos permiten calcular cómo se divide la energía incidente entre los haces reflejado y refractado. La figura 5 muestra la predicción teórica de (*a*) un haz de luz en el aire que incide sobre una interfaz o entrecara vidrio-aire, y (*b*) un haz de luz en el vidrio que incide sobre una interfaz vidrio-aire. La figura 5*a* muestra que para ángulos de incidencia hasta de unos 60°, se refleja menos del 10% de la energía lumínica. Para una incidencia rasante (es decir, para ángulos de incidencia cercanos a 90°), la superficie se comporta como un reflector excelente. Otro ejemplo de este efecto es el alto poder reflejante de una carretera mojada cuando la luz de los faros de un automóvil chocan con la carretera casi con incidencia rasante.

La figura 5*b* muestra claramente que, para determinado ángulo crítico (41.8° en este caso), *toda* la luz se refleja. Éste fenómeno, llamado *reflexión interna total*, se trata en la sección 43-6. ■

Problema muestra 1 La figura 6 muestra un rayo incidente *i* que choca contra un espejo plano *MM'* a un ángulo de incidencia θ. El espejo *M'M"* es perpendicular a *MM'*. Trace este rayo a través de sus reflexiones subsiguientes.

Solución El rayo reflejado *r* forma un ángulo θ con la normal en *b* y cae como un rayo incidente sobre el espejo *M'M"*. Su ángulo de incidencia θ' en este espejo es de $\pi/2 - \theta$. Un segundo rayo reflejado *r'* forma un ángulo θ' con la normal trazada en *b'*. Los rayos *i* y *r'* son antiparalelos para cualquier valor de θ. Para ver esto, obsérvese que

$$\phi = \pi - 2\theta' = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\theta.$$

Dos líneas son paralelas si sus ángulos interiores opuestos con respecto a una línea de intersección (ϕ y 2θ) son iguales.

Repita el problema cuando el ángulo entre los espejos es de 120° más bien que de 90°.

El análogo tridimensional de la figura 6 es el *reflector diedro*, que consta de tres espejos planos perpendiculares unidos como las secciones positivas del plano de coordenadas de un sistema *xyz*. Un reflector diedro tiene la propiedad por la que, *cualquiera* que sea la dirección de incidencia, un rayo incidente se refleja en la dirección opuesta. Los reflectores diedros en las carreteras usan este principio, con el fin de de que la luz de los faros de los automóviles que se aproximan se reflejen de regreso

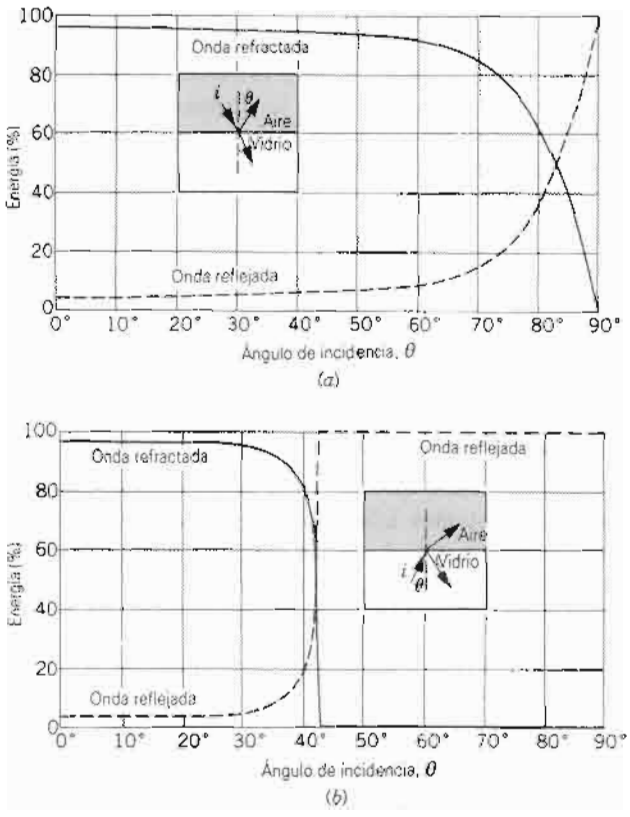


Figura 5 (*a*) El porcentaje de energía reflejada y refractada cuando una onda en el aire incide sobre vidrio ($n = 1.50$). (*b*) Lo mismo para una onda en el vidrio que incide sobre el aire, mostrando una reflexión interna total.

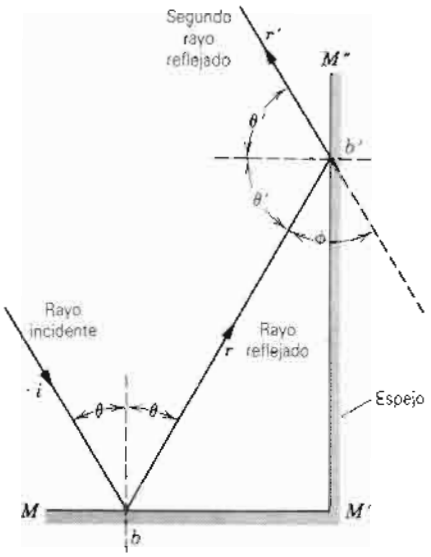


Figura 6 Problema muestra 1. Reflector diedro bidimensional.

en el automóvil, cualquiera que sea la dirección de donde el automóvil se aproxima o el ángulo de los faros sobre la carretera. Los astronautas del Apolo situaron reflectores diedros en la Luna; la toma del tiempo de reflexión de un haz de láser que parte de la Tierra permite la determinación precisa de la distancia Tierra-Luna.

Problema muestra 2 Un haz de luz en el aire incide sobre la superficie plana de un bloque de cuarzo y forma un ángulo de 30° con la normal. El haz contiene dos longitudes de onda, una de 400 y otra de 500 nm. Los índices de refracción del cuarzo para estas longitudes de onda son de 1.4702 y 1.4624, respectivamente. ¿Cuál es el ángulo entre los dos haces refractados en el cuarzo?

Solución De la ecuación 2 tenemos, para el haz de 400 nm (considerando que $n_1 = 1$ para el aire)

$$\operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2,$$

o sea

$$\operatorname{sen} 30° = (1.4702)\operatorname{sen}\theta_2,$$

lo cual conduce a

$$\theta_2 = 19.88°.$$

Para el haz de 500 nm tenemos

$$\operatorname{sen} 30° = (1.4624)\operatorname{sen}\theta_2,$$

o sea

$$\theta_2 = 19.99°.$$

El ángulo $\Delta\theta_2$ entre los haces es de 0.11°, con la componente de la longitud de onda menor desviada hacia el ángulo mayor, esto es, que tiene el ángulo de refracción más pequeño. La diferencia en el ángulo disminuye cuando el ángulo de incidencia disminuye, resultando ser de 0.018° cuando $\theta_1 = 5°$. En los instrumentos ópticos que usan lentes, la variación en el ángulo de refracción con la longitud de onda conduce a una distorsión llamada *aberración cromática*. El uso de ángulos de incidencia pequeños reduce la distorsión por aberración cromática.

Problema muestra 3 Un haz de luz en el aire incide sobre una cara de un prisma de vidrio como el que se muestra en la figura 7. El ángulo θ se escogió de tal modo que el rayo emergente también forme un ángulo θ con la normal en la otra cara. Obtenga una expresión para el índice de refracción del material del prisma, considerando que $n = 1$ para el aire.

Solución Obsérvese que $\angle bad + \alpha = \pi/2$ y que $\angle bad + \phi/2 = \pi/2$, donde ϕ es el ángulo del prisma. Por lo tanto,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\phi. \tag{4}$$

El ángulo de desviación ψ es la suma de los dos ángulos interiores opuestos en el triángulo *aed*, o sea

$$\psi = 2(\theta - \alpha).$$

Al sustituir α por $\frac{1}{2}\phi$ y al despejar θ nos da

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\psi + \phi). \tag{5}$$

En el punto a, θ es el ángulo de incidencia y α el ángulo de refracción. La ley de la refracción (véase la ecuación 2) es

$$\operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\alpha,$$

donde n es el índice de refracción del vidrio.

Según las ecuaciones 4 y 5 esto nos da

$$\operatorname{sen}\frac{\psi + \phi}{2} = n \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}$$

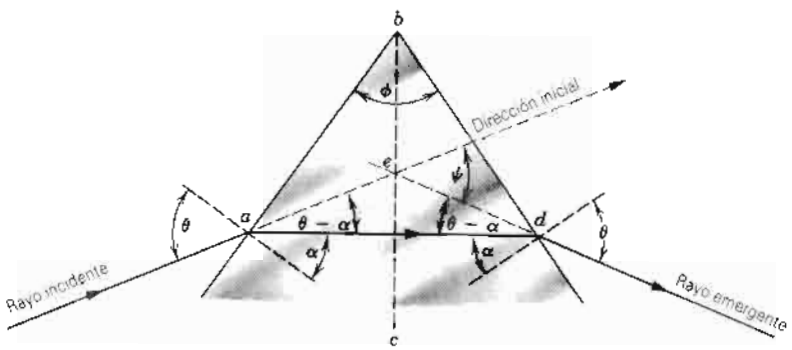


Figura 7 Problema muestra 3.

o sea

$$n = \frac{\operatorname{sen}(\psi + \phi)/2}{\operatorname{sen}(\phi/2)}, \qquad (6)$$

que es la relación deseada. Esta ecuación es válida únicamente cuando θ se elige de modo que el rayo de luz pase simétricamente por el prisma. En este caso, ψ se llama *ángulo de desviación mínima*; ya sea que θ aumente o disminuya, el resultado es un ángulo de desviación mayor.

43-3 DEDUCCIÓN DE LA LEY DE LA REFLEXIÓN

La ley de la reflexión puede deducirse de varias maneras diferentes. Aquí veremos dos de ellas.

El principio de Huygens

El físico holandés Christiaan Huygens* postuló una teoría sencilla sobre la luz en 1678. Esta teoría supone que la luz es una onda, pero no explica nada sobre la naturaleza de la onda. (En particular, puesto que la teoría de Maxwell del electromagnetismo no aparecería hasta casi dos siglos después, la teoría de Huygens no proporciona una clave del carácter electromagnético de la luz.) Huygens no sabía si la luz era una onda transversal o una onda longitudinal; tampoco conocía las longitudes de onda de la luz visible; tenía escaso conocimiento de la velocidad de la luz. A pesar de todo, su teoría fue una guía útil para experimentar durante muchos años y todavía en la actualidad es útil para propósitos pedagógicos y algunos otros propósitos prácticos. No debemos esperar que ésta dé la misma riqueza de información detallada que la que contiene la teoría electromagnética de Maxwell, más completa.

La teoría de Huygens se basa sobre una construcción geométrica que nos permite decir dónde estará un frente de onda dado en algún momento en el futuro si conocemos su posición actual. El principio de Huygens puede enunciarse como sigue:

> *Todos los puntos en un frente de onda pueden considerarse como fuentes puntuales en la producción de pequeñas ondas esféricas secundarias. Después de un tiempo t la nueva posición de un frente de onda es la superficie tangente a estas pequeñas ondas secundarias.*

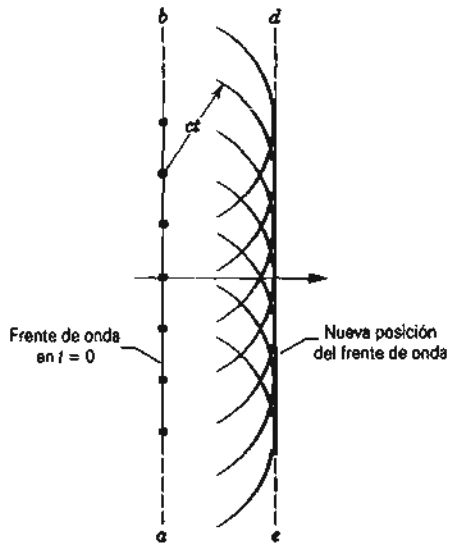


Figura 8 La propagación de una onda plana en el vacío descrita por la construcción de Huygens. Nótese que el rayo (la flecha horizontal) que representa a la onda es perpendicular a los frentes de onda.

Consideremos un ejemplo trivial. Dado un frente de onda (*ab* en la Fig. 8) en una onda plana en el vacío, ¿en dónde se encontrará el frente de onda un tiempo *t* después? Según el principio de Huygens, hagamos que varios puntos en este plano (los puntos en la figura 8) sirvan como centros de las pequeñas ondas secundarias esféricas. En un tiempo *t* el radio de estas ondas esféricas es *ct*, donde *c* es la velocidad de la luz en el vacío. Representamos al plano tangente a estas esferas en el tiempo *t* por *de*. Como cabe esperar, es paralelo al plano *ab* y a una distancia perpendicular *ct* de él. Así, los frentes de onda planos se propagan como planos y a una velocidad *c*. Nótese que el método de Huygens implica una construcción tridimensional y que la figura 8 es la intersección de esta construcción con el plano de la página.

Cabría esperar que, contrario a lo que se observa, se radiaran también ondas desde los puntos de la figura 8 en sentido contrario. Este resultado se evita al suponer que la intensidad de las pequeñas ondas esféricas no es uniforme en todas direcciones sino que varía continuamente desde un máximo en la dirección de avance de la onda hasta un mínimo de cero en la dirección contraria. Esto se sugiere en la figura 8 mediante el sombreado de los arcos circulares. El método de Huygens puede aplicarse cuantitativamente a *todos* los fenómenos ondulatorios; véase el problema 24. El método se estableció sobre una base matemática firme dos siglos después de Huygens por Gustav Kirchhoff (1824-1887), quien probó que la inten-

* Christiaan Huygens (1629-1695) fue un científico de notable sagacidad e influencia. Además de la teoría ondulatoria de la luz, entre sus logros se incluyen mejoras en el diseño del telescopio que le permitieron deducir la forma de los anillos de Saturno, el desarrollo del reloj de péndulo, y contribuciones a la teoría de los cuerpos en rotación (incluyendo el primer reconocimiento de la existencia de la aceleración centrípeta) y de los objetos en colisión (incluyendo el principio de conservación de la cantidad de movimiento o ímpetu).

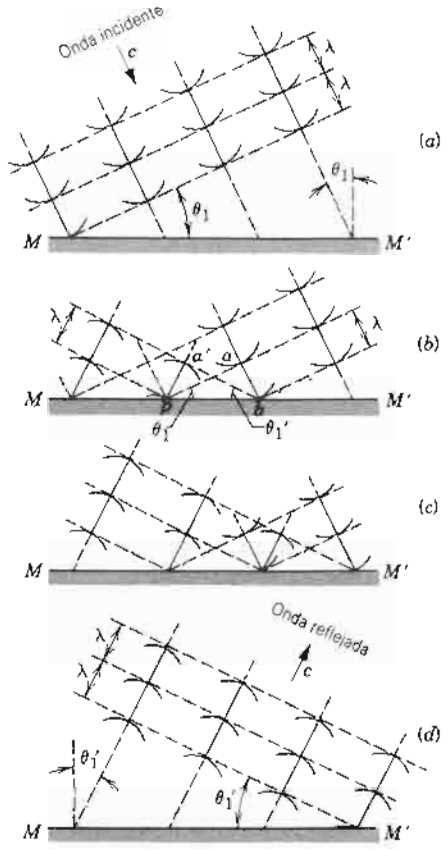


Figura 9 La reflexión de una onda plana a partir de un espejo plano analizada según la construcción de Huygens.

sidad de las pequeñas ondas varía con la dirección, como se describió anteriormente.

Veremos ahora cómo se deduce del principio de Huygens la ley de la reflexión. La figura 9*a* muestra tres frentes de onda en una onda plana que inciden sobre un espejo plano MM'. Por conveniencia se elige que los frentes de onda estén separados por una longitud de onda. Nótese que θ_1, el ángulo entre los frentes de onda y el espejo, es el mismo que el ángulo entre el rayo incidente y la normal al espejo. En otras palabras, θ_1 es el *ángulo de incidencia*. Los tres frentes de onda se relacionan entre sí según la construcción de Huygens, como se muestra en la figura 8.

Consideremos un punto *a* en el frente de onda como se muestra en la figura 9*b* como fuente de una onda de Huygens, la cual se expande después de un tiempo λ/c hasta incluir al punto *b* en la superficie del espejo. La luz del punto *p* en este mismo frente de onda no puede moverse más allá del espejo sino que debe expandirse hacia arriba como una onda de Huygens esférica. Al colocar un compás con un radio λ y trazar un arco alrededor de *p* tendremos un semicírculo al cual debe ser tangente el frente de onda reflejado. Puesto que el punto *b* debe encontrarse en el nuevo frente de onda, esta tangente debe pasar por *b*. Nótese que el ángulo θ_1' entre el frente de onda y el espejo es el mismo que el ángulo entre el rayo reflejado y la normal al espejo. En otras palabras, θ_1' es el *ángulo de reflexión*.

Considérense los triángulos rectángulos *abp* y *a'bp*. Tienen el lado *bp* en común, y el lado ab ($= \lambda$) es igual al lado $a'p$. Los dos triángulos rectángulos son, pues, congruentes y debemos concluir que

$$\theta_1 = \theta_1',$$

comprobando la ley de la reflexión. Si se recuerda que la construcción de Huygens es tridimensional y que los arcos mostrados representan segmentos de superficies esféricas, podrá convencerse por sí mismo de que el rayo reflejado se encuentra en el plano formado por el rayo incidente y la normal al espejo, es decir, el plano de la figura 9. Esto es también un requisito de la ley de la reflexión.

Las figuras 9*c* y 9*d* ilustran cómo continúa el proceso hasta que los tres frentes de onda incidentes se han reflejado.

El principio de Fermat

En 1650, Pierre Fermat* descubrió un principio notable, el cual puede expresarse en estos términos:

> *Un rayo de luz que viaja desde un punto fijo a otro punto fijo sigue una trayectoria, comparada con trayectorias cercanas, para cuyo tiempo necesario es un mínimo o bien un máximo, o permanece sin cambio (esto es, estacionario).*

Podemos deducir rápidamente la ley de la reflexión a partir de este principio. La figura 10 muestra dos puntos fijos *A* y *B* y un rayo reflejado *APB* que los une. (Suponemos que el rayo *APB* se encuentra en el mismo plano que la figura; véase el problema 25.) La longitud total *L* de este rayo es

$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2},$$

donde *x* da la posición del punto *P* en el que el rayo toca al espejo.

* Pierre Fermat (1601-1665) fue un matemático francés, a quien se le recuerda por su desarrollo de la geometría analítica y por sus muchas contribuciones a la teoría de los números. Quizá su producción más notable sea la conocida como *el último teorema de Fermat*: la ecuación $x^n + y^n = z^n$, donde x, y, z y n son números enteros positivos, y no tiene solución cuando $n > 2$. A pesar de que Fermat sostuvo siempre haber desarrollado la demostración de este teorema (demostración que nunca pudo publicar), ésta ha evadido los esfuerzos de los matemáticos durante más de 300 años.

De acuerdo con el principio de Fermat, P tendrá tal posición que el tiempo de viaje $t = L/c$ de la luz debe ser un mínimo (o un máximo o debe permanecer sin cambio), lo cual ocurre cuando $dt/dx = 0$. Al derivar tenemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dx}$$
$$= \frac{1}{2c}(a^2 + x^2)^{-1/2}(2x)$$
$$+ \frac{1}{2c}[b^2 + (d-x)^2]^{-1/2}(2)(d-x)(-1) = 0,$$

la cual podemos reescribir así:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

(Al calcular la derivada, nótese que mantenemos fijos los puntos extremos y variamos el camino al permitir que x varíe.) La comparación con la figura 10 muestra que podemos reescribirla como sigue:

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_1',$$

o sea que

$$\theta_1 = \theta_1',$$

que es la ley de la reflexión.

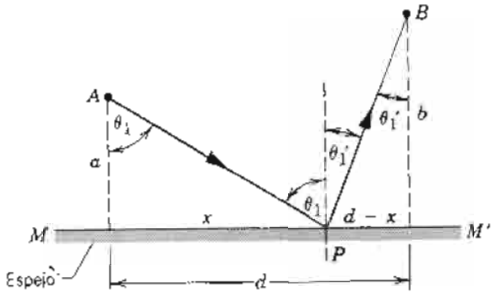


Figura 10 Reflexión de una onda plana a partir de un espejo plano analizada según el principio de Fermat. Un rayo que parte de A, pasa por B después de la reflexión en P.

43-4 FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS PLANOS

Contemplarse en un espejo es quizá una de nuestras experiencias ópticas más comunes. La figura 11 muestra una fuente puntual de luz O, a la cual llamos *el objeto*, situada a una distancia o enfrente de un espejo plano. La luz que cae sobre el espejo está representada por los rayos que emanan de O.* Construimos un rayo reflejado en el punto en que cada rayo choca con el espejo. Si prolongamos los rayos reflejados hacia la parte posterior del espejo, se intersecan en el punto I, al cual llamamos *la imagen* del objeto O. La imagen está a la misma distancia detrás del espejo que el objeto O enfrente de él, lo cual demostraremos en seguida.

Las imágenes pueden ser *reales* o *virtuales*. En la imagen real la luz pasa realmente por el punto imagen; en la imagen virtual la luz *se comporta* como si divergiera del punto imagen, si bien, de hecho, no pasa por este punto; véase la figura 11. En los espejos planos las imágenes de la luz divergente son siempre virtuales. Sabemos de la experiencia cotidiana lo real que *parece ser* tal imagen virtual y cuán definida está su ubicación en el espacio detrás del espejo, aun cuando este espacio pueda, de hecho, estar ocupado por una pared de ladrillos.

La figura 12 muestra dos rayos de la figura 11. Uno choca con el espejo en v, a lo largo de una línea perpendicular. El otro choca con él en un punto arbitrario a, formando un ángulo de incidencia θ con la normal en ese punto. La geometría elemental demuestra que los ángulos aOv y aIv son iguales también a θ. Así, los triángulos rectángulos aOv y aIv son congruentes y por tanto

$$o = -i, \tag{7}$$

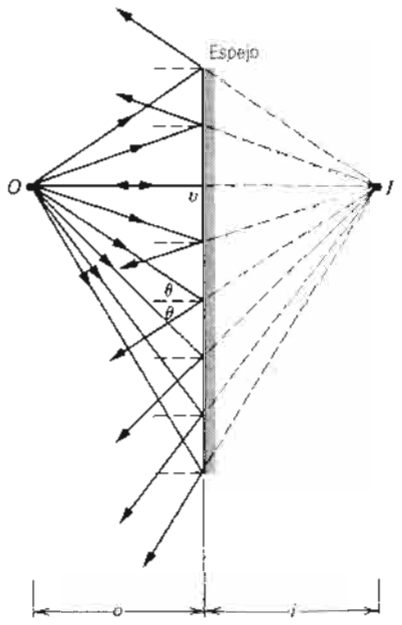


Figura 11 Un objeto puntual O forma una imagen virtual I en un espejo plano. Los rayos *parecen* divergir de I pero, en ese punto, no está presente en realidad ninguna luz.

* En nuestro análisis previo de la reflexión en este capítulo, supusimos una onda incidente *plana*; los rayos incidentes son paralelos entre sí en ese caso. Aquí tenemos una fuente *puntual*, y los rayos que chocan con el espejo *divergen* de esa fuente puntual. Podemos ver a la fuente puntual como una fuente de ondas esféricas, y los rayos que irradian de la fuente son perpendiculares a los frentes de onda esféricos.

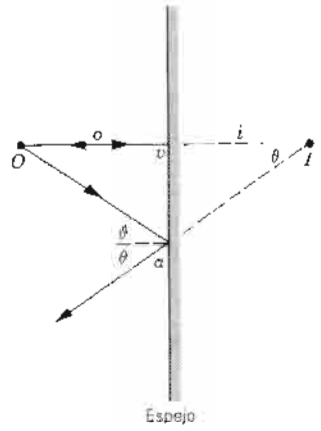


Figura 12 Dos rayos de la figura 11. El rayo *Oa* forma un ángulo arbitrario θ con la normal a la superficie del espejo.

en donde introducimos el signo menos para mostrar que *I* y *O* están en los lados opuestos del espejo. En la ecuación 7 no interviene θ, lo que significa que *todos* los rayos que parten de *O* chocando con el espejo pasan por *I* cuando se prolongan hacia atrás, como hemos visto en la figura 11. Aparte de haber supuesto que el espejo es realmente plano y que se cumplen las condiciones de la óptica geométrica, no hemos hecho aproximaciones al deducir la ecuación 7. En un espejo plano, un objeto puntual produce una imagen puntual, siendo $o = -i$, independientemente de cuán grande sea el ángulo θ en la figura 12.

A causa del diámetro finito de la pupila del ojo, sólo los rayos que están muy próximos entre sí pueden entrar al ojo después de la reflexión en un espejo. En la posición del ojo mostrada en la figura 13, sólo una pequeña zona del espejo cerca del punto *a* es efectiva en la formación de la imagen; el resto del espejo puede taparse o retirarse. Si volvemos la pupila hacia otro lugar, será efectiva una zona diferente del espejo; sin embargo, la ubicación de la imagen virtual *I* permanecerá sin cambio, en tanto que el objeto permanezca fijo.

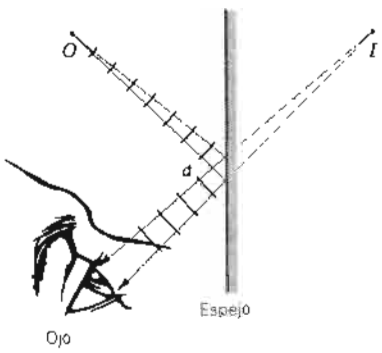


Figura 13 El grupo de rayos que parte de *O* entra en el ojo después de su reflexión en el espejo. Sólo es efectiva una pequeña parte del espejo cerca de *a*. Los pequeños arcos representan secciones de los frentes de onda esféricos. La luz parece venir de *I*.

Si el objeto es una fuente más grande, como la cabeza de una persona, también se formará una imagen virtual. Podemos considerar que una fuente mayor o extendida es una disposición o arreglo de fuentes puntuales, cada una de las cuales produce ondas esféricas. De la ecuación 7, cada objeto puntual de la fuente tiene una imagen puntual correspondiente que se encuentra a una distancia igual directamente detrás del plano del espejo. Así, la imagen reproduce al objeto punto por punto. La mayoría de nosotros lo comprobamos todos los días al mirarnos en un espejo.

La inversión de la imagen

Como lo muestra la figura 14*a*, la imagen de una mano izquierda parece ser una mano derecha. Interpretamos esta apariencia como una inversión de izquierda a derecha. Esto es, si levantamos nuestra mano izquierda, en-

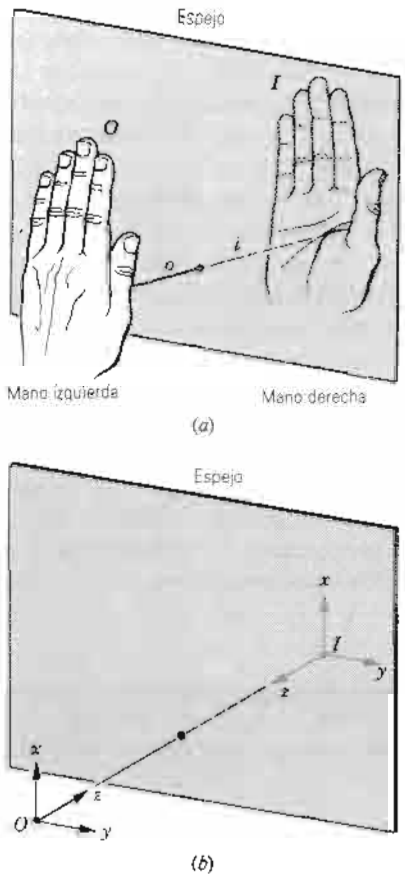


Figura 14 (*a*) El objeto *O* es la mano izquierda; su imagen *I* es la mano derecha. (*b*) El estudio de un objeto de tres flechas reflejado demuestra que el espejo intercambia frente y dorso, en lugar de izquierda y derecha.

tonces la imagen del espejo levanta una mano derecha. Es lógico preguntar: ¿por qué un espejo invierte de izquierda a derecha pero no invierte de arriba a abajo?

La figura 14*b* ilustra el modo en que el espejo invierte la imagen de un objeto tridimensional, representado simplemente como un grupo de tres flechas mutuamente perpendiculares. Nótese que las flechas paralelas al plano del espejo (las flechas *x* y *y*) son idénticas a sus imágenes en el espejo. Sólo la flecha *z* ha cambiado su dirección en virtud de la reflexión. Por tanto, es más exacto decir que un espejo invierte de frente a dorso más bien que de izquierda a derecha. La transformación de una mano izquierda en una mano derecha se lleva a cabo, en cierto sentido, mediante el cambio del frente al dorso de la mano.

Nótese también que puede considerarse que el objeto representa a un sistema de coordenadas convencional derecho (*x* "en cruz" con *y* señala en dirección *z*), mientras que la imagen es un sistema de coordenadas izquierdo (*x* "en cruz" con *y* señala en dirección *z negativa*). Tales inversiones se aplican igualmente a los objetos físicos; por ejemplo, la imagen de un tornillo con cuerdas de avance hacia la derecha es un tornillo con cuerdas de avance hacia la izquierda.

Si todos los humanos fueran diestros, entonces podríamos con seguridad distinguir la diferencia entre una situación física y su imagen de espejo; la persona "real" usaría la mano derecha, mientras que la imagen usaría la izquierda. Sin embargo, si los humanos fueran ambidiestros, no podríamos usar esta característica para distinguir entre el mundo real y el mundo tras el espejo. A las leyes de la física se les ha aplicado la misma distinción: si las leyes de la física tienen una simetría perfecta entre izquierda y derecha, entonces la imagen especular de un experimento sería también un experimento físicamente posible. Si, por el contrario, las leyes carecen de esta simetría, entonces el éxito de ciertos experimentos del tipo imagen-espejo no sería físicamente posible. En 1956 se descubrió que la llamada interacción débil, que es la causa de ciertas desintegraciones radiactivas, carece de esta simetría, a la que se le llama *paridad* (véase la Sec. 3-6). Este experimento proporcionó la primera base fundamental de una distinción entre nuestro mundo y su imagen tras el espejo.*

Problema muestra 4 Encuentre la longitud mínima *h* de un espejo necesaria para que una persona de altura *H* vea su reflexión completa.

Solución La figura 15 muestra los pies *f*, los ojos *e*, y la parte superior de la cabeza *t* de una persona. Para que él vea toda su altura, un rayo de luz (*tae*) debe salir de la parte superior de su cabeza, reflejarse del espejo en *a*, y entrar a sus ojos, mientras que otro rayo (*fce*) debe salir de sus pies, reflejarse del espejo en *c*, y entrar a sus ojos. La persona verá una reflexión de toda su altura (incluyendo las imágenes virtuales de los puntos *t* y *f*) si la longitud del espejo es *ac* por lo menos.

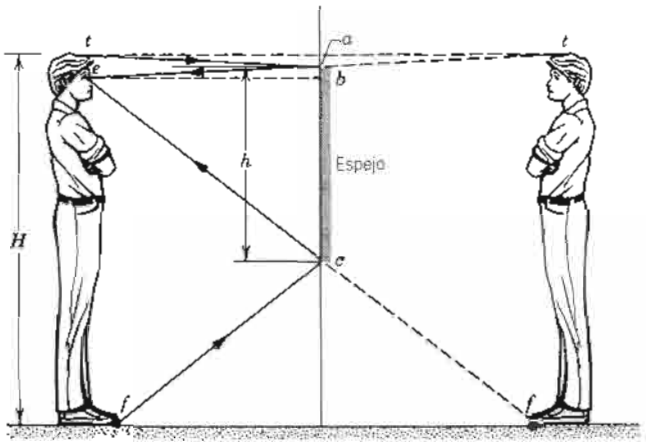


Figura 15 Problema muestra 4.

De la geometría de la figura 15, vemos que

$$ab = \tfrac{1}{2}te \quad \text{y} \quad bc = \tfrac{1}{2}ef,$$

donde el punto *b* está a la misma altura que sus ojos. Entonces

$$ac = ab + bc = \tfrac{1}{2}te + \tfrac{1}{2}ef = \tfrac{1}{2}tf.$$

Con $h = ac$ y $H = tf$, obtenemos

$$h = \tfrac{1}{2}H.$$

La persona puede ver su imagen entera si el espejo por lo menos es de la mitad de su altura. Las porciones del espejo abajo de *c* muestran reflexiones del piso enfrente de sus pies, mientras que las que están arriba de *t* muestran a la persona lo que está arriba de su cabeza. Nótese que la distancia de la persona al espejo no constituye una diferencia en este cálculo, el cual resulta válido para cualquier distancia entre el objeto y el plano del espejo.

43-5 DEDUCCIÓN DE LA LEY DE LA REFRACCIÓN

En analogía con la sección 43-3, usamos aquí los principios de Huygens y de Fermat para obtener la ley de la refracción (Ec. 2).

El principio de Huygens

La figura 16 muestra cuatro etapas de la refracción para tres frentes de onda consecutivos de una onda plana que incide sobre una interfaz entre aire (el medio 1) y vidrio (el medio 2). Por conveniencia, suponemos que los frentes

* Para algunos comentarios amenos acerca de la simetría y las distinciones entre los objetos y sus imágenes en el espejo, véase *The Ambidextrous Universe*, por Martin Gardner (Scribner's, 1979), y *Reality's Mirror*, por Bryan Bunch (Wiley, 1989).

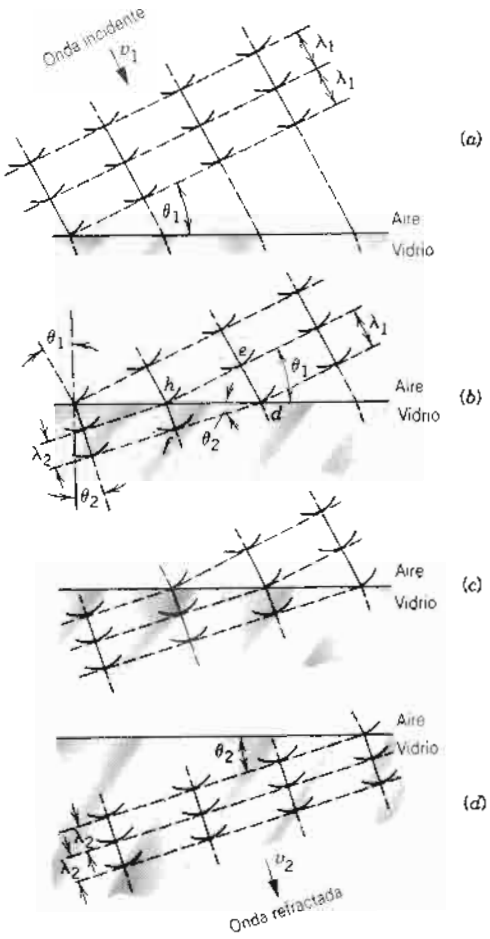


Figura 16 La refracción de una onda plana en una interfaz plana como se describió en la construcción de Huygens. Para simplificar, no se muestra la onda reflejada. Nótese el cambio en la longitud de onda de la onda refractada.

de onda incidentes están separados por λ_1, medida la longitud de onda en el medio 1. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el vidrio. Suponemos que

$$v_2 < v_1. \tag{8}$$

Esta suposición acerca de las velocidades es vital en los cálculos que siguen.

En la figura 16*a* los frentes de onda se relacionan entre sí mediante la construcción de Huygens de la figura 8. Como en la figura 9, θ_1 es el ángulo de incidencia. En la figura 16*b*, considérese el tiempo ($= \lambda_1/v_1$) durante el cual se mueve una pequeña onda desde el punto *e* hasta incluir el punto *d*. La luz del punto *h*, que viaja a través del vidrio con una velocidad reducida (recuérdese la suposición de la ecuación 8) se mueve una distancia menor

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{v_2}{v_1} \tag{9}$$

durante este tiempo. Esto se deduce de $v = \lambda\nu$ y $\nu_1 = \nu_2$. El frente de onda refractado debe ser tangente a un arco con este radio centrado en *h*. Puesto que *d* se encuentra en el nuevo frente de onda, la tangente debe pasar por este punto, como se muestra. Nótese que θ_2, el ángulo entre el frente de onda refractado y la interfaz aire-vidrio, es el mismo que el ángulo entre el rayo refractado y la normal a esta interfaz. En otras palabras, θ_2 es *el ángulo de refracción*. Nótese también que la longitud de onda en el vidrio (λ_2) es menor que la longitud de onda en el aire (λ_1).

Para los triángulos rectángulos *hde* y *hdf* podemos escribir

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\lambda_1}{hd} \qquad (\text{para } hde)$$

y

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{\lambda_2}{hd} \qquad (\text{para } hdf).$$

Al dividir y usar la ecuación 9 tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{10}$$

Si se introduce un factor común de c podemos reescribir la ecuación 10 así:

$$\frac{c}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{c}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2. \tag{11}$$

De acuerdo con la ecuación 3, $c/v_1 = n_1$ y $c/v_2 = n_2$, de modo que la ecuación 11 se convierte en

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2, \tag{12}$$

que es la ley de la refracción.

Cuando uno de los medios es el vacío, la ecuación 9 es entonces

$$\lambda_n = \lambda\frac{v}{c} = \frac{\lambda}{n}, \tag{13}$$

donde λ_n es la longitud de onda de la luz en un medio con índice n y λ es la longitud de onda en el vacío. Al pasar de un medio al otro, tanto la velocidad de la luz como su longitud de onda se reducen por el mismo factor, pero la frecuencia de la luz no cambia.

La aplicación del principio de Huygens a la refracción requiere que si un rayo de luz se desvía hacia la normal al pasar del aire a un medio ópticamente denso, entonces la velocidad de la luz en ese medio ópticamente denso (digamos, el vidrio) debe ser *menor* que la velocidad de la luz en el aire; véase la ecuación 8. Este requisito se cumple para todas las teorías ondulatorias de la luz. En los primeros tiempos de la teoría de las partículas de luz publicada por Newton, la explicación de la refracción requería que la velocidad de la luz en el medio en el que la luz se desvía hacia la normal (el medio más denso

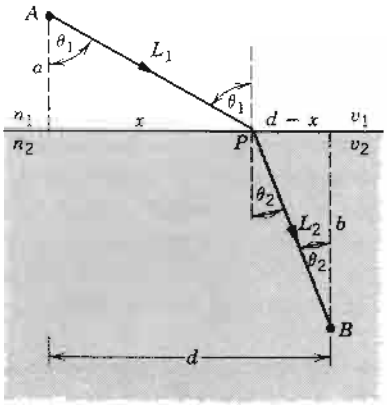


Figura 17 La refracción de una onda plana en una interfaz plana analizada mediante el principio de Fermat. Un rayo que parte de *A* pasa por *B* después de la refracción en *P*.

ópticamente) fuera *mayor* que la velocidad de la luz en el aire. Se creía que el medio más denso ejercía fuerzas de atracción sobre los "corpúsculos" de luz conforme se aproximaba a la superficie, acelerándolos y cambiando su dirección hasta hacer que formasen un ángulo menor con la normal.

La comparación experimental de la velocidad de la luz en el aire y en un medio ópticamente más denso es, por lo tanto, crítica en la decisión entre las teorías ondulatoria y corpuscular de la luz. Tales mediciones fueron llevadas a cabo por vez primera por Foucault en 1850; él demostró en forma concluyente que la luz viaja más lentamente en el agua que en el aire, desechando así la teoría corpuscular de Newton.

Principio de Fermat

Para demostrar la ley de la refracción del principio de Fermat, consideremos la figura 17, la cual muestra dos puntos fijos *A* y *B* en dos medios diferentes y un rayo refractado *APB* que los une. El tiempo *t* para que el rayo viaje de *A* a *B* está dado por

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2}.$$

Si se utiliza la relación $n = c/v$ podemos escribir la ecuación anterior así:

$$t = \frac{n_1 L_1 + n_2 L_2}{c} = \frac{L}{c}, \tag{14}$$

donde *L* es la *longitud del camino óptico*, definida como

$$L = n_1 L_1 + n_2 L_2. \tag{15}$$

Para cualquier rayo de luz que viaje por medios consecutivos, la longitud del camino óptico es la suma de los productos de la longitud del camino geométrico de cada segmento y el índice de refracción de ese medio. La ecuación 13 ($\lambda_n = \lambda/n$) muestra que la longitud del camino óptico es igual a la longitud que este mismo número de ondas tendría si el medio fuera el vacío. No debe confundirse la longitud del camino óptico con la longitud de la trayectoria geométrica, la cual es $L_1 + L_2$ para el rayo de la figura 17.

El principio de Fermat requiere que el tiempo *t* para que la luz recorra el camino *APB* debe ser un mínimo (o un máximo o permanecer sin cambio), lo cual a su vez requiere seleccionar *x* de tal modo que $dt/dx = 0$. La longitud del camino óptico en la figura 17 es

$$L = n_1 L_1 + n_2 L_2 = n_1\sqrt{a^2 + x^2} + n_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 14 y al derivarlo, obtenemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dx}$$

$$= \frac{n_1}{2c}(a^2 + x^2)^{-1/2}(2x)$$

$$+ \frac{n_2}{2c}[b^2 + (d-x)^2]^{-1/2}(2)(d-x)(-1) = 0,$$

la cual puede escribirse así:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Al compararla con la figura 17 muestra que podemos escribirla así:

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2,$$

que es la ley de la refracción.

Problema muestra 5 La luz roja de longitud de onda de 632 nm en el vacío incide, con un ángulo de $\theta_1 = 39°$ con respecto a la normal, sobre un portaobjetivos de vidrio de un microscopio de espesor $d = 0.78$ mm y un índice de refracción $n = 1.52$ (Fig. 18). Determine (*a*) la longitud de onda en el vidrio y (*b*) la longitud del camino óptico de la luz al viajar por el vidrio.

Solución (*a*) Podemos encontrar la longitud de onda en el vidrio usando la ecuación 13, la cual da

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{632 \text{ nm}}{1.52} = 416 \text{ nm}.$$

(*b*) El ángulo de refracción se encuentra de la ecuación 12,

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{n} = \frac{\operatorname{sen}39°}{1.52} = 0.414,$$

o sea

$$\theta_2 = 24.5°,$$

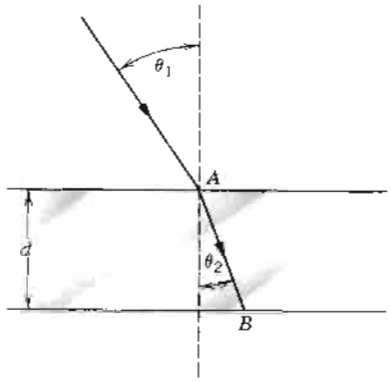


Figura 18 Problema muestra 5.

y la longitud real de la trayectoria a través del vidrio es

$$AB = \frac{d}{\cos\theta_2} = \frac{0.78\text{ mm}}{\cos 24.5°} = 0.856\text{ mm}.$$

El camino óptico es

$$L = n(AB) = 1.52(0.856\text{ mm}) = 1.30\text{ mm}.$$

43-6 REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

La figura 19 muestra rayos que parten de una fuente puntual en el vidrio e inciden sobre una interfaz vidrio-aire. Al aumentar el ángulo de incidencia θ, llegamos a una situación (véase el rayo *e*) en la que el rayo refractado apunta a lo largo de la superficie, siendo 90° el ángulo de refracción. Para los ángulos de incidencia mayores que este *ángulo crítico* θ_c, no existe un rayo refractado, y hablamos de una *reflexión interna total.*

El ángulo crítico se encuentra haciendo $\theta_2 = 90°$ en la ley de la refracción (véase la ecuación 2):

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_c = n_2 \operatorname{sen} 90°,$$

o sea

$$\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1}. \qquad (16)$$

Para el paso del vidrio al aire, $\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}(1.00/1.50) = 41.8°$. La figura 5 indica que la energía de la onda reflejada es del 100% cuando el ángulo de incidencia excede de 41.8°.

El seno de un ángulo no puede exceder de la unidad, de modo que debemos tener que $n_2 < n_1$. Esto nos dice que la reflexión interna total no puede ocurrir cuando la luz incidente está en el medio del índice de refracción menor. La palabra *total* significa precisamente que la reflexión tiene lugar sin pérdida de intensidad. En la reflexión ordinaria de un espejo, a manera de comparación, la pérdida en intensidad es de un 4%.

La reflexión interna total hace posible dispositivos de fibra óptica mediante los cuales los médicos pueden observar muchas partes del interior del cuerpo humano; véase la figura 20. En estos dispositivos, un haz de fibras transmite una imagen que puede ser inspeccionada visualmente desde afuera del cuerpo.* Las fibras ópticas también se emplean en las comunicaciones telefónicas y, gracias a la ligereza de su peso y a que están libres de interferencia electromagnética, para llevar señales en los aeroplanos. La figura 21 muestra la luz que emerge de una fibra óptica.†

Como lo muestra la figura 22, la fibra consta de un núcleo central que está graduado uniformemente hacia el recubrimiento exterior de un material de índice de refracción menor. Sólo aquellos rayos que se reflejan internamente pueden propagarse a lo largo de la fibra. Se han desarrollado materiales de alta pureza con el fin de reducir la atenuación de la señal en su paso por la fibra. Si el agua del mar fuera tan transparente como el vidrio del que están hechas las fibras ópticas, sería posible ver el fondo del mar

* Véase "Optical Fibers in Medicine", por Abraham Katzir, *Scientific American*, mayo de 1989, pág. 120.

† Véase "Lightwaves and Telecommunication", por Stewart E. Miller, *American Scientist*, enero-febrero 1984, pág. 66, y "Light-Wave Communications", por W. S. Boyle, *Scientific American*, agosto de 1977, pág. 40.

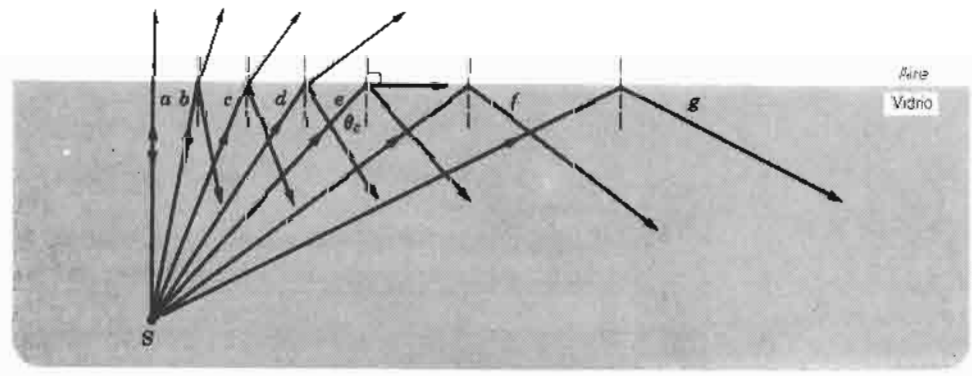


Figura 19 La reflexión interna total de la luz que parte de una fuente puntual S ocurre en todos los ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico θ_c. En el ángulo crítico, el rayo refractado apunta a lo largo de la interfaz aire-vidrio.

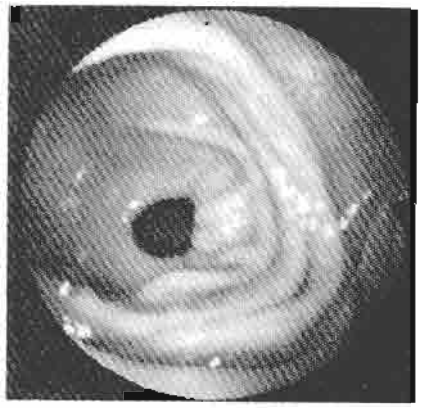


Figura 20 Imagen de fibra óptica del paso entre el estómago y el intestino delgado.

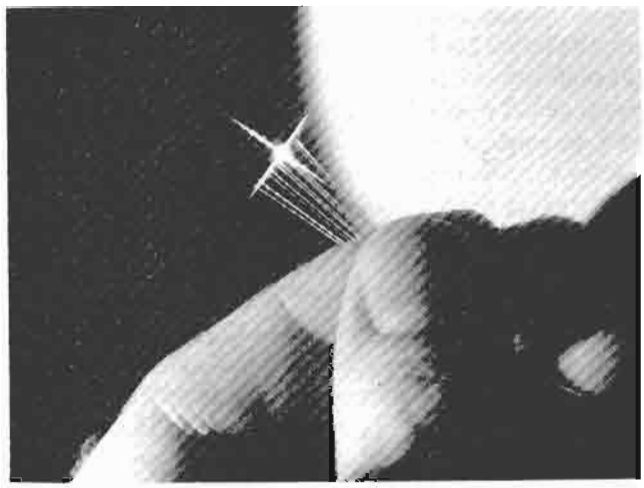


Figura 21 La luz se transmite a través de una fibra óptica.

a una profundidad de varios kilómetros mediante el reflejo de la luz solar.

Problema muestra 6 La figura 23*a* muestra un prisma triangular de vidrio, reflejándose por completo un rayo incidente normal a una cara. Si θ_1 es de 45°, ¿qué puede concluirse con respecto al índice de refracción n del vidrio?

Solución El ángulo θ_1 debe ser igual o mayor que el ángulo crítico θ_c, donde θ_c está dado por la ecuación 16:

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \text{sen}^{-1}\frac{1}{n},$$

o sea

$$n = \frac{1}{\text{sen}\,\theta_c},$$

donde el índice de refraccion del aire ($= n_2$) se fija igual a la unidad. Puesto que tiene lugar la reflexión interna total, θ_c debe ser menor de 45°, y así

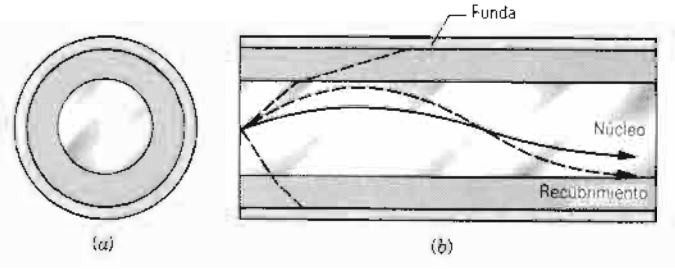


Figura 22 (*a*) Sección transversal de una fibra óptica. El diámetro de la fibra es casi el mismo que el de un cabello humano. (*b*) Vista transversal que muestra la propagación mediante la reflexión interna total. Se muestran el núcleo, el recubrimiento (de índice menor que el núcleo) y la funda protectora.

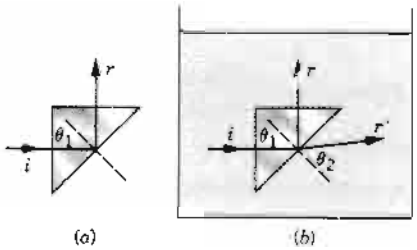


Figura 23 (*a*) Problema muestra 6. (*b*) Problema muestra 7.

$$n > \frac{1}{\text{sen}\,45°} = 1.41.$$

En consecuencia, el índice de refracción del vidrio debe exceder de 1.41. Si n fuera menor que 1.41, el rayo mostrado en la figura 23*a* se refractaría parcialmente en el aire, en lugar de reflejarse totalmente hacia el interior del vidrio.

Problema muestra 7 ¿Qué sucede cuando el prisma del problema muestra 6 (suponiendo que $n_1 = 1.50$) está inmerso en agua ($n_2 = 1.33$)? Véase la figura 23*b*.

Solución El nuevo ángulo crítico, dado por la ecuación 16, es

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \text{sen}^{-1}\frac{1.33}{1.50} = 62.5°.$$

El ángulo de incidencia real (= 45°) es menor que éste, de modo que *no* tenemos una reflexión interna total.

Existe un rayo reflejado r, con un ángulo de reflexión de 45°, como lo muestra la figura 23*b*. Existe también un rayo refractado r', con un ángulo de refracción dado por

$$n_1 \,\text{sen}\,\theta_1 = n_2 \,\text{sen}\,\theta_2$$
$$(1.50)(\text{sen}\,45°) = (1.33)\,\text{sen}\,\theta_2,$$

lo cual da $\theta_2 = 52.9°$. Demuéstrese que cuando $n_2 \to n_1$, $\theta_c \to 90°$.

¿Cómo puede determinarse del rayo incidente i en las figuras 23*a* y 23*b* si existe aire o agua más allá del vidrio?

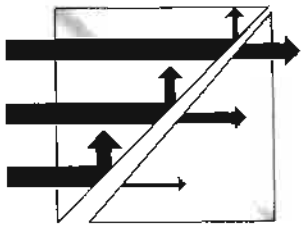


Figura 24 Reflexión interna total frustrada. Cuanto más amplio sea el espacio de aire, tanto menor será la intensidad de la luz en el segundo prisma (indicado por la anchura de los rayos). Obsérvese que las ondas de luz no aparecen *en* el espacio de aire.

Esto es, ¿cómo "sabe" el rayo si será reflejado totalmente o refractado parcialmente? La onda viajera en el vidrio crea campos eléctricos y magnéticos que son funciones exponenciales pronunciadamente decrecientes de la distancia y que penetran a unas cuantas longitudes de onda en el medio contiguo. Estos campos no son los asociados a una onda viajera sino que pueden considerarse como agentes de un "muestreo" del medio más allá de la frontera. Podemos demostrar esta penetración al colocar un segundo prisma de vidrio cercano al primero, como se muestra en la figura 24. En el medio de muestreo 2 (el aire), los campos perciben también el segundo prisma; si bien la ley de la refracción prohíbe que las ondas aparezcan en el espacio de aire que se encuentra entre los prismas, no se prohíbe la propagación en el segundo prisma. Nótese de la figura 24 que el rayo de luz aparece en el segundo prisma pero no en el espacio de aire. Esta situación se llama *reflexión interna total frustrada* y es una propiedad general de las ondas. (Puede hacerse, por ejemplo, con las microondas.) En mecánica cuántica, las propiedades ondulatorias de las partículas materiales permiten un efecto similar llamado *penetración de barrera*: una partícula puede pasar de una región permitida a otra región permitida al penetrar por una región prohibida. En el capítulo 50 consideraremos la penetración de barrera.

PREGUNTAS

1. Describa cómo se vería su entorno inmediato si todos los objetos absorbiesen totalmente la luz. ¿Podría usted ver algo mientras está sentado en una silla en un salón? ¿Podría ver un gato que entrase al salón?
2. ¿Puede usted imaginar una prueba u observación sencilla para comprobar que la ley de la reflexión es la misma para todas las longitudes de onda, en condiciones en que sea válida la óptica geométrica?
3. Un farol en la calle, visto mediante la reflexión a través de un volumen de agua en el que existen ondulaciones, aparece estar muy alargado en la línea de visión pero no lateralmente. Explique.
4. Las transmisiones de radio por onda corta desde Europa se escuchan en Estados Unidos si bien la trayectoria no es una línea recta. Explique cómo.
5. El tiempo de viaje de las señales desde los satélites hasta las estaciones receptoras en la Tierra varía con la frecuencia de la señal. ¿Por qué?
6. ¿En qué porcentaje difiere la velocidad de la luz azul en el cuarzo fundido de la velocidad de la luz roja?
7. ¿Pueden emplearse (*a*) los fenómenos de reflexión o (*b*) los fenómenos de refracción para determinar la longitud de onda de la luz?
8. ¿Cómo pueden determinarse los índices de refracción de los medios de la tabla 1 relativos al agua, según los datos de esa tabla?
9. ¿Cabe esperar que las ondas de sonido obedezcan las leyes de la reflexión y de la refracción de la misma manera que las ondas lumínicas? Analice la propagación de las ondas esféricas y cilíndricas aplicando el principio de Huygens. ¿Se aplica el principio de Huygens a las ondas de sonido en el aire?
10. Si el principio de Huygens predice las leyes de la reflexión y de la refracción, ¿por qué es necesario o conveniente considerar a la luz como una onda electromagnética, con toda su complejidad que le acompaña?
11. Un haz de luz se ensancha al entrar al agua. Explique.
12. ¿Cuál es la explicación razonable de la observación de que una calle se ve más oscura cuando está mojada que cuando está seca?
13. Las ondas de sonido son en gran parte reflejadas cuando inciden sobre el agua desde el aire. ¿Por qué?
14. ¿Es correcto decir que no existe una interacción entre la luz visible y un medio transparente por el cual pasa?
15. ¿Cómo afecta la refracción atmosférica al tiempo visible de la puesta del sol?
16. Las estrellas centellan pero los planetas no. ¿Por qué?
17. Explique por qué el extremo alejado de un estanque lleno con profundidad uniforme parece menos profundo que el extremo cercano al observador en su orilla.
18. Es un día claro y soleado y usted desea crear un arco iris en su patio usando una manguera de jardín. Con exactitud, ¿cómo procedería usted? A propósito, ¿por qué no se puede pasar por debajo, o llegar a uno de los extremos del arco iris?
19. ¿Es posible, usando uno o más prismas, recombinar en luz blanca el espectro de colores que se forma cuando la luz blanca pasa por un solo prisma? De ser así, explique cómo.

20. Se le da a usted un cubo de vidrio. ¿Cómo puede determinar la velocidad de la luz (de una fuente de luz de sodio) en este cubo?
21. Describa y explique lo que un pez ve cuando mira en varias direcciones sobre su horizonte.
22. ¿Qué hizo Foucault, al medir la velocidad de la luz en el agua, para decidirse entre las teorías ondulatoria y corpuscular de la luz.
23. ¿Por qué un diamante "centellea" más que una imitación de vidrio cortada en la misma forma?
24. La luz tiene (*a*) longitud de onda, (*b*) frecuencia y (*c*) velocidad. ¿Cuál, si alguna, de estas cantidades permanece sin cambio cuando la luz pasa del vacío a una placa de vidrio?
25. ¿Es factible que la longitud de onda de la luz cambie al pasar del aire al vidrio pero que su frecuencia no? Explique.
26. En la reflexión y la refracción, ¿por qué se encuentran los rayos reflejado y refractado en el plano definido por el rayo incidente y la normal a la superficie? ¿Puede imaginar algunas excepciones?
27. ¿Qué causa los espejismos? ¿Tiene algo que ver con el hecho de que el índice de refracción del aire no sea constante sino que varía con su densidad? Véase "Mirages", por Alistair B. Fraser y William B. Mach, *Scientific American*, enero de 1976, pág. 102.
28. ¿Es posible tomar la fotografía de una imagen virtual mediante la exposición de una película en la posición donde se encuentra la imagen? Explíquelo.
29. En la noche, en una habitación iluminada, sopla usted un anillo de humo hacia una ventana. Al enfocar sus ojos en el anillo conforme se aproxima a la ventana parecerá que atraviesa el vidrio hacia la oscuridad exterior. ¿Cuál es la explicación de esta ilusión?
30. Al conducir un automóvil se ven a veces vehículos como las ambulancias con letras impresas en ellos de modo tal que se lean de la manera normal cuando se mira por el espejo retrovisor. Escriba su nombre de modo que pueda leerse así.
31. Hemos visto que una reflexión aislada en un espejo plano se invierte de derecha a izquierda. Cuando conduce por una carretera, por ejemplo, las letras de las señales de la carretera están invertidas si se ven por el espejo retrovisor. Sin embargo, visto en este mismo espejo, usted parece seguir en el carril correcto. ¿Por qué el espejo invierte las señales y no los carriles? ¿O lo hace? Analícelo.
32. Todos sabemos que cuando miramos a un espejo, la derecha y la izquierda se invierten. Nuestra mano derecha parecerá convertirse en mano izquierda; si hacemos la raya de nuestro pelo en el lado izquierdo parecerá que la hemos hecho en el lado derecho, y así sucesivamente. ¿Puede imaginar un sistema de espejos que permitiera vernos a nosotros mismos como nos ven los demás? De ser así, dibújelo y demuéstrelo trazando algunos rayos.
33. Imagine un sistema de espejos planos que nos permita ver nuestra nuca. Dibuje los rayos para demostrarlo.
34. Diseñe un periscopio que aproveche la reflexión interna total. ¿Cuáles son las ventajas en comparación con los espejos azogados?
35. ¿Qué características debe tener un material con el fin de servir de "tubo de luz" eficiente?
36. Cierto cepillo de dientes tiene un mango de plástico rojo en el que están colocadas varias filas de cerdas de nylon. Las puntas de las cerdas (pero no sus costados) se ven rojas. Explique.
37. ¿Por qué son más efectivas las fibras ópticas como portadoras de información que, digamos, las microondas o los cables? Piense en las frecuencias implicadas.
38. ¿Qué significa la "longitud del camino óptico"? ¿Puede la longitud del camino óptico ser alguna vez menor que la longitud de la trayectoria geométrica? ¿Puede ser alguna vez mayor?
39. Una solución de sulfato de cobre es azul cuando se observa a través de la luz transmitida. ¿Significa esto que la solución de sulfato de cobre absorbe selectivamente la luz azul? Analícelo.

PROBLEMAS

Sección 43-2 Reflexión y refracción

1. En la figura 25, encuentre los ángulos (*a*) θ_1 y (*b*) θ_2.
2. Un haz de luz en el vacío incide sobre la superficie de una placa de vidrio. En el vacío el haz forma un ángulo de 32.5° con la normal a la superficie, y en el vidrio forma un ángulo de 21.0° con la normal. Determine el índice de refracción del vidrio.
3. Se encuentra que la velocidad de la luz amarilla del sodio en cierto líquido es de 1.92×10^8 m/s. Calcule el índice de refracción de este líquido con respecto al aire, para la luz del sodio.
4. Encuentre la velocidad de un rayo de luz de 550 nm de longitud de onda en cuarzo fundido. (Véase la Fig. 4.)

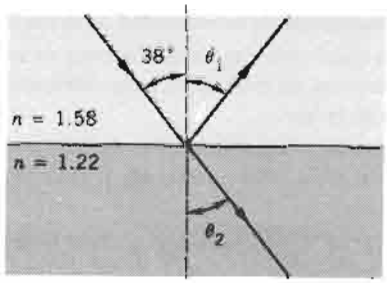


Figura 25 Problema 1.

5. Cuando un electrón se mueve a través de un medio con una velocidad mayor que la de la luz en ese medio, se irradian ondas electromagnéticas (el efecto Cerenkov). ¿Qué velocidad debe tener un electrón en un líquido de índice de refracción de 1.54 para que irradie?
6. Un haz de láser viaja a lo largo del eje de una sección rectilínea de tubería de 1.61 km de longitud. El tubo contiene aire a presión y temperatura normales, pero también puede evacuarse. ¿En qué caso será mayor el tiempo de viaje del haz y por cuánto?
7. Cuando el tanque rectangular de metal de la figura 26 se llena hasta el tope con un líquido desconocido, un observador con los ojos al nivel de la parte superior del tanque puede ver precisamente la esquina *E*. Determine el índice de refracción del líquido.

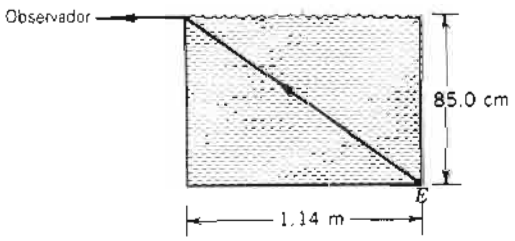


Figura 26 Problema 7.

8. Unas olas del mar que se mueven a una velocidad de 4.0 m/s se están aproximando a una playa formando un ángulo de 30° con la normal, como se muestra en la figura 27. Supóngase que la profundidad del agua cambia abruptamente y que la velocidad de la ola disminuye a 3.0 m/s. Cerca de la playa, ¿cuál es el ángulo θ entre la dirección del movimiento de la ola y la normal? (Suponga la misma ley de la refracción que para la luz.) Explique por qué la mayoría de las olas llegan en forma normal a la orilla, aun cuando a grandes distancias se aproximen con una variedad de ángulos.

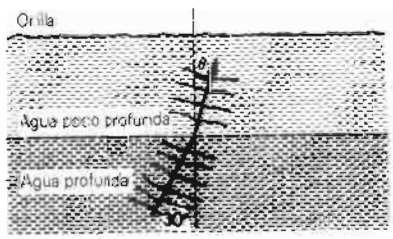


Figura 27 Problema 8.

9. Un rayo de luz atraviesa un prisma equilátero en la posición de desviación mínima. La desviación total es de 37°. ¿Cuál es el índice de refracción del prisma? Véase el problema muestra 3.
10. Dos espejos perpendiculares forman los lados de una vasija llena de agua, como se muestra en la figura 28. Un rayo de luz incide desde arriba, normal a la superficie del agua. (*a*) Demuestre que el rayo emergente es paralelo al rayo incidente. Supóngase que existan dos reflexiones en las superficies de los espejos. (*b*) Repita el análisis para el caso de una incidencia oblicua, estando el rayo en el plano de la figura.

Figura 28 Problema 10.

11. En la figura 7 (problema muestra 3) demuestre por medio de trazado de rayos, usando un transportador, que si θ del rayo incidente aumenta o disminuye, el ángulo de desviación ψ aumenta.
12. La luz de un láser penetra en un bloque de vidrio en *A* y emerge en *B*; véase la figura 29. El bloque de vidrio tiene una longitud $L = 54.7$ cm y un índice de refracción $n = 1.63$. El ángulo de incidencia es $\theta = 24.0°$. Determine el tiempo necesario para que la luz atraviese el bloque.

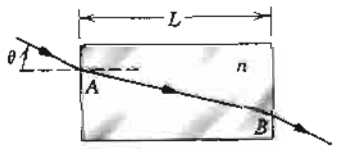


Figura 29 Problema 12.

13. Un buceador en un lago mira hacia arriba a 27° de la vertical para ver un salvavidas anular que flota en la superficie. A través del centro del salvavidas puede verse la punta de una chimenea que se sabe tiene 98 m de altura. ¿Cuán lejos del salvavidas está la base de la chimenea?
14. Un poste vertical anclado de 200 cm de longitud se extiende desde el fondo de una alberca hasta un punto a 64 cm por arriba del nivel del agua. La luz solar incide a 55° sobre el horizonte. Halle la longitud de la sombra del poste en el fondo de la alberca.
15. Demuestre que un rayo de luz que incide sobre la superficie de una lámina de vidrio de espesor *t* emerge por la cara opuesta paralelo a su dirección inicial pero desplazado lateralmente, como se muestra en la figura 30. (*a*) Demuestre que, para ángulos de incidencia θ pequeños, este desplazamiento puede expresarse como

$$x = t\theta\,\frac{n-1}{n},$$

donde n es el índice de refracción y θ está medido en radianes. (*b*) Calcule el desplazamiento para un ángulo de 10° de incidencia a través de una placa de vidrio refractario de 1.0 cm de espesor.

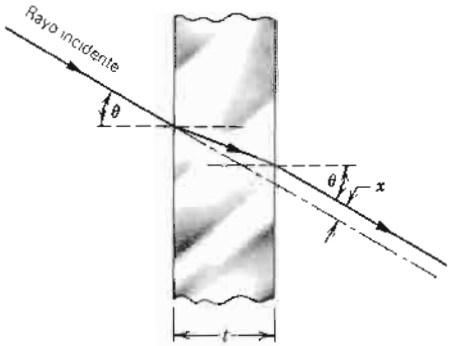


Figura 30 Problema 15.

16. Un prisma de vidrio con un ángulo de 60° en su vértice tiene $n = 1.60$. (*a*) ¿Cuál es el ángulo mínimo de incidencia para el que un rayo pueda entrar por una cara del prisma y emerger por la otra? (*b*) ¿Qué ángulo de incidencia se requeriría para que el rayo pase a través del prisma simétricamente? Véase el problema muestra 3.

17. Una moneda reposa en el fondo de un estanque de profundidad d e índice de refracción n, como se muestra en la figura 31. Demuestre que los rayos de luz que están cerca de la normal parecen provenir de un punto $d_{ap} = d/n$ bajo la superficie. Esta distancia es la *profundidad aparente* del estanque.

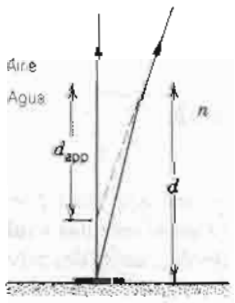


Figura 31 Problema 17.

18. La profundidad aparente de un estanque depende del ángulo de la visual. Supóngase que se coloque una moneda en el fondo de una alberca llena de agua ($n = 1.33$) a una profundidad de 2.16 m. Calcule la profundidad aparente de la moneda bajo la superficie vista (*a*) con una incidencia casi normal y (*b*) mediante los rayos que salen de la moneda formando un ángulo de 35.0° con la normal al fondo de la alberca. Véase el problema 17.

19. Una capa de agua ($n = 1.33$) de 20 mm de espesor flota sobre una capa de tetracloruro de carbono ($n = 1.46$) de 41 mm de espesor. ¿Diga cuál es la distancia a la que parece estar el fondo del tanque, visto con una incidencia casi normal?

20. El índice de refracción de la atmósfera de la Tierra disminuye en forma gradual y uniforme con la altura desde el valor en su superficie (alrededor de 1.00029) hasta el valor en el espacio (alrededor de 1.00000) en el límite superior de la atmósfera. Esta variación continua (o gradual) puede alcanzarse si se considera que la atmósfera está compuesta de tres (o más) capas paralelas planas en cada una de las cuales el índice de refracción es constante. Así pues, en la figura 32, $n_3 > n_2 > n_1 > 1.00000$. Considérese un rayo de luz procedente de una estrella S que incide sobre el límite superior de la atmósfera a un ángulo θ con la vertical. (*a*) Demuestre que la dirección aparente θ_3 de la estrella con respecto a la vertical como la ve un observador en la superficie de la Tierra se obtiene de

$$\operatorname{sen} \theta_3 = \frac{1}{n_3} \operatorname{sen} \theta.$$

(*Sugerencia*: Aplique la ley de la refracción a pares sucesivos de las capas de la atmósfera; haga caso omiso de la curvatura de la Tierra.) (*b*) Calcule el corrimiento de posición de una estrella que según se observa está a 50° de la vertical. (Los efectos mínimos debidos a la refracción atmosférica pueden ser de gran importancia; por ejemplo, deben tenerse en cuenta al emplear satélites de navegación para obtener posiciones precisas de la posición en la Tierra.)

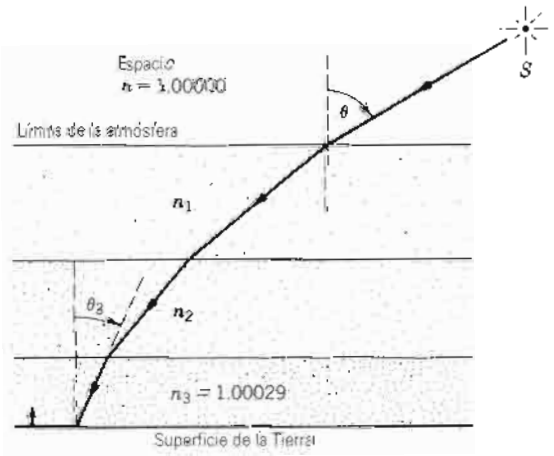


Figura 32 Problema 20.

21. Está usted parado en un extremo de una pista larga en un aeropuerto. Un gradiente de temperatura vertical en el aire da por resultado que el índice de refracción del aire sobre la pista varíe con la altura y de acuerdo con $n = n_0 (1 + ay)$, donde n_0 es el índice de refracción en la superficie de la pista y $a = 1.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^{-1}$. Sus ojos están a una altura $h = 1.7$ m sobre la pista. ¿Más allá de qué distancia horizontal d no puede ver la pista? Véase la figura 33 y el problema 20.

22. Un *reflector de esquina* o diedro, muy usado en óptica, en microondas y en otras aplicaciones, consta de tres espejos planos unidos entre sí como la esquina de un cubo. Tiene la propiedad de que un rayo incidente retorna, después de tres reflexiones, con su dirección exactamente invertida. Demuestre este resultado.

23. Un material transparente es atravesado por muones (masa = 106 MeV/c^2) y piones neutros (masa = 135 MeV/c^2),

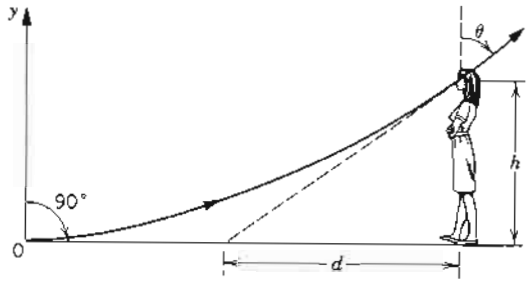


Figura 33 Problema 21.

cada uno con una cantidad de movimiento (ímpetu) de 145 MeV/c. Determine el intervalo del índice de refracción del material de modo que sólo los muones emitan radiación Cerenkov. (Véase el problema 5.)

Sección 43-3 Deducción de la ley de la reflexión

24. El extremo de una vara es arrastrado a través del agua a una velocidad v que es mayor que la velocidad u de las ondas de agua. Aplicando la construcción Huygens a las ondas de agua, demuestre que se crea un frente de onda cónico y que su semiángulo α se determina mediante

$$\text{sen } \alpha = u/v.$$

Esto resulta familiar cuando la onda de la proa de un vehículo espacial o la onda de choque causada por un objeto cruza el aire a una velocidad mayor que la del sonido, como en la figura 14 del capítulo 20.

25. Usando el principio de Fermat, demuestre que el rayo reflejado, el rayo incidente y la normal están en un mismo plano.

Sección 43-4 Formación de imágenes en espejos planos

26. Un objeto pequeño está a 10 cm enfrente de un espejo plano. Su usted está de pie detrás del objeto, a 30 cm del espejo, y mira la imagen del objeto, ¿a qué distancia debe usted enfocar sus ojos?

27. Usted está de pie frente a un gran espejo plano, contemplando su imagen. Cuando se mueve hacia el espejo con una velocidad v, ¿con qué velocidad se mueve su imagen hacia usted? Calcule esta velocidad tanto (a) en su propio marco de referencia como (b) en el marco de referencia del salón en que el espejo está en reposo.

28. La figura 34 muestra (visto desde arriba) que Bernardo B está caminando directamente hacia el centro de un espejo vertical M. ¿Cuán cerca del espejo estará Bernardo cuando Sara S sea capaz de verlo? Considere que d = 3.0 m.

29. Demuestre que si un espejo plano gira en un ángulo α, el haz reflejado gira en un ángulo 2α. Demuestre que este resultado es razonable cuando α = 45°.

30. En la figura 13 usted gira al espejo 30° en el sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de su extremo inferior, dejando al objeto puntual O en su lugar. ¿Se desplaza la imagen del punto? De ser así, ¿dónde está?

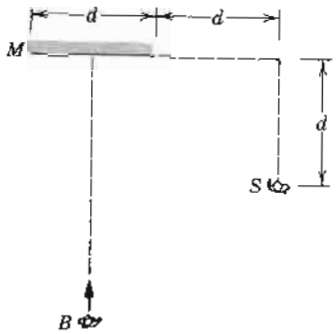


Figura 34 Problema 28.

¿Puede, el ojo, ver todavía la imagen sin que se mueva? Dibuje una figura que muestre la nueva situación.

31. Un objeto pequeño O se coloca a la mitad entre dos espejos planos paralelos como se muestra en la figura 35. Trace el grupo de rayos apropiado para que se vean las cuatro imágenes que se encuentran más cerca del objeto.

Figura 35 Problema 31.

32. Dos espejos planos forman un ángulo de 90° entre sí. ¿Cuál es el máximo número de imágenes de un objeto colocado entre ellos que pueden verse por un ojo apropiadamente ubicado? El objeto no se encuentra en la bisectriz del espejo.

33. La figura 36 muestra una pequeña lámpara suspendida a 250 cm sobre la superficie del agua en una alberca. El agua tiene una profundidad de 186 cm y el fondo de la alberca es un gran espejo. ¿Dónde está la imagen del foco cuando se le ve desde una incidencia casi normal?

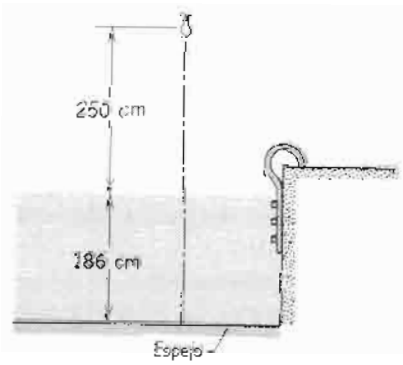


Figura 36 Problema 33.

34. Un objeto puntual está a 10 cm de un espejo plano mientras que el ojo de un observador (diámetro de la pupila =

5.0 mm) está a 24 cm. Si se supone que tanto el ojo como el punto estén en la misma línea perpendicular a la superficie, determine el área del espejo empleado para observar la reflexión del punto.

35. Se coloca una fuente puntual de luz S a una distancia d enfrente de una pantalla A. ¿Cómo cambia la intensidad en el centro de la pantalla cuando se coloca un espejo M a una distancia d detrás de la fuente, como en la figura 37? (*Sugerencia*: Recuerde cómo varía la intensidad con la distancia de una fuente puntual de luz.)

Figura 37 Problema 35.

36. Resuelva el problema 32 cuando el ángulo entre los espejos es (*a*) de 45°, (*b*) de 60° y (*c*) de 120°, estando situado el objeto siempre en la bisectriz de los espejos.
37. ¿Cuántas imágenes de usted mismo puede ver en un salón en el que el techo y dos paredes contiguas sean espejos? Explique.

Sección 43-5 Deducción de la ley de la refracción

38. La longitud de onda de la luz de sodio amarilla en el aire es de 589 nm. (*a*) ¿Cuál es su frecuencia? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda en vidrio cuyo índice de refracción sea de 1.53? (*c*) De los resultados de (*a*) y (*b*) encuentre la velocidad en este vidrio.
39. Una luz de 612 nm de longitud de onda en el vacío viaja 1.57 μm en un medio de índice de refracción de 1.51. Halle (*a*) la longitud de onda en el medio, (*b*) la longitud del camino óptico y (*c*) la diferencia de fase después de haber recorrido esa distancia, con respecto a una luz que recorre la misma distancia en el vacío.

Sección 43-6 Reflexión interna total

40. Demuestre que las longitudes del camino óptico para la reflexión y la refracción en las figuras 10 y 17 son cada una un mínimo en comparación con otros caminos vecinos que unen a los mismos dos puntos. (*Sugerencia*: Examine la cantidad d^2L/dx^2.)
41. Dos materiales A y B, tienen índices de refracción de 1.667 y 1.586, respectivamente. (*a*) Halle el ángulo crítico de la reflexión interna total en una interfaz entre los dos materiales. (*b*) ¿En qué dirección debe propagarse un rayo incidente si ha de reflejarse totalmente?
42. Un rayo de luz incide normalmente sobre la cara ab de un prisma de vidrio (n = 1.52), como se muestra en la figura 38. (*a*) Suponiendo que el prisma esté inmerso en aire, halle el valor del ángulo máximo ϕ para el cual el rayo se refleje totalmente en la cara ac. (*b*) Halle ϕ si el prisma está inmerso en agua.

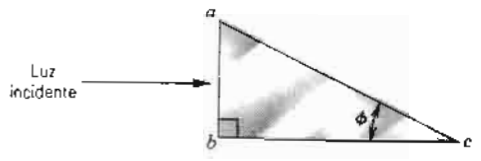


Figura 38 Problema 42.

43. Una gota de líquido se coloca sobre una placa semicircular de vidrio como se muestra en la figura 39. (*a*) Demuestre cómo determinar el índice de refracción del líquido al observar la reflexión interna total. No se conoce el índice de refracción del vidrio y también debe determinarse. ¿Está limitada en cualquier sentido la gama de los índices de refracción que pueden medirse de esta manera? (*b*) En realidad, hasta qué punto es práctico este método?

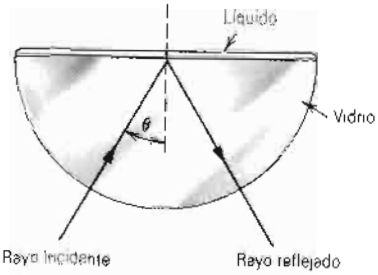


Figura 39 Problema 43.

44. Un pez está a 1.8 m bajo la superficie de un lago tranquilo. ¿A qué ángulo sobre la horizontal debe mirar para ver la luz de una pequeña fogata campestre que arde al borde del agua a una distancia de 92 m?
45. Una fuente puntual de luz está a 82.0 cm bajo la superficie de un volumen de agua. Halle el diámetro máximo del círculo en la superficie por el cual pueda emerger la luz del agua.
46. Un rayo de luz incide sobre una placa cuadrada de vidrio como se muestra en la figura 40. ¿Cuál debe ser el índice de refracción mínimo del vidrio al ocurrir la reflexión interna total en la cara vertical?

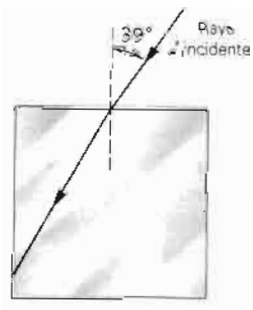


Figura 40 Problema 46.

47. Una fuente puntual de luz está situada a una distancia h bajo la superficie de un gran lago profundo. (*a*) Demuestre que la fracción f de la energía lumínica que escapa directamente de la superficie del agua es independiente de h y se determina mediante

$$f = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 1/n^2}),$$

donde n es el índice de refracción del agua. (*Nota*: Se han despreciado la absorción dentro del agua y la reflexión en la superficie, excepto donde es total.) (*b*) Calcule esta fracción numéricamente.

48. Una fibra óptica específica consta de un núcleo de vidrio sin graduar (índice de refracción n_1) rodeado por una cubierta (índice de refracción $n_2 < n_1$). Supóngase que un haz de luz penetra en la fibra desde el aire con un ángulo θ respecto del eje de la fibra como se muestra en la figura 41. (*a*) Demuestre que el valor máximo posible de θ para que un rayo pueda propagarse por la fibra está dado por

$$\theta = \text{sen}^{-1}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

(*b*) Suponga que los índices de refracción del vidrio y de la cubierta sean de 1.58 y 1.53, respectivamente, y calcule el valor de este ángulo.

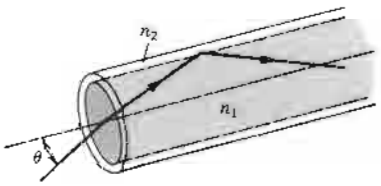


Figura 41 Problema 48.

49. En una fibra óptica (véase el problema 48), viajan rayos diferentes en caminos diferentes a lo largo de la fibra, dando lugar a tiempos de viaje diferentes. Esto causa que un pulso de luz se disperse al viajar a lo largo de la fibra, dando lugar a una pérdida de información. El tiempo de retraso debe de minimizarse al diseñar la fibra. Considérese un rayo que viaja a una distancia L a lo largo del eje de la fibra y otro que se refleja, con un ángulo crítico, conforme viajan hacia el mismo destino que el primero. (*a*) Demuestre que la diferencia Δt en los tiempos de llegada se determina según

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2),$$

donde n_1 es el índice de refracción del núcleo y n_2 es el índice de refracción de la cubierta. (*b*) Calcule Δt para la fibra del problema 48, siendo L = 350 km.

50. Un rayo de luz de longitud de onda dada, inicialmente en el aire, choca con un prisma de 90° en P (véase la figura 42) y es refractado allí y en Q hasta el punto de rozar apenas la superficie de la derecha del prisma en Q. (*a*) Determine el índice de refracción del prisma para esta longitud de onda en términos del ángulo de incidencia θ_i que da lugar a esta situación. (*b*) Dé un límite numérico superior para el índice de refracción del prisma. Demuestre, por medio de diagramas de rayos, lo que sucede si el ángulo de incidencia en P es (*c*) ligeramente mayor o (*d*) ligeramente menor que θ_i.

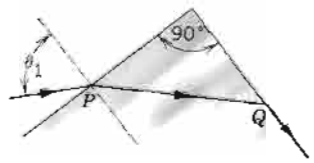


Figura 42 Problema 50.

51. Una onda plana de luz blanca que viaja en cuarzo fundido choca con una superficie plana del cuarzo, formando un ángulo de incidencia θ. ¿Es posible que el haz reflejado internamente aparezca (*a*) azulado o (*b*) rojizo? (*c*) ¿Qué valor de θ, más o menos, debe emplearse? (*Sugerencia*: La luz blanca aparecerá azulada si se eliminan las longitudes de onda que corresponden al rojo.)

52. Un cubo de vidrio tiene una pequeño punto en su centro. (*a*) ¿Qué partes de la cara del cubo deben cubrirse para impedir que se vea el punto, independientemente del punto desde donde se vea? (*b*) ¿Qué fracción de la superficie del cubo debe cubrirse? Suponga una arista del cubo de 12.6 mm y un índice de refracción de 1.52. (Desprecie el comportamiento subsecuente de un rayo reflejado internamente.)

CAPÍTULO 44

ESPEJOS Y LENTES ESFÉRICOS

La reflexión y la refracción en superficies planas, estudiadas en el capítulo anterior, son de utilidad limitada en los instrumentos ópticos. Una de las razones es que no son capaces de cambiar la luz divergente en luz convergente; la luz divergente, como la que procede de una fuente puntual, permanece como luz divergente después de la reflexión en un espejo plano o de la refracción por una frontera plana.

Si el espejo o la superficie refringente es curva, los frentes de onda planos pueden cambiar a frentes de onda curvos, que pueden entonces converger en un punto o diverger de un punto. La luz divergente puede incluso convertirse en luz convergente y enfocarse para formar una imagen, como en una cámara, un telescopio o el ojo humano. Mediante combinaciones de espejos y lentes podemos lograr que objetos diminutos parezcan grandes o que objetos distantes parezcan cercanos.

En este capítulo analizaremos la formación de imágenes por lentes y espejos esféricos. Por medio de métodos algebraicos o gráficos podemos hallar la imagen y determinar su tamaño relativo al objeto original. Los ejemplos entre los que se incluyen el microscopio y el telescopio demuestran cómo pueden usarse estos principios para diseñar sistemas ópticos que extiendan los límites de la visión humana a lo muy pequeño o a lo muy distante.

44-1 ESPEJOS ESFÉRICOS

En la sección 43-4 hemos estudiado la formación de una imagen mediante un espejo plano. Descubrimos que un espejo plano forma una imagen que parece estar detrás del espejo; esto es, cuando observamos la imagen, la luz parece llegar de un punto detrás del espejo. Llamamos a ésta una imagen *virtual*; asimismo determinamos que la imagen era del mismo tamaño que el objeto y que se encontraba a una distancia (negativa) i detrás del espejo, igual en magnitud a la distancia o del objeto enfrente del espejo, como se ilustra en la figura 1*a*.

Supongamos que, en lugar de que el espejo sea plano, le damos a éste una ligera curvatura. En particular, veremos los espejos que posean una forma esférica. Las figuras 1*b* y 1*c* muestran el efecto en dos casos diferentes. En el primer caso (Fig. 1*b*), el espejo es *cóncavo* (que significa "hueco", como una cueva) con respecto a la posición del objeto. Nótese que, en comparación con el espejo plano, la imagen (1) está amplificada (es decir, es mayor que el objeto) y (2) se ubica a una distancia mayor detrás del espejo (esto es, i tiene un valor negativo mayor). Tales espejos son los que se usan comúnmente para rasurarse o para maquillarse, cuando tal aumento es deseable, aunque el campo de visión se reduzca. La figura 1*b* se aplica sólo cuando la distancia entre el objeto y el espejo es pequeña (menor de $r/2$, como lo veremos).

En el segundo caso (Fig. 1*c*), el espejo es *convexo* con respecto a la ubicación del objeto. Nótese que la imagen (1) se reduce en tamaño y (2) está más cerca del espejo, en comparación con el espejo plano. Los espejos retrovisores del lado derecho en los automóviles y los espejos de vigilancia usados en tiendas al por menor son ejemplos de tales espejos. El campo de visión es más amplio que el de un espejo plano.

Supongamos que los espejos esféricos de la figura 1 fueran flexibles. Si cualquiera de ellos se doblara hasta hacerlo más plano, la imagen se aproximaría a la posición y al tamaño de la imagen en un espejo plano. Por lo tanto, podemos considerar que un espejo plano es un caso especial de un espejo esférico, en el cual el radio de la esfera se vuelve infinitamente grande. Nuestras ecuaciones para describir al espejo esférico se reducirían

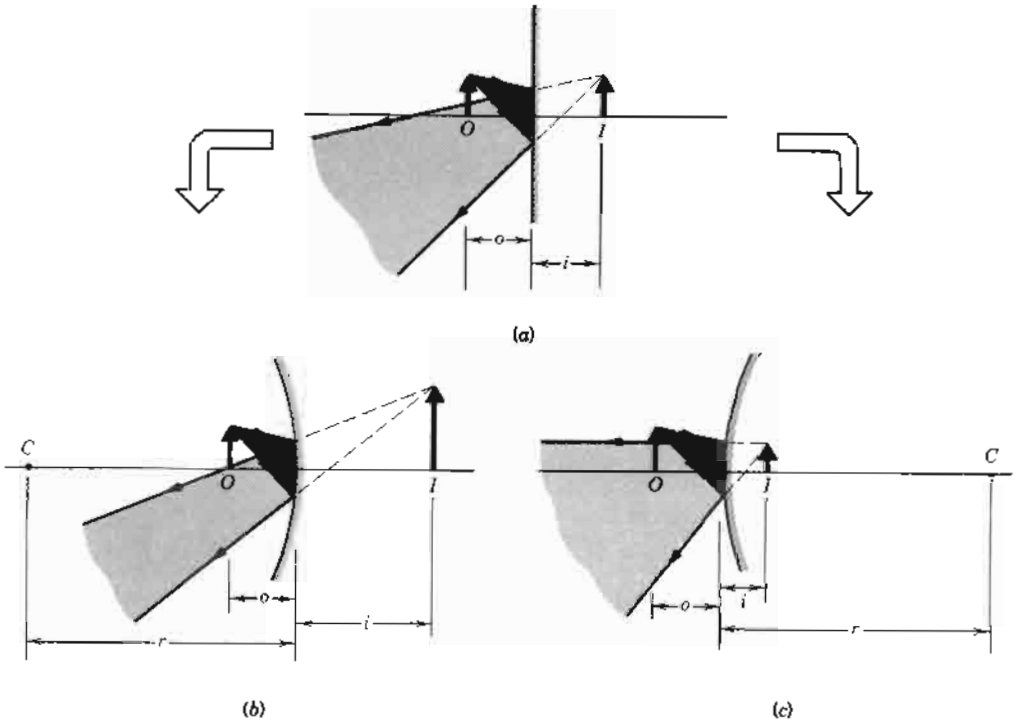


Figura 1 (*a*) Un objeto *O* forma una imagen virtual *I* en un espejo plano. (*b*) Si el espejo se dobla para que se vuelva *cóncavo*, la imagen se aleja del espejo y se vuelve más grande. (*c*) Si el espejo plano se dobla de modo que resulte *convexo*, la imagen se acerca al espejo y se vuelve más pequeña. El punto *C* se llama *centro de curvatura* del espejo; es el centro de la superficie esférica de la cual el espejo forma parte.

a la ecuación del espejo plano ($o = -i$) conforme el radio tienda al infinito.

Ecuación del espejo

Al final de esta sección obtendremos la ecuación que relaciona a la *distancia del objeto o* con la *distancia de la imagen i* en un espejo esférico. Se trata del caso especial en que los rayos de luz que proceden del objeto forman ángulos pequeños con el eje del espejo. Tales rayos se llaman *rayos paraxiales*. Dicho de otra manera, las dimensiones del espejo son pequeñas en comparación con su radio de curvatura. Nuestra descripción no se aplicaría para el caso de un espejo totalmente iluminado en forma de hemisferio completo.

La ecuación del espejo relaciona las tres distancias en la figura 1: o, i y el radio de curvatura r del espejo. Esta relación está dada por la ecuación del espejo esférico,

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r}. \tag{1}$$

Es conveniente definir que la *distancia focal f* del espejo sea precisamente la mitad del radio de curvatura, es decir,

$$f = r/2. \tag{2}$$

En términos de la distancia focal, la ecuación del espejo puede escribirse así:

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}. \tag{3}$$

La figura 2 muestra rayos de luz paralelos que inciden en el espejo. La luz paralela puede obtenerse de un objeto a una gran distancia del espejo, tal que los frentes de onda que parten del objeto sean esencialmente planos. En la práctica, la luz paralela puede obtenerse usando otro espejo o una lente. La luz paralela se lleva a un foco situado en un punto *F* llamado *punto focal*. Este punto está a una distancia *f* del espejo. La ecuación 3 muestra que si $o = \infty$, que corresponde a un objeto a una gran distancia del espejo, entonces $i = f$.

Las ecuaciones 1 y 3 pueden usarse para determinar la *posición* de la imagen; también desearíamos saber su tamaño, comparado con el tamaño del objeto. Para tal fin definimos la *amplificación lateral m* como

$$|m| = \frac{\text{tamaño lateral de la imagen}}{\text{tamaño lateral del objeto}}. \tag{4}$$

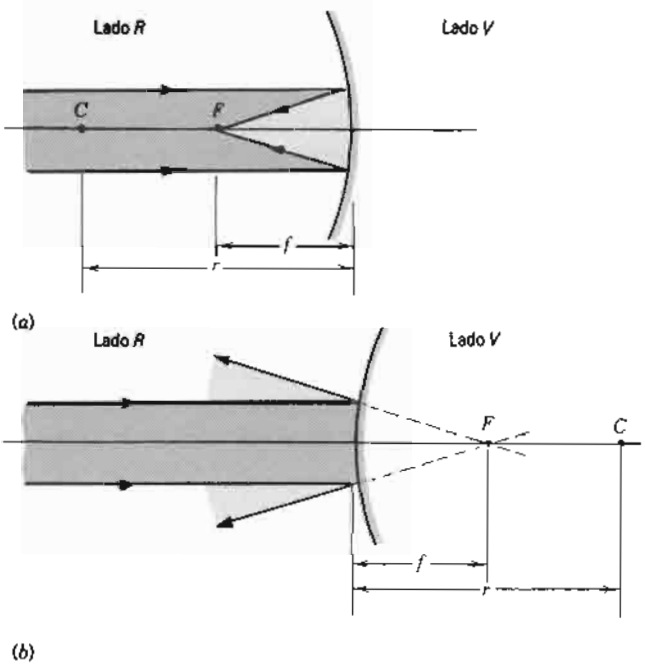


Figura 2 (*a*) En un espejo cóncavo, la luz paralela incidente se lleva a un foco real en F en el lado R del espejo. (*b*) En un espejo convexo, la luz paralela incidente parece divergir de un foco virtual en F en el lado V del espejo.

El signo de m se define de modo que $m > 0$ si la imagen está de pie o erecta (directa) con respecto al objeto, y $m < 0$ si la imagen está de cabeza o invertida con respecto al objeto. Como lo deduciremos más adelante en esta sección, la amplificación lateral está dada por

$$m = -\frac{i}{o}. \tag{5}$$

Convenciones de signos

La figura 2 indica las convenciones de signos que debemos considerar al emplear las ecuaciones 1 y 3. El lado del espejo desde el que incide la luz se llama el lado R, porque es en este lado donde se formará una *imagen real*. Las imágenes reales son aquellas que se forman mediante luz convergente; en forma equivalente, podemos decir que las imágenes reales son aquellas que pueden observarse en una pantalla que se encuentre en la posición de la imagen. En el lado R del espejo se considera que o, i, r y f son positivas.

La región detrás del espejo se llama lado V, porque en este lado se forman *imágenes virtuales*. Las imágenes virtuales son aquéllas formadas mediante luz divergente y que no pueden verse en una pantalla. En el lado V se considera que o, i, r y f son negativas.

De acuerdo con estas convenciones de signos, en la figura 1*b* la distancia o del objeto es positiva (porque el objeto está en el lado R del espejo) y la distancia i de la imagen es negativa (porque la imagen está en el lado V). El centro de curvatura C está en el lado R, así que el radio de curvatura r es positivo. En la figura 1*c*, o es positiva e i es negativa, como en la figura 1*b*, pero r es negativo, porque C está en el lado V.

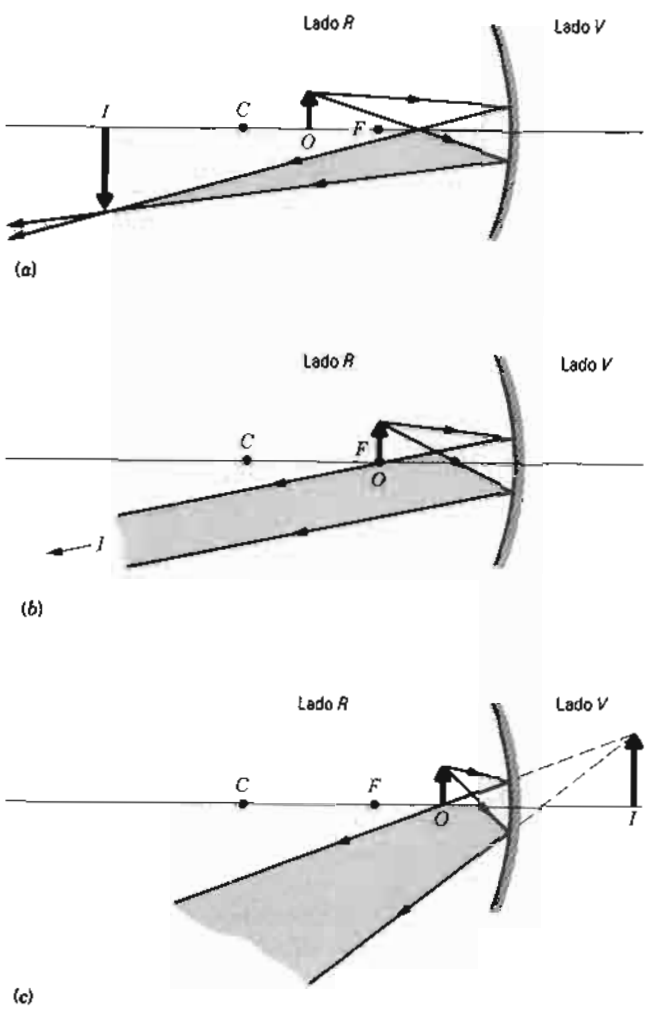


Figura 3 Un objeto se mueve sucesivamente acercándose a un espejo cóncavo, desde (*a*) justo más allá (a la izquierda) del punto focal (*b*) al punto focal y luego (*c*) dentro (derecha) del punto focal. En el proceso, la imagen se mueve desde (*a*) su posición en el lado R hasta (*b*) el infinito, y luego (*c*) reaparece en el lado V.

La figura 3 muestra las distancias de la imagen para tres distancias del objeto diferentes cuando un objeto se mueve hacia un espejo cóncavo. En la figura 3*a*, las distancias del objeto y de la imagen son positivas, porque tanto el objeto como la imagen se encuentran en el lado R del espejo. En la figura 3*b*, el objeto está en el punto focal. Con $o = f$, la ecuación 1 da $i = \infty$. Esto es consistente con la luz paralela que emerge del espejo. En la figura 3*c*, la distancia del objeto permanece positiva pero ahora es

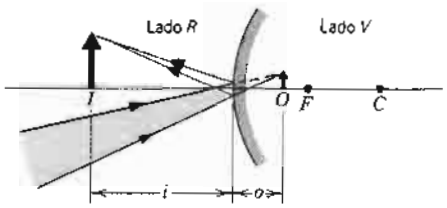


Figura 4 La luz que converge (de espejos o lentes no ilustrados) incide sobre un espejo convexo. El *objeto virtual* en *O* muestra la situación a la que se enfocaría la luz si el espejo no estuviera presente. Por supuesto, no hay una luz en el lado *V* del espejo. Se forma una imagen real *I*. Este arreglo produce una imagen real sólo si la magnitud de la distancia del objeto es menor que la distancia focal, pero en una situación similar una lente convexa forma *siempre* una imagen real.

menor que *f*. En este caso, la ecuación 1 da un valor negativo para *i*; es decir, se forma una imagen virtual en el lado *V*, como se muestra.

En la figura 3*a*, la amplificación lateral *m* determinada de acuerdo con la ecuación 5 es negativa, porque *o* e *i* son ambas positivas. Por lo tanto, la imagen está invertida. (Está también aumentada, porque sucede que *i* es mayor que *o* en el caso ilustrado.) En la figura 3*c*, *o* e *i* tienen signos opuestos, de modo que *m* es positiva y la imagen es directa, como se ilustra.

La figura 4 sugiere una ordenación posible en la que se considera que el objeto está en el lado *V* del espejo, de modo que *o* es negativa. La luz que converge (producida por otro dispositivo óptico, como una lente o un espejo, que no se ilustra) incide sobre el espejo. Si el espejo no estuviese presente, la luz convergería en una imagen en la posición *O* mostrada. Ésta define la posición de un *objeto virtual*, y la distancia entre esta ubicación y el espejo es la distancia (negativa) del objeto. La distancia de la imagen es positiva. La amplificación es positiva, y así la imagen es directa, como se muestra. ¿Puede predecir lo que pasa si el espejo de la figura 4 fuera cóncavo en lugar de convexo? ¿Como se compararía la distancia de la imagen resultante en cuanto a magnitud con la distancia del objeto? ¿Sería la imagen directa o invertida?

Trazado o delineamiento de rayos

Es buena idea comprobar los resultados de los cálculos algebraicos obtenidos de la ecuación del espejo por medio de un método gráfico para determinar la posición de la imagen. Este método se llama *trazado o delineamiento de rayos*. Como se indicó en las figuras 1 a 4, el haz de rayos o bien converge para formar una imagen real o bien diverge partiendo de una imagen virtual. Si podemos trazar estos rayos cuando se reflejan del espejo, podemos encontrar la imagen.

Podemos simplificar este procedimiento si se dibujan unos cuantos rayos básicos, cuya intersección sirva para localizar la imagen. Estos rayos, que se muestran en la figura 5, se eligen, por conveniencia, de entre un número infinito de rayos posibles para encontrar la posición de la imagen. Estos rayos no necesitan existir realmente (parte del espejo podría estar cubierta por una abertura, por ejemplo), pero pueden usarse para determinar la imagen (que es completa aunque se bloquearan algunos de los rayos). Los rayos son:

1. *Un rayo paralelo al eje*, que se refleja al pasar por el punto focal (en el caso de un espejo convergente, Fig. 5*a*) o parecen venir del punto focal (en el caso de un espejo divergente, Fig. 5*c*).

2. *Un rayo que pasa por el punto focal* (espejo convergente, Fig. 5*a*) o que parece hacerlo (espejo divergente, Fig. 5*c*), el cual se refleja paralelamente al eje.

3. *Un rayo que pasa por el centro de curvatura C*, que se refleja por la misma trayectoria original (Figs. 5*b* y 5*d*).

4. *Un rayo que incide en el vértice del espejo* (el punto donde el eje interseca al espejo), el cual es reflejado a un ángulo igual en el lado opuesto del eje (Figs. 5*b* y 5*d*).

Pueden emplearse dos cualesquiera de estos cuatro rayos para determinar la posición de la imagen, como se indica en la figura 5.

Problema muestra 1 En la situación que se muestra en las figuras 5*a* y 5*b*, suponga que $f = 12$ cm y $o = 30$ cm. Encuentre la posición de la imagen y la amplificación lateral.

Solución Al despejar de la ecuación 1, $1/i$, obtenemos

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{12\text{ cm}} - \frac{1}{30\text{ cm}},$$

o sea

$$i = 20\text{ cm}.$$

Esto es consistente con las figuras 5*a* y 5*b*.

Usando la ecuación 5, se encuentra que la amplificación es

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{20\text{ cm}}{30\text{ cm}} = -0.67.$$

La imagen es 2/3 del tamaño del objeto y (como lo indica el signo menos) está invertida. Esto es consistente con las figuras 5*a* y 5*b*.

Problema muestra 2 Un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 22 cm. A 14 cm del espejo se coloca un objeto. Encuentre la posición y describa la imagen usando los métodos (*a*) gráfico y (*b*) algebraico.

Solución (*a*) La figura 6 muestra al objeto y al espejo. Se trazan los rayos 1, 2 y 3 para encontrar la posición de la imagen.

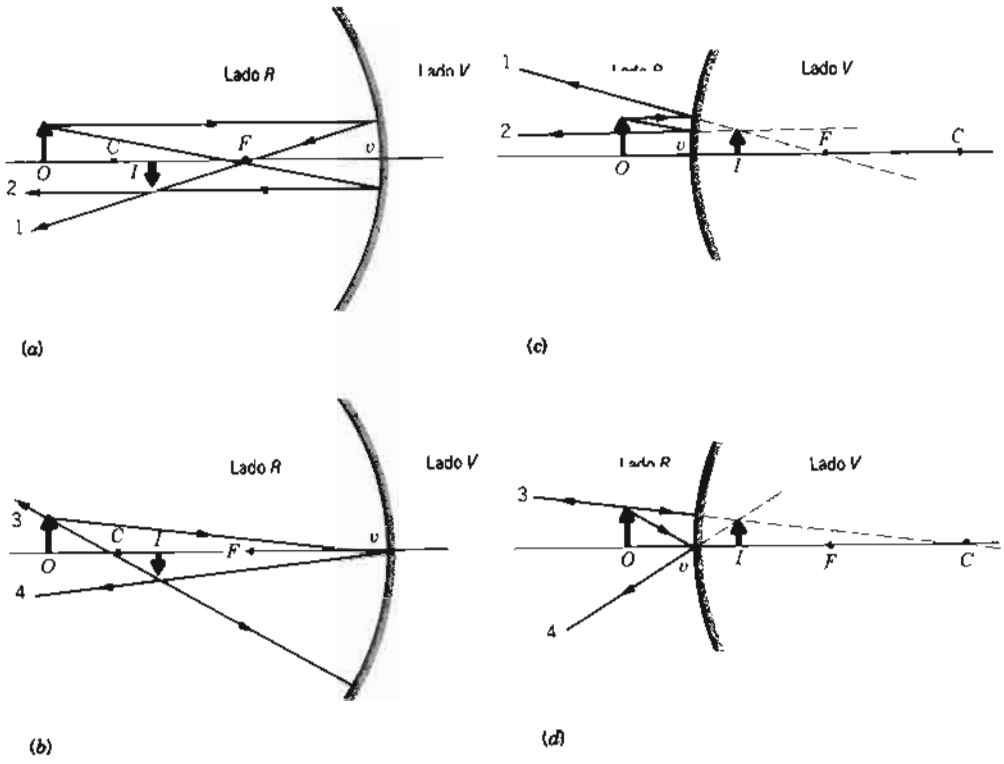


Figura 5 (*a*,*b*) Cuatro rayos que pueden emplearse en construcciones gráficas para encontrar la posición de la imagen de un objeto en un espejo cóncavo. Nótese que la imagen es real e invertida. (*c*,*d*) Cuatro rayos similares trazados en el caso de un espejo convexo. La imagen es virtual y directa.

La imagen es virtual, es directa y se encuentra en el lado *V* del espejo; la distancia de la imagen es, en magnitud, aproximadamente la mitad de la distancia al objeto, y la imagen es aproximadamente la mitad de alta que el objeto.

(*b*) De acuerdo con nuestra convención de signos, el radio es negativo cuando el centro de curvatura está del lado *V* del espejo. Al aplicar la ecuación 1, tenemos

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r}$$

o sea

$$\frac{1}{+14\text{ cm}}+\frac{1}{i}=\frac{2}{-22\text{ cm}},$$

lo cual da

$$i=-6.2\text{ cm}.$$

Este valor es consistente con el resultado de nuestra construcción gráfica.

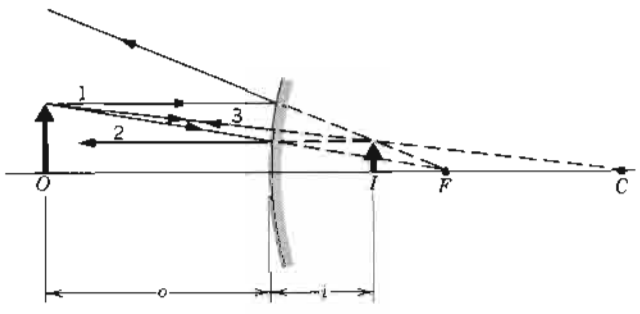


Figura 6 Problema muestra 2.

La amplificación lateral es, de la ecuación 5,

$$m=-\frac{i}{o}=-\frac{-6.2\text{ cm}}{+14\text{ cm}}=+0.44,$$

que es también consistente con el resultado obtenido gráficamente. Nótese que $m>0$, lo que indica que la imagen es directa.

Deducción de las ecuaciones de los espejos

La figura 7 muestra un objeto puntual *O* en el eje de un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura es *r*. Un rayo de *O* que forma un ángulo arbitrario α con el eje interseca al eje en *I* después de la reflexión del espejo en *a*. Un rayo que sale de *O* a lo largo del eje se refleja de regreso a lo largo de sí mismo en *v* y pasa también por *I*.

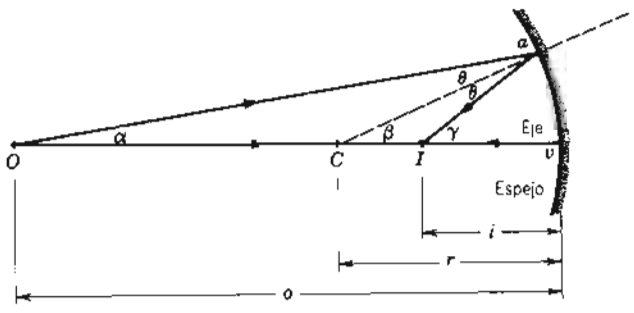


Figura 7 Un objeto puntual *O* forma una imagen puntual real *I* después de la reflexión de un espejo cóncavo.

Entonces I es la imagen de O; es una imagen *real* porque la luz pasa realmente por I. Hallemos la posición de I.

Un teorema útil es el que dice que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Si se aplica este teorema a los triángulos OaC y OaI en la figura 7 se obtiene

$$\beta = \alpha + \theta$$

y

$$\gamma = \alpha + 2\theta.$$

Al suprimir θ de estas ecuaciones nos conduce a

$$\alpha + \gamma = 2\beta. \tag{6}$$

Expresado en radianes podemos escribir los ángulos α, β y γ así:

$$\alpha \approx \frac{av}{vO} = \frac{av}{o},$$

$$\beta \approx \frac{av}{vC} = \frac{av}{r}, \tag{7}$$

$$\gamma \approx \frac{av}{vI} = \frac{av}{i}.$$

Nótese que sólo la ecuación para β es exacta, porque el centro de curvatura del arco av está en C y no en O o en I. Sin embargo, las ecuaciones para α y para γ son aproximadamente correctas cuando estos ángulos son lo suficientemente pequeños. *En todo lo que sigue supondremos que los rayos que divergen del objeto forman sólo un ángulo pequeño α con el eje del espejo.* Llamamos a tales rayos, que se encuentran cerca del eje del espejo, rayos *paraxiales*. No es necesario hacer tal suposición para espejos planos. Al sustituir las ecuaciones 7 en la ecuación 6 y cancelando av tenemos la ecuación 1,

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}, \tag{1}$$

que es la ecuación que queríamos probar.

La figura 8 muestra un objeto puntual en el eje de un espejo convexo. Los ángulos están representados (rotulados) similarmente a los de la figura 7. Podemos realizar un análisis similar al dado anteriormente, lo cual nos dará de nuevo la ecuación 1, *siempre que* respetemos la convención de signos según la cual se considera que i y r son negativos en la figura 8. Esta deducción se deja como ejercicio (véase el problema 6).

Es importante notar que la ecuación 1 no contiene α (o β, γ o θ), de modo que es válida para todos los rayos que incidan sobre el espejo con tal que sean suficientemente paraxiales. En un caso real, los rayos pueden hacerse tan paraxiales como uno lo desee al colocar un diafragma circular enfrente del espejo, centrado alrededor del vértice v; esto impondrá cierto valor máximo de α.

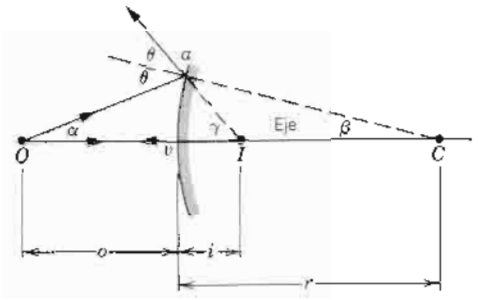


Figura 8 Un objeto puntual O forma una imagen virtual puntual I después de la reflexión de un espejo convexo. Compárela con la figura 7.

Para deducir la ecuación de la amplificación lateral (Ec. 5), considérese la figura 9, la cual muestra un rayo (avb) que se origina en la punta del objeto, se refleja en el espejo en el punto v, y pasa por la punta de la imagen. La ley de la reflexión requiere que este rayo forme ángulos iguales θ con el eje del espejo como se muestra. Para los dos triángulos rectángulos semejantes aOv y bIv podemos escribir

$$\frac{Ib}{Oa} = \frac{vI}{vO}.$$

La cantidad de la izquierda (con la excepción del signo) es la *amplificación lateral* m del espejo dada por la ecuación 4. Puesto que queremos representar una imagen *invertida* mediante una amplificación *negativa*, arbitrariamente definimos m, para este caso, como $-(ib/Oa)$. Puesto que $vI = i$ y $vO = o$, tenemos inmediatamente el resultado previamente dado como ecuación 5,

$$m = -\frac{i}{o}. \tag{5}$$

Esta ecuación da la amplificación para espejos esféricos y planos en todos los casos. En un espejo plano, $o = -i$ y la amplificación predicha es +1, lo cual, de acuerdo con la experiencia, indica que es imagen *directa* y del mismo tamaño que el objeto.

En los espejos esféricos las imágenes sufren de varias distorsiones las cuales se originan porque la suposición de

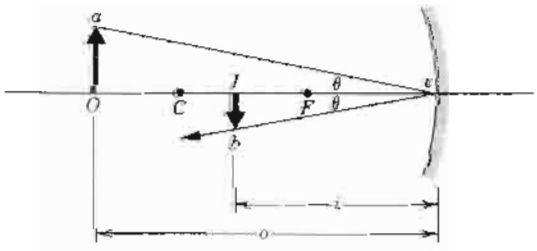


Figura 9 Un objeto O forma una imagen real e invertida I en un espejo cóncavo.

los rayos paraxiales nunca se justifica del todo. En general, una fuente puntual no da por resultado una imagen puntual; véase el problema 2. Aparte de esto, la distorsión se presenta porque la amplificación varía un tanto con la distancia del eje del espejo, siendo la ecuación 5 estrictamente correcta sólo para rayos paraxiales. Finalmente, debemos tener siempre en cuenta que la óptica geométrica es en sí misma sólo un caso especial de la óptica física; los efectos de difracción (véase el capítulo 46) pueden también distorsionar o desenfocar la imagen.

44-2 SUPERFICIES ESFÉRICAS REFRINGENTES

En la figura 10*a*, la luz que procede de un objeto puntual *O* cae sobre una superficie esférica refringente convexa de radio de curvatura *r*. La superficie separa a dos medios: el índice de refracción del medio que contiene la luz incidente es n_1, mientras que el medio que contiene la luz refractada es n_2. Tal diagrama puede representar la luz que incide sobre una región pequeña de una esfera de vidrio; nótese que la imagen real se forma dentro del vidrio (medio 2). Si bien no se encuentran a menudo imágenes de este tipo, la comprensión de las imágenes producidas por superficies esféricas refringentes es esencial en el estudio de las lentes delgadas en la sección 44-3.

En la figura 10*b*, una superficie cóncava forma una imagen virtual cuando $n_1 < n_2$, la luz en el medio 2 diverge como si viniera de la imagen puntual *I*. La figura 10*c* muestra una superficie que, nuevamente, es cóncava con respecto a la luz incidente, pero ahora $n_1 > n_2$, y se forma una imagen real.

Como lo probaremos más adelante, la distancia *i* de la imagen se relaciona con la distancia *o* del objeto, el radio de curvatura *r*, y dos índices de refracción de acuerdo con

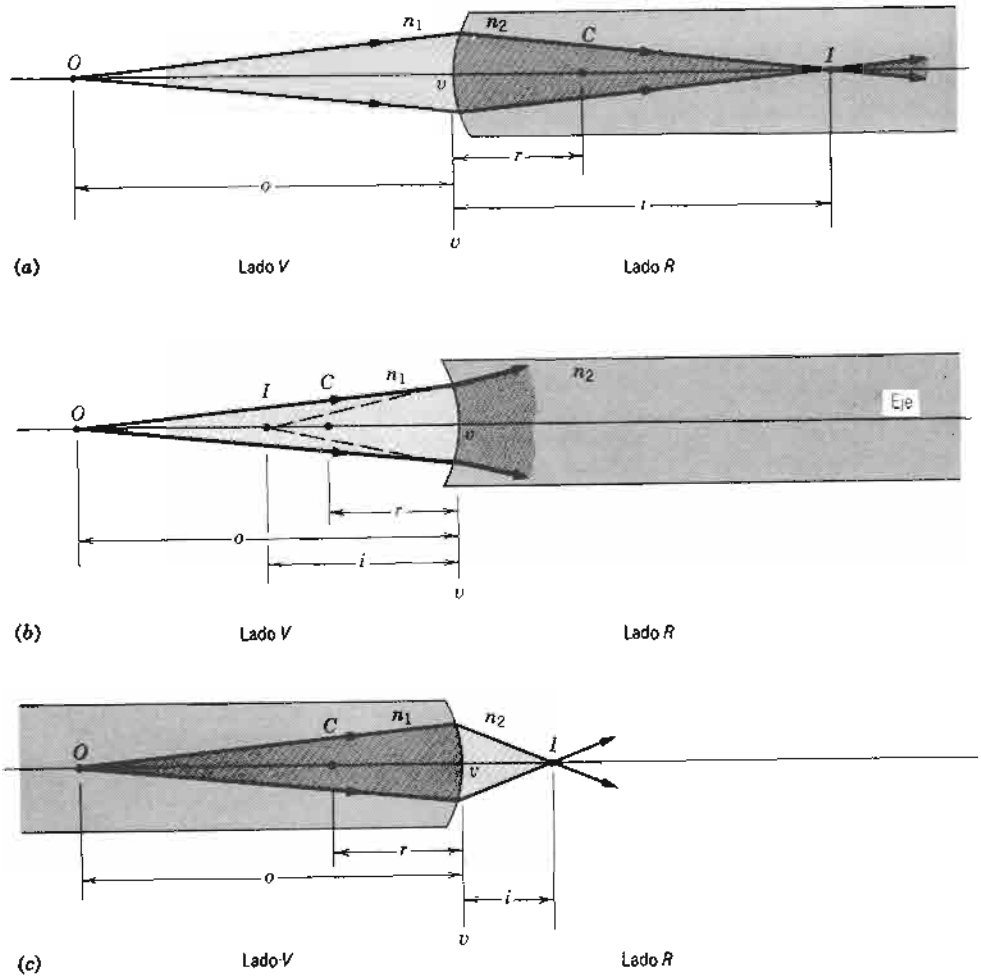


Figura 10 (*a*) Se forma una imagen real de un objeto puntual por refracción en una frontera esférica convexa entre los dos medios; en este caso, $n_2 > n_1$. (*b*) Se forma una imagen virtual por refracción en una frontera esférica cóncava cuando $n_2 > n_1$. (*c*) Lo mismo que (*b*), excepto que $n_2 < n_1$.

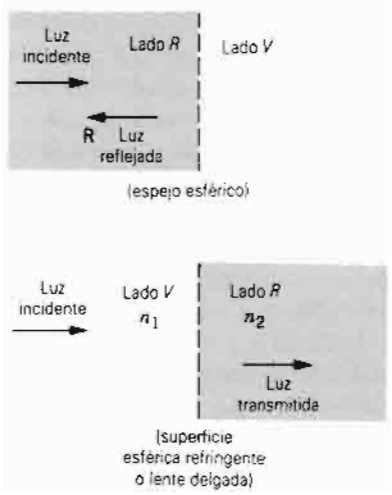


Figura 11 Se forman imágenes reales en el mismo lado de la luz incidente en los espejos pero en el lado opuesto en las superficies refringentes y en las lentes.

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \qquad (8)$$

Esta sola ecuación, con las convenciones de signos apropiadas, es suficiente para analizar superficies tanto convexas como cóncavas. La única restricción, como lo fue en el caso de nuestro estudio de los espejos esféricos, es que los rayos deben ser paraxiales.

En la figura 11 se resumen las convenciones de signos que deben emplearse con la ecuación 8. Si se quiere formar una imagen real mediante luz convergente de la superficie, ésta debe aparecer en el lado de la superficie opuesta a la luz incidente. Este lado se llama lado *R*. Las imágenes virtuales, como se muestra en la figura 10*b*, se forman en el mismo lado que la luz incidente, al cual llamamos el lado *V*. El radio de curvatura se considera positivo si el centro de curvatura *C* se encuentra en el lado *R* (como en la Fig. 10*a*) y negativo si *C* se localiza en el lado *V* (como en las Figs. 10*b* y 10*c*). Las distancias del objeto son positivas para objetos reales (en el lado *V*), mientras que las distancias de la imagen son positivas para imágenes reales (en el lado *R*). La distancia *i* de la imagen es positiva en las figuras 10*a* y 10*c*, e *i* es negativa en la figura 10*b*.

Problema muestra 3 Encuentre la posición de la imagen para la geometría mostrada en la figura 10*a*, si el radio de curvatura *r* es de 11 cm, $n_1 = 1.0$ y $n_2 = 1.9$. El objeto se encuentra a 19 cm a la izquierda del vértice *v*.

Solución De la ecuación 8,

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

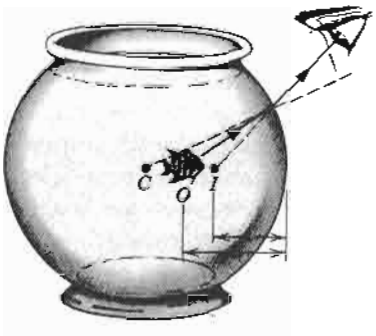


Figura 12 Problema muestra 4. Obsérvese que el rayo que llega de *O* se desvía alejándose de la normal (indicada por la línea de trazos), de acuerdo con la ley de Snell.

tenemos que

$$\frac{1.0}{+19\text{ cm}} + \frac{1.9}{i} = \frac{1.9 - 1.0}{+11\text{ cm}}.$$

Nótese que *r* es positivo porque el centro de curvatura *C* de la superficie en la figura 10*a* está en el lado *R*. Si resolvemos la ecuación anterior para *i*, hallamos

$$i = +65\text{ cm}.$$

Este resultado concuerda con la figura 10*a* y es consistente con las convenciones de signos. La luz pasa realmente por la imagen puntal *I* de modo que la imagen es real, como lo indica el signo positivo que hallamos para *i*. Recuérdese también que n_1 (= 1.0 en este caso) se refiere siempre al medio que está en el lado de la superficie de donde llega la luz.

Problema muestra 4 Un pez está nadando a lo largo de un diámetro horizontal y se encuentra a 10 cm de la pared de una pecera esférica de 15 cm de radio (Fig. 12). Considere que el índice de refracción del agua sea de $n_1 = 1.33$ y determine la posición del pez de acuerdo con un observador que esté fuera de la pecera. Supóngase que el vidrio de la pecera es tan delgado que no influye la refracción debida al vidrio.

Solución De acuerdo con las convenciones de signos, en la geometría de la figura 12 consideramos que *o* es positiva porque el objeto está en el lado *V* de la superficie esférica, y consideramos que *r* es negativa porque *C* está en el lado *V*. Usamos la ecuación 8, con $n_2 = 1$, la cual resolvemos para dar

$$\frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{o} = \frac{1 - 1.33}{-15\text{ cm}} - \frac{1.33}{10\text{ cm}}.$$

Al despejar, hallamos que

$$i = -6.4\text{ cm}.$$

Esto es, el pez parece estar más cerca de la pared de la pecera de lo que realmente está.

Deducción de la fórmula de la superficie refringente (Ec. 8)

La figura 13 muestra una fuente puntual *O* cerca de una superficie esférica refringente de radio *r*. Un rayo que

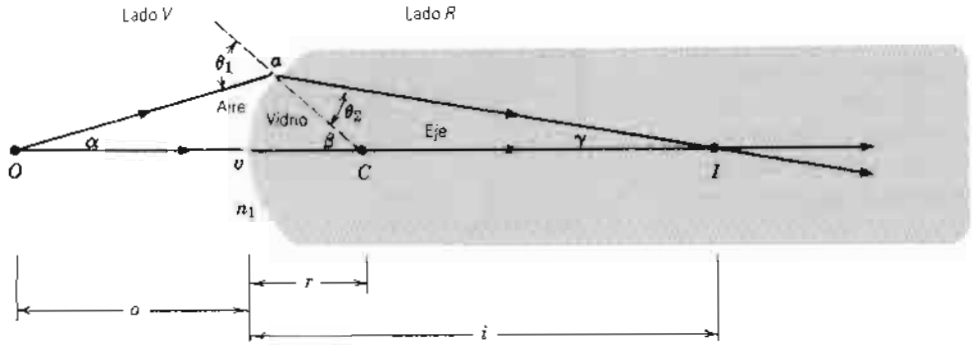


Figura 13 Un objeto puntual O forma una imagen puntual real I después de la refracción en una superficie esférica convexa entre los dos medios.

procede de O incide perpendicularmente sobre la superficie en v y pasa sin desviarse al medio 2 por el centro de curvatura C. Este rayo establece un eje conveniente para nuestro cálculo. Un segundo rayo, que forma un ángulo α pequeño pero arbitrario con el eje e incide sobre la superficie refringente en a, se refracta de acuerdo con

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2.$$

El rayo refractado interseca al primer rayo en I, ubicando por tanto la imagen de O.

Al igual que en la deducción de la ecuación del espejo, usamos el teorema de que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Al aplicar este resultado a los triángulos COa e ICa nos da

$$\theta_1 = \alpha + \beta \qquad \text{y} \qquad \beta = \theta_2 + \gamma. \tag{9}$$

Como lo hicimos en la sección 44-1, suponemos que todos los rayos son paraxiales, de modo que todos los ángulos (β, γ, θ_1, θ_2) son pequeños, y el seno de cada ángulo puede sustituirse por el ángulo mismo. Esto nos permite escribir la ley de la refracción como

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2. \tag{10}$$

Al combinar las ecuaciones 9 y 10 conduce, después de reordenar, a

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta. \tag{11}$$

En medidas de radianes los ángulos α, β y γ en la figura 13 son

$$\alpha \approx \frac{av}{o}, \quad \beta = \frac{av}{r}, \quad \text{y} \quad \gamma \approx \frac{av}{i}. \tag{12}$$

Sólo la segunda de estas ecuaciones es exacta. Las otras dos son aproximadas porque I y O *no* son los centros de los círculos de los que av es un arco. Sin embargo, en los rayos paraxiales (α suficientemente pequeño) las imprecisiones de las ecuaciones 12 pueden ser tan pequeñas como se desee.

Al sustituir las ecuaciones 12 en la ecuación 11 conduce directamente a la ecuación 8.

44-3 LENTES DELGADAS

Existen muchos ejemplos comunes de la refracción de la luz por una lente. Las lentes de nuestros ojos enfocan la luz en la retina, mientras que las lentes correctoras de los anteojos o lentes de contacto compensan las deficiencias en nuestra visión. La lente de múltiples elementos de una cámara enfoca la luz en la película. En esta sección consideraremos las propiedades de tales lentes.

En la mayoría de las situaciones de refracción existe más de una superficie refringente. Esto es cierto incluso para una lente de contacto, donde la luz pasa primero del aire al vidrio y después del vidrio a nuestro ojo. Aquí sólo se considera el caso especial de una *lente delgada*; es decir, el espesor de la lente es pequeño en comparación con la distancia o del objeto, la distancia i de la imagen, o los radios de curvatura r_1 y r_2 de cualquiera de las dos superficies refringentes. En una lente tal —como lo probaremos más adelante en esta sección— estas cantidades se relacionan según

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \tag{13}$$

donde la distancia focal f de la lente está dada por

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{14}$$

Las ecuaciones 13 y 14 son aproximaciones que se cumplen sólo para lentes delgadas y rayos paraxiales. Nótese que la ecuación 13 es la misma ecuación que usamos para los espejos esféricos. La ecuación 14 se llama, a menudo, *ecuación de los fabricantes de lentes*; relaciona la distancia focal de la lente con el índice de refracción n del material de la lente y con los radios de curvatura de las dos superficies.

En la ecuación 14, r_1 es el radio de curvatura de la superficie de la lente sobre la cual la luz incide primero y r_2 es el de la segunda superficie. La ecuación 14 se emplea en los casos en que una lente de índice de refracción n está inmersa en el aire. Si la lente está inmersa en un medio para el cual el índice de refracción no es la unidad, la ecuación 14 es válida todavía si reemplazamos a n en esa fórmula por $n_{\text{lente}}/n_{\text{medio}}$.

La amplificación lateral de una lente delgada está dada por la misma fórmula que la de un espejo esférico,

$$m = -\frac{i}{o}. \tag{15}$$

Obtendremos este resultado más adelante en esta sección.

Convenciones de signos

Las convenciones de signos de o, i, r_1 y r_2 son similares a las de los espejos esféricos y las superficies refringentes esféricas; véase la figura 11. La figura 14 ilustra estas convenciones de signos. Como antes, tenemos un lado R y un lado V.

1. Los radios de curvatura r_1 (relativos a la primera superficie sobre la que incide la luz) y r_2 (relativo a la segunda superficie sobre la que incide la luz) son positivos si los centros de curvatura correspondientes están en el lado R. Los radios son negativos si los centros de curvatura correspondientes están en el lado V. En la figura 14*a*, el centro de curvatura C_1 se encuentra en el lado R, así que r_1 es positivo, mientras que C_2 se encuentra en el lado V, por lo cual r_2 es negativo. Al observar la ecuacion 13 ésta demuestra que, cuando $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$, la distancia focal f es siempre positiva. Tal lente se llama lente *convergente*; una lente que es más gruesa en el centro que en los extremos, cuando está inmersa en un medio de índice de refracción menor que el de la lente, es siempre una lente convergente.

En la figura 14*b*, C_1 está en el lado V, mientras que C_2 está en el lado R. De aquí que r_1 sea negativo y r_2 sea positivo. En este caso, la ecuación 13 muestra que f es siempre negativa. Una lente así se llama lente *divergente*; una lente que sea más delgada en el centro que en los extremos, cuando está inmersa en un medio de índice de refracción menor, es siempre una lente divergente.

2. La distancia o del objeto es positiva si el objeto es real y se encuentra en el lado V de la lente, como en las figuras 14*a* y 14*b*. La luz que proviene de un objeto real diverge cuando incide sobre la lente. También es posible tener que luz convergente incida sobre la lente, como en la figura 14*c*. En este caso, si la lente no estuviera presente, la luz convergente formaría una imagen en O en el lado R de la lente; consideramos esta imagen como un objeto virtual, y en este caso o es negativa.

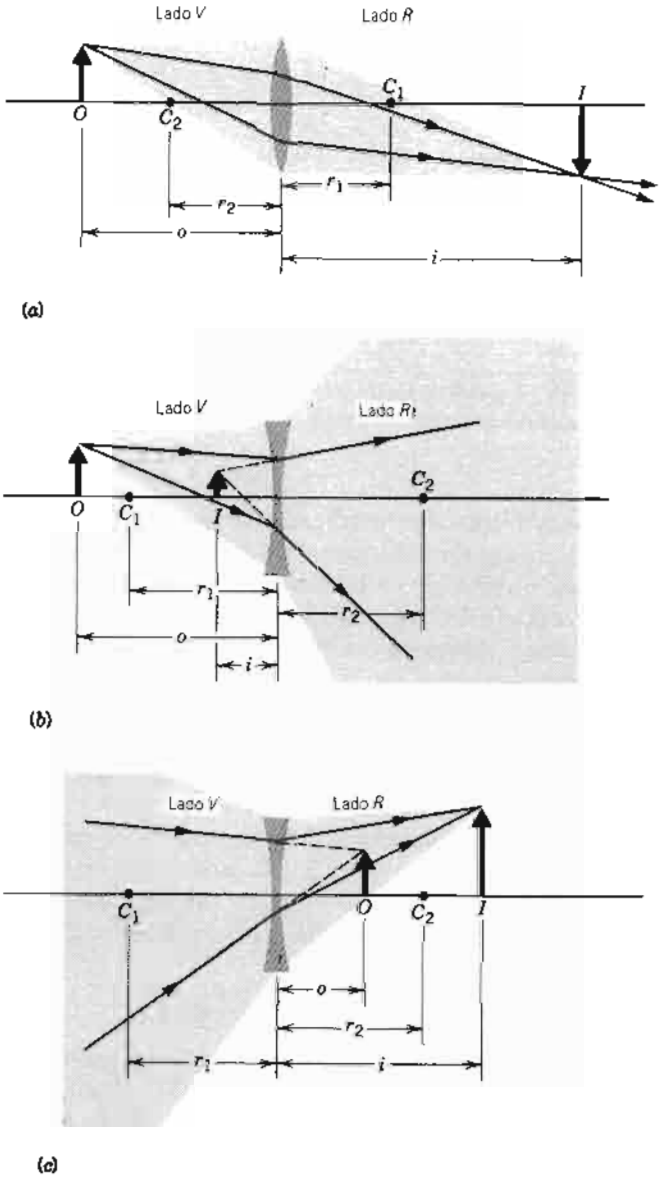


Figura 14 (*a*) Se forma una imagen real, invertida mediante una lente convergente. Tal lente tiene una distancia focal positiva y es más gruesa en el centro que en los extremos. (*b*) Se forma una imagen virtual, directa mediante una lente divergente. Tal lente tiene una distancia focal negativa y es más delgada en el centro que en los extremos. (*c*) La luz convergente da un objeto virtual en O. Se forma una imagen real, directa en I mediante esta lente divergente.

3. La distancia i de la imagen es positiva si la imagen (real) se encuentra en el lado R de la lente, como en las figuras 14*a* y 14*c*, mientras que i es negativa si la imagen (virtual) se encuentra en el lado V de la lente, como se muestra en la figura 14*b*.

4. De acuerdo con la ecuación 15, la amplificación es negativa cuando tanto i como o son positivas, como en la figura 14*a*, correspondiendo a una imagen *invertida*. En

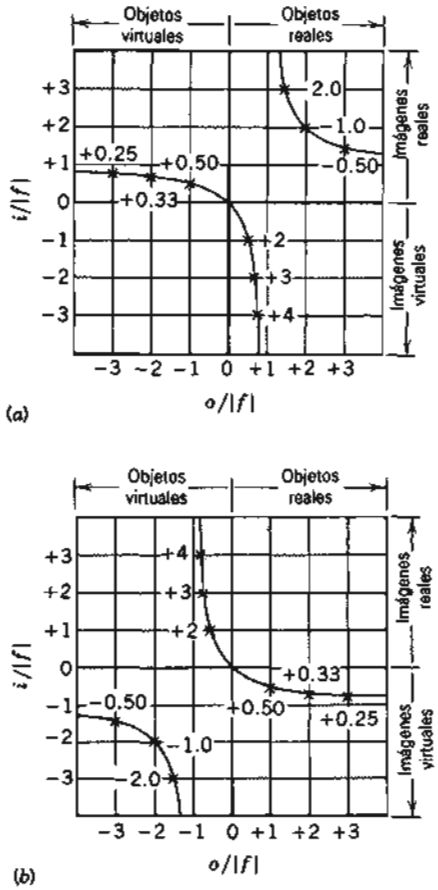


Figura 15 (*a*) Una representación de $i/|f|$ y $o/|f|$ para espejos cóncavos y lentes convergentes. Nótese que (cuadrante izquierdo inferior) un objeto virtual no puede producir una imagen virtual. Los números junto a las cruces son las amplificaciones (véase la Ec. 15), indicando los valores positivos imágenes directas y los valores negativos imágenes invertidas. (*b*) Lo mismo para espejos convexos y lentes divergentes. Nótese que (cuadrante superior derecho) un objeto real no puede producir una imagen real. Véase "Image Formation in Lenses and Mirrors, a Complete Representation", por Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, mayo de 1976, pág. 296.

el caso de una imagen directa, como en las figuras 14*b* y 14*c*, la amplificación es positiva, porque o e i tienen signos opuesto. En el caso mostrado en la figura 14*b*, o es positiva e i es negativa, mientras que en la figura 14*c*, o es negativa e i es positiva.

Puede obtenerse una representación útil de las convenciones de signos tanto para los espejos esféricos como para las lentes delgadas si escribimos la ecuación del espejo (Ec. 3) y la ecuación de la lente (Ec. 13) en esta forma:

$$\frac{1}{o/|f|} + \frac{1}{i/|f|} = \pm 1, \qquad (16)$$

la cual se obtiene al multiplicar ambas ecuaciones por $|f|$, el valor absoluto de la distancia focal f. En el lado derecho de la ecuación 16, elegimos +1 para una lente convergente o un espejo cóncavo, y −1 para una lente divergente o un espejo convexo. Véase el problema 21.

La figura 15 es una representación gráfica de la ecuación 16, con lentes convergentes y espejos cóncavos representados en la figura 15*a* y lentes divergentes y espejos convexos en la figura 15*b*. Cada gráfica contiene dos ramas de una hipérbola, una con amplificación positiva y una con amplificación negativa. Estas dos gráficas resumen con precisión todas las aplicaciones posibles de las ecuaciones 3 y 5 (para espejos esféricos) y de las ecuaciones 13 y 15 (para lentes delgadas).

En contraste con un espejo esférico o con una superficie refringente esférica, una lente tiene *dos* puntos focales. En una lente delgada, los dos puntos focales se encuentran a distancias iguales f de la lente en ambos lados de la misma.

Cuando un objeto puntual se encuentra en el *primer punto focal* F_1, emerge luz paralela del lente, como se muestra en la figura 16*a*. En el caso de una lente divergente (Fig. 16*b*), el objeto puntual es un objeto virtual. La luz convergente, que se habría enfocado en F_1 si la lente no estuviera ahí, se desenfoca en luz paralela por la lente divergente. El *segundo punto focal* F_2 es el punto donde la luz paralela se enfoca (o da evidencia de estarlo) por la lente, como se muestra en la figura 17. Nótese que, al comparar las figuras 16 y 17, en una lente convergente las posiciones de los puntos focales primero y segundo son opuestos a aquéllos de una lente divergente.

En las figuras 16 y 17, todos los rayos contienen el mismo número de longitudes de onda; es decir, tienen la misma *longitud del camino óptico* (véase la sección

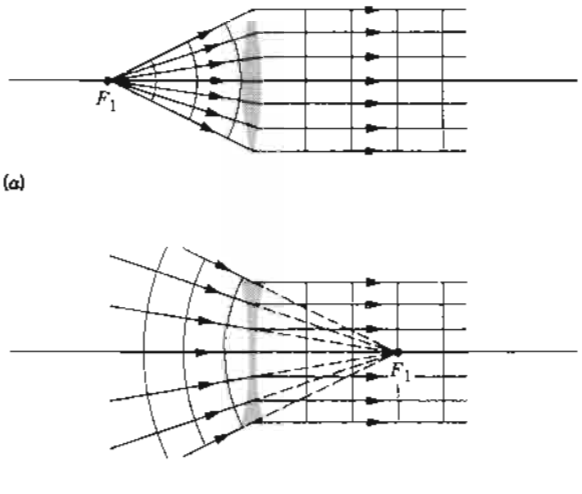


Figura 16 (*a*) Cuando un objeto puntual se encuentra en el primer punto focal F_1 de una lente convergente, de la lente emerge una luz paralela. (*b*) En el caso de una lente divergente, un objeto puntual virtual da luz paralela.

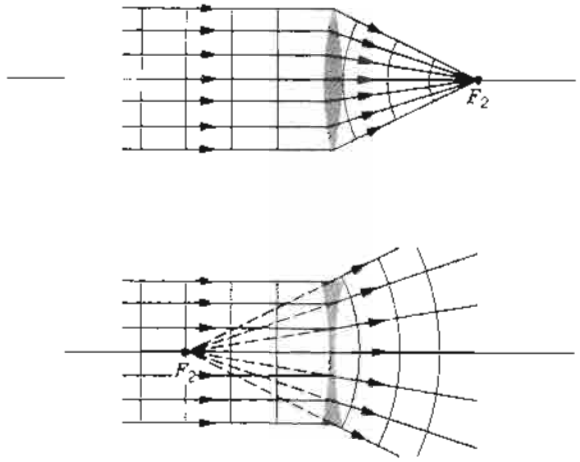


Figura 17 (*a*) Cuando luz paralela incide sobre una lente convergente, la luz se enfoca en el segundo punto focal F_2. (*b*) Cuando incide luz paralela sobre una lente divergente, ésta parece emerger del segundo punto focal.

43-5). Nótese cómo las longitudes geométricas diferentes de los caminos de los rayos por la lente (donde la velocidad de la luz es menor de lo que es en el aire) los frentes de onda esféricos cambian a planos o los frentes de onda planos cambian a esféricos.

Trazado o delineamiento de rayos

Como sucedió ya en los espejos esféricos, es útil determinar la posición de la imagen formada por una lente delgada usando un método gráfico con unos cuantos rayos básicos. La figura 18 muestra tres rayos que pueden emplearse:

1. El rayo (el rayo 1 en la Fig. 18) que pasa por (o bien, al prolongarlo, parece pasar por) el primer punto focal F_1 emerge de la lente paralelo al eje.

2. Un rayo (el rayo 2 en la Fig. 18) paralelo al eje pasa por (o, al prolongarlo, se ve que pasa por) el segundo punto focal F_2.

3. Un rayo (el rayo 3 en la Fig. 18) que incide sobre la lente en su centro pasa por la lente sin desviarse, porque cerca de su centro la lente se comporta como si se tratara de un trozo de vidrio plano con lados paralelos, lo cual significa que no cambia la dirección del rayo.

Cualquiera de estos dos rayos pueden emplearse para localizar la imagen; se dispone de un tercero para comprobación. Nótese de la figura 18 que, para los tres rayos, consideramos que la refracción ocurre en un plano en la posición de la lente. Esto sólo puede suceder para una lente delgada.

Problema muestra 5 Las lentes de la figura 14 tienen radios de curvatura de 42 cm de magnitud y están hechos de vidrio con $n = 1.65$. Calcule sus distancias focales.

Solución Puesto que C_1 se encuentra en el lado R de la lente en la figura 14*a*, r_1 es positivo (= +42 cm). Puesto que C_2 se encuentra en el lado V, r_2 es negativo (= −42 cm). Al sustituir en la ecuación 14 se obtiene

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.65-1)\left(\frac{1}{+42\text{ cm}} - \frac{1}{-42\text{ cm}}\right)$$

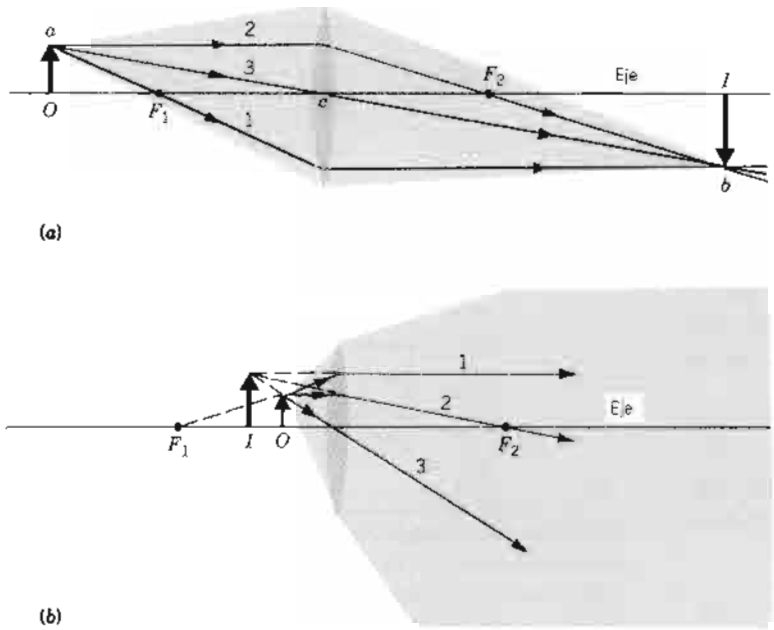


Figura 18 Tres rayos que pueden emplearse para determinar la posición de la imagen formada por una lente delgada.

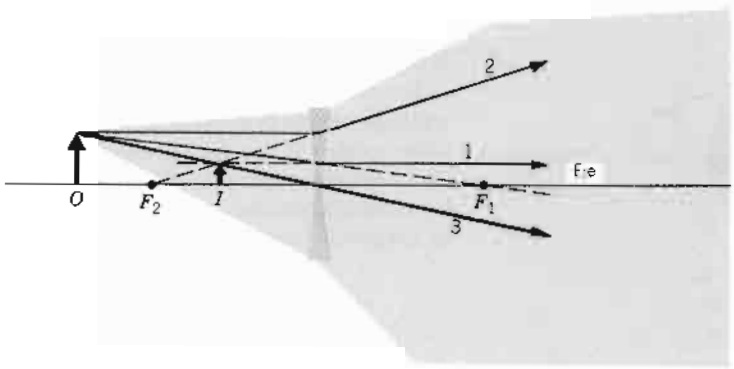


Figura 19 Problema muestra 6.

o sea

$$f = +32 \text{ cm}.$$

Una distancia focal positiva indica que, de acuerdo con lo que hemos dicho, la luz paralela incidente converge después de la refracción para formar un foco real.

En las figuras 14*b* y 14*c*, C_1 se encuentra en el lado V de la lente de modo que r_1 es negativo (= −42 cm). Puesto que r_2 es positivo (= +42 cm), la ecuación 14 da

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.65-1)\left(\frac{1}{-42 \text{ cm}} - \frac{1}{+42 \text{ cm}}\right)$$

o sea

$$f = -32 \text{ cm}.$$

Problema muestra 6 Un objeto está a 38 cm frente a una lente divergente de −24 cm de distancia focal. Encuentre la posición y la amplificación lateral de la imagen usando métodos (*a*) gráficos y (*b*) algebraicos.

Solución (*a*) En la figura 19 se muestra el diagrama de rayos. El rayo 1 se dirige hacia F_1 cuando incide sobre la lente; éste emerge paralelo al eje. El rayo 2, originalmente paralelo al eje, emerge como si proviniera de F_2. El rayo 3 pasa sin desviarse por el centro de la lente. Los tres rayos parecen venir del ápice de la imagen *I*. Nótese que sólo dos de estos rayos bastarían para localizar la imagen; sin embargo, es útil dibujar un tercer rayo para reducir la probabilidad de cometer un error.

La construcción gráfica indica que la imagen es virtual, directa, localizada a unos 2/3 de una distancia focal de la lente en el lado V, y aproximadamente de 1/3 de la altura del objeto.

(*b*) Usando la ecuación 13, tenemos

$$\frac{1}{+38 \text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{-24 \text{ cm}}$$

o sea

$$i = -15 \text{ cm},$$

en consistencia con el resultado gráfico. La amplificación es

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{-15 \text{ cm}}{+38 \text{ cm}} = +0.39,$$

también consistente con el resultado gráfico.

Deducción de las fórmulas de las lentes delgadas (Ecs. 13 y 14)

Consideraremos a cada superficie de la lente por separado, usando la imagen formada por la primera superficie como objeto de la segunda.

La figura 20*a* muestra tal "lente" de vidrio grueso de longitud L cuyas superficies están talladas de tal forma que los radios son r_1 y r_2. Un objeto puntual O está colocado cerca de la superficie izquierda como se muestra. Un rayo que salga de O a lo largo del eje no se desvía al entrar o salir de la lente.

Un segundo rayo que sale de O con un ángulo α con el eje incide sobre la superficie en el punto a, se refracta, e incide sobre la segunda superficie en el punto b. El rayo es nuevamente refractado y cruza al eje en I, el cual, por ser la intersección de dos rayos que parten de O, es la imagen del punto O, formada después de la refracción por las dos superficies.

La figura 20*b* muestra la primera superficie, la cual forma una imagen virtual de O en I'. Para localizar I', usamos la ecuación 8, con $n_1 = 1$ y $n_2 = n$:

$$\frac{1}{o} + \frac{n}{i'} = \frac{n-1}{r_1},$$

o, teniendo en cuenta que i' es negativa,

$$\frac{1}{o} - \frac{n}{|i'|} = \frac{n-1}{r_1}. \qquad (17)$$

La figura 20*c* muestra la segunda superficie. A no ser que un observador en el punto b estuviera enterado de la existencia de la primera superficie, se pensaría que la luz que incide sobre ese punto se originó en el punto I' en la figura 20*b* y que la región a la izquierda de la superficie estaba ocupada por vidrio. Entonces, la imagen (virtual) I' formada por la primera superficie sirve como un objeto real O' para la segunda superficie. La distancia de este objeto de la segunda superficie es

$$o' = |i'| + L. \qquad (18)$$

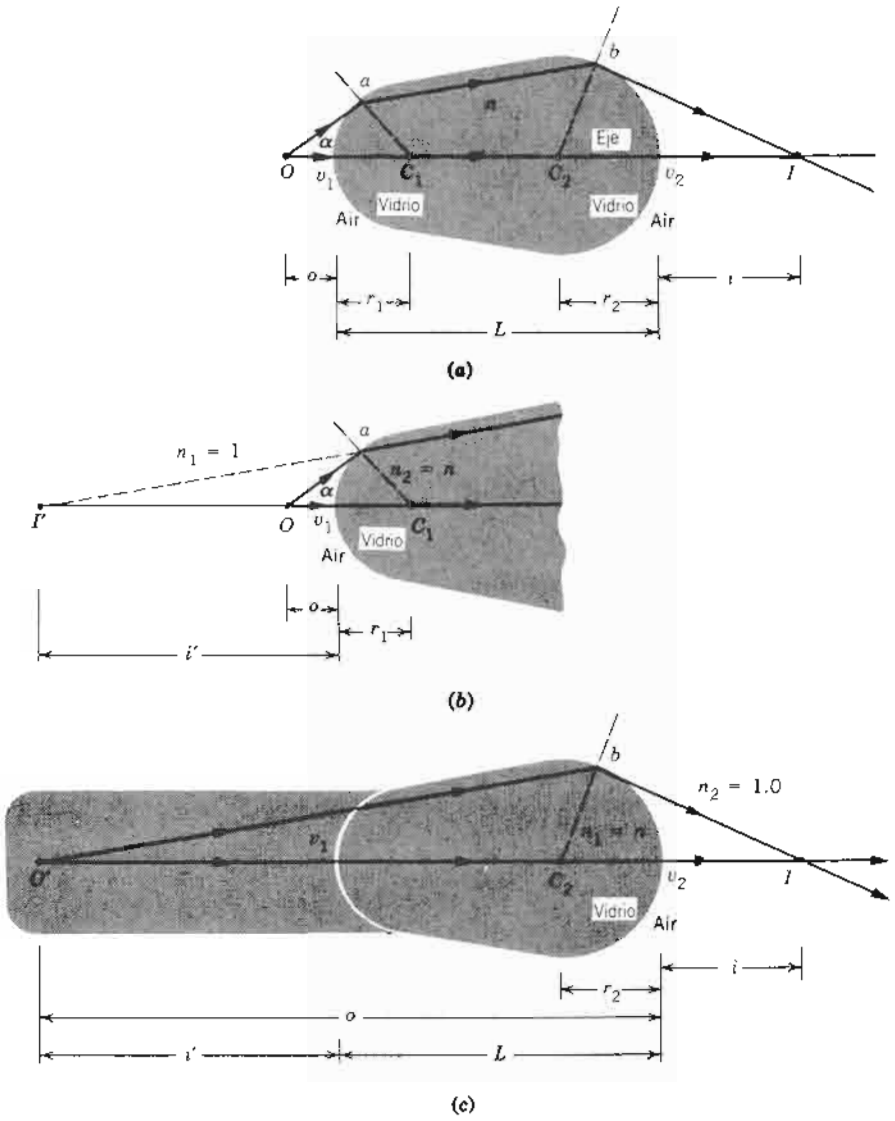


Figura 20 (*a*) Dos rayos que parten de *O* forman una imagen real en *I* después de la refracción en dos superficies esféricas, siendo la primera superficie convergente y la segunda divergente. (*b*) La primera superficie y (*c*) la segunda superficie, mostradas por separado. Se ha exagerado la escala vertical por claridad.

Al aplicar la ecuación 8 a la segunda superficie, insertamos $n_1 = n$ y $n_2 = 1$ porque el objeto se comporta como si estuviera incrustado en vidrio. Si usamos la ecuación 18, la ecuación 8 puede escribirse como

$$\frac{n}{|i'| + L} + \frac{1}{i} = \frac{1 - n}{r_2}. \tag{19}$$

Supongamos ahora que el espesor L de la "lente" en la figura 20*a* es tan pequeño que puede despreciarse al compararla con otras cantidades lineales en esta figura (como o, i, o', i', r_1 y r_2). En todo lo que sigue tendremos en cuenta esta *aproximación de la lente delgada*. Al hacer que $L = 0$ en la ecuación 19 se tiene

$$\frac{n}{|i'|} + \frac{1}{i} = -\frac{n - 1}{r_2}. \tag{20}$$

Si sumamos las ecuaciones 17 y 20 se obtiene

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{21}$$

Definiendo que el lado derecho de la ecuación 21 sea $1/f$ nos conduce directamente a las ecuaciones 13 y 14, completando la deducción.

Para deducir la ecuación 15 en cuanto a la amplificación lateral, nos referimos a la figura 18*a*. Los triángulos rectángulos *acO* y *bcI* son semejantes, porque los ángulos *acO* y *bcI* son iguales. Para los lados correspondientes de los triángulos semejantes, obtenemos

$$\frac{bI}{aO} = \frac{cI}{cO}. \tag{22}$$

El lado derecho de esta expresión es precisamente i/o, mientras que el lado izquierdo es $-m$, indicando el signo menos que la imagen se invierte. Con estas sustituciones, la ecuación 22 se reduce directamente a la ecuación 15.

44-4 SISTEMAS ÓPTICOS COMPUESTOS

Un espejo aislado o una sola lente son a menudo un dispositivo óptico útil. En instrumentos como los binoculares, los telescopios, los microscopios y las cámaras fotográficas, las imágenes se forman mediante una combinación de varias lentes o de varios espejos. En esta sección trataremos de las imágenes formadas por sistemas que contengan varios elementos ópticos.

El análisis de la formación de imágenes por sistemas ópticos compuestos es directo. Simplemente consideramos a los elementos uno a la vez, como si los otros no existieran, considerando a la *imagen* formada por un elemento como el *objeto* del siguiente. Aplicamos las fórmulas obtenidas previamente para el espejo esférico (Ecs. 3 y 5) o para la lente delgada (Ecs. 13 y 15), tomando en cuenta cuidadosamente las convenciones de signos en cada caso. En particular, nótese lo siguiente:

> *Cuando la luz* divergente *que procede de la imagen formada por un elemento incide sobre el elemento siguiente, tratamos a esa imagen como un* objeto real *para el elemento siguiente. Cuando la luz* convergente *que procede de la imagen formada por un elemento incide sobre el elemento siguiente, tratamos a esa imagen como un* objeto virtual *para el elemento siguiente.*

Problema muestra 7 Dos lentes convergentes idénticas de distancias focales $f = f' = +15$ cm están separadas por una distancia d de 6 cm, como se muestra en la figura 21. Una fuente luminosa está situada a una distancia $o = 10$ cm de la primera lente. Encuentre la posición de la imagen final.

Solución Comenzamos por ubicar la imagen usando un diagrama de rayos, como el de la figura 21. Los rayos 2 y 3 que parten del objeto O son refractados por la primera lente como se muestra; prolongados hacia atrás muestran la posición de la imagen (virtual) I producida por la primera lente. Esta imagen actúa entonces como el objeto O' para la segunda lente, y los rayos 2′ y 3′ dan la posición de la imagen final I', la cual es invertida y real.

Podemos determinar la posición de la primera imagen si aplicamos la ecuación 13:

$$\frac{1}{+10\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{+15\text{ cm}}$$

o sea

$$i = -30\text{ cm}.$$

Es decir, la imagen es virtual y se forma a 30 cm de la lente en su lado V. Si ahora suponemos que esta imagen es el objeto O' para la segunda lente, la distancia o' del objeto es $|i| + d = 30$ cm + 6 cm = 36 cm. Nótese que, si bien I es una imagen *virtual* para la primera lente, O' es un objeto *real* para la segunda lente,

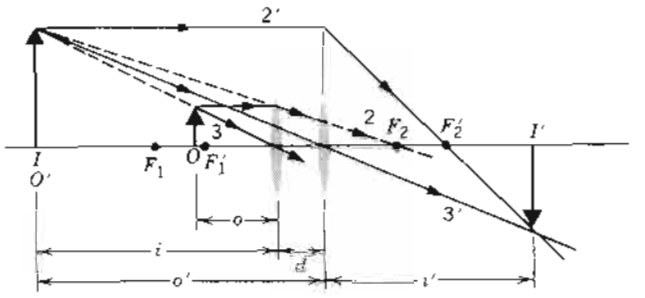


Figura 21 Problema muestra 7.

porque del objeto sale luz *divergente* que incide sobre la segunda lente.

Al aplicar la ecuación 13 una vez más, tenemos

$$\frac{1}{+36\text{ cm}} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{+15\text{ cm}}$$

o sea

$$i' = +26\text{ cm},$$

que corresponde a una imagen real en el lado R de la segunda lente, como se muestra en la figura 21.

Problema muestra 8 El sistema óptico que se muestra en la figura 22 consta de dos lentes, de distancias focales $f = +12$ cm y $f' = -32$ cm, separadas por una distancia $d = 22$ cm. A 18 cm de la primera lente está situado un objeto luminoso. Determine la posición de la imagen final producida por este sistema.

Solución En la figura 22 se presenta una construcción gráfica que usa un diagrama de rayos. La imagen real I de la primera lente se formaría a la derecha de la segunda lente. Puesto que la luz que forma esta imagen es convergente cuando incide sobre la segunda lente, la tratamos como un objeto virtual O' para la segunda lente.

Para la primera lente, la ecuación 13 da

$$\frac{1}{+18\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{+12\text{ cm}}$$

o sea

$$i = +36\text{ cm}.$$

La imagen real se formaría a 36 cm de la primera lente, como se muestra. La distancia o' desde el objeto virtual O' hasta la segunda lente tiene la magnitud $i - d$, o sea 36 cm − 22 cm = 14 cm. Ya que O' es un objeto virtual, consideramos que la distancia o' es negativa. La ecuación 13 da ahora

$$\frac{1}{-14\text{ cm}} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{-32\text{ cm}}$$

o sea

$$i' = +25\text{ cm}.$$

En el lado R de la segunda lente se forma la imagen real I'.

Problema muestra 9 El objeto en la figura 22 tiene una altura h de 2.4 cm. Determine la altura de la imagen.

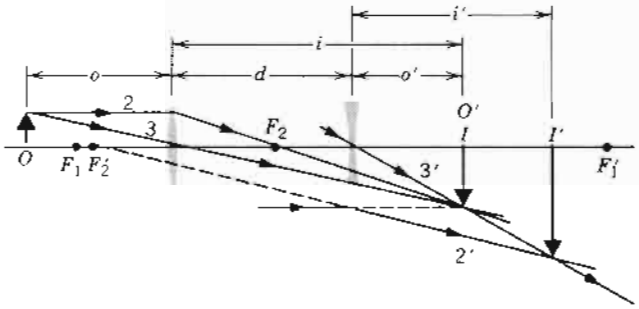


Figura 22 Problema muestra 8.

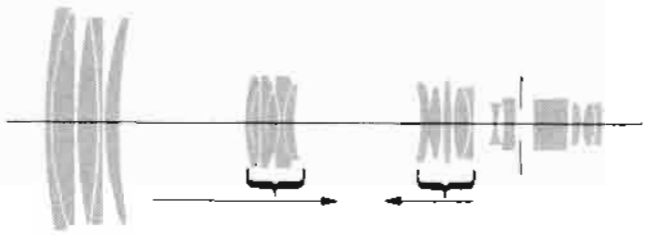


Figura 23 Los componentes de una lente *zoom* en una cámara de TV. Las secciones centrales del sistema de lentes se mueve como se muestra. Ninguna de las lentes es "delgada", y no se cumple la aproximación paraxial.

Solución Buscamos la amplificación lateral del sistema compuesto. Una vez más, tratamos al sistema compuesto como dos sistemas separados, y la amplificación lateral total m_t del sistema combinado es el producto de las amplificaciones laterales m y m' de las lentes individuales:

$$m_t = mm' = \left(-\frac{i}{o}\right)\left(-\frac{i'}{o'}\right) = \left(-\frac{+36\text{ cm}}{+18\text{ cm}}\right)\left(-\frac{+25\text{ cm}}{-14\text{ cm}}\right)$$
$$= -3.57,$$

en donde hemos usado los valores del las distancias del objeto y de la imagen determinados en el problema muestra 8. La altura h_t de la imagen final es

$$h_t = m_t h = (-3.57)(2.4\text{ cm}) = -8.6\text{ cm}.$$

El signo menos nos recuerda que la imagen final está invertida con respecto al objeto original.

44-5 INSTRUMENTOS ÓPTICOS

El ojo humano es un órgano notablemente eficiente, pero su alcance puede extenderse de muchas maneras mediante instrumentos ópticos como los anteojos o las lentes de contacto, las lupas simples, los proyectores de cine, las cámaras (incluyendo las cámaras de TV), los microscopios y los telescopios. En muchos casos estos aparatos amplían el alcance de nuestra visión más allá de la región de lo visible; como ejemplos están las cámaras de infrarrojo creadas para los satélites y los microscopios de rayos X.

En casi todos los casos de instrumentos ópticos complejos modernos las fórmulas para el espejo y para las lentes delgadas sólo se cumplen aproximadamente. En los microscopios típicos de los laboratorios la lente no puede considerarse como "delgada" de ninguna manera. En la mayoría de los instrumentos ópticos las lentes son del tipo compuesto; es decir, están hechas de varios componentes. La figura 23, por ejemplo, muestra los componentes de una lente *zoom* típica, comúnmente utilizada en las cámaras de TV para proporcionar límites de 20:1 en las distancias focales.

En esta sección consideramos aparatos ópticos que están diseñados para producir una imagen amplificada: queremos que algo *parezca* más grande de lo que el ojo ve sin ayuda. La amplificación lateral es una medida incompleta del tamaño aparente de una imagen producida por un sistema óptico. Un sistema óptico puede producir una imagen amplificada ($|m| > 1$) pero la imagen se formaría tan lejos de nosotros que el observador vería más pequeño al objeto real. Aunque la amplificación lateral puede ser mayor que la unidad y, por tanto, el tamaño de la imagen mayor que el tamaño del objeto, el resultado neto no es lo que el observador llamaría una imagen "amplificada".

La lupa

La figura 24 representa la formación de una imagen en un ojo humano. El tamaño de la imagen en la retina está determinado por el ángulo θ subtendido por el objeto. Para objetos pequeños ubicados a distancias del ojo relativamente grandes, el ángulo θ puede aproximarse por

$$\theta \approx \frac{h}{d}, \tag{23}$$

donde h es el tamaño del objeto y d es su distancia desde el ojo.

En la figura 24*b*, el observador está viendo al objeto a través de una lente que forma una imagen de tamaño lateral h' a una distancia d' del ojo. El tamaño angular aparente de la imagen al observador es, para ángulos pequeños,

$$\theta' \approx \frac{h'}{d'}. \tag{24}$$

Cuando la imagen se ve a través de la lente para el observador *se verá* mayor que el objeto original si subtiende un ángulo sólido mayor que el que subtiende el objeto. Por lo tanto, no es la amplificación lateral m ($= h'/h$) la que es importante en la medición del tamaño aparente de la imagen; lo es la *amplificación angular* m_θ, definida como

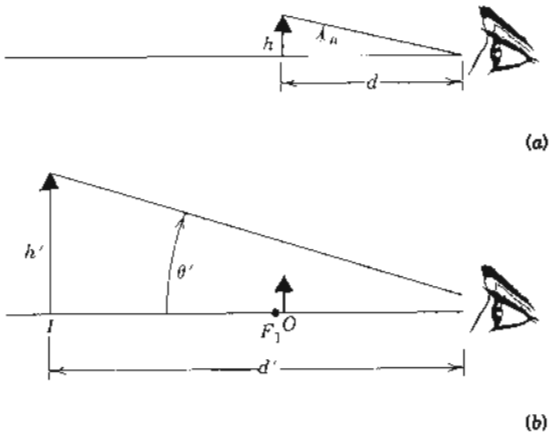


Figura 24 (*a*) Un objeto de altura h a una distancia d del ojo subtiende un ángulo θ. (*b*) Cuando el objeto se ve a través de una lente usada como lupa, la imagen I de altura h' está a una distancia d' y subtiende un ángulo θ' en el ojo.

$$m_\theta = \frac{\theta'}{\theta} . \tag{25}$$

En efecto, m_θ es la razón del tamaño de las dos imágenes en la retina, una con la lente y una sin ella.

El ojo humano normal puede enfocar una imagen bien definida de un objeto en la retina si el objeto O está situado en cualquier lugar del infinito (digamos, las estrellas) hasta un cierto punto llamado el *punto próximo* P_n, el cual se encuentra a aproximadamente a 25 cm del ojo. Si uno observa un objeto que se encuentra a menor distancia que el punto próximo, la imagen retinal percibida se vuelve "difusa". La posición del punto próximo varía por regla general con la edad. Todos conocemos a alguien que, aunque afirma que no necesita anteojos, lee el periódico con los brazos extendidos, lo cual significa que sus puntos próximos están disminuyendo. Usted puede saber cuál es su propio punto próximo al acercar esta página a sus ojos, considerados por separado, hasta llegar a una posición en la que la imagen comience a ser indistinguible.

Consideramos como base de nuestra comparación el tamaño angular que un objeto mostraría tener si estuviera situado en el punto próximo. Entonces

$$\theta = \frac{h}{25 \text{ cm}} . \tag{26}$$

Si situamos al objeto de modo que esté precisamente dentro del primer punto focal de una lente convergente, como en la figura 24*b*, se forma una imagen virtual muy alejada de la lente. La amplificación lateral m tiene la magnitud i/o, y la distancia d' a la imagen es i. El tamaño lateral de las imágenes, considerando las magnitudes de todas las cantidades, es

$$h' = mh = \frac{i}{o} h \tag{27}$$

y el tamaño angular es

$$\theta' = \frac{h'}{d'} = \frac{(i/o)h}{i} = \frac{h}{o} \approx \frac{h}{f} , \tag{28}$$

en donde el último paso es posible porque hemos supuesto que el objeto está situado cerca del punto focal. La amplificación angular es

$$m_\theta = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{h/f}{h/25 \text{ cm}}$$

o sea

$$m_\theta = \frac{25 \text{ cm}}{f} . \tag{29}$$

La ecuación 29 da la amplificación angular de la *lupa*, que usa sólo una lente. La "lupa" ordinaria usada por los coleccionistas de estampillas de correo y los actores que imitan a Sherlock Holmes, es en realidad una lente simple de aumento. Para obtener una amplificación angular grande, queremos que f sea todo lo pequeña posible. En la práctica, una amplificación angular de alrededor de 10 es lo máximo que podemos lograr antes de que las aberraciones de la lente se manifiesten como una imagen distorsionada. Las lentes de aumento más complejas, como el microscopio compuesto que se verá en seguida, pueden tener aumentos angulares apreciablemente mayores.

El microscopio compuesto

La figura 25 muestra una versión de lente delgada de un microscopio compuesto, usado para ver objetos pequeños que estén muy cerca del objetivo del instrumento. El objeto O, de altura h, está situado precisamente fuera del primer punto focal F_1 del objetivo, cuya distancia focal es f_{ob}. Se forma una imagen real, invertida I de altura h' por el objetivo, y la amplificación lateral está dada por la ecuación 15, o sea

$$m = -\frac{h'}{h} = -\frac{s \tan \theta}{f_{ob} \tan \theta} = -\frac{s}{f_{ob}} . \tag{30}$$

Como siempre, el signo menos indica una imagen invertida.

La distancia s (llamada la *longitud del tubo*) se escoge de tal modo que la imagen I caiga sobre el primer punto focal F_1' del ocular, el cual actúa entonces como una lupa como se describió anteriormente. Los rayos paralelos entran al ojo, y se forma una imagen final I' en el infinito. La amplificación final M es el producto de la amplificación lineal m del objetivo (Ec. 30) y la amplificación angular m_θ del ocular (Ec. 29), o sea

$$M = mm_\theta = -\frac{s}{f_{ob}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{oc}} . \tag{31}$$

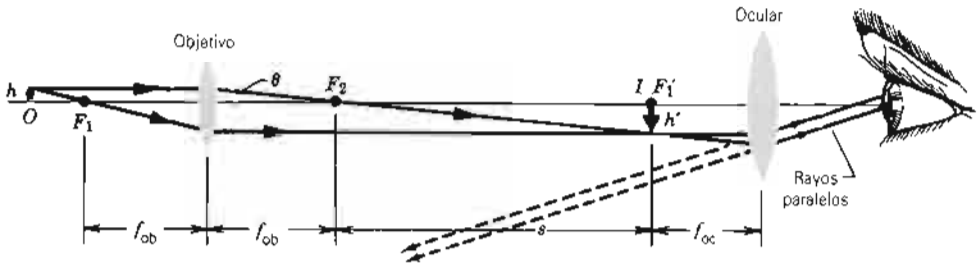


Figura 25 Una versión de la lente delgada de un microscopio compuesto (no está dibujado a escala).

El telescopio refringente

Al igual que los microscopios, los telescopios se fabrican en una gran variedad de formas. La forma que aquí describimos es el telescopio refringente sencillo, que consta de un objetivo y un ocular, ambos representados en la figura 26 por lentes delgadas. En la práctica, al igual que en los microscopios, cada lente puede ser un sistema compuesto de lentes.

A primera vista puede parecer que la disposición de las lentes es semejante en los telescopios y en los microscopios. Sin embargo, los telescopios están diseñados para ver objetos grandes, como galaxias, estrellas y planetas a gran distancia, mientras que los microscopios se diseñan justo para el propósito opuesto. Nótese también que, en la figura 26, el segundo punto focal del objetivo F_2 coincide con el primer punto focal del ocular F_1', pero en la figura 25 estos puntos están separados por una longitud de tubo s.

En la figura 26, los rayos paralelos que parten de un objeto distante inciden sobre el objetivo, formando un ángulo θ_{ob} con el eje del telescopio y una imagen real, invertida en el punto focal común, F_2, F_1'. Esta imagen hace las veces del objeto para el ocular y se forma una imagen virtual (aunque invertida) en el infinito. Los rayos que definen la imagen forman un ángulo θ_{oc} con el eje del telescopio.

La amplificación angular m_θ del telescopio es θ_{oc}/θ_{ob}. Para los rayos paraxiales (los rayos próximos al eje) podemos escribir $\theta_{ob} = h'/f_{ob}$ y $\theta_{oc} = h'/f_{oc}$, lo cual da

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}}, \tag{32}$$

indicando el signo menos una imagen final invertida.

La amplificación es sólo uno de los factores de diseño de un telescopio astronómico y se llega a ella muy fácilmente. Un buen telescopio necesita una *capacidad de captación de la luz (fotocaptación)*, la cual determina lo bien definida que es la imagen. Esto es importante cuando se observan objetos tenues como las galaxias distantes y se logra haciendo que el diámetro del objetivo sea tan grande como sea posible. El *campo de visión* es otro parámetro importante. Un instrumento diseñado para la observación de galaxias (campo de visión angosto) debe ser muy diferente de otro diseñado para la observación de meteoros (campo de visión ancho). El diseñador de telescopios debe también tener en cuenta las aberraciones de las lentes y de los espejos, que incluyen la *aberración esférica* (esto es, las lentes y los espejos con superficies realmente esféricas no forman imágenes bien definidas) y la *aberración cromática* (esto es, en las lentes simples el índice de refracción, y por consiguiente, la longitud focal, varía con la longitud de onda de modo que se forman imágenes difusas, exhibiendo colores no naturales). Los

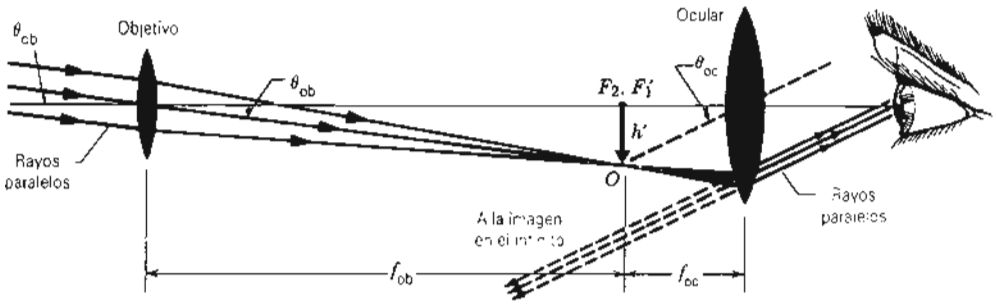


Figura 26 Una versión de lentes delgadas de un telescopio refringente (no está dibujado a escala).

efectos de la difracción (véase la sección 46-4) limitan la capacidad de cualquier instrumento óptico para distinguir entre dos objetos (digamos, estrellas) cuya separación angular sea pequeña.

Para construir telescopios refringentes de diámetros grandes (para una mayor eficiencia en la captación de la luz o fotocaptación), debemos también hacer las lentes más gruesas, lo cual aumenta las distorsiones y aberraciones causadas por las lentes. Los telescopios refringentes más grandes, que fueron construidos a fines del siglo XIX, tienen lentes de aproximadamente 1 m de diámetro. Los telescopios de reflexión, en los que el elemento objetivo es un espejo más bien que una lente, no sufren de estas distorsiones, puesto que la luz se refleja de la superficie frontal del espejo. Los más grandes telescopios de reflexión tienen diámetros entre 5 y 6 m, y así tienen entre 25 y 36 veces la capacidad de captación de la luz de los más grandes telescopios refringentes. Aun telescopios de reflexión más grandes pueden construirse al combinar la luz de muchos espejos individuales en una imagen individual.

Los telescopios ópticos unidos a la Tierra están limitados en cuanto a su capacidad para formar imágenes bien definidas a causa de la distorsión atmosférica; la turbulencia natural en la atmósfera distorsiona los frentes de onda (casi) planos que llegan a la Tierra desde objetos distantes. Una cura para este problema se obtuvo por medio del desarrollo de la *óptica adaptable*; detectando la distorsión atmosférica, la forma de un espejo flexible puede modificarse para compensar la distorsión y así producir una imagen bien definida. Un modo alternativo de eliminar los efectos de la atmósfera es colocar al telescopio *por arriba* de la atmósfera. La figura 27 muestra el telescopio espacial Hubble, un telescopio de reflexión que fue lanzado en órbita de la Tierra en 1990 utilizando un transbordador espacial.

Figura 27 El telescopio espacial Hubble.

PREGUNTAS

1. En muchos autobuses citadinos se suspende de la puerta un espejo convexo, a plena visión del conductor. ¿Por qué no se usa un espejo cóncavo?
2. Los dentistas y los higienistas dentales usan un pequeño espejo unido a un mango largo para examinar la dentadura. ¿Es un espejo cóncavo, convexo, o plano, y por qué?
3. ¿En qué condiciones un espejo esférico, que puede ser cóncavo o convexo, formará (*a*) una imagen real, (*b*) una imagen invertida y (*c*) una imagen más pequeña que el objeto?
4. ¿En una pantalla puede proyectarse una imagen virtual?
5. Está usted viendo a un perro a través de los vidrios de una ventana. ¿Dónde está la imagen del perro? ¿Es una imagen real o virtual? ¿Es directa o invertida? ¿Cuál es la amplificación? (*Sugerencia*: Piense en los vidrios de la ventana como un caso límite de una lente delgada en la que se ha permitido que los radios de curvatura sean infinitamente grandes.)
6. En algunos automóviles el espejo del lado derecho (el lado del pasajero) porta la notación: "Los objetos que ven en el espejo están más cerca de lo que parece". ¿Qué característica del espejo requiere esta advertencia? ¿Qué ventajas tiene el espejo para compensar esta desventaja? ¿Se ve que los autos que aparecen en este espejo se mueven más aprisa o más despacio de lo que se vería en un espejo plano?
7. Muchos de nosotros hemos visto en la pantalla de TV lanzar una pelota de beisbol mediante una cámara ubicada en algún sitio detrás de la segunda base. El lanzador y el bateador están a unos 60 ft uno del otro, pero en la pantalla de TV parece que están más cerca. ¿Por qué se acortan de este modo las imágenes vistas a través de una lente de telefoto?
8. Una lente delgada asimétrica forma la imagen de un objeto puntual sobre su eje. ¿Cambia la posición de esta imagen si se invierte la lente?

9. ¿Por qué una lente tiene dos puntos focales y un espejo sólo uno?

10. ¿En qué condiciones una lente delgada, que puede ser convergente o divergente, formará (*a*) una imagen real, (*b*) una imagen invertida, y (*c*) una imagen más pequeña que el objeto?

11. Un buceador desea usar una bolsa de plástico llena de aire como una lente convergente para ver bajo el agua. Dibuje una sección transversal apropiada de la bolsa.

12. En relación con la figura 17*a*, todos los rayos que se originan en el mismo frente de ondas en la onda incidente tienen el mismo camino óptico a la imagen puntual. Analice lo anterior en términos del principio de Fermat (véase el capítulo 43).

13. ¿Cuál es la significación del origen de coordenadas en las figuras 15*a* y 15*b*?

14. ¿Por qué ocurre la aberración cromática en las lentes simples pero no en los espejos?

15. Considérense las diversas aberraciones de una lente. ¿Es posible, en principio, hacer que una lente carezca de todas las aberraciones (por ejemplo, puliendo las superficies) al enfocar una luz monocromática?

16. Un espejo cóncavo y una lente convergente tienen la misma distancia focal en el aire. ¿Tienen la misma distancia focal cuando están sumergidas en el agua? Si no, ¿cuál tiene la distancia focal mayor?

17. ¿En qué condiciones una lente delgada tendrá una amplificación lateral (*a*) de −1 y (*b*) de +1?

18. ¿Cómo se compara la distancia focal de una lente delgada de vidrio para luz azul con una para luz roja, si se supone que la lente es (*a*) divergente y (*b*) convergente?

19. ¿La distancia focal de una lente depende del medio en el que está inmersa ésta? ¿Es posible que una lente dada actúe como una convergente en un medio y como una divergente en otro medio?

20. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones para una lente de vidrio en el aire? (*a*) Una lente que sea más gruesa en el centro que en los bordes es una lente convergente para luz paralela. (*b*) Una lente que sea más gruesa en los bordes que en el centro es una lente divergente para luz paralela.

21. ¿En qué condiciones resultaría infinita la amplificación lateral ($m = -i/o$) en lentes y espejos? ¿Tiene alguna significación práctica una condición así?

22. ¿Resulta afectada por el medio en que está inmersa la distancia focal de un espejo esférico? ¿O de una lente delgada? ¿Por qué la diferencia, si es que la hay?

23. ¿Por qué la amplificación de una lupa (véase la deducción que conduce a la ecuación 29) se define en términos de ángulos más bien que del tamaño imagen/objeto?

24. Los anteojos ordinarios no amplifican pero una lupa sí. ¿Cuál es la función de los anteojos?

25. El "número *f*" de una lente de cámara (véase el problema 39) es su distancia focal dividida entre su abertura (diámetro efectivo). ¿Por qué es útil saber esto en fotografía? ¿Cómo puede cambiarse el número *f* de una lente? ¿Cómo se relaciona el tiempo de exposición con el número *f*?

26. Una lupa de distancia focal corta permite apreciar detalles más finos que una de longitud focal larga. Explique.

27. Calcule la máxima distancia a la cual el ojo humano puede leer los encabezados de un periódico.

28. ¿Importa si (*a*) un telescopio astronómico, (*b*) un microscopio compuesto, (*c*) una lupa, (*d*) una cámara, incluyendo una de TV, o (*e*) un proyector, incluyendo uno de diapositivas, produce imágenes directas o invertidas? ¿Y qué decir acerca de imágenes reales o virtuales?

29. El ojo humano sin ayuda produce una imagen real pero invertida en la retina. (*a*) ¿Por qué no se perciben invertidos objetos tales como la gente o los árboles? (*b*) No los percibimos así, por supuesto, pero supongamos que se usaran anteojos especiales para lograrlo. Si usted voltea este libro de arriba abajo, ¿podría leer esta pregunta con la misma facilidad con que lo hace ahora?

30. De las lentes y espejos mencionados entre paréntesis, escoja el que se usaría en cada caso: (*a*) como una lupa; (*b*) como lámpara de un proyector de diapositivas; (*c*) como objetivo de un telescopio de reflexión; (*d*) en un calidoscopio; (*e*) como ocular en los binoculares; (*f*) para obtener una retrovisión más amplia desde el asiento del conductor de un automóvil. (Lente convergente, lente divergente, espejo cóncavo, espejo convexo, espejo plano.)

31. ¿Qué propiedades de una lente harían de ella una buena lupa ustoria (lente que, al apuntar al sol, enciende rápidamente papel o ramitas situadas bajo ella)?

32. En la obra *El señor de las moscas*, de William Golding el personaje Piggy usa sus anteojos para enfocar los rayos del sol y encender una hoguera. Más tarde, los chicos golpean a Piggy y le rompen sus anteojos. No puede encontrarlos cerca de él porque es miope (corto de vista). Halle el defecto en esta narración. (*Boston Globe*, diciembre 17, 1985, Cartas.)

33. Explique la función del objetivo de un microscopio. ¿Por qué se usa un objetivo? ¿Por qué no usar precisamente una lupa muy potente?

34. ¿Por qué usan los astrónomos telescopios ópticos para observar el cielo? Después de todo, las estrellas están tan lejos que de todos modos se verán como puntos de luz, sin detalles discernibles.

35. Un fabricante de relojes emplea anteojos divergentes para conducir su automóvil, no usa anteojos para leer, y en su profesión usa anteojos convergentes. ¿Es el relojero miope o hipermétrope? Explique. (Véase el problema 38.)

36. ¿Por qué todos los grandes telescopios astronómicos actuales son de reflexión y no refringentes? Piense en los problemas del montaje mecánico de lentes y espejos, en la dificultad de darle forma a las diversas superficies ópticas que intervienen, en los problemas con los pequeños defectos en el vidrio óptico que se usa para fabricar lentes y espejos, y así sucesivamente.

37. Explique por qué (*a*) se emplea a veces luz ultravioleta para iluminar objetos en un microscopio, (*b*) se emplean a veces filtros azules para fotografiar una estrella vista a través de un telescopio y (*c*) se usa a menudo luz infrarroja para obtener mayor claridad en las fotografías de paisaje.

PROBLEMAS

Sección 44-1 Espejos esféricos

1. Un espejo cóncavo para afeitarse tiene un radio de curvatura de 35 cm. Está colocado de modo que la imagen de la cara de un hombre sea 2.7 veces el tamaño real de su cara. ¿A qué distancia de la cara del hombre está el espejo?
2. Dibuje de nuevo la figura 28 en una hoja de papel grande y trace cuidadosamente los rayos reflejados, usando la ley de la reflexión. ¿Se forma un foco puntual? Explique.

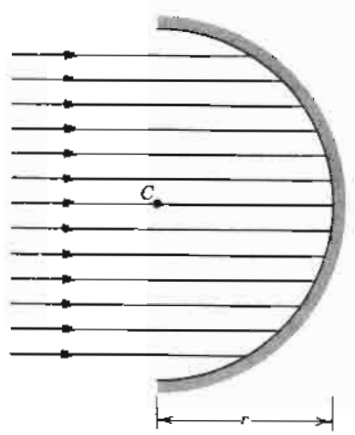


Figura 28 Problema 2.

3. Llene la tabla al pie de la página en la que cada columna se refiere a un espejo plano o esférico y a un objeto real. Compruebe los resultados mediante un diagrama de rayos. Las distancias están en centímetros; si un número no tiene delante un signo más o menos, determine el signo correcto.
4. (*a*) Un punto luminoso se mueve con una velocidad v_o hacia un espejo esférico, a lo largo de su eje. Demuestre que la velocidad a la que se mueve la imagen de este objeto puntual está dada por

$$v_i = -\left(\frac{r}{2o-r}\right)^2 v_o.$$

(*b*) Suponga que el espejo es cóncavo, con $r = 15$ cm y que $v_o = 5.0$ cm/s. Calcule la velocidad de la imagen si el objeto está muy alejado del punto focal ($o = 75$ cm). (*c*) Si está cerca del punto focal ($o = 7.7$ cm). (*d*) Si está muy cerca del espejo ($o = 0.15$ cm).

5. Un objeto lineal corto de longitud L se encuentra en el eje de un espejo esférico a una distancia o del espejo. (*a*) Demuestre que su imagen tendrá una longitud L', siendo

$$L' = L\left(\frac{f}{o-f}\right)^2.$$

(*b*) Demuestre que la *amplificación longitudinal* m' ($= L'/L$) es igual a m^2, donde m es la amplificación lateral.

6. Repita la deducción que conduce a la ecuación 1 usando la geometría de la figura 8 para el espejo convexo, y demuestre que la ecuación 1 es válida en este caso únicamente si se considera que i y r son negativos.

Sección 44-2 Superficies esféricas refringentes

7. La figura 29 muestra la sección transversal de un tubo hueco de vidrio de radio interno r, radio externo R e índice de refracción n. (*a*) Convénzase de que el rayo ABC mostrado define al radio interno aparente r^* visto lateralmente. (*b*) Demuestre que $r^* = nr$, independiente de R.
8. Llene la tabla correspondiente a este problema en la que cada columna se refiere a una superficie esférica que separa a dos medios con índices de refracción diferentes. Las

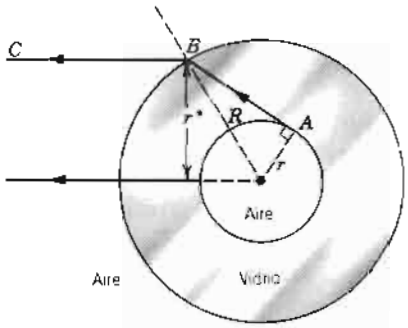


Figura 29 Problema 7.

TABLA DEL PROBLEMA 3

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
Tipo	*Cóncavo*						*Convexo*	
f (cm)	20		+20			20		
r (cm)					−40		40	
i (cm)					−10		4.0	
o (cm)	+10	+10	+30	+60				+24
m		+1.0		−0.50		+0.10		0.50
¿Imagen real?		No						
¿Imagen directa?								No

TABLA DEL PROBLEMA 8

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
n_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5
n_2	1.5	1.5	1.5		1.0	1.0	1.0	
o (cm)	+10	+10		+20	+10		+70	+100
i (cm)		−13	+600	−20	−6.0	−7.5		+600
r (cm)	+30		+30	−20		−30	+30	−30
¿Imagen real?								

distancias se miden en centímetros. El objeto es real en todos los casos. Dibuje una figura para cada caso y construya los rayos apropiados gráficamente. Suponga un objeto puntual.

9. Un haz de luz paralela que parte de un láser incide sobre una esfera sólida transparente de índice de refracción n, como se muestra en la figura 30. (*a*) Demuestre que el haz no puede enfocarse en la parte de atrás de la esfera a no ser que la anchura del haz sea pequeña en comparación con el radio de la esfera. (*b*) Si la condición en (*a*) se satisface, ¿cuál es el índice de refracción de la esfera? (*c*) ¿Qué índice de refracción, si existe, enfocará al haz en el centro de la esfera?

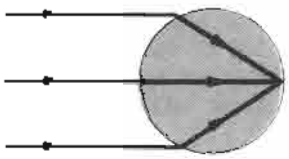


Figura 30. Problema 9.

10. Un haz de luz, paralelo y angosto, de la izquierda, incide perpendicularmente sobre una esfera sólida de vidrio. El radio de la esfera es R y su índice de refracción es $n < 2$. Halle la distancia de la imagen desde el borde derecho de la esfera.

Sección 44-3 Lentes delgadas

11. Un objeto está a 20 cm a la izquierda de una lente delgada divergente con longitud focal de −30 cm. ¿Dónde se forma la imagen? Obtenga la posición de la imagen tanto por medio del cálculo como por medio de un diagrama de rayos.

12. Se desea fabricar una lente biconvexa de vidrio con un índice de refracción de 1.5. Se quiere que una superficie tenga el doble del radio de curvatura de la otra y que la distancia focal sea de 60 mm. Encuentre los radios.

13. Supóngase que usted enfoca una imagen del sol sobre una pantalla, usando una lente delgada cuya distancia focal es de 27 cm. Halle el diámetro de la imagen. (Véase el apéndice C para los datos necesarios del sol.)

14. Una lente está hecha de vidrio con un índice de refracción de 1.5. Un lado de la lente es plano y el otro es convexo con un radio de curvatura de 20 cm. (*a*) Calcule la distancia focal de la lente. (*b*) Si un objeto se coloca a 40 cm a la izquierda de la lente, ¿cuál será la posición de la imagen?

15. Demuestre que la distancia focal f de una lente delgada cuyo índice de refracción es n y que está inmersa en un fluido cuyo índice de refracción es n' está dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{n - n'}{n'}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

16. Un objeto está situado en el centro de curvatura de una lente bicóncava, teniendo ambos radios de curvatura la misma magnitud. (*a*) Halle la distancia de la imagen en términos del radio de curvatura r y el índice de refracción n del vidrio. (*b*) Describa la naturaleza de la imagen. (*c*) Verifique los resultados con un diagrama de rayos.

17. Se dispone de discos planos de vidrio ($n = 1.5$) y de una máquina para pulir y tallar lentes con la cual puede hacerse que los radios de curvatura sean de 40 cm o de 60 cm. Se le pide preparar un juego de seis lentes como las mostradas en la figura 31. ¿Cuál será la distancia focal de cada lente? (*Nota*: Cuando pueda escoger los radios de curvatura, elija el menor.)

18. Hasta donde sea posible, llene la tabla de la página siguiente, cada columna de la cual se refiere a una lente delgada. Escriba "X" cuando no pueda calcularse una cantidad. Las distancias están en centímetros; cuando un número (excepto en el renglón n) no tenga delante un signo

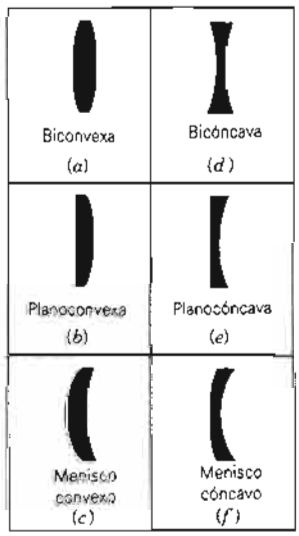


Figura 31 Problema 17.

TABLA DEL PROBLEMA 18

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
Tipo	*Convergente*								
f (cm)	10	+10	10	10					
r_1 (cm)					+30	−30	−30		
r_2 (cm)					−30	+30	−60		
i (cm)									
o (cm)	+20	+5.0	+5.0	+5.0	+10	+10	+10	+10	+10
n					1.5	1.5	1.5		
m			>1	<1				0.50	0.50
¿Imagen real?									Sí
¿Imagen directa?								*Sí*	

más o un signo menos, halle el signo correcto. Dibuje una figura para cada caso y construya gráficamente los rayos apropiados. El objeto es real en todos los casos.

19. La fórmula

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

se llama la forma *gaussiana* de la fórmula de la lente delgada. Es posible obtener otra forma de esta expresión, la *newtoniana*, si se considera la distancia x desde el objeto hasta el primer punto focal y la distancia x' desde el segundo punto focal hasta la imagen. Demuestre que

$$xx' = f^2.$$

20. Reproduzca la figura 15 a partir de los primeros principios, esto es, a partir de la ecuación 13. Cómo se sabe: (*a*) si la lente es divergente o convergente; (*b*) si la imagen es real o virtual; (*c*) si el objeto es real o virtual; (*d*) si la amplificación lateral es > 1 o < 1.

21. Demuestre que la ecuación 16 es correcta.

22. Una flecha iluminada forma una imagen real invertida de sí misma a una distancia d = 40.0 cm, medida a lo largo del eje óptico de una lente; véase la figura 32. La imagen es la mitad del tamaño que el objeto. (*a*) ¿Qué clase de lente debe usarse para producir esta imagen? (*b*) ¿A qué distancia del objeto debe estar situada la lente? (*c*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente?

23. Una diapositiva iluminada se encuentra a 44 cm de la pantalla. ¿A qué distancia de la diapositiva debe colocarse una lente de 11 cm de distancia focal con objeto de enfocar una imagen en la pantalla?

24. Demuestre que la distancia entre un objeto real y su imagen real formada por una lente convergente delgada es siempre mayor o igual que cuatro veces la distancia focal de la lente.

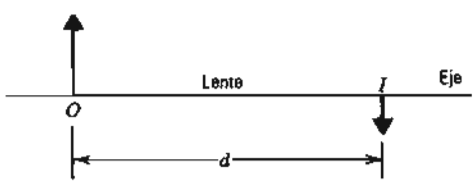


Figura 32 Problema 22.

25. Un objeto luminoso y una pantalla están separados por una distancia fija D entre sí. (*a*) Demuestre que una lente convergente, de distancia focal f, formará una imagen real en la pantalla en dos posiciones que están separadas por

$$d = \sqrt{D(D-4f)}.$$

(*b*) Demuestre que la razón de los tamaños de las dos imágenes en estas dos posiciones es

$$\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2.$$

Sección 44-4 Sistemas ópticos compuestos

26. Dos lentes convergentes, con distancias focales f_1 y f_2, están colocadas a una distancia $f_1 + f_2$ entre sí, como se muestra en la figura 33. Este tipo de arreglos se llaman *expansores del haz* y se usan a menudo para aumentar los diámetros de los haces de luz que proceden de los láser. (*a*) Si W_1 es la anchura del haz incidente, demuestre que la anchura del haz emergente es $W_2 = (f_2/f_1)W_1$. (*b*) Demuestre cómo puede disponerse una combinación de una lente divergente y una lente convergente como un expansor del haz. Los rayos que inciden paralelamente al eje salen paralelamente al eje. (*c*) Calcule la razón de la intensidad del haz emergente del expansor del haz y la intensidad del haz del láser.

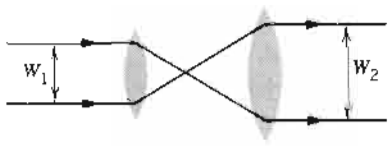


Figura 33 Problema 26.

27. Una lente convergente con una distancia focal de +20 cm está colocada a 10 cm a la izquierda de una lente divergente que tiene una distancia focal de −15 cm. Si a 40 cm

a la izquierda de la primera lente se coloca un objeto real, encuentre la posición y describa completamente la imagen formada.

28. Una placa delgada y plana de vidrio parcialmente reflejante está a una distancia b de un espejo convexo. Una fuente puntual de luz S está situada a una distancia a enfrente de la placa (véase la Fig. 34) de modo que su imagen en la placa parcialmente reflejante coincide con su imagen en el espejo. Si $b = 7.50$ cm y la distancia focal del espejo es $f = -28.2$ cm, halle a y trace el diagrama de rayos.

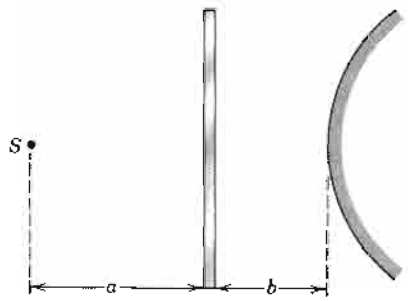


Figura 34 Problema 28.

29. (*a*) Demuestre que una lente convergente delgada de distancia focal f seguida por una lente divergente delgada de distancia focal $-f$ harán que la luz paralela pase por un foco más allá de la segunda lente siempre que la separación L de las lentes satisfaga $0 < L < f$. (*b*) ¿Cambia esta propiedad si se intercambian las lentes? (*c*) ¿Qué sucede cuando $L = 0$?

30. Un objeto en posición vertical se coloca a una distancia enfrente de una lente convergente igual al doble de la distancia focal f_1 de la lente. En el otro lado de la lente se encuentra un espejo convergente de distancia focal f_2 separado de la lente por una distancia $2(f_1 + f_2)$; véase la figura 35. (*a*) Determine la posición, naturaleza y tamaño relativo de la imagen final, como la ve un ojo que mire hacia el espejo a través de la lente. (*b*) Dibuje el diagrama de rayos apropiado.

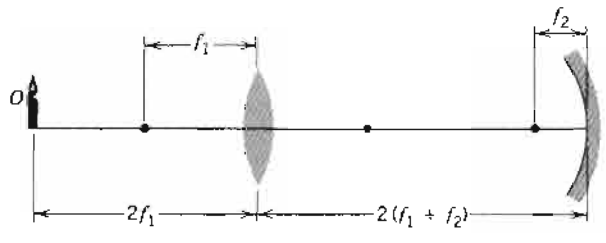


Figura 35 Problema 30.

31. Un objeto está situado a 1.12 m enfrente de una lente convergente, de 58.0 cm de distancia focal, la cual está a 1.97 m de un espejo plano. (*a*) ¿A qué distancia está la imagen final, medida desde la lente, que vería un ojo que mire hacia el espejo a través de la lente? (*b*) ¿Es la imagen final real o virtual? (*c*) ¿Es la imagen real directa o invertida? (*d*) ¿Cuál es la amplificación lateral?

32. Un objeto está a 20.0 cm a la izquierda de una lente con una distancia focal de +10.0 cm. Una segunda lente de distancia focal +12.5 cm está a 30.0 cm a la derecha de la primera lente. (*a*) Usando la imagen formada por la primera lente como el objeto de la segunda, determine la posición y el tamaño relativo de la imagen final. (*b*) Verifique sus conclusiones trazando el sistema de lentes a escala y construyendo un diagrama de rayos. (*c*) Describa la imagen final.

33. Dos lentes delgadas de distancias focales f_1 y f_2 están en contacto. Demuestre que son equivalentes a una sola lente delgada con una distancia focal dada por

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

34. La *graduación P* de una lente se define mediante $P = 1/f$, donde f es la distancia focal. La unidad de graduación es la *dioptría*, donde 1 dioptría = 1/metro. (*a*) ¿Por qué ésta es una definición razonable para la graduación de una lente? (*b*) Demuestre que la graduación neta de dos lentes en contacto está dada por $P = P_1 + P_2$, donde P_1 y P_2 son las graduaciones de las lentes por separado. (*Sugerencia*: véase el problema 33.)

Sección 44-5 Instrumentos ópticos

35. La amplificación angular (el poder de aumento) de un telescopio astronómico en un ajuste normal es de 36, y el diámetro del objetivo, de 72 mm. ¿Cuál es el diámetro mínimo necesario del ocular para captar en el eje del instrumento toda la luz que entra al objetivo desde una fuente puntual distante?

36. Un microscopio del tipo mostrado en la figura 25 tiene una distancia focal de 4.2 cm para el objetivo y de 7.7 cm para el ocular. La distancia entre las lentes es de 25 cm. (*a*) ¿Cuál es la distancia s en la figura 25? (*b*) ¿Cuánto más allá de F_1 en esa figura debería colocarse el objeto para que se reproduzcan las condiciones de la figura 25? (*c*) ¿Cuál es la amplificación lateral m del objetivo? (*d*) ¿Cuál es la amplificación angular m_θ del ocular? (*e*) ¿Cuál es la amplificación total M del microscopio?

37. La figura 36*a* muestra un ojo humano normal. Los rayos paralelos que entran a un ojo relajado que mira al infinito producen una imagen real e invertida en la retina. El ojo actúa entonces como una lente convergente. La mayor parte de la refracción ocurre en la superficie exterior del ojo, la *córnea*. Supóngase para el ojo una distancia focal f de 2.50 cm. En la figura 36*b* el objeto se desplaza a una distancia $o = 36.0$ cm del ojo. Para formar una imagen en la retina debe reducirse a f' la distancia focal efectiva del ojo. Esto se hace por medio de la acción de los músculos ciliares que cambian la forma de la lente y, por consiguiente, la distancia focal efectiva del ojo. (*a*) Halle f' de los datos anteriores. (*b*) ¿Serían los radios de curvatura de la lente mayores o menores en la transición de la figura 36*a*

a la figura 36*b*? (En la figura, la estructura del ojo se muestra burdamente y la figura 36*b* no está a escala.)

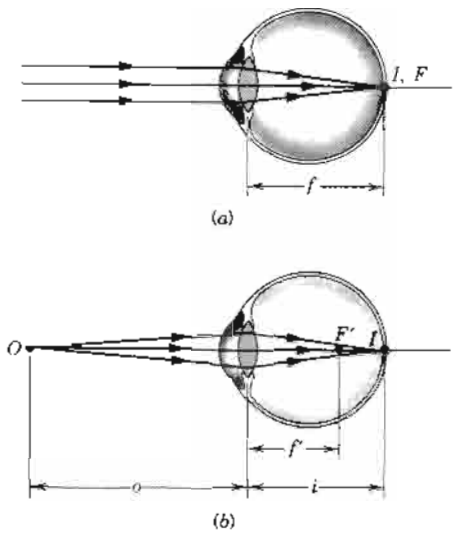


Figura 36. Problema 37.

38. En la vista *hipermétrope*, el ojo enfoca los rayos paralelos de modo que la imagen se formaría detrás de la retina, como en la figura 37*a*. En el ojo *miope*, la imagen se forma enfrente de la retina, como en la figura 37*b*. (*a*) ¿Cómo se diseñaría una lente correctora para cada defecto del ojo? Construya un diagrama de rayos para cada caso. (*b*) Si usted necesita anteojos únicamente para leer, ¿es usted miope o hipermétrope? (*c*) ¿Cuál es la función de los anteojos bifocales, en los que las partes superiores y las partes inferiores tienen distancias focales diferentes?

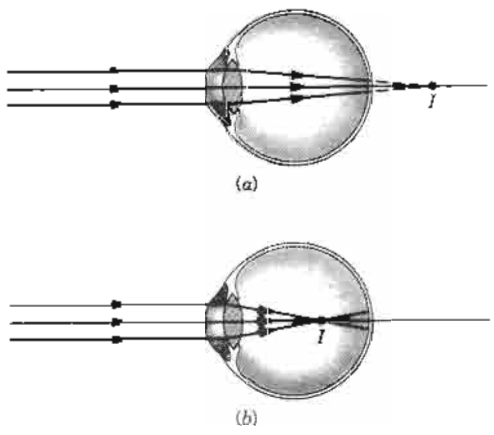


Figura 37 Problema 38.

39. La figura 38 muestra una cámara idealizada enfocada sobre un objeto en el infinito. En la película se forma una imagen *I* real e invertida, siendo la distancia *i* de la imagen igual a la distancia focal (fija) *f* (= 5.0 cm, por ejemplo) del sistema de lentes. En la figura 38*b*, el objeto *O* está más cerca de la cámara, siendo la distancia *o* del objeto, digamos, de 100 cm. Para enfocar una imagen *I* en la película, debemos alejar la lente de la cámara (¿por qué?). (*a*) Halle *i'* en la figura 38*b*. (*b*) ¿A qué distancia debe moverse la lente? Nótese que la cámara difiere del ojo en este respecto (véase el problema 37). En la cámara, *f* permanece constante y la distancia *i* de la imagen debe de ajustarse mediante el movimiento del lente. Para el ojo, la distancia *i* de la imagen permanece constante y la distancia focal *f* se ajusta mediante la distorsión de la lente. Compárense cuidadosamente la figura 36 y la figura 38.

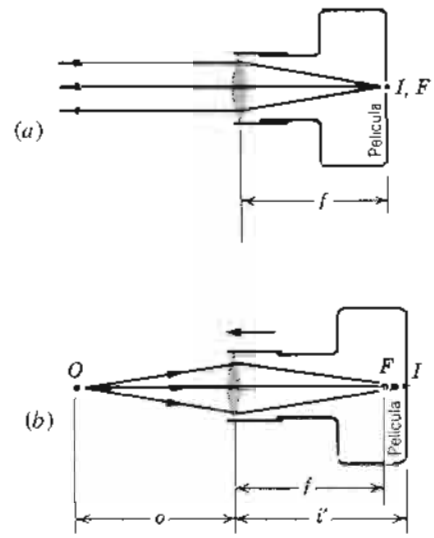


Figura 38 Problema 39.

40. La distancia focal de una cámara pequeña es de 50 mm y los límites de enfoque se extienden desde 1.2 m hasta el infinito. Halle los límites del movimiento necesario entre la lente y la película.

41. En un microscopio compuesto, el objeto está a 12.0 mm del objetivo. Las lentes están separadas por 285 mm y la imagen intermedia está a 48.0 mm del ocular. ¿Qué aumento se produce?

42. Isaac Newton, habiéndose convencido (erróneamente) de que la aberración cromática era una propiedad inherente de los telescopios refringentes, inventó el telescopio de reflexión, mostrado esquemáticamente en la figura 39. Presentó su segundo modelo de este telescopio, que tiene un poder de aumento de 38, a la Royal Society, que todavía lo conserva. En la figura 39 la luz incide, más o menos paralelamente al eje del telescopio, en el espejo *M* del objetivo. Después de la reflexión del pequeño espejo *M'* (en la figura no está a escala), los rayos forman una imagen real e invertida en el plano focal que pasa por *F*. Esta imagen se ve entonces a través de un ocular. (*a*) Demuestre que la amplificación (el poder de aumento) angular m_θ está también dada por la ecuación 32, o sea

$$m_\theta = -f_{ob}/f_{oc}$$

donde f_{ob} es la distancia focal del espejo del objetivo y f_{oc} es la del ocular. (*b*) El espejo de 200 in del telescopio de reflexión en Monte Palomar en California tiene una distancia focal de 16.8 m. Calcule el tamaño de la imagen formada en el plano focal de este espejo cuando el objeto es una vara de 1 metro situada a 2.0 km de distancia. Suponga que los rayos incidentes son paralelos. (*c*) El espejo de un telescopio astronómico de reflexión diferente tiene un radio de curvatura efectivo ("efectivo" porque tales espejos están rectificados a una forma parabólica más bien que esférica, para eliminar los defectos producidos por la aberración esférica) de 10 m. Para dar una amplificación angular de 200, ¿cuál debe ser la distancia focal del ocular?

43. Un fotógrafo está de pie a 44.5 m de la vía de un ferrocarril, siendo la visual perpendicular a los rieles. Un tren pasa a 135 km/h y el fotógrafo toma una foto. Usando una cámara con una distancia focal de 3.6 cm, halle el tiempo de exposición máximo de modo que la confusión (el efecto de borrosidad) de la imagen en la película no exceda de 0.75 mm.

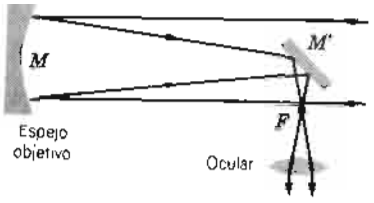


Figura 39 Problema 42.

CAPÍTULO 45

INTERFERENCIA

Los dos capítulos anteriores tratan de la óptica geométrica, en la que la luz encuentra obstáculos o aberturas (lentes, por ejemplo) de dimensiones mucho mayores que la longitud de onda de la luz. El lector quizás desee repasar la sección 43-1, donde se estudia el límite de validez de la óptica geométrica.

En el presente capítulo y en el que sigue, consideraremos los fenómenos de interferencia *y de* difracción, *donde la luz encuentra obstáculos o aberturas cuyo tamaño es comparable a su longitud de onda. Éstos son los dominios de la* óptica física *(conocida también como óptica ondulatoria), que difiere de la óptica geométrica en que aquélla comprende efectos que dependen de la naturaleza ondulatoria de la luz. De hecho, es a partir de los experimentos de interferencia y de la difracción que obtenemos pruebas de que la luz se comporta (al menos en estas circunstancias) como una onda más bien que como una corriente de partículas (como lo creía Newton).*

Aunque sólo trataremos con ondas de luz en este capítulo, todas las demás clases de ondas (como las ondas de sonido y las ondas de agua) también experimentan interferencia y difracción. Por ejemplo, al colocar altavoces en una sala es necesario considerar la interferencia y la difracción de las ondas de sonido. Los principios que desarrollamos para las ondas de luz se aplican igualmente a otras clases de ondas.

45-1 INTERFERENCIA POR UNA RENDIJA DOBLE

Cuando las ondas por lo demás idénticas que proceden de dos fuentes se traslapan en un punto en el espacio, la intensidad de la onda combinada en ese punto puede ser mayor o menor que la intensidad de cualquiera de las dos ondas. A este efecto le llamamos *interferencia*. La interferencia puede ser o bien *constructiva*, cuando la intensidad neta es mayor que las intensidades individuales, o *destructiva*, cuando la intensidad neta es menor que las intensidades individuales. Como lo veremos más adelante, el que la interferencia sea constructiva o destructiva depende de las fases relativas de las dos ondas.

Si bien cualquier número de ondas puede, en principio, interferir, aquí consideramos sólo la interferencia de dos ondas. Suponemos que las fuentes de ondas emiten cada una, una sola longitud de onda únicamente. (El caso de fuentes que emiten ondas de varias longitudes de onda puede manejarse al considerar por separado las interferencias de las longitudes de onda de los componentes individuales.)

Suponemos también, por ahora, que la relación de fases entre las dos ondas no cambia con el tiempo. Se dice que tales ondas son *coherentes*. Cuando ondas coherentes interfieren, la intensidad de la onda combinada en cualquier punto en el espacio no cambia con el tiempo. La coherencia, que es una condición necesaria para que ocurra la interferencia, se analiza en la sección siguiente.

En general, dos fuentes de luz distintas no pueden hacerse coherentes, porque la emisión de la luz por los átomos de una fuente es independiente de la otra. Las crestas y valles de las ondas que proceden de las dos fuentes no mantienen una relación de fases definida, y se dice que las ondas son *incoherentes*. Para llevar a cabo experimentos de interferencia con la luz, por lo general es necesario dividir la luz que procede de una sola fuente en dos componentes y tratar a cada componente como si fuera emitida de una fuente de luz independiente. Si lo hacemos de forma adecuada, puede conseguirse que las dos ondas interfieran. Más adelante consideraremos va-

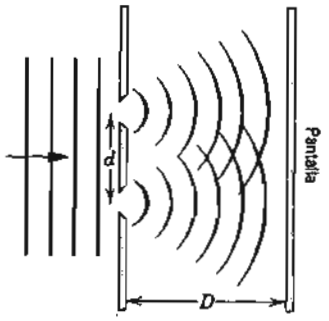


Figura 1 Un tren de ondas planas de luz (por ejemplo, procedentes de un láser) incide sobre una barrera en la cual están cortadas dos rendijas angostas separadas por una distancia d. La anchura de las rendijas es pequeña en comparación con la longitud de onda, de modo que las ondas que pasen por las rendijas se difracten e iluminen la pantalla.

rios esquemas para crear esta división de la onda de luz; aquí consideramos la técnica de hacer pasar una onda de luz por dos rendijas o aberturas estrechas. La anchura de las rendijas debe ser del mismo orden que la longitud de onda de la luz. Así pues, estamos claramente fuera de los dominios en que se aplica la óptica geométrica (véase la Fig. 1 del capítulo 43).

La figura 1 muestra una barrera en la que se han cortado dos rendijas angostas paralelas. Sobre las rendijas incide un tren de ondas planas de luz, como el que puede obtenerse de un láser. A través de las rendijas pasan porciones de cada frente de ondas incidente, de modo que las rendijas pueden considerarse como dos fuentes de ondas de luz coherentes. (El esparcimiento de la luz al pasar por las rendijas, ilustrado en la Fig. 1, se llama *difracción* y se estudiará en el capítulo siguiente. Por ahora, consideraremos las rendijas tan angostas que cada una puede considerarse como una línea de fuentes puntuales de luz, emitiendo cada una las pequeñas ondas de Huygens que se vieron en la Sec. 43-3.) Nótese que las dos ondas pueden traslaparse e interferir al incidir sobre la pantalla. Para simplificar el análisis, suponemos que la distancia D de las rendijas y la pantalla es mucho mayor que la separación d entre las rendijas. (Como alternativa, podemos colocar una lente entre la rendija y la pantalla para enfocar la luz emergente sobre la pantalla, como lo veremos más adelante.)

Cuando observamos la pantalla, vemos una serie alternante de bandas claras y oscuras, o *franjas de interferencia*, que corresponden a máximos y mínimos en la intensidad de la luz respectivamente, como se muestra en la figura 2. La figura 3 muestra un patrón de máximos y mínimos en la intensidad o interferencia de las ondas en agua contenida en un tanque o cuba de ondas. Con base en análisis similares puede comprenderse la interferencia de las ondas de luz y de las ondas del agua que producen estos máximos y mínimos.

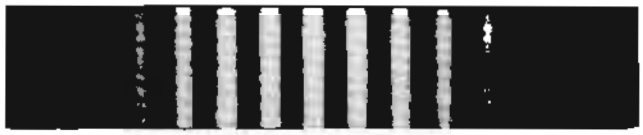


Figura 2 El patrón de la interferencia, que consta de bandas o franjas claras y oscuras, que aparecería en la pantalla de la figura 1.

Para analizar el patrón de interferencia, consideramos que las ondas que proceden de cada rendija se combinan en un punto arbitrario P de la pantalla C en la figura 4. El punto P está a distancias de r_1 y r_2 de las rendijas S_1 y S_2, respectivamente. Se traza la línea S_2b de modo que las líneas PS_2 y Pb tengan longitudes iguales. Si d, el espaciamiento entre las ranuras, es mucho menor que la distancia D entre las ranuras y la pantalla (en la figura se exagera la razón d/D por claridad), S_2b es entonces casi perpendicular tanto a r_1 como a r_2. Esto significa que el ángulo S_1S_2b es casi igual al ángulo PaO, estando ambos ángulos marcados θ en la figura; de forma equivalente, puede considerarse que las líneas r_1 y r_2 son casi paralelas.

Los dos rayos que llegan a P en la figura 4 partiendo de S_1 y S_2 están en fase en las rendijas fuente; ambos provienen del mismo frente de ondas de la onda plana incidente. Puesto que los rayos recorren caminos ópticos de longitud

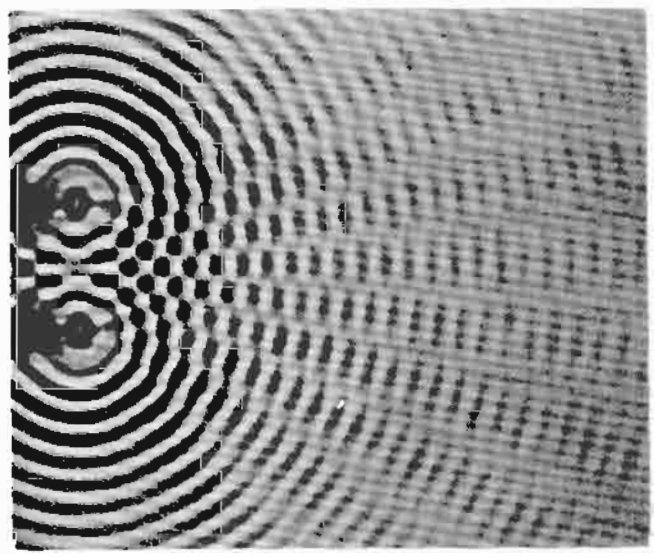


Figura 3 Un patrón de interferencia producido por ondas de agua en una cuba o tanque de ondas. Dos púas vibrantes crean dos patrones de rizos u ondas circulares, los cuales se traslapan para formar un patrón de máximos y mínimos de las ondas. El borde derecho de esta fotografía hace las veces de la pantalla en la figura 1. Obsérvese que, a lo largo de esta "pantalla", existe un patrón alternante de máximos y mínimos, como en la figura 2.

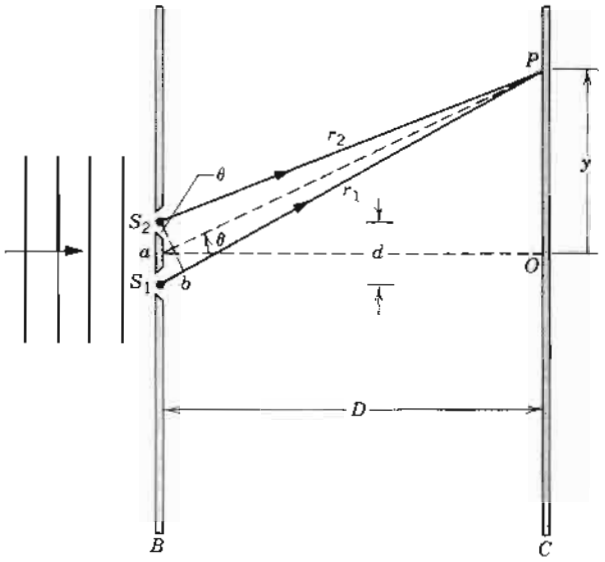


Figura 4 Los rayos que proceden de S_1 y S_2 se combinan en P. En la realidad, $D \gg d$; la figura se ha distorsionado por claridad. El punto a es el punto central entre las rendijas.

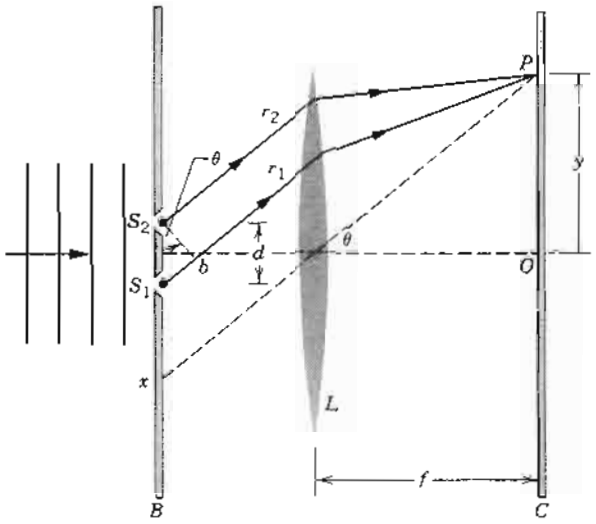


Figura 5 Una lente se utiliza para producir franjas de interferencia. Compárese con la figura 4. En la realidad, $f \gg d$; una vez más la figura se distorsiona por claridad.

diferente, llegan a P con una diferencia de fase. El número de longitudes de onda contenido en la diferencia S_1b del camino determina el tipo de interferencia en P.

Para tener un *máximo* en P, los dos rayos deben llegar en fase, y así S_1b ($= d \operatorname{sen} \theta$) debe contener un número entero de longitudes de onda, o sea

$$S_1b = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

lo cual podemos escribir así:

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \text{ (máximos)}. \quad (1)$$

Nótese que cada máximo arriba de O en la figura 4 tiene un máximo ubicado simétricamente abajo de O; esto corresponde a usar $m = -1, -2, \ldots$ en la ecuación 1. El máximo central se describe por $m = 0$.

Para un *mínimo* en P, los dos rayos deben diferir en fase por un múltiplo impar de π, para el cual S_1b ($= d \operatorname{sen} \theta$) debe contener un número semientero de longitudes de onda, o sea

$$d \operatorname{sen} \theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \quad m = 0, 1, 2, \ldots \text{ (mínimos)}. \quad (2)$$

Los valores negativos de m dan la posición de los mínimos en la mitad inferior de la pantalla.

Es matemáticamente más sencillo tratar con ondas planas que incidan sobre la rendija doble y que emerjan de allí. Sin embargo, los frentes de onda planos no forman una imagen en la pantalla a cualquier distancia finita D de las rendijas. Por lo tanto, a menudo se usa una lente, como se muestra en la figura 5, para enfocar los rayos paralelos que proceden de las ranuras en la pantalla. La luz enfocada en P debe incidir sobre la lente en forma paralela a la línea Px trazada desde P pasando por el centro de la lente. En estas estas condiciones, los rayos r_1 y r_2 son estrictamente paralelos, aun cuando no se cumpla el requisito $D \gg d$.

Si se emplea una lente entre las rendijas y la pantalla, puede parecer que se genera una diferencia de fase entre los rayos más allá del plano representado por S_2b, siendo claramente diferentes las longitudes de la trayectoria geométrica entre este plano y P. Sin embargo, en la sección 44-3 veremos que las longitudes del camino *óptico* de los rayos paralelos enfocados por una lente son iguales. Dos rayos con longitudes de caminos ópticos iguales contienen el mismo número de longitudes de onda, de modo que no se presenta ninguna diferencia de fase al pasar la luz por la lente.

Experimento de Young de la doble rendija

Thomas Young* realizó por vez primera en 1801 un experimento de interferencia como el que se describió anteriormente. El experimento de Young proporcionó la primera prueba concluyente de la naturaleza ondulatoria de la luz. Puesto que, como lo indican las ecuaciones 1 y 2, el

* Thomas Young (1773-1829) recibió inicialmente formación como médico. Su interés en la percepción sensorial y en la visión lo llevó a la física y al estudio de la luz. Entre sus otros logros científicos se encuentran estudios de la tensión superficial y de la elasticidad, por lo cual se le reconoce al darle al módulo de elasticidad su nombre, conocido ahora como el módulo de Young, en su honor. También se destacó por su interés en los jeroglíficos y contribuyó a descifrar la piedra de la Rosetta, la cual proporcionó los primeros indicios para entender los lenguajes del antiguo Egipto.

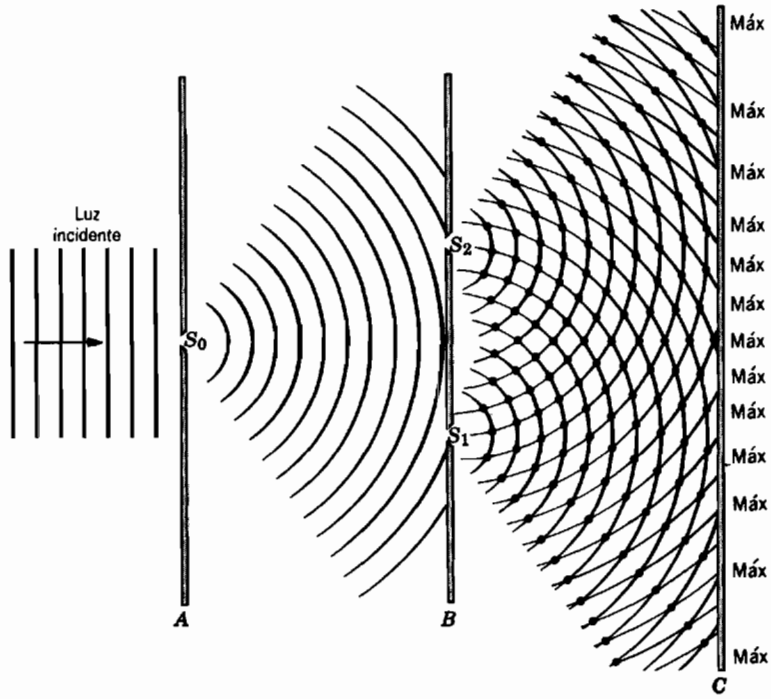


Figura 6 En el experimento de interferencia de Young, la luz que se difracta del orificio S_0 llega a los orificios S_1 y S_2 en la pantalla *B*. La luz que se difracta de estos dos orificios se traslapa en la pantalla *C*, produciendo el patrón de interferencia.

espaciamiento de las franjas de interferencia depende de la longitud de onda, los experimentos de Young proporcionaron la primera medición directa de la longitud de onda de la luz.

Por supuesto que no existía el láser en tiempos de Young, así que él creó una fuente de luz coherente al permitir que la luz solar incidiera sobre una abertura angosta S_0, como se muestra en la figura 6. Las pequeñas ondas que se esparcen de S_0 dan frentes de onda coherentes que pasan por las dos aberturas. En sus experimentos Young usó orificios más bien que rendijas, y como resultado el patrón de la interferencia era más complicado que el de la figura 2. No obstante, sus conclusiones con respecto a la naturaleza ondulatoria de la luz fueron correctas. Incluso cuando se realiza con láser, el experimento de la rendija doble se conoce, por lo general, como el experimento de Young.

Problema muestra 1 El dispositivo de rendija doble de la figura 4 está iluminado con luz procedente de una lámpara de vapor de mercurio filtrada de modo que sólo sea visible la línea de color verde intenso (λ = 546 nm). Las rendijas están separadas por 0.12 mm, y la pantalla sobre la que aparece el patrón de interferencia está a 55 cm de distancia. ¿Cuál es la posición angular del primer mínimo? ¿Y del máximo décimo?

Solución En el primer mínimo hacemos $m = 0$ en la ecuación 2, o sea

$$\text{sen } \theta = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} = \frac{(\frac{1}{2})(546 \times 10^{-9}\text{ m})}{0.12 \times 10^{-3}\text{ m}} = 0.0023.$$

Este valor del sen θ es tan pequeño que podemos considerar su valor θ, expresado en radianes; expresado en grados es 0.13°.

En el máximo décimo (sin contar el máximo central) debemos hacer que $m = 10$ en la ecuación 1. Procediendo de esta forma y calculando como antes hallamos una posición angular de 2.6°. Para estas condiciones vemos que el esparcimiento angular de la primera docena más o menos de franjas es pequeño.

Problema muestra 2 ¿Cuál es la distancia lineal en la pantalla *C* entre los máximos contiguos m y $m + 1$ del problema muestra 1?

Solución Si θ es lo suficientemente pequeño, podemos usar la aproximación

$$\text{sen } \theta \approx \tan \theta \approx \theta.$$

De la figura 4 vemos que

$$\tan \theta = \frac{y}{D}.$$

Al considerar la aproximación en la ecuación 1 para el sen θ se obtiene

$$y = m\frac{\lambda D}{d} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(máximos)}.$$

Las posiciones de dos máximos contiguos cualesquiera están dadas por

$$y_m = m\frac{\lambda D}{d}$$

y

$$y_{m+1} = (m + 1)\frac{\lambda D}{d}.$$

Hallamos su separación Δy al restar:

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d}$$
$$= \frac{(546 \times 10^{-9}\ \text{m})(55 \times 10^{-2}\ \text{m})}{0.12 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.5\ \text{mm}.$$

Mientras que θ en la figura 4 sea pequeño, la separación de las franjas de interferencia es independiente de m; esto es, las franjas están espaciadas uniformemente, como se muestra en la figura 2. Si la luz incidente contiene más de una longitud de onda, los patrones separados de interferencia, que tienen espaciamientos de las franjas diferentes, se superponen.

45-2 COHERENCIA

Al deducir la ecuación 1 determinamos que aparecería un máximo en la pantalla de la figura 4 siempre que la *diferencia de la trayectoria* de las ondas que viajan a un punto P en la pantalla desde las dos rendijas S_1 y S_2 fuera igual al número total de longitudes de onda. Otra descripción usa la *diferencia de fase* ϕ entre las dos ondas que proceden de S_1 y S_2. En ciertos puntos de la pantalla, donde la diferencia de fase es 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$,..., las dos ondas están en fase y ocurre un máximo en la intensidad. En otros puntos, la diferencia de fase es $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$,..., y las dos ondas están fuera de fase; en esos puntos se tiene un mínimo de intensidad. En otros puntos de la pantalla, la diferencia de fase puede tener otros valores que no pueden expresarse como un múltiplo entero de π.

Para que se genere un patrón de interferencia propiamente dicho, *la diferencia de fase en los puntos sobre la pantalla no debe cambiar con el tiempo*. Si esto sucede, decimos que los haces que proceden de S_1 y S_2 son completamente *coherentes*. La coherencia puede presentarse para cualquier tipo de ondas. Por ejemplo, pueden obtenerse ondas de sonido coherentes al excitar dos altavoces diferentes con el mismo oscilador de audio, y de modo semejante se obtendrán ondas de radio coherentes cuando dos antenas distintas se conectan al mismo oscilador electromagnético.

Supongamos, en cambio, que las rendijas S_1 y S_2 se reemplazan con dos fuentes de luz completamente independientes, como dos alambres finos incandescentes situados uno al lado del otro. No aparecerán franjas de interferencia en la pantalla C sino sólo una iluminación relativamente uniforme. Podemos interpretar esto si hacemos la hipótesis razonable de que, en fuentes de luz completamente independientes, la diferencia de fase entre los dos haces que llegan a cualquier punto de la pantalla varía con el tiempo aleatoriamente. En cierto instante las condiciones pueden propiciar la cancelación, y un tiempo breve después (quizás 10^{-8} s) pueden propiciar el refuerzo. El ojo no puede seguir estas variaciones rápidas y ve únicamente una iluminación uniforme. La intensidad en cualquier punto es igual a la suma de las intensidades que cada fuente S_1 y S_2 produce en ese punto por separado. En estas condiciones se dice que los dos haces que emergen de S_1 y S_2 son completamente *incoherentes*.

Para hallar la intensidad resultante del traslape de haces de luz completamente *coherentes*, (1) sumamos las amplitudes de onda, teniendo en cuenta en forma apropiada la diferencia de fase (constante) apropiadamente, y luego (2) elevamos al cuadrado la amplitud resultante para obtener una cantidad proporcional a la intensidad resultante. Por el contrario, en haces de luz completamente *incoherentes*, (1) elevamos al cuadrado las amplitudes individuales para obtener cantidades proporcionales a las intensidades individuales y luego (2) sumamos las intensidades individuales para obtener la intensidad resultante. Estos procedimientos concuerdan con los hechos experimentales de que, para fuentes de luz completamente independientes, la intensidad resultante en todos los puntos es siempre mayor que la intensidad producida en ese punto por cualquier fuente de luz que actúe en forma aislada, mientras que en las fuentes coherentes la intensidad en ciertos puntos puede ser menor que la producida por cualquier fuente aislada.

¿En qué condiciones experimentales se producen haces coherentes o incoherentes? Consideremos un haz paralelo de radiación de microondas que emerge de una antena conectada por un cable coaxial a un oscilador basado en una cavidad electromagnética resonante. Las oscilaciones en la cavidad (véase la Sec. 40-4) son completamente periódicas con el tiempo y producen, en la antena, una variación completamente periódica de **E** y de **B** con el tiempo. La onda radiada de la antena a distancias suficientemente grandes está bien representada por la figura 10 del capítulo 41. Nótese que (1) la onda tiene esencialmente una extensión en tiempo infinita, e incluye tanto los tiempos futuros (es decir, $t > 0$) como tiempos pasados ($t < 0$); véase la figura 7*a*. En cualquier punto, conforme la onda pasa, la perturbación de la onda (**E** o **B**) varía con el tiempo en forma perfectamente periódica. (2) Los frentes de onda en los puntos alejados de la antena son planos paralelos de extensión esencialmente infinita en ángulo recto con la dirección de propagación. En cualquier instante de tiempo la perturbación de la onda varía con la distancia a lo largo de la dirección de propagación de una manera perfectamente periódica.

Dos haces generados de una onda viajera individual como la de la figura 10 del capítulo 41 son completamente coherentes. Una manera de generar dos haces de este tipo es colocar una pantalla opaca que contenga dos rendijas en la trayectoria del haz. Las ondas que emergen de las rendijas tienen siempre una diferencia de fase constante en cualquier punto de la región en que se traslapan, y se producen franjas de interferencia. Haces de

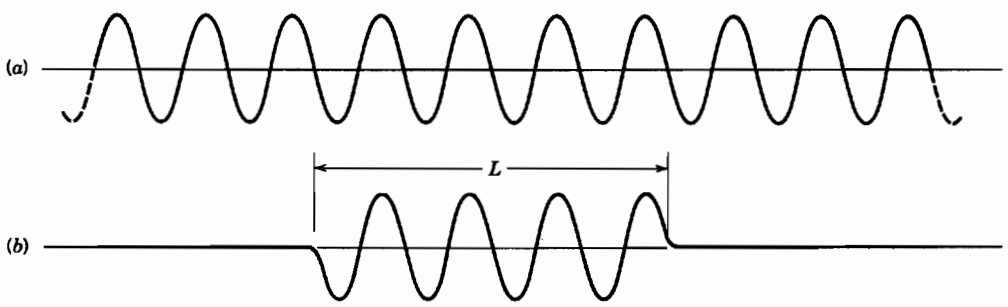


Figura 7 (*a*) Sección de una onda infinita. (*b*) Tren de ondas de longitud finita *L*.

radio coherentes también pueden generarse sin dificultad, de igual modo que lo pueden hacer las ondas elásticas coherentes en sólidos, líquidos y gases. Por ejemplo, las dos púas del vibrador de la figura 3 generan dos ondas coherentes en el agua de la cuba o tanque de ondas.

Si volvemos nuestra atención a las fuentes comunes de luz visible, como los alambres incandescentes o una descarga eléctrica que pase a través de un gas, nos damos cuenta de una diferencia fundamental. En ambas de estas fuentes los procesos fundamentales de emisión de luz ocurren en átomos individuales, y estos átomos no actúan juntos de un modo cooperativo (esto es, *coherente*). El acto de emisión de luz por un átomo individual toma, en un caso típico, unos 10^{-8} s, y la luz emitida se describe apropiadamente como un *tren de ondas* finito (Fig. 7*b*) más bien que como una onda infinita (Fig. 7*a*). Para tiempos de emisión como éstos, los trenes de ondas tienen una longitud de unos cuantos metros. En fuentes de luz reales, como los tubos de descarga en gas a baja presión, los trenes de ondas son típicamente del orden de unos cuantos centímetros de longitud. Éste es el límite de las distancias para las cuales la luz que procede de tales fuentes permanece coherente.

Los efectos de interferencia que proceden de fuentes de luz ordinarias pueden producirse al poner una rendija muy angosta (S_0 en la Fig. 6) directamente enfrente de la fuente. Esto asegura que los trenes de ondas que llegan a las rendijas S_1 y S_2 en la pantalla *B* de la figura 6 se originen en la misma pequeña región de la fuente. Si las longitudes de la trayectoria que parte de todos los puntos en la rendija S_0 hacia S_1 y S_2 son casi iguales, la luz que pasa por las rendijas dobles está en fase, y se produce en la pantalla *C* un patrón de interferencia estacionario. Si se hace a la rendija S_0 tan ancha que haya puntos en S_0 para los cuales las longitudes de la trayectoria a S_1 y S_2 difieran en media longitud de onda, la luz que pasa por las rendijas dobles a partir de las fuentes situadas en tales puntos estarían fuera de fase; esta luz contribuye con máximos en la pantalla donde antes había mínimos y con mínimos donde antes había máximos. El efecto en la pantalla se vuelve una superposición incoherente de luz de efectivamente muchas fuentes, desvaneciéndose en consecuencia el patrón de interferencia.

Si la rendija S_0 es lo suficientemente pequeña, se mantiene una diferencia de fase constante dada en cualquier punto sobre la pantalla *C* entre haces que pasan por las rendijas S_1 y S_2. Podemos considerar esta luz como coherente, dentro de una distancia caracterizada por la longitud de su tren de ondas.

Si la anchura de la rendija S_0 en la figura 6 se aumenta de froma gradual, se observa experimentalmente que los máximos de las franjas de interferencia disminuyen su intensidad y que la intensidad en los mínimos de las franjas ya no es estrictamente cero. En otras palabras, las franjas se tornan menos claras. Si S_0 se abre a una anchura extremada, la disminución de la intensidad máxima y la elevación de la intensidad mínima son tales que las franjas desaparecen, dejando únicamente una iluminación uniforme. En estas condiciones decimos que los haces que proceden de S_1 y S_2 pasan continuamente de una condición de completa coherencia a otra de completa incoherencia. Si no se llega a cualquiera de estos dos límites, se dice que los haces son parcialmente coherentes.

La coherencia parcial puede demostrarse también en dos haces que se produzcan usando un espejo parcialmente plateado, que refleje parte de la luz y transmita el resto. Puede hacerse que los dos haces así producidos sigan trayectorias (caminos) de longitudes diferentes antes de que se recombinen. Si la diferencia de las trayectorias es pequeña en comparación con la longitud promedio de un tren de ondas, las franjas de interferencia se definen claramente y tienden esencialmente a cero en sus mínimos. Si la diferencia en las trayectorias se hace deliberadamente más larga, los dos haces comienzan a perder su coherencia y las franjas se vuelven menos brillantes. Por último, cuando la diferencia de las trayectorias es mayor que la longitud promedio de un tren de ondas, las franjas desaparecen por completo. De esta manera es posible pasar gradualmente de una completa coherencia a una coherencia parcial y a una completa incoherencia.

Antes de 1960 no era posible construir una fuente de luz visible que produjera una onda infinita como la mostrada en la figura 7*a*. En las fuentes de luz visible que se disponían antes, los átomos no se comportaban cooperativamente, y la luz no era coherente. Tenemos ahora fuentes de luz visible altamente coherentes: el conocido

láser, cuya palabra se forma de las siglas en inglés de *light amplification through stimulated emision of radiation:* amplificación de luz por emisión estimulada de radiación. Usando un haz de láser podemos llevar a cabo una interferencia de rendija doble con la geometría mostrada en la figura 1 simplemente iluminando una rendija doble con el láser. No es necesario usar la luz difractada de la propia rendija, como en la figura 6.

La coherencia del haz de láser ha dado por resultado un número de aplicaciones prácticas. En muchas de estas aplicaciones, el haz del láser se divide en dos haces (usando un espejo parcialmente plateado). Los dos haces recorren caminos diferentes y luego se hace que se recombinen, momento en que ocurre la interferencia. Puesto que la longitud de coherencia de la luz láser puede ser de decenas o centenas de kilómetros, se producen patrones de interferencia para diferencias de camino grandes entre los dos haces. Una aplicación de esta coherencia es la holografía (véase la Sec. 47-5), donde un haz se refleja de un objeto y el patrón de interferencia entre los haces directo y reflejado se almacena en película fotográfica, la cual puede emplearse para reconstruir una imagen tridimensional del objeto. Los cambios en la longitud de la trayectoria de uno de los haces pueden detectarse fácilmente en grandes distancias por medio de cambios en el patrón de la interferencia; los interferómetros de láser basados en este principio se usan para seguir el movimiento de las placas geológicas en la superficie de la Tierra. Otras aplicaciones comprenden el corrimiento Doppler de un haz reflejado de un objeto en movimiento; cuando los dos haces se recombinan, se produce un patrón de pulsos. La figura 20 del capítulo 2 mostraba una aplicación de este efecto para la medición de la aceleración en caída libre. Entre otras aplicaciones que dependen de la coherencia del haz láser se encuentran las comunicaciones a grandes distancias usando señales ópticas.

45-3 INTENSIDAD DE LA INTERFERENCIA POR UNA RENDIJA DOBLE

Las ecuaciones 1 y 2 dan las posiciones de los máximos y mínimos del patrón de interferencia. No indican, sin embargo, cómo varía la intensidad entre los máximos y los mínimos. En esta sección encontraremos una expresión para la intensidad I en cualquier punto P determinado por el ángulo θ en la figura 4.

Supongamos que las componentes* del campo eléctrico de las dos ondas en la figura 4 varía con el tiempo en el punto P como

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{3}$$

y

$$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{4}$$

donde $\omega (= 2\pi\nu)$ es la frecuencia angular de las ondas y ϕ es la diferencia de fase entre ellas. Nótese que ϕ depende de la posición del punto P, que está determinado por el ángulo θ en la figura 4. Suponemos que las rendijas son tan angostas que la luz difractada de cada rendija ilumina la porción central de la pantalla uniformemente. Esto significa que cerca del centro de la pantalla E_0 es independiente de la posición de P, esto es, del valor de θ.

Si la separación d entre rendijas es mucho menor que la distancia D a la pantalla, los vectores E de las dos ondas que interfieren son casi paralelos, y podemos reemplazar la suma vectorial de los campos E con la suma escalar de sus componentes,

$$E = E_1 + E_2, \tag{5}$$

lo cual, como demostraremos más adelante en esta sección, puede escribirse

$$E = E_\theta \operatorname{sen}(\omega t + \beta), \tag{6}$$

donde la fase β es

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi \tag{7}$$

y la amplitud es

$$E_\theta = 2E_0 \cos \beta. \tag{8}$$

La amplitud E_θ de la perturbación de la onda resultante, que determina la intensidad de la franjas de interferencia, depende de β, la que a su vez depende del valor de θ, esto es, de la posición del punto P en la figura 4. El valor máximo posible de la amplitud E_θ es $2E_0$, igual al doble de la amplitud E_0 de las ondas que se combinan, en correspondencia con un refuerzo completo.

En la sección 41-4 demostramos que la intensidad I de una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud E_m de su campo eléctrico (véase la Ec. 18 del capítulo 41):

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2. \tag{9}$$

La razón de las intensidades de las dos ondas de luz puede expresarse, por consiguiente, como la razón de los cuadrados de las amplitudes de sus campos eléctricos. Si I_θ es la intensidad de la onda resultante en P, e I_0 es la intensidad que produciría cada una de las ondas actuando por sí misma, entonces

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{E_\theta}{E_0}\right)^2. \tag{10}$$

* Podríamos elegir la caracterización de la onda de luz o bien por su campo eléctrico **E** o por su campo magnético **B**. Por regla general, usamos **E** más bien que **B**, porque los efectos de **B** sobre el ojo humano y sobre varios detectores de luz son insignificantes.

Al combinar las ecuaciones 8 y 10 obtenemos

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \beta. \qquad (11)$$

Nótese que la intensidad de la onda resultante en cualquier punto P varía desde cero [por ejemplo, para un punto en el que $\phi(= 2\beta) = \pi$] hasta cuatro veces la intensidad I_0 de cada onda individual [por ejemplo, para un punto en el que $\theta(= 2\beta) = 0$]. Calculemos I_θ en función del ángulo θ en la figura 4.

La diferencia de fase ϕ en la ecuación 4 se asocia con la diferencia de trayectorias S_1b en la figura 4. Si S_1b es $\frac{1}{2}\lambda$, ϕ es π; si S_1b es λ, ϕ es 2π, y así sucesivamente. En general,

$$\frac{\text{diferencia de fases}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia de trayectorias}}{\lambda}$$

Haciendo que ϕ sea la diferencia de fases y recordando que la diferencia de trayectorias en la figura 4 es $d \operatorname{sen} \theta$, podemos escribir esto como

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(d \operatorname{sen} \theta),$$

o, usando la ecuación 7,

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi = \frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \qquad (12)$$

Por lo tanto, la intensidad en cualquier θ puede escribirse como

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\phi \qquad (13)$$

o sea

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right). \qquad (14)$$

De la ecuación 13, vemos que los máximos de intensidad ocurren cuando $\cos^2 \frac{1}{2}\phi = 1$, o sea

$$\phi = 2m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Al usar la ecuación 12, podemos escribir que

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{(máximos)},$$

la cual es la misma que la ecuación 1. Los mínimos de la intensidad ocurren, de acuerdo con la ecuación 13, cuando $\cos^2 \frac{1}{2}\phi = 0$, o sea

$$\phi = (2m + 1)\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

lo que podemos escribir usando la ecuación 12 como

$$d \operatorname{sen} \theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{(mínimos)},$$

de acuerdo con la ecuación 2.

La figura 8 muestra el patrón de intensidades para la interferencia por una rendija doble. La línea llena horizontal es I_0; ésta describe el patrón de intensidad (uniforme) en la pantalla cuando una de las rendijas se cubre. Si las dos fuentes fueran incoherentes, la intensidad sería uniforme en la pantalla y sería $2I_0$, indicada por la línea horizontal de trazos de la figura 8. Para fuentes coherentes esperamos simplemente que la energía se redistribuya en la pantalla, porque la energía ni se crea ni se destruye durante el proceso de interferencia. Así, la intensidad *promedio* en el patrón de interferencia sería $2I_0$, como para el caso de las fuentes incoherentes. Esto se deduce de inmediato si, en la ecuación 13, sustituimos el valor $\frac{1}{2}$ en el término del cuadrado del coseno, lo cual siempre es el resultado de promediar el cuadrado de un término seno o coseno para uno o más semiciclos.

Suma de perturbaciones ondulatorias

Ahora obtendremos las ecuaciones 6 a 8 para el campo eléctrico combinado de la luz en la interferencia por una rendija doble. Esta deducción puede llevarse a cabo algebraicamente, usando los métodos de la sección 19-8. Sin embargo, el método algebraico resulta extremadamente difícil cuando deseamos sumar más de dos perturbaciones de onda, como lo haremos en los capítulos que siguen. Por lo tanto, usamos un método gráfico, el cual prueba ser conveniente en situaciones más complicadas. Este método se basa en los *fasores* rotatorios y es similar al empleado en el análisis de circuitos de corriente alterna en el capítulo 39.

Una perturbación de onda senoidal como la de la ecuación 3 puede representarse gráficamente usando un fasor rotatorio. En la figura 9*a* un fasor de magnitud E_0 gira con respecto al origen en una dirección antihoraria con una frecuencia angular ω. La perturbación alternante E_1 de la onda (Ec. 3) se representa mediante la proyección de este fasor sobre el eje vertical.

Una segunda perturbación de onda E_2, dada por la ecuación 4, que tiene la misma amplitud E_0 pero una

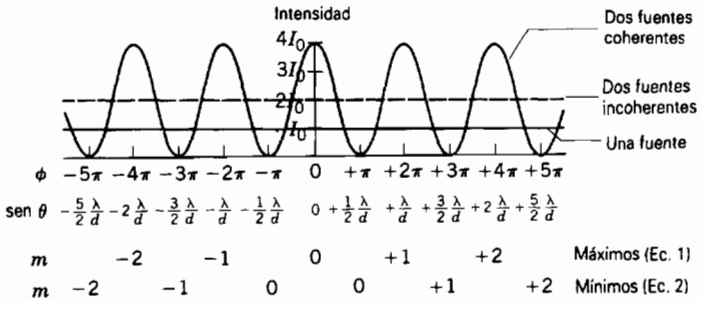


Figura 8 El patrón de intensidades en la interferencia de rendija doble, suponiendo que las ondas que interfieren iluminen esta región de la pantalla uniformemente; es decir, I_0 es independiente de la posición.

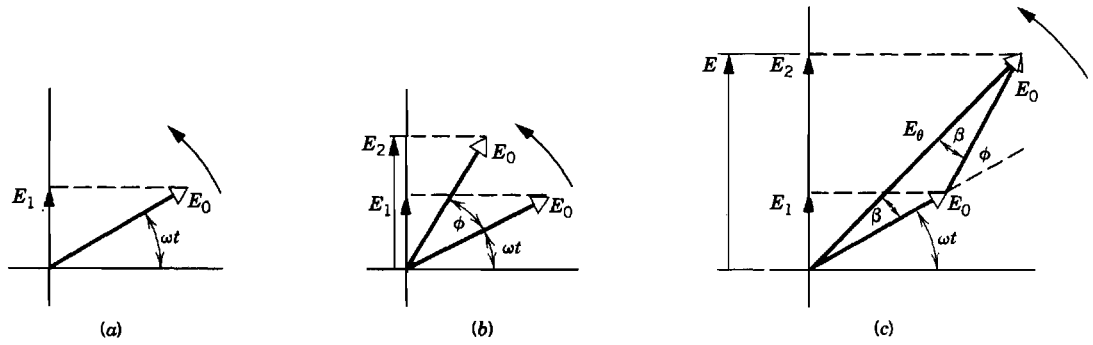


Figura 9 (*a*) Una onda E_1 variable en el tiempo se representa mediante un vector rotatorio o fasor. (*b*) Dos ondas E_1 y E_2 que difieren en fase por ϕ. (*c*) Otra manera de trazar (*b*).

diferencia de fases ϕ con respecto a E_1, puede representarse gráficamente (Fig. 9*b*) como la proyección sobre el eje vertical de un segundo fasor de la misma magnitud E_0 que forma un ángulo ϕ con el primer fasor. La suma E de E_1 y E_2 es la suma de las proyecciones de los dos fasores sobre el eje vertical. Esto se ve con más claridad si dibujamos de nuevo los fasores, como en la figura 9*c*, situando el pie de una flecha en la punta de la otra, manteniendo la diferencia de fase apropiada, y haciendo que todo el conjunto gire en el sentido antihorario alrededor del origen.

En la figura 9*c*, E puede considerarse también como la proyección sobre el eje vertical de un fasor de longitud E_θ, que es la suma vectorial de los dos fasores de magnitud E_0. De esa figura, vemos que la proyección puede escribirse

$$E = E_\theta \operatorname{sen}(\omega t + \beta),$$

de acuerdo con la ecuación 6. Nótese que la suma (algebraica) de las proyecciones de los dos fasores es igual a la proyección de la suma (vectorial) de los dos fasores.

En la mayoría de los problemas de óptica sólo nos ocupamos de la *amplitud* E_θ de la perturbación ondulatoria resultante y no de su variación en el tiempo. Esto es porque el ojo y otros instrumentos de medición comunes responden a la intensidad resultante de la luz (esto es, al cuadrado de la amplitud) y no pueden detectar las rápidas variaciones de tiempo que caracterizan a la luz visible. Por ejemplo, en la luz de sodio (λ = 589 nm), la frecuencia ν (= $\omega/2\pi$) es de 5.1×10^{14} Hz. Así, a menudo no necesitamos considerar la rotación de los fasores sino que podemos confinar nuestra atención a encontrar la amplitud del fasor resultante.

En la figura 9*c* los tres fasores forman un triángulo isósceles cuyos lados tienen longitudes E_0, E_0 y E_θ. En cualquier triángulo, un ángulo exterior (ϕ en este caso) es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos (β y β), y así

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi.$$

Es evidente también de la figura 9*c* que la longitud de la base de este triángulo es

$$E_\theta = 2E_0 \cos \beta.$$

Estos resultados son idénticos a las ecuaciones 7 y 8.

En un caso más general podríamos querer hallar la resultante de más de dos perturbaciones ondulatorias que varíen senoidalmente. El procedimiento general es el siguiente:

1. Construir una serie de fasores que representen las funciones que se van a sumar. Dibujarlos extremo con extremo, manteniendo las relaciones de fase apropiadas entre fasores contiguos.

2. Construir la suma de este arreglo de fasores, en forma análoga a una suma de vectores. La longitud del fasor resultante da la amplitud del campo eléctrico. El ángulo entre este fasor y el primer fasor es la fase de la resultante con respecto a este primer fasor. La proyección de este fasor sobre el eje vertical da la variación en el tiempo de la perturbación de la onda resultante.

Problema muestra 3 Determine gráficamente la resultante $E(t)$ de las perturbaciones de onda siguientes:

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

$$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 15°),$$

$$E_3 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 30°),$$

$$E_4 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 45°).$$

Solución La figura 10 muestra el conjunto de los cuatro fasores que representan a estas funciones. El ángulo de fase ϕ entre fasores consecutivos es de 15°. Hallamos por medición gráfica con una regla y un transportador que la amplitud E_θ es 3.8 veces la longitud de E_0 y que la onda resultante forma un ángulo de fase β de 22.5° con respecto a E_1. En otras palabras,

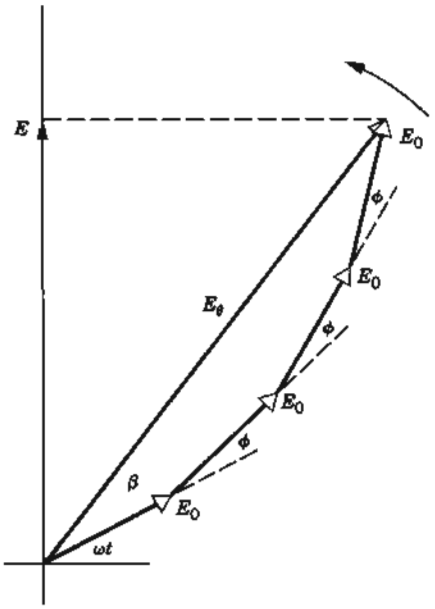


Figura 10 Problema muestra 3. Cuatro ondas se suman gráficamente, usando el método de los fasores.

$$E(t) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$
$$= 3.8E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 22.5°).$$

Compruébese este resultado por cálculo trigonométrico directo o por cálculo geométrico del diagrama de fasores de la figura 10.

45-4 INTERFERENCIA EN PELÍCULAS DELGADAS

Los colores que vemos cuando la luz solar incide en una burbuja de jabón, en una mancha de aceite o en un colibrí de pecho rojo son consecuencia de la interferencia de las ondas de luz que se refleja de las superficies anterior y posterior de películas delgadas transparentes. El espesor de las películas es del orden de magnitud de la longitud de onda de la luz. Las películas delgadas depositadas en componentes ópticos, como las lentes de cámara, pueden reducir la reflexión y aumentar la intensidad de la luz transmitida. Los recubrimientos delgados en ventanas pueden aumentar la reflectividad de la radiación infrarroja, por su efecto es menor sobre la radiación visible. De este modo es posible reducir el efecto de calentamiento de la luz solar en un edificio.

Dependiendo de su espesor, una película delgada puede ser perfectamente reflejante o perfectamente transmisora de la luz para una longitud de onda determinada, como se muestra en la figura 11. Estos efectos son consecuencia de interferencia constructiva o destructiva.

La figura 12 muestra una película transparente, de espesor uniforme d, iluminada con luz monocromática

Figura 11 Película de agua jabonosa en un aro de alambre, vista por luz reflejada. El segmento negro en la parte superior no es una rotura de la película. Ocurre porque la película, por drenaje, es tan delgada allí que entre la luz reflejada de las superficies anterior y posterior de la película se presenta interferencia destructiva.

de longitud de onda λ por una fuente puntual S. El ojo está colocado de modo que determinado rayo incidente i entre al ojo de la fuente como rayo r_1 después de reflejarse de la superficie anterior de la película en a. El rayo incidente entra también en la película en a como un rayo refractado y se refleja de la superficie posterior de la película en b; entonces, emerge de la superficie anterior de la película en c y entra también al ojo, como rayo r_2. La geometría de la figura 12 es tal que los rayos r_1 y r_2 son paralelos. Habiéndose originado en la misma fuente puntual, son

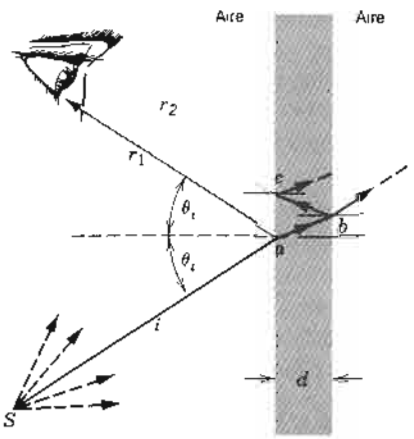


Figura 12 Una película delgada se ve por la luz que se refleja de una fuente S. Las ondas reflejadas de las superficies anterior y posterior entran al ojo como se muestra, y la intensidad de la onda de luz resultante se determina mediante la diferencia de fase entre las ondas que se combinan. Se supone que el medio en ambos lados de la película es el aire.

también coherentes y por lo tanto capaces de interferir. Existe una diferencia de fase entre ellos, porque estos dos rayos han viajado caminos con longitudes diferentes, han atravesado medios diferentes, y —como lo veremos— han experimentado diferentes clases de reflexiones en *a* y en *b*. La intensidad percibida por el ojo, al entrar en él los rayos paralelos de la región *ac* de la película, se determina mediante esta diferencia de fase.

Para una incidencia casi normal ($\theta_i \approx 0$ en la Fig. 12) la diferencia de la trayectoria geométrica entre los dos rayos que parten de *S* se aproxima a $2d$. Cabría esperar que la onda resultante que se refleja de la película cerca de *a* sea un máximo de interferencia cuando la distancia $2d$ es un número entero de longitudes de onda. Esta afirmación debe modificarse por dos razones.

Primera, la longitud de onda debe referirse a la longitud de onda λ_n de la luz en la película y no a su longitud de onda λ en el aire; es decir, estamos interesados en las longitudes del camino *óptico* en lugar de estarlo en las longitudes de la trayectoria *geométrica*. Las longitudes de onda λ y λ_n se relacionan por la ecuación 13 del capítulo 43,

$$\lambda_n = \lambda/n, \tag{15}$$

donde *n* es el índice de refracción de la película.

Con respecto al segundo punto, supongamos que la película es tan delgada que $2d$ es mucho menor que una longitud de onda. La diferencia de fase entre las dos ondas se aproximaría a cero con nuestra suposición y esperaríamos que tal película se vería brillante en la reflexión. Sin embargo, se ve oscura. Esto está claro de la figura 11, donde la acción de la gravedad produce una película en forma de cuña, extremadamente delgada en su extremo superior. Conforme continúa el drenaje, el área oscura aumenta de tamaño. Para explicar éste y muchos fenómenos similares, uno u otro de los dos rayos de la figura 12 debe experimentar un cambio de fase abrupto de π (= 180°) cuando se refleja en la interfaz aire-película. Tal como sucede, sólo el rayo que se refleja de la superficie anterior experimenta este cambio de fase. El otro rayo no cambia abruptamente de fase, ya sea en la transmisión a través de la superficie anterior o en la reflexión en la superficie posterior.

En la sección 19-9 estudiamos los cambios de fase en la reflexión para ondas transversales en cuerdas. Para extender estas ideas, consideramos la cuerda compuesta de la figura 13, la cual consta de dos partes con masas diferentes por unidad de longitud, estiradas con una tensión determinada. En la figura 13*a*, un pulso en la cuerda más gruesa se mueve hacia la derecha aproximándose a la unión. Cierto tiempo después habrá pulsos reflejados y transmitidos, de tal manera que el pulso reflejado está *en fase* con el pulso incidente. En la figura 13*b* la situación se invierte, ahora el pulso incidente está en la cuerda más delgada. En este caso el pulso reflejado difiere en fase del pulso incidente por π (= 180°). En cada caso el pulso transmitido está en fase con el pulso incidente.

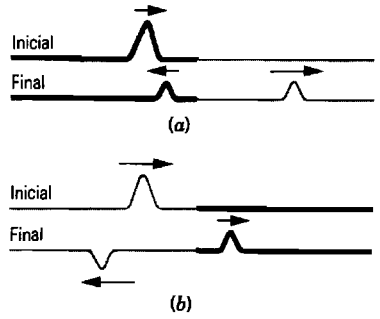


Figura 13 Los cambios de fase causados por la reflexión en una unión entre dos cuerdas de diferentes densidades lineales de masa. La velocidad de la onda es mayor en la cuerda más delgada. (*a*) La pulsación incidente se encuentra en la cuerda más gruesa. (*b*) La pulsación incidente se encuentra en la cuerda más delgada.

La figura 13*a* muestra una onda de luz en vidrio, digamos, que se aproxima a una superficie más allá de la cual existe un medio ópticamente menos denso (uno de índice de refracción menor) como el aire. La figura 13*b* muestra una onda de luz en el aire que se aproxima al vidrio. Para resumir la situación óptica, cuando la reflexión ocurre en una interfaz más allá de la cual el medio tiene un índice de refracción *menor*, la onda reflejada *no* experimenta ningún *cambio de fase*; cuando el medio más allá de la interfaz tiene un índice *mayor*, existe un cambio de fase de π.* La onda transmitida no experimenta un cambio de fase en ningún caso.

Ahora estamos en posibilidad de tener en cuenta ambos factores que determinan la naturaleza de la interferencia, es decir, las diferencias en la longitud del camino óptico y de los cambios de fase en la reflexión. Para que los dos rayos de la figura 12 se combinen para dar una intensidad *máxima*, suponiendo una incidencia normal, debemos tener

$$2d = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_n \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Se introduce el término $\frac{1}{2}\lambda_n$ porque en la reflexión existe un cambio de fase de 180°, equivalente a la mitad de una longitud de onda. Al sustituir a λ_n por λ/n tenemos finalmente

$$2dn = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \text{ (máximos)}. \tag{16}$$

Las condiciones para una intensidad *mínima* son

* Estas afirmaciones, que pueden demostrarse rigurosamente de las ecuaciones de Maxwell (véase también la Sec. 45-5), deben modificarse cuando la luz incide sobre un medio menos denso con un ángulo tal que se presente reflexión interna total. Deben modificarse también en el caso de reflexión de superficies metálicas.

$$2dn = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(mínimos)}. \quad (17)$$

Estas ecuaciones se cumplen cuando el índice de refracción de la película es mayor o menor que los índices de los medios en *cada lado* de la película. Sólo en estos casos existirá un cambio de fase relativo de 180° para reflexiones en las dos superficies. Una película de agua en el aire y una película de aire en el espacio entre dos placas de vidrio proporcionan ejemplos de los casos en los que se aplican las ecuaciones 16 y 17. El problema muestra 5 presenta un caso en el que no se aplican.

Si el espesor de la película no es uniforme, como en la figura 11 donde la película tiene forma de cuña, ocurre una interferencia constructiva en ciertas partes de la película, y en otras se presenta una interferencia destructiva. Aparecen bandas de intensidad máxima y mínima, llamadas *franjas de espesor constante*. La anchura y el espaciamiento de las franjas depende de la variación del espesor d de la película. Si la película se ilumina con una luz blanca más bien que con luz monocromática, la luz que se refleja desde varias partes de la película se modifica según las diversas interferencias constructivas o destructivas que tienen lugar. Esto explica los colores brillantes de las burbujas de jabón y de las manchas de aceite.

Sólo cuando la película es "delgada" (cuando d no es mayor que unas cuantas longitudes de onda de luz) es posible obtener estos tipos de franjas, esto es, franjas que aparecen en la película y que se asocian con espesores de película variable. En películas muy gruesas (digamos $d \approx 1$ cm), la diferencia de los caminos entre los dos rayos de la figura 12 es de muchas longitudes de onda, y la diferencia de fase en un punto dado de la película cambia rápidamente al alejarnos incluso una pequeña distancia de a. Sin embargo, en películas "delgadas", la diferencia de fase en a se observa también en puntos razonablemente próximos; existe una "brillantez" característica en cualquier punto de la película, como lo muestra la figura 11. Pueden producirse franjas de interferencia en películas gruesas; no se encuentran en la película sino que están en el infinito (véase la Sec. 45-6).

Problema muestra 4 Una película de agua ($n = 1.33$) en aire tiene 320 nm de espesor. Cuando se ilumina con luz blanca y la incidencia es normal, ¿de qué color se verá la luz reflejada?

Solución Al despejar λ de la ecuación 16, obtenemos

$$\lambda = \frac{2dn}{m + \frac{1}{2}} = \frac{(2)(320 \text{ nm})(1.33)}{m + \frac{1}{2}} = \frac{851 \text{ nm}}{m + \frac{1}{2}} \qquad \text{(máximos)}$$

De la ecuación 17 los mínimos están dados por

$$\lambda = \frac{851 \text{ nm}}{m} \qquad \text{(mínimos)}.$$

Los máximos y los mínimos se presentan para las longitudes de onda siguientes:

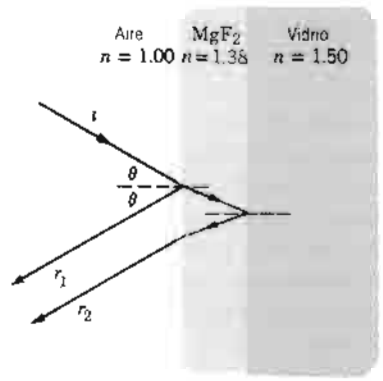


Figura 14 Problema muestra 5. Los reflejos indeseables del vidrio pueden suprimirse (para una longitud de onda elegida) recubriendo al vidrio con una película de espesor apropiado.

m	0 (máx)	1 (mín)	1 (máx)	2 (mín)	2 (máx)
λ(nm)	1702	851	567	426	340

Únicamente el máximo que corresponde a $m = 1$ se encuentra en la región visible (entre 400 y 700 nm aproximadamente); la luz de 567 nm se ve amarilloverdosa. Si se emplea luz blanca para iluminar la película, la componente amarilloverdosa se refuerza al verla mediante la reflexión. ¿Cuál es el color de la luz transmitida a través de la película?

Problema muestra 5 Las lentes se recubren a menudo con películas delgadas de sustancias transparentes como el MgF_2 ($n = 1.38$) para reducir el reflejo de la superficie de vidrio. ¿Qué grosor de recubrimiento se necesita para producir una reflexión mínima en el centro del espectro visible ($\lambda = 550$ nm)?

Solución Suponemos que la luz choca con la lente con una incidencia casi normal (en la Fig. 14 se exagera θ por claridad), y buscamos una interferencia destructiva entre los rayos r_1 y r_2. La ecuación 17 no se aplica porque en este caso se asocia con *cada* rayo un cambio de fase de 180°, ya que la reflexión es de un medio de mayor índice de refracción *en ambas* superficies, superior e inferior, de la película de MgF_2.

No existe un cambio *neto* de fase producido por las dos reflexiones, lo cual significa que la diferencia de los caminos ópticos en la interferencia destructiva es de $(m + \frac{1}{2})\lambda$, (compare con la Ec. 16), lo que conduce a

$$2dn = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(mínimos)}.$$

Si despejamos d y haciendo que $m = 0$, obtenemos

$$d = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550 \text{ nm}}{(4)(1.38)} = 100 \text{ nm}.$$

Problema muestra 6 La figura 15 muestra una lente plano-convexa de radio de curvatura R que descansa sobre una placa de vidrio perfectamente plana e iluminada desde arriba por luz de longitud de onda λ. La figura 16 muestra que aparecen franjas de interferencia circulares (llamadas *anillos de Newton*), asociadas con la película de aire de espesor variable entre la

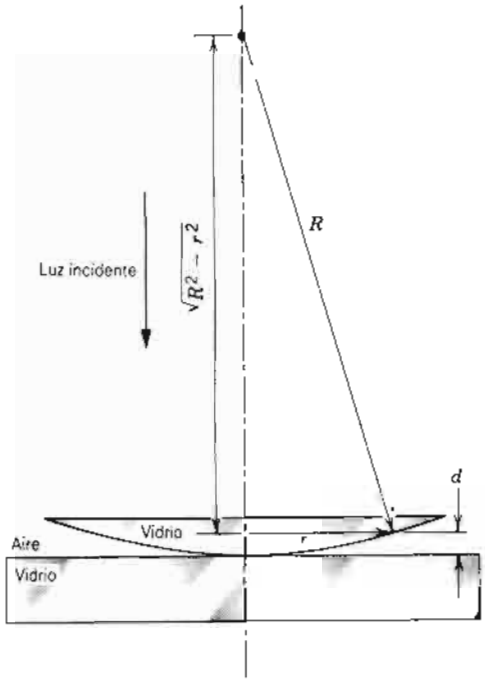


Figura 15 Problema muestra 6. El aparato para observar los anillos de Newton.

lente y la placa. Halle los radios de los máximos de la interferencia circular.

Solución Aquí el rayo llega desde *abajo* de la película (el aire) más bien que desde arriba la cual experimenta un cambio de fase de 180°, ya que es el que se refleja de un medio de índice de refracción mayor. Sin embargo, la condición para un máximo permanece sin cambio (Ec. 16), y es

$$2d = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

suponiendo $n = 1$ para la película de aire. De la figura 15 podemos escribir

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Si $r/R \ll 1$, podemos desarrollar la cantidad entre corchetes aplicando el teorema del binomio, conservando sólo dos términos, o sea

$$d = R - R\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \cdots\right] \approx \frac{r^2}{2R}.$$

Al combinar con la ecuación 18 tenemos

$$r = \sqrt{(m + \tfrac{1}{2})\lambda R} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(máximos)},$$

lo cual da los radios de los anillos brillantes. Si se emplea luz blanca, cada componente del espectro produce su propio conjunto de franjas circulares, y los conjuntos se traslapan.

Nótese que $r > 0$ cuando $m = 0$. Esto es, el primer anillo brillante está en $r > 0$ y, por consiguiente, el centro debe ser oscuro, como se muestra en la figura 16. Esta observación puede tomarse como una prueba experimental del cambio de fase de 180° en la reflexión usada para obtener la ecuación 18.

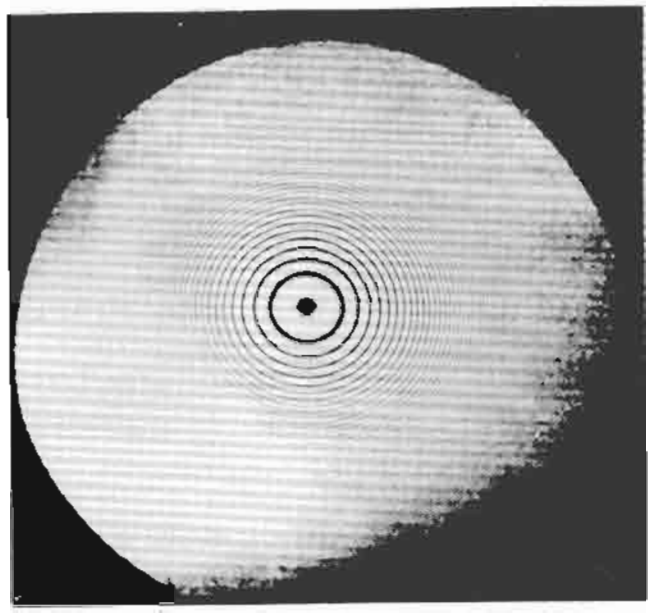


Figura 16 Las franjas de interferencia circulares (anillos de Newton) que se observan con el aparato de la figura 15.

45-5 REVERSIBILIDAD ÓPTICA Y CAMBIOS DE FASE EN LA REFLEXIÓN *(Opcional)*

G. G. Stokes (1819-1903) empleó el principio de la reversibilidad óptica para investigar la reflexión de la luz en una interfaz entre dos medios. El principio afirma que si no existe absorción de luz, un rayo de luz que se refleje o se refracte trazará de nuevo su trayectoria original al invertirse su dirección. Esto nos recuerda que cualquier sistema mecánico puede funcionar en reversa tan bien como hacia adelante, siempre y cuando no exista disipación de energía, como podría suceder por la fricción.

La figura 17*a* muestra una onda de amplitud E reflejada y refractada en una superficie que separa a los medios 1 y 2, donde $n_2 > n_1$. La amplitud de la onda reflejada es $r_{12}E$, donde r_{12} es un *coeficiente de la amplitud de reflexión*. La amplitud de la onda refractada es $t_{12}E$, donde t_{12} es un *coeficiente de la amplitud de transmisión*.

El signo del coeficiente indica la fase relativa de la componente reflejada o transmitida. Si consideramos únicamente la posibilidad de los cambios de fase de 0° o de 180°, entonces si $r_{12} = +0.5$, por ejemplo, tenemos una reducción en la amplitud de la reflexión de la mitad y no hay un cambio de fase. Para $r_{12} = -0.5$ tenemos un cambio de fase de 180° porque

$$E \operatorname{sen}(\omega t + 180°) = -E \operatorname{sen}\omega t.$$

En la figura 17*b*, los rayos indicados por $r_{12}E$ y $t_{12}E$ se han invertido en dirección. El rayo $r_{12}E$, identificado mediante las flechas individuales en la figura, se refleja y se refracta, produciendo los rayos de amplitudes r_{12}^2E y $r_{12}t_{12}E$. El rayo $t_{12}E$, identificado por las flechas triples, también se refleja y se refracta, produciendo los rayos de amplitudes $t_{12}t_{21}E$ y $t_{12}r_{21}E$ como se muestra. Nótese que r_{12} describe un rayo en el medio 1 reflejado del medio 2, y r_{21} describe un rayo en el medio 2

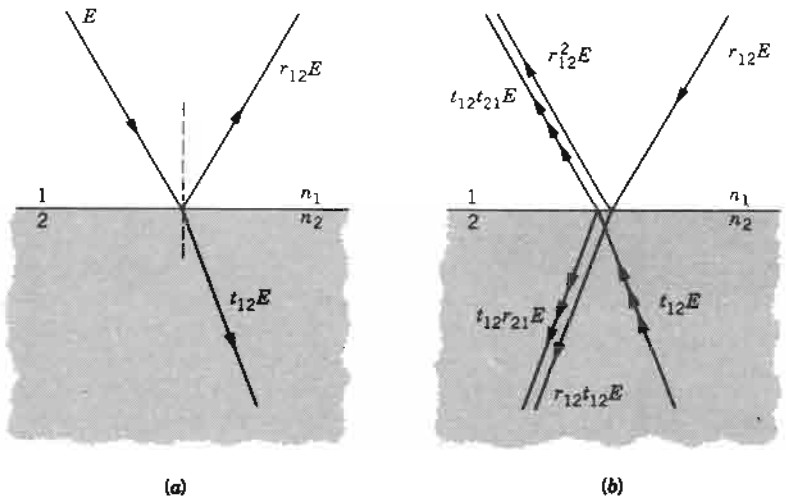


Figura 17 (*a*) Un rayo se refleja y se refracta en una interfaz. (*b*) La situación ópticamente invertida; los dos rayos abajo a la izquierda deben cancelarse.

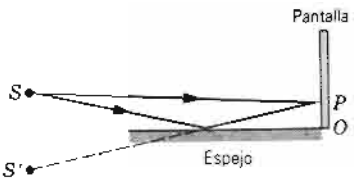
reflejado del medio 1. Similarmente, t_{12} describe un rayo que pasa del medio 1 al medio 2; t_{21} describe un rayo que pasa del medio 2 al medio 1.

Basados en el principio de reversibilidad, concluimos que los dos rayos que están arriba a la izquierda de la figura 17*b* deben ser equivalentes al rayo incidente de la figura 17*a*, invertido; los dos rayos que están abajo a la izquierda de la figura 17*b* deben cancelarse. Este segundo requisito conduce a

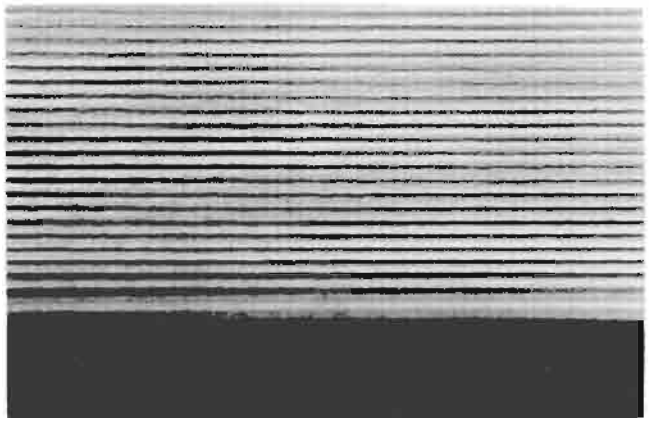
$$r_{12}t_{12}E + t_{12}r_{21}E = 0,$$

o sea

$$r_{12} = -r_{21}.$$



(*a*)



(*b*)

Figura 18 (*a*) El arreglo experimental del espejo de Lloyd. Aparecen franjas en la pantalla como resultado de la interferencia entre los haces directo y reflejado. (*b*) Se observan las franjas en el experimento del espejo de Lloyd.

Este resultado nos dice que si comparamos una onda reflejada desde el medio 1 con otra reflejada desde el medio 2, se comportan de modo diferente en cuanto a que una o la otra experimenta un cambio de fase de 180°.

El experimento demuestra que el rayo reflejado desde el medio ópticamente más denso sufre un cambio de fase de 180°. Esto puede demostrarse empleando el arreglo que se muestra en la figura 18, que se conoce como el experimento del espejo de Lloyd. Ocurre una interferencia en la pantalla en un punto arbitrario P como resultado del traslape de los haces directo y reflejado. Podemos analizar este experimento como una interferencia de dos fuentes, donde una de las fuentes (S') es la *imagen virtual* de S en el espejo plano. Empero, existe una diferencia importante entre el aparato de la figura 18 y el experimento de la rendija doble: la luz que parte de la fuente virtual S' se ha reflejado desde el espejo y ha experimentado un cambio de fase de 180°. Como resultado de este cambio de fase, el borde inferior de la pantalla (en O) muestra una franja oscura, en lugar de la franja clara que aparece en el punto correspodiente (el centro de la pantalla) en el experimento de la rendija doble. Dicho de otro modo, la aparición de la franja oscura en O muestra que uno de los haces interferentes se ha desplazado o recorrido 180° en cuanto a fase. Puesto que no existe nada que cambie la fase del haz directo SP, debe ser el haz reflejado el que experimenta el cambio de fase. Esto demuestra que la reflexión desde un medio ópticamente más denso implica un cambio de fase de 180°. ■

45-6 EL INTERFERÓMETRO DE MICHELSON*

Un *interferómetro* es un aparato que puede emplearse para medir longitudes o cambio de longitud con gran precisión por medio de franjas de interferencia. Describimos

* Véase "Michelson: America's First Nobel Prize Winner in Science", por R. S. Shankland, *The Physics Teacher*, enero de 1977, pág. 19. Véase también "Michelson and its Interferometer", por R. S. Shankland, *Physics Today*, abril de 1974, pág. 36.

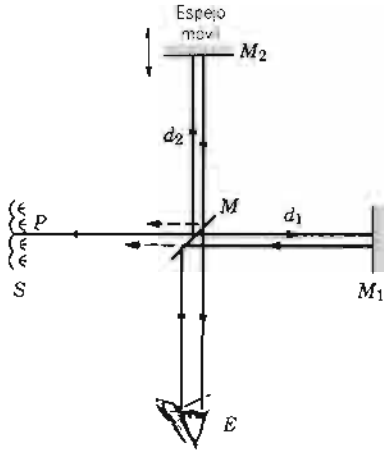


Figura 19 El interferómetro de Michelson, mostrando el camino de un rayo que se origina en el punto P de una fuente extendida S. El rayo que parte de P se divide en M; los dos rayos se reflejan de los espejos M_1 y M_2 y luego se recombinan en M. El espejo M_2 puede moverse para cambiar la diferencia de camino entre los rayos que se combinan.

la forma construida originalmente por A. A. Michelson (1852-1931) en 1881.

Consideremos la luz que sale del punto P de la fuente extendida S (Fig. 19) e incide sobre el espejo semiplateado M (llamado a veces un *divisor del haz*). Este espejo tiene un recubrimiento de plata apenas lo suficientemente grueso como para trasmitir la mitad de la luz incidente y reflejar la otra mitad; en la figura hemos supuesto por conveniencia que este espejo tiene un espesor despreciable. En M la luz se divide en dos ondas. Una continúa por transmisión hacia el espejo M_1; la otra viaja por reflexión hacia M_2. Las ondas se reflejan en cada uno de estos espejos de tal modo que retornan a lo largo de sus direcciones de incidencia, entrando finalmente cada onda al ojo E. Ya que las ondas son coherentes, por provenir del mismo punto en la fuente, interfieren, en efecto.

Si los espejos M_1 y M_2 son exactamente perpendiculares entre sí, el efecto es aquél de la luz de una fuente extendida S la cual incide sobre una placa de aire de grosor uniforme, entre vidrios, cuyo espesor es igual a $d_2 - d_1$. Aparecen franjas de interferencia, causadas por pequeños cambios en el ángulo de incidencia de la luz que procede de diferentes puntos de la fuente extendida al incidir sobre la película equivalente de aire. Puede obtenerse una diferencia de camino de una longitud de onda en películas *gruesas* mediante un cambio muy pequeño en el ángulo de incidencia.

Si M_2 se mueve hacia atrás o hacia adelante, el efecto es un cambio en el espesor de la película de aire equivalente. Supongamos que el centro del patrón (circular) de franjas aparece brillante y que M_2 se mueve apenas lo suficiente para causar que la primera franja circular brillante se desplace hacia el centro del patrón. La trayectoria o camino del haz de luz que viaja de ida y vuelta a M_2 cambia en una longitud de onda. Esto significa (ya que la luz pasa dos veces a través de la película equivalente de aire) que el espejo se desplazó a una distancia de $\frac{1}{2}\lambda$.

El interferómetro se emplea para medir cambios de longitud al contar el número de franjas de interferencia que pasan por el campo de visión conforme se mueve el espejo M_2. Las mediciones de longitud realizadas de esta manera pueden ser exactas si se cuenta un número de franjas grande.

Michelson midió la longitud del metro patrón, conservado en París, en términos de la longitud de onda de cierta luz monocromática roja emitida de una fuente de luz conteniendo cadmio. Demostró que el metro patrón era equivalente a 1,553,163.5 longitudes de onda de la luz roja del cadmio. Por su trabajo recibió el premio Nobel en 1907. El trabajo de Michelson sentó las bases que hicieron que al final (en 1961) se abandonara la barra de 1 metro como el patrón de longitud y que sirvió para redefinir el metro en términos de la longitud de onda de la luz. En 1983, como lo hemos visto, incluso este patrón basado en la longitud de onda no fue lo suficientemente exacto como para cumplir con los crecientes requerimientos de la ciencia y de la tecnología y se reemplazó por uno nuevo basado en un valor definido de la velocidad de la luz.

Problema muestra 7 Una luz amarilla (λ = 589.00 nm) ilumina un interferómetro de Michelson. ¿Cuántas franjas brillantes se contarán al al desplazar el espejo 1.0000 cm?

Solución Cada franja corresponde a un movimiento del espejo de media longitud de onda. El número de franjas es, entonces, el mismo que el número de medias longitudes de onda en 1.0000 cm, o sea

$$\frac{1.0000 \times 10^{-2}\ \text{m}}{\frac{1}{2}(589.00 \times 10^{-9}\ \text{m})} = 33{,}956 \text{ franjas.}$$

45-7 EL INTERFERÓMETRO DE MICHELSON Y LA PROPAGACIÓN DE LA LUZ *(Opcional)*

En el capítulo 21 presentamos la hipótesis de Einstein, hoy día bien verificada, de que la luz viaja en el vacío con la misma velocidad c independientemente la velocidad relativa de la fuente y del observador. Señalamos que esta hipótesis contradecía los hallazgos de los físicos del siglo XIX con respecto a la propagación de las ondas. A estos físicos, con los conocimientos de física clásica de aquellos tiempos, les era difícil creer que una onda podía propagarse sin un medio. Si pudiera establecerse tal medio, la velocidad c de la luz sería vista naturalmente como la velocidad *con respecto a ese medio*, de la misma manera que la velocidad del sonido se refiere siempre a un medio como el aire. Si bien no era obvio ningún medio para la propagación

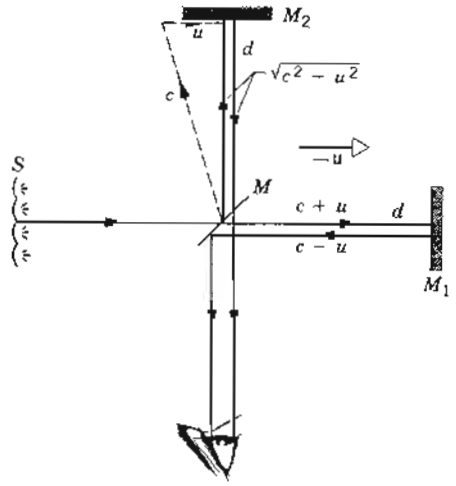


Figura 20 Corriente del "éter" con velocidad -**u** a través del interferómetro de Michelson. Las velocidades mostradas se basan en la (incorrecta) hipótesis del éter.

de la luz, los físicos postularon uno, llamado el *éter*, y supusieron que sus propiedades eran tales que no podía detectarse por medios ordinarios como la pesada (acción de pesar).

En 1881 (24 años antes de la hipótesis de Einstein) A. A. Michelson se fijó la tarea de una verificación física directa de la existencia del éter. En particular, Michelson, al que más tarde se le unió E. W. Morley, trataron de medir la velocidad u con que se movía la Tierra a través del éter. El interferómetro de Michelson fue su instrumento de elección para el ahora famoso experimento de Michelson y Morley.

El movimiento de la Tierra junto con el interferómetro con velocidad **u** a través del éter es equivalente al interferómetro en reposo con el éter corriendo a través de él con velocidad -**u**, como se muestra en la figura 20. Consideremos una onda que se mueva a lo largo de la trayectoria MM_1M y otra que se mueva a lo largo de MM_2M. La primera corresponde clásicamente a una persona que rema en un bote una distancia d corriente abajo y la misma distancia corriente arriba; la segunda corresponde a remar en el bote una distancia d perpendicular a la corriente y regresar.

Basados en la hipótesis del éter la velocidad de la luz en el trayecto MM_1 es $c + u$; en el camino de retorno M_1M es $c - u$. El tiempo necesario para el viaje redondo es

$$t_1 = \frac{d}{c+u} + \frac{d}{c-u} = d\frac{2c}{c^2-u^2} = \frac{2d}{c}\frac{1}{1-(u/c)^2}.$$

La velocidad de la luz, de nuevo *basada en la hipótesis del éter*, para el camino MM_2 es $\sqrt{c^2+u^2}$, como lo muestra la figura 20. Esta misma velocidad se mantiene para el camino de retorno M_2M, de modo que el tiempo necesario para este camino completo es

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

La diferencia de tiempo entre los dos trayectos es

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2d}{c}\left\{\left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1} - \left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}.$$

Si se supone que $u/c \ll 1$, podemos desarrollar las cantidades dentro de los corchetes usando el teorema del binomio, reteniendo sólo los dos primeros términos. Esto conduce a

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\left\{\left[1+\left(\frac{u}{c}\right)^2+\cdots\right] - \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\cdots\right]\right\}$$
$$= \frac{2d}{c}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right\} = \frac{du^2}{c^3}. \qquad (19)$$

Giremos ahora todo el interferómetro a 90°. Esto intercambia los papeles de los dos caminos de la luz, siendo ahora MM_1M el camino "perpendicular a la corriente" y MM_2M el camino "corriente arriba y corriente abajo". La diferencia de tiempo entre las dos ondas que entran al ojo se invierte también; esto cambia la diferencia de fase entre las ondas al combinarse y altera las posiciones de los máximos de la interferencia. El experimento consiste en observar un corrimiento de las franjas de interferencia conforme se gira el aparato.

El *cambio* en la diferencia de tiempo es $2\Delta t$, que corresponde a una diferencia de fase de $\Delta\phi = \omega(2\Delta t)$, donde $(\omega = 2\pi c/\lambda)$ es la frecuencia angular de la onda de luz. El corrimiento máximo esperado en el número de franjas luego de una rotación de 90° es

$$\Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\omega(2\Delta t)}{2\pi} = \frac{2c\Delta t}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2, \qquad (20)$$

donde hemos usado la ecuación 19 para Δt.

En el interferómetro de Michelson y Morley hagamos que $d = 11$ m (obtenida mediante la reflexión múltiple en el interferómetro) y $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m. Si se supone que u es más o menos la velocidad orbital de la Tierra, entonces $u/c = 10^{-4}$. El corrimiento máximo esperado de las franjas cuando se gira el interferómetro a 90° es, entonces,

$$\Delta N = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{(2)(11\text{ m})}{5.9\times10^{-7}\text{ m}}(10^{-4})^2 = 0.4.$$

Aun cuando se esperaba un corrimiento de sólo 0.4 más o menos, Michelson y Morley confiaban en que podían observar un corrimiento de 0.01 de franja. *Sin embargo, en su experimento hallaron que ¡no se observaba ningún corrimiento de las franjas!*

La analogía entre una onda de luz en el supuesto éter y un bote que se mueve en el agua, que parecía tan evidente en 1881, es sencillamente incorrecta. La deducción basada en esta analogía es incorrecta para las ondas de luz. Cuando se lleva a cabo el análisis basado en la hipótesis de Einstein, el resultado nulo observado queda claramente predicho, siendo c la velocidad de la luz en todos los caminos. El movimiento de la Tierra alrededor del Sol y la rotación del interferómetro no tienen, según el punto de vista de Einstein, ningún efecto sobre la velocidad de las ondas de luz en el interferómetro.

Debe quedar claro que si bien la hipótesis de Einstein es completamente consistente con el resultado nulo del experimento de Michelson y Morley, este experimento no sirve por sí solo como una prueba de la hipótesis de Einstein. Einstein decía que ningún número de experimentos, no importa cuán importantes, podían probar que tenía razón, pero que un solo experimento podía probar que estaba equivocado. Nuestra fe actual en la hipótesis de Einstein descansa en la consistente concordancia con un gran número de experimentos diseñados para probarlo. El "solo experimento" que pudiera probar que Einstein estaba equivocado no se ha llevado a cabo todavía. ■

PREGUNTAS

1. ¿Es el experimento de Young un experimento de interferencia, un experimento de difracción, o de ambos?
2. En el experimento de la interferencia de la rendija doble de Young, usando una fuente de luz monocromática en el laboratorio, ¿por qué es necesaria la pantalla *A* en la figura 6? Si la fuente de luz es un haz láser, la pantalla *A* no es necesaria. ¿Por qué?
3. ¿Qué cambios ocurren en un patrón de franjas de interferencia si el aparato de la figura 4 se coloca debajo del agua?
4. ¿Ocurren los efectos de interferencia en las ondas de sonido? Recuérdese que el sonido es una onda longitudinal y que la luz es una onda transversal.
5. No es posible mostrar los efectos de la interferencia entre la luz que proceda de dos lámparas de vapor de sodio por separado pero se pueden mostrar los efectos de interferencia entre el sonido de dos altavoces que se exciten con osciladores independientes. Explique por qué es esto así.
6. Si es posible la interferencia entre las ondas de luz de frecuencias diferentes, deberíamos observar pulsaciones o batidos de luz, del mismo modo en que se obtienen pulsaciones o batidos de sonido de dos fuentes de sonido con frecuencias ligeramente diferentes. Piense cómo podría lograrse experimentalmente esta posibilidad.
7. ¿Por qué se prefieren las rendijas paralelas a los orificios que usó Young para demostrar la interferencia?
8. ¿Es importante la coherencia en la reflexión? y, ¿en la refracción?
9. Describa el patrón de la intensidad de la luz sobre la pantalla *C* en la figura 4 cuando una rendija está cubierta con un filtro rojo y la otra con un filtro azul, siendo blanca la luz incidente.
10. Si se tapa una de las rendijas en la figura 4, ¿qué cambio tendrá lugar en la intensidad de la luz en el centro de la pantalla?
11. Todos estamos bañados continuamente por la radiación electromagnética del Sol, de las señales de radio y de TV, de las estrellas y de otros objetos celestes. ¿Por qué no interfieren entre sí estas ondas?
12. Al calcular la perturbación producida por un par de trenes de ondas superpuestos, ¿cuándo deben de sumarse las intensidades y cuándo las amplitudes?
13. En el experimento de Young de la rendija doble, supongamos que la pantalla *A* en la figura 6 contiene *dos* rendijas paralelas muy angostas en lugar de una. (*a*) Demuestre que puede hacerse que las franjas de interferencia desaparezcan si el espaciamiento entre estas rendijas se elige apropiadamente. (*b*) ¿En qué condiciones llamaríamos coherentes a los haces que emergen de las rendijas S_1 y S_2 en la pantalla *B*? No producen franjas de interferencia. (*c*) Analice lo que sucedería con las franjas de interferencia en el caso de una sola rendija en la pantalla *A* si se aumenta gradualmente la anchura de la rendija.
14. Defienda este postulado: La figura 7*a* es una onda seno (o coseno) pero la figura 7*b* no. Realmente, no podemos asignar una frecuencia única a la curva de la figura 7*b*. ¿Por qué no? (Sugerencia: Recuerde el análisis de Fourier.)
15. La mayoría de nosotros estamos familiarizados con las antenas de radar giratorias u oscilatorias que producen haces giratorios y oscilatorios de radiación de microondas. También es posible producir un haz oscilatorio de radiación por microondas *sin* ningún movimiento mecánico de la antena transmisora. Esto se logra cambiando periódicamente la fase de la radiación al emerger desde varias secciones de la antena (larga) transmisora. Convénzase de que, mediante la interferencia constructiva de varias partes de la antena fija, puede producirse realmente un haz de microondas oscilatorio.
16. ¿Qué causa la vibración indeseable de la recepción por radio cuando sobrevuela un aeroplano?
17. ¿Es posible que haya coherencia entre fuentes de luz que emiten luz de longitudes de onda diferentes?
18. Un automóvil dirige sus faros hacia el costado de un granero. ¿Por qué no se producen franjas de interferencia en la región en que se traslapa la luz de los dos haces?
19. Supóngase que la película de recubrimiento en la figura 14 tiene un índice de refracción mayor que el del vidrio. ¿Podría todavía ser antirreflejante? Si no, ¿qué diferencia habría en el recubrimiento?
20. ¿Cuáles son los requisitos para una intensidad máxima cuando se ve una película delgada mediante luz *transmitida*?
21. ¿Por qué tiene que ser "delgada" una película (por ejemplo, en una burbuja de jabón o una mancha de aceite) para mostrar los efectos de la interferencia? ¿O no es así? ¿Qué delgadez significaría "delgada"?
22. ¿Por qué las lentes recubiertas (véase el problema muestra 5) se ven de color púrpura mediante la luz reflejada?
23. Las ventanas ordinarias en las tiendas o en el hogar reflejan luz de sus superficies planas tanto interior como exterior. ¿Por qué, entonces, no se ven efectos de interferencia?
24. Si usted humedece sus anteojos para limpiarlos notará que al evaporarse el agua los anteojos se vuelven notablemente menos reflejantes durante un tiempo breve. Explique por qué.
25. Una lente se recubre con objeto de reducir la reflexión, como en el problema muestra 5. ¿Qué le sucede a la energía que se había reflejado previamente? ¿El recubrimiento la absorbe?
26. Considérense los siguientes objetos que producen colores cuando se les expone a la luz solar: (1) burbujas de jabón, (2) el pétalo de una rosa, (3) la superficie interior de una concha de ostión, (4) manchas de aceite delgadas, (5) recubrimientos antirreflejantes en las lentes de una cámara, y (6) las plumas de la cola de un pavo real. Los colores mostrados por todos, excepto uno de ellos, son puramente fenómenos de interferencia, sin que haya pigmentos que tengan que ver con el fenómeno. ¿Cuál es la excepción? ¿Por qué las demás se ven "coloreadas"?

27. Una película de jabón en un aro de alambre mantenido en el aire aparece negra en su parte más delgada cuando se observa con luz reflejada. Por otra parte, una película de aceite delgada que flote en el agua aparece brillante en su parte más delgada cuando se observa de la misma forma desde el aire directamente por arriba. Explique estos fenómenos.
28. Los cambios muy pequeños en el ángulo de incidencia no cambian en mucho las condiciones de interferencia en las películas "delgadas" pero sí cambian en las películas "gruesas". ¿Por qué?
29. Un *plano óptico* es una placa de vidrio que se pule en forma plana dentro de una pequeña fracción de una longitud de onda. ¿Cómo puede usarse éste para probar la calidad de plana (*planicidad*) de una segunda placa de vidrio?
30. En un experimento de anillos de Newton, ¿es el punto central, como se ve por reflexión, oscuro o claro? Explique.
31. En relación con el cambio de fase por reflexión en una interfaz entre dos medios transparentes, ¿cree que son posibles otros corrimientos de fase que no sean 0 o π? ¿Cree que los corrimientos de fase pueden calcularse rigurosamente de las ecuaciones de Maxwell?
32. Se conocen las características direccionales de una cierta antena de radar como receptor de radiación. ¿Qué puede decirse acerca de sus características direccionales como transmisor?
33. Una persona situada en un cuarto oscuro, viendo a través de una ventana pequeña, puede ver a una segunda persona que está de pie afuera bajo luz solar brillante. La segunda persona no puede ver a la primera. ¿Es esto una falla del principio de reversibilidad óptica? Supóngase que no existe absorción de luz.
34. ¿Por qué es necesario girar el interferómetro en el experimento de Michelson y Morley?
35. ¿Cómo se interpreta el resultado negativo del experimento de Michelson y Morley según la teoría de la relatividad de Einstein?
36. Si la longitud del camino al espejo móvil del interferómetro de Michelson (véase la Fig. 19) excede por mucho a la del espejo fijo (digamos, en más de un metro) las franjas comienzan a desaparecer. Explique por qué. Los láser amplían en mucho estos límites. ¿Por qué?
37. ¿Cómo construiría usted un interferómetro de Michelson acústico para medir las longitudes de onda de sonido? Analice las diferencias con el interferómetro óptico.

PROBLEMAS

Sección 45-1 Interferencia por una rendija doble

1. Luz monocromática verde, de longitud de onda = 554 nm, ilumina dos rendijas angostas paralelas separadas por 7.7 μm. Calcule la desviación angular de la franja brillante de tercer orden, $m = 3$, (*a*) en radianes y (*b*) en grados.
2. En un experimento de la rendija doble para demostrar la interferencia de la luz, se duplica la separación d de las dos rendijas angostas. Con objeto de mantener el mismo espaciamiento de las franjas en la pantalla, ¿cómo debe alterarse la distancia D entre la pantalla y las rendijas? (La longitud de onda de la luz permanece sin alteración.)
3. Se lleva a cabo un experimento de la rendija doble con luz azulverdosa de longitud de onda 512 nm. Las rendijas están separadas 1.2 mm y la pantalla está a 5.4 m de las rendijas. Determine lo separado que se ven las franjas brillantes en la pantalla.
4. Encuentre la separación de las rendijas en un arreglo de rendija doble que produciría franjas brillantes de interferencia con 1.00° de separación angular. Supóngase una longitud de onda de 592 nm.
5. Una instalación de rendija doble produce franjas de interferencia de luz de sodio ($\lambda = 589$ nm) que están separadas por 0.23°. ¿Para qué longitud de onda la separación angular sería un 10% mayor? Supóngase que el ángulo θ sea pequeño.
6. Una rendija doble produce franjas de interferencia de luz de sodio ($\lambda = 589$ nm) que están separadas por 0.20°. ¿Cuál es la separación angular de las franjas cuando todo el arreglo está inmerso en agua ($n = 1.33$)?
7. En un experimento de rendija doble la distancia entre las rendijas es de 5.22 mm y las rendijas están a 1.36 m de la pantalla. Sobre la pantalla pueden verse dos patrones de interferencia, uno debido a la luz de 480 nm de longitud de onda y el otro debido a la luz de 612 nm de longitud de onda. Halle la separación sobre la pantalla entre las franjas de interferencia de tercer orden de los dos patrones diferentes.
8. En un experimento de interferencia en un tanque o cuba de ondas grande (véase la Fig. 3), las fuentes vibrantes coherentes están situadas a 120 mm entre sí. La distancia entre los máximos a una distancia de 2.0 m es de 180 mm. Si la velocidad de las ondas es de 25 cm/s, calcule la frecuencia de los vibradores.
9. Si la distancia entre los mínimos primero y décimo de un patrón de rendija doble es de 18 mm y las rendijas están separadas por 0.15 mm con la pantalla a 50 cm de las rendijas, ¿cuál es la longitud de onda de la luz empleada?
10. Se usa una hoja delgada de mica ($n = 1.58$) para cubrir una rendija de un arreglo de rendija doble. El punto central en la pantalla está ocupado por lo que era la séptima franja brillante. Si $\lambda = 550$ nm, ¿cuál es el espesor de la mica?
11. Trace el patrón de interferencia esperado si se emplean dos orificios más bien que rendijas angostas.
12. Dos fuentes puntales de radio coherentes separadas por 2.0 m están radiando en fase con $\lambda = 0.50$ m. ¿Cuántos

máximos mostrará un detector que se mueva en una trayectoria circular alrededor de las dos fuentes en un plano que las contenga?

13. En el frente de una sala de conferencias, un haz coherente de luz monocromática de un láser helio-neón (λ = 632.8 nm) ilumina una rendija doble. Desde allí viaja una distancia de 20.0 m hasta un espejo situado en la parte posterior de la sala, y regresa la misma distancia hasta la pantalla. (*a*) ¿Cuál debe ser la distancia entre las dos rendijas con objeto de que la distancia entre los máximos de interferencia sea de 10.0 cm? (*b*) Diga lo que vería si el conferencista deslizase una hoja delgada de celofán sobre una de las rendijas. El camino a través del celofán contiene 2.5 más ondas que un camino a través del aire del mismo espesor geométrico.
14. Una rendija de un arreglo de rendija doble se cubre con una placa de vidrio delgada de 1.4 de índice de refracción, y la otra con una placa de vidrio delgada de 1.7 de índice de refracción. El punto en la pantalla donde se encontraba el máximo central antes de que se interpusieran las placas de vidrio está ahora ocupado por lo que antes era la franja brillante $m = 5$. Suponga $\lambda = 480$ nm y que las placas tienen el mismo espesor t y encuentre el valor de t.
15. Dos fuentes puntuales S_1 y S_2 como se muestra en la figura 21, emiten ondas coherentes. Demuestre que las curvas, como las mostradas, para las que la diferencia de fase entre los rayos r_1 y r_2 es una constante, son hipérbolas. (*Sugerencia*: Una diferencia de fase constante implica una diferencia de longitud constante entre r_1 y r_2.) El sistema OMEGA de navegación marítima se basa en este principio. S_1 y S_2 son transmisores de enganche de fase. El navegante del buque nota la diferencia de fase recibida en un osciloscopio y localiza al buque en una hipérbola. Se necesita la recepción de las señales de un tercer transmisor para determinar la posición en esa hipérbola.

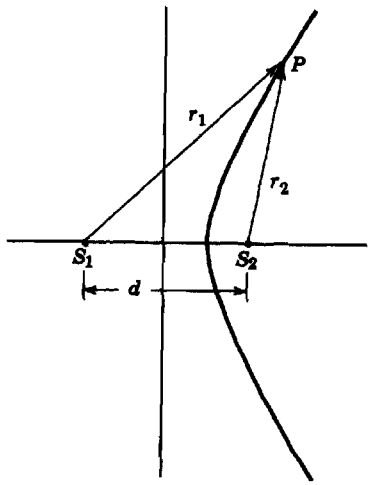


Figura 21 Problema 15.

16. Luz de sodio (λ = 589 nm) incide sobre una rendija doble de separación d = 0.180 mm. Una lente delgada (f = 1.13 m) está situada cerca de la rendija como se muestra en la figura 5. ¿Cuál es la separación lineal entre las franjas en una pantalla situada en el plano focal de la lente?
17. Luz de sodio (λ = 589 nm) incide sobre una rendija doble de separación d = 2.0 mm. La distancia D entre la rendija y la pantalla es de 40 mm. ¿Qué error fraccionario se comete al usar la ecuación 1 para ubicar la décima franja brillante en la pantalla?

Sección 45-2 Coherencia

18. La *longitud de coherencia* de un tren de ondas es la distancia dentro de la cual la constante de fase es la misma. (*a*) Si un átomo individual emite luz coherente durante 1×10^{-8} s, ¿cuál es la longitud coherente del tren de ondas? (*b*) Supóngase que este tren de ondas se divide en dos partes por medio de un espejo parcialmente reflejante y más tarde se reúne después de que un haz viaja 5 m y el otro 10 m. ¿Producirían las ondas franjas de interferencia observables por el ojo humano?

Sección 45-3 Intensidad de la interferencia por una rendija doble

19. La fuente A de ondas de radio de largo alcance se adelanta a la fuente B en 90°. La distancia r_A a un detector es mayor que la distancia r_B en 100 m. ¿Cuál es la diferencia de fase en el detector? Ambas fuentes tienen una longitud de onda de 400 m.
20. Halle la diferencia de fase entre las ondas que proceden de dos rendijas al llegar a la *m*ésima franja oscura en un experimento de rendija doble.
21. Luz de 600 nm de longitud de onda incide perpendicularmente sobre dos rendijas angostas paralelas separadas por 0.60 mm. Trace el patrón de la intensidad observado en una pantalla distante en función del ángulo θ para el intervalo de valores $0 \leq \theta \leq 0.0040$ radianes.
22. Encuentre la suma de las siguientes cantidades (*a*) gráficamente, usando fasores, y (*b*) usando la trigonometría:

$$y_1 = 10 \operatorname{sen} \omega t,$$
$$y_2 = 8.0 \operatorname{sen}(\omega t + 30°).$$

23. En la figura 22, S_1 y S_2 son fuentes puntuales de radiación efectivas, excitadas por el mismo oscilador. Son coherentes y están en fase entre sí. Situadas a una distancia d = 4.17 m entre ellas, emiten cantidades de potencia iguales en la forma de ondas electromagnéticas de 1.06 m de longitud de onda. (*a*) Determine las posiciones de los máximos del primero (o sea, del más próximo), del segundo y del

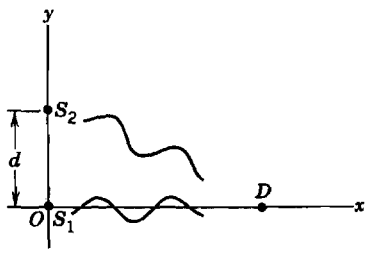


Figura 22 Problema 23.

tercero de la señal recibida, conforme se aleja el detector D a lo largo de Ox. (*b*) ¿Es igual a cero la intensidad del mínimo más próximo? Justifique su respuesta.

24. Sume las cantidades siguientes gráficamente, usando el método de los fasores (véase el problema muestra 3), y algebraicamente:

$$y_1 = 10 \operatorname{sen} \omega t,$$
$$y_2 = 14 \operatorname{sen} (\omega t + 26°),$$
$$y_3 = 4.7 \operatorname{sen} (\omega t - 41°).$$

25. Demuestre que la semianchura $\Delta\theta$ de las franjas de interferencia de la rendija doble está dada por

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d}$$

si θ es lo suficientemente pequeña tal que sen $\theta \approx \theta$. La semianchura es el ángulo entre los dos puntos en la franja donde la intensidad es la mitad que en el centro de la franja.

26. Una de las rendijas de un sistema de rendija doble es más ancha que la otra, de modo que la amplitud de la luz que llega a la parte central de la pantalla desde una rendija, actuando aisladamente, es el doble que la de la otra rendija, actuando aisladamente. Obtenga una expresión para la intensidad I en términos de θ.

Sección 45-4 Interferencia en películas delgadas

27. Deseamos recubrir una placa plana de vidrio ($n = 1.50$) con un material transparente ($n = 1.25$) de tal modo que no refleje luz de 620 nm de longitud de onda (en el vacío) que incide normalmente. ¿Qué espesor mínimo tendría el recubrimiento?

28. Una película delgada de aire tiene 410 nm de espesor y está iluminada por luz blanca normal a su superficie. Su índice de refracción es de 1.50. ¿Qué longitudes de onda, dentro del espectro visible, se intensificarían en el haz reflejado?

29. Un tanquero averiado vierte keroseno ($n = 1.20$) en el Golfo Pérsico, creando una gran mancha sobre el agua ($n = 1.33$). (*a*) Si usted mirase directamente abajo desde un aeroplano sobre una región de la mancha donde su espesor es de 460 nm, ¿para qué longitud(es) de onda de luz visible sería máxima la reflexión? (*b*) Si usted estuviese buceando directamente debajo de esta misma región de la mancha, ¿en qué longitud(es) de onda de luz visible sería máxima la intensidad transmitida?

30. En la joyería de fantasía, a menudo se recubren los diamantes de imitación (hechos de vidrio con $n = 1.5$) con monóxido de silicio ($n = 2.0$) para hacerlos más reflejantes. ¿Qué espesor deberá tener el recubrimiento para obtener la mayor reflexión con luz de 560 nm, que incida normalmente?

31. Si la longitud de onda de la luz incidente es $\lambda = 572$ nm, los rayos A y B en la figura 23 están fuera de fase por 1.50 λ. Calcule el espesor d de la película.

32. Luz de 585 nm de longitud de onda incide normalmente sobre una película jabonosa delgada ($n = 1.33$) suspendida en el aire. Si la película tiene un espesor de 0.00121 mm, determine si aparece brillante u oscura cuando se observa desde un punto cercano a la fuente de luz.

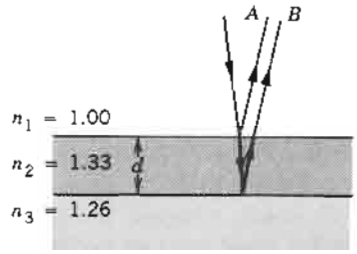


Figura 23 Problema 31.

33. Una onda plana de luz monocromática incide normalmente sobre una película de aceite delgada uniforme que cubre una placa de vidrio. La longitud de onda de la fuente puede variarse de modo continuo. Se observa una interferencia completamente destructiva de la luz reflejada en las longitudes de onda de 485 y 679 nm y en ninguna longitud de onda entre ellas. Si el índice de refracción del aceite es de 1.32 y el del vidrio es de 1.50, encuentre el espesor de la película de aceite.

34. La luz blanca reflejada con incidencia perpendicular desde una película de jabón tiene, en el espectro visible, un máximo de interferencia en 600 nm y un mínimo en 450 nm, y ningún mínimo entre ellas. Si $n = 1.33$ para la película, ¿cuál es el espesor de la película, supuesto como uniforme?

35. Dos trozos de vidrio plano se unen de modo tal que el espacio de aire entre ellos forma una cuña muy delgada. Luz de 480 nm de longitud de onda choca con la superficie superior perpendicularmente y se refleja desde la superficie inferior del vidrio de arriba y la superficie superior del vidrio de abajo, produciendo una serie de franjas de interferencia. ¿Qué tanto más gruesa es la cuña de aire de la franja decimosexta que de la sexta?

36. Una lámina de vidrio que tiene un índice de refracción de 1.40 se desea recubrir con una película de material que tiene un índice de refracción de 1.55 de modo que se transmita con preferencia luz verde (longitud de onda = 525 nm). (*a*) ¿Cuál es el espesor mínimo de la película para conseguir este resultado? (*b*) ¿Por qué otras partes del espectro visible no se transmiten preferentemente también? (*c*) ¿Se reducirá de forma notable la transmisión de alguno de los colores?

37. Una película delgada de acetona (índice de refracción = 1.25) está recubriendo una placa gruesa de vidrio (índice de refracción = 1.50). Normalmente a la película inciden ondas planas de luz de diversas longitudes de onda. Cuando uno ve la onda reflejada, se observa que ocurre una interferencia completamente destructiva a 600 nm y una interferencia constructiva a 700 nm. Calcule el espesor de la película de acetona.

38. Una gota de aceite ($n = 1.20$) flota sobre una superficie de agua ($n = 1.33$) y se observa desde arriba mediante luz reflejada (véase la Fig. 24). (*a*) ¿Corresponderán las regio-

nes más exteriores (las más delgadas) a una región brillante o a una región oscura? (*b*) ¿Cuán gruesa es la película de aceite cuando se observa la tercera región azul desde el exterior de la gota? (*c*) ¿Por qué desaparecen gradualmente los colores conforme el espesor del aceite se hace mayor?

Figura 24 Problema 38.

39. Una fuente ancha de luz (λ = 680 nm) ilumina normalmente a dos placas de vidrio de 120 mm de longitud que se tocan en un extremo y están separadas por un alambre de 0.048 mm de diámetro en el otro extremo (Fig. 25). ¿Cuántas franjas brillantes aparecerán en la distancia de 120 mm?

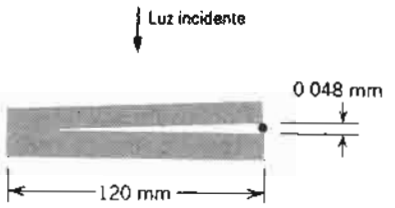


Figura 25 Problema 39.

40. Un trozo de vidrio perfectamente plano (n = 1.5) está situado sobre una trozo perfectamente plano de plástico negro (n = 1.2) como se muestra en la figura 26*a*. Se tocan en *A*. Desde arriba incide luz de 600 nm de longitud de onda. En el diagrama de la figura 26*b* se muestra la posición de las franjas oscuras en la luz reflejada. (*a*) ¿De qué espesor es el espacio entre el vidrio y el plástico en *B*? (*b*) En la región entre el vidrio y el plástico pasa agua (n = 1.33). ¿Cuántas franjas oscuras se ven cuando el agua ha desplazado todo el aire? (Lo derecho y el igual espaciamiento de las franjas es una prueba exacta de la calidad plana o *planicidad* del vidrio.)

41. Luz de 630 nm de longitud de onda incide normalmente sobre una película delgada en forma de cuña con un índice de refracción de 1.50. Existen diez franjas brillantes y nueve franjas negras a lo largo de la película. ¿En cuánto cambia el espesor de la película a lo largo de su longitud?

42. En una cuña de aire formada por dos placas planas de vidrio, que se tocan entre sí a lo largo de un borde, existen 4001 líneas oscuras observadas cuando se ven mediante luz monocromática reflejada. Cuando el aire entre las placas es evacuado, sólo se observan 4000 de tales líneas.

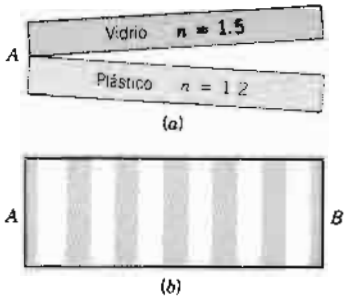


Figura 26 Problema 40.

Calcule el índice de refracción del aire a partir de estos datos.

43. En un experimento de anillos de Newton, el radio de curvatura R de la lente es de 5.0 m y su diámetro es 20 mm. (*a*) ¿Cuántos anillos se producen? (*b*) ¿Cuántos anillos se verían si el arreglo se encontrara inmerso en agua (n = 1.33)? Supóngase que λ = 589 nm.

44. El diámetro del décimo anillo claro en un aparato de anillos de Newton cambia de 1.42 a 1.27 cm al introducir un líquido entre la lente y la placa. Calcule el índice de refracción del líquido.

45. Se usa un aparato de anillos de Newton para determinar el radio de curvatura de una lente. Se miden los radios de los anillos brillantes *n*ésimo y (n + 20)ésimo y se encuentra que son 0.162 cm y 0.368 cm, respectivamente, para luz de 546 nm de longitud de onda. Calcule el radio de curvatura de la superficie inferior de la lente.

46. En un experimento de anillos de Newton, demuestre (*a*) que la diferencia en los radios entre anillos contiguos (máximos) está dada por

$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \approx \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda R/m},$$

suponiendo que $m \gg 1$. Y (*b*) que el *área* entre anillos contiguos (máximos) está dada por

$$A = \pi\lambda R,$$

suponiendo que $m \gg 1$. Nótese que esta área es independiente de m.

47. En el problema muestra 5, suponga que la reflexión es nula para luz de 550 nm de longitud de onda a una incidencia normal. Calcule el factor por el cual disminuye la reflexión mediante el recubrimiento a (*a*) 450 nm y (*b*) 650 nm. (*Sugerencia*: Calcule ϕ en la Ec. 13.)

48. Un barco que se aproxima a puerto está transmitiendo con una longitud de onda de λ = 3.43 m desde su antena ubicada a h = 23 m sobre el nivel del mar. La antena de la estación receptora se encuentra a H = 160 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la distancia horizontal D entre el barco y la torre receptora al perderse momentáneamente el contacto por radio por primera vez? Supóngase que el océano en calma refleja las ondas de radio perfectamente de acuerdo con la ley de la reflexión. Véase la figura 27.

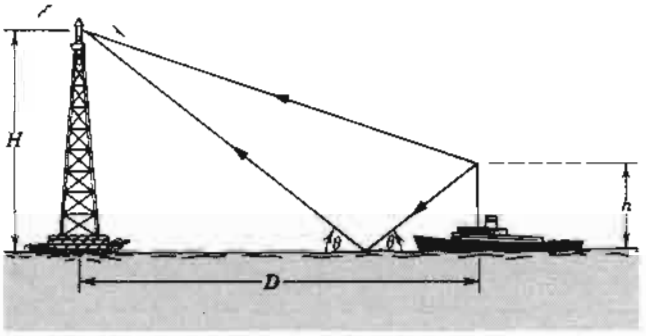


Figura 27 Problema 48.

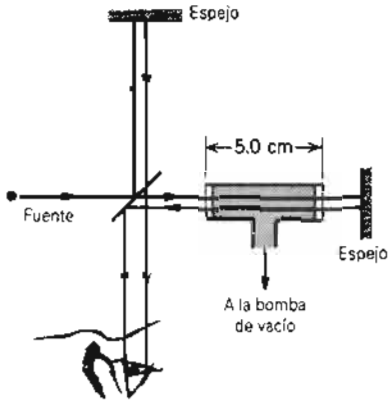


Figura 28 Problema 51.

Sección 45-6 El interferómetro de Michelson

49. Se cuentan 792 franjas con un medidor de luz cuando el espejo M en el interferómetro de Michelson se mueve 0.233 mm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

50. Una película delgada con $n = 1.42$ para luz de 589 nm de longitud de onda está situada en un brazo de un interferómetro de Michelson. Si se presenta un corrimiento de 7.0 franjas, ¿cuál es el espesor de la película?

51. Una cámara hermética de 5.0 cm de longitud con ventanas de vidrio está situada en un brazo de un interferómetro de Michelson como se indica en la figura 28. Se usa luz de $\lambda = 500$ nm de longitud de onda. Se evacua el aire lentamente de la cámara usando una bomba de vacío. Mientras que se está retirando el aire, se observa que pasan 60 franjas por la visual. De estos datos, determine el índice de refracción del aire a la presión atmosférica.

52. Escriba una expresión para la intensidad observada en el interferómetro de Michelson (Fig. 19) en función de la posición del espejo móvil. Determine la posición del espejo para el punto en que $d_1 = d_2$.

CAPÍTULO 46

DIFRACCIÓN

La difracción es la desviación hacia una nueva dirección de las ondas que encuentran un objeto (una barrera o una abertura) en su camino. Este capítulo sólo considera la difracción de las ondas de luz, pero la difracción es un fenómeno que ocurre para todos los tipos de ondas. Por ejemplo, las ondas de sonido son difractadas por objetos ordinarios, y como resultado podemos escuchar sonidos aun cuando no estemos en línea directa a su fuente. Para que se presente la difracción, el tamaño del objeto debe ser del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de las ondas incidentes; cuando la longitud de onda es mucho menor que el tamaño del objeto, por lo general, la difracción no se observa y el objeto forma una sombra definida.

Los patrones de la difracción constan de bandas claras y oscuras, semejantes a los patrones de interferencia estudiados en el capítulo 45. Mediante el análisis de estos patrones podemos aprender acerca del objeto difractante. Por ejemplo, la difracción de rayos X es un método importante en el estudio de la estructura de los sólidos, y la difracción de los rayos gamma se usa para estudiar los núcleos. La difracción tiene también efectos indeseables, como el esparcimiento de la luz al entrar en la abertura de un telescopio, lo cual limita su capacidad para resolver o separar las estrellas que se ven una cerca de la otra. Estos efectos diversos de la difracción se tratan en el presente capítulo y en el que sigue a éste.

46-1 DIFRACCIÓN Y TEORÍA ONDULATORIA DE LA LUZ

Cuando la luz pasa a través de una rendija angosta (de anchura comparable a la longitud de onda de la luz; véase la Fig.1 del capítulo 43), los haces de luz no solamente se ensanchan más allá de la sombra geométrica de la rendija; también surge una serie de bandas claras y oscuras alternantes que semejan las franjas de interferencia (Fig. 1). En el capítulo 45, dijimos que la aparición de las franjas de interferencia proporciona una prueba sólida de la naturaleza ondulatoria de la luz. Podemos decir también que la aparición de los patrones de difracción requiere, de igual manera, que la luz viaje en forma de ondas.

Si bien la difracción ya se conocía desde los tiempos de Huygens y Newton, ninguno de ellos creía que ésta proporcionara la prueba de que la luz debe ser una onda. En particular, Newton creía que la luz viajaba como una corriente de partículas.

El ingeniero francés Augustin Fresnel (1788-1827) apoyaba fervientemente la teoría ondulatoria de la luz. Fresnel explicó la difracción basándose en la teoría ondulatoria, la cual no fue ampliamente aceptada, ni aun

Figura 1 El patrón de difracción producido cuando la luz pasa a través de una rendija angosta.

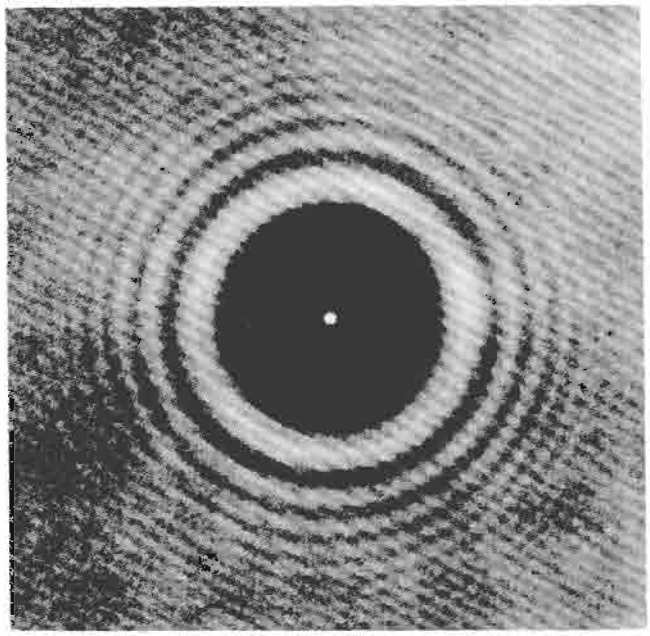


Figura 2 El patrón de difracción de un disco. Nótese la mancha brillante de Poisson en el centro del patrón.

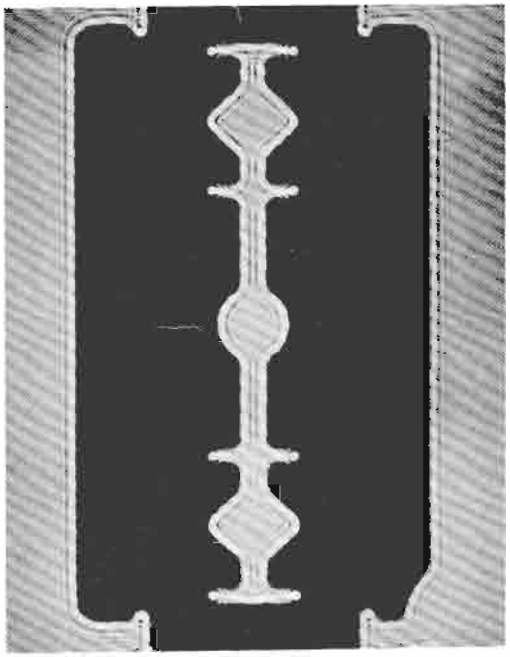


Figura 3 El patrón de difracción de una hoja de afeitar vista bajo luz monocromática. Observe las franjas cerca de los bordes.

después de que Thomas Young realizara experimentos de interferencia por una rendija doble. En 1819, Fresnel publicó un trabajo sobre su teoría de la difracción en un debate auspiciado por la Academia Francesa de las Ciencias. Uno de los miembros de la Academia, Simeon-Denis Poisson (un fuerte oponente de la teoría ondulatoria de la luz), ridiculizó la teoría de Fresnel porque, como el propio Poisson demostró, la teoría de la difracción de Fresnel conducía a la "absurda" predicción de que la sombra de un objeto opaco tendría un punto claro en su centro. La figura 2 muestra el patrón de difracción de un disco; el punto brillante claramente visible en su centro (conocido como *mancha de Poisson*) apoya la interpretación de Fresnel.

La figura 3 muestra el patrón de la difracción producido cuando un objeto ordinario se ilumina con luz monocromática. Realmente, no necesitamos un aparato especial para observar la difracción. Mantenga dos dedos de modo que haya una rendija angosta entre ellos, y mire hacia una lámpara de luz a través de la rendija. Las líneas oscuras que ve en la rendija son causadas por la difracción. Otro ejemplo común de la difracción son las "nubecillas" que mucha gente puede observar flotando en su campo de visión. Las nubecillas son puntos translúcidos o diminutas cadenas que parecen flotar sin rumbo. Pueden verse al enfocar los ojos a distancia mientras se fija la vista en una hoja de papel blanco claramente iluminada. Los flotadores son causados por las células de la sangre y otros residuos microscópicos en el fluido del globo ocular; lo que observamos es el patrón de difracción en la retina.

La figura 4 muestra la situación generalizada de la difracción. Las superficies curvas de la izquierda representan frentes de ondas de luz incidente. La luz incide sobre el objeto difractante B, el cual mostramos en la figura 4 como una barrera opaca que contiene una abertura de forma arbitraria. (Más adelante, consideraremos una abertura que es una sola rendija angosta, la cual produjo el patrón de difracción que se muestra en la Fig. 1.) En la figura 4, C es una pantalla o una película fotográfica que

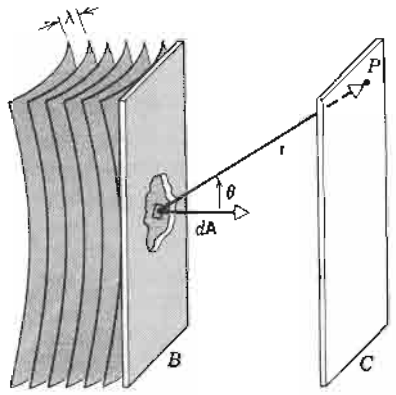


Figura 4 La difracción se presenta cuando frentes de ondas coherentes de luz llegan sobre la barrera opaca B, la cual tiene una abertura de forma arbitraria. El patrón de difracción puede verse en la pantalla C.

recibe la luz que pasa a través o alrededor del objeto difractante.

Podemos calcular el patrón de la intensidad de la luz en la pantalla C al subidividir el frente de ondas en áreas elementales $d\mathbf{A}$, cada una de las cuales se convierte en la fuente de una pequeña onda creciente de Huygens. La intensidad de la luz en un punto arbitrario P se halla al superponer las perturbaciones ondulatorias (esto es, los vectores $\mathbf{E}$) causados por las pequeñas ondas que llegan a P desde todas estas fuentes elementales.

Las perturbaciones ondulatorias que llegan a P difieren en amplitud y en fase porque (1) las fuentes elementales están a distancias variables de P, (2) la luz sale de las fuentes elementales en diversos ángulos con respecto a la normal al frente de ondas, y (3) algunas fuentes son obstruidas por la barrera B; otras no lo son. Los cálculos de la difracción, que en principio son sencillos, pueden resultar difíciles en la práctica. El cálculo debe repetirse para cada punto en la pantalla C en el que deseemos conocer la intensidad de la luz. En la sección 45-3 hemos seguido exactamente este programa al calcular el patrón de la intensidad en la rendija doble. El cálculo en dicho caso fue sencillo porque supusimos sólo dos fuentes elementales, las dos rendijas angostas.

La figura 5 muestra otra representación de la figura 4, en la forma de diagramas de rayos. El patrón formado en la pantalla depende de la separación entre la pantalla C y la abertura B. En general, podemos considerar tres casos:

1. *Separación muy pequeña.* Cuando C está muy cerca de B, las ondas viajan únicamente una distancia corta después de salir de la abertura, y los rayos divergen muy poco. Los efectos de la difracción son despreciables, y el patrón en la pantalla es la sombra geométrica de la abertura.

2. *Separación muy grande.* La figura 5*a* representa la situación cuando la pantalla está tan lejos de la abertura que podemos ver a los rayos como paralelos o, lo que es lo mismo, a los frentes de ondas como planos. (En este caso, suponemos también que la fuente está lejos de la abertura, de modo que los frentes de onda incidentes son también planos. Puede conseguirse el mismo efecto si la abertura se ilumina con un láser.) Una manera de conseguir esta condición, la cual se conoce como *difracción de Fraunhofer*, en el laboratorio es usar dos lentes convergentes, como se muestra en la figura 5*b*. La primera lente convierte la luz divergente de la fuente en una onda plana, y la segunda lente enfoca a las ondas planas que salen de la abertura en el punto P. Todos los rayos que llegan a P salen de la abertura paralelos a la línea de trazos Px trazada desde P a través del centro de la segunda lente.

3. *Separación intermedia.* En el caso mostrado en la figura 5*c*, la pantalla puede estar a cualquier distancia de la abertura, y los rayos que entran y salen de la abertura no son paralelos. Este caso general se llama *difracción de Fresnel.*

Si bien la difracción de Fraunhofer es un caso especial límite de la difracción de Fresnel, más general, es un caso importante y es fácil de manejar matemáticamente. En el capítulo 45 supusimos la difracción de Fraunhofer en nuestro análisis de la interferencia por una rendija doble. A lo largo de este texto tratamos únicamente de la difracción de Fraunhofer.

46-2 DIFRACCIÓN POR UNA SOLA RENDIJA

El patrón de difracción más sencillo de analizar es el producido por una rendija angosta larga. En esta sección veremos las posiciones de los mínimos y máximos en el patrón, como se muestra en la figura 1. En la sección siguiente calcularemos la intensidad del patrón como función de la posición en la pantalla.

La figura 6 muestra una onda plana que cae con incidencia normal sobre una rendija de anchura a. Consideremos primeramente el punto central P_0. Los rayos que salen de la rendija paralelos al eje horizontal central se enfocan en P_0. Estos rayos están ciertamente en fase en el plano de la rendija, y permanecen en fase cuando se enfocan por la lente (véase, por ejemplo, la Fig. 17*a* del capítulo 44). Puesto que todos los rayos que llegan a P_0 están en fase, interfieren constructivamente y producen un máximo de intensidad en P_0.

Consideremos ahora otro punto en la pantalla. Los rayos de luz que llegan a P_1 en la figura 7 salen de la rendija con el ángulo θ, como se muestra. El rayo xP_1 pasa sin desviarse a través del centro de la lente y por lo tanto determina a θ. El rayo r_1 se origina en la parte superior de la rendija y el rayo r_2 en el centro. Si se elige a θ de modo que la distancia bb' en la figura sea la mitad de una longitud de onda, mientras que r_1 y r_2 están fuera de fase y la interferencia es destructiva en P_1. Lo mismo ocurre para un rayo justo abajo de r_1 y otro justo abajo de r_2. De hecho, para cada rayo que pase a través de la mitad superior de la rendija, existe un rayo correspondiente que pasa a través de la mitad inferior, originándose en el punto $a/2$ abajo del primer rayo, de modo que los dos rayos están fuera de fase en P_1. Cada rayo que llega a P_1 desde la mitad superior de la rendija interfiere destructivamente con el que llega de la mitad inferior de la rendija. La intensidad en P_1 es, por lo tanto, cero y P_1 es el primer mínimo del patrón de la difracción.

Puesto que la distancia bb' es igual a $(a/2)$ sen θ, la condición para el primer mínimo puede escribirse

$$\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{2},$$

o sea

$$a \operatorname{sen} \theta = \lambda. \qquad (1)$$

La ecuación 1 muestra que el máximo central resulta más ancho conforme la rendija se hace más angosta. Si la anchura de la rendija es tan pequeña como una longitud de onda ($a = \lambda$), el primer mínimo se presenta en $\theta = 90°$ (sen $\theta = 1$ en la ecuación 1), lo cual implica que el máximo central llena todo el hemisferio frontal. En la sección 45-1 supusimos una condición que se acerca a ésta cuando consideramos la interferencia por una rendija doble.

En la figura 8 la rendija se divide en cuatro zonas iguales, con un rayo saliendo de la parte superior de cada zona. Elijamos θ de modo que la distancia bb' sea de media longitud de onda. Entonces los rayos r_1 y r_2 se cancelan en P_2. Los rayos r_3 y r_4 están también a media longitud de onda fuera de fase y también se cancelan. Consideremos otros cuatro rayos, emergiendo desde la rendija a una distancia dada abajo de estos cuatro rayos. Los dos

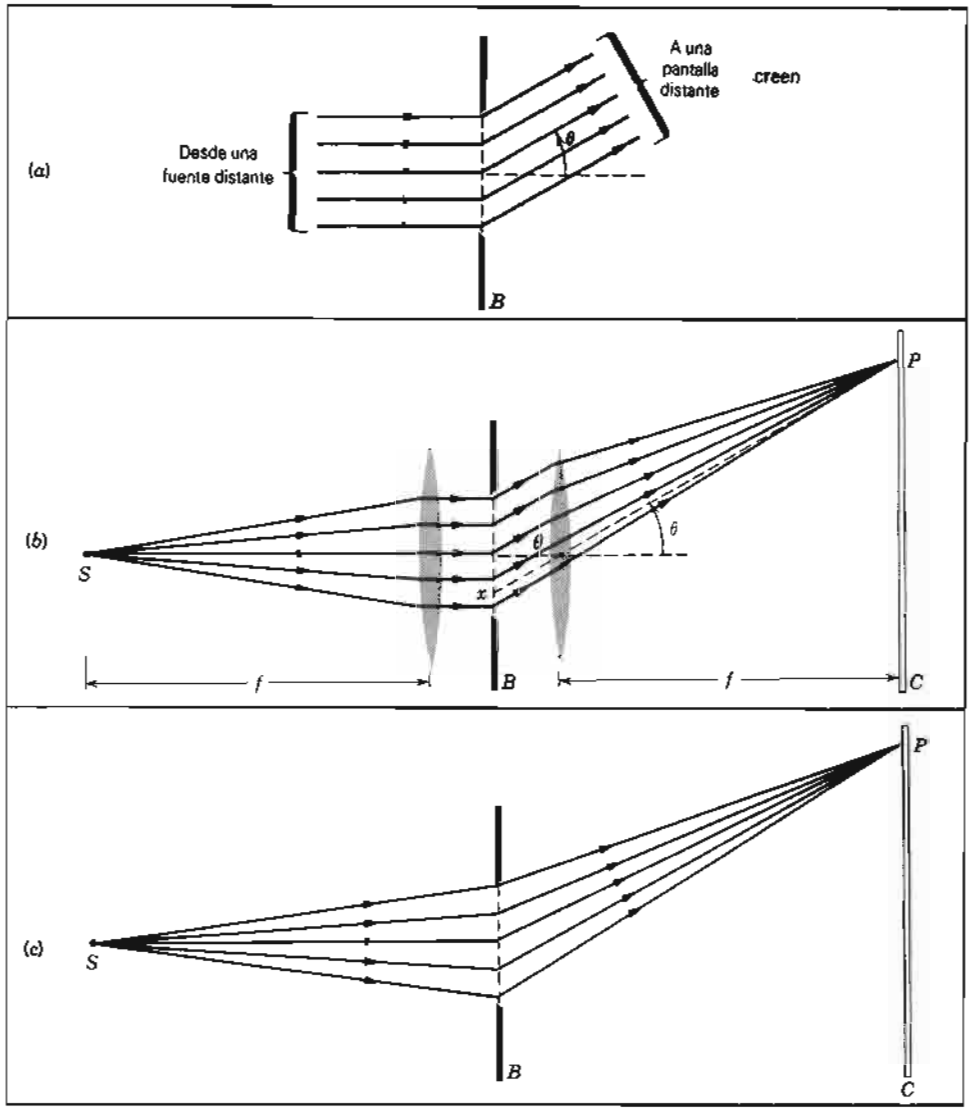


Figura 5 La luz de la fuente puntual *S* ilumina una rendija en la barrera opaca *B*. La rendija se extiende a una gran distancia arriba y abajo del plano de la figura; esta distancia es mucho mayor que la anchura *a* de la rendija. La intensidad en el punto *P* de la pantalla *C* depende de las fases relativas de la luz recibida desde diversas partes de la rendija. (*a*) Si la fuente *S* y la pantalla *C* se mueven a grandes distancias de la rendija, tanto la luz incidente en *B* como la emergente (de *B*) consisten en rayos casi paralelos. (*b*) En lugar de usar distancias grandes, la fuente y la pantalla pueden ser situadas cada una en el plano focal de una lente; una vez más, en la rendija entran y salen rayos de luz paralelos. (*c*) Sin la lente, los rayos no son paralelos.

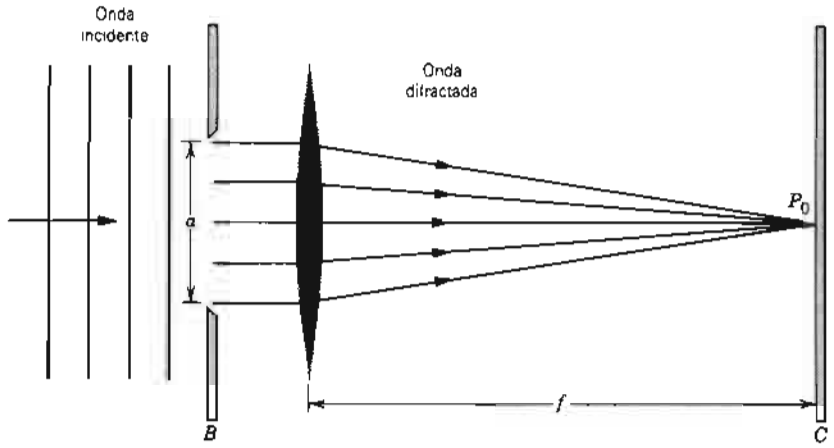


Figura 6 Las condiciones en el máximo central del patrón de la difracción.

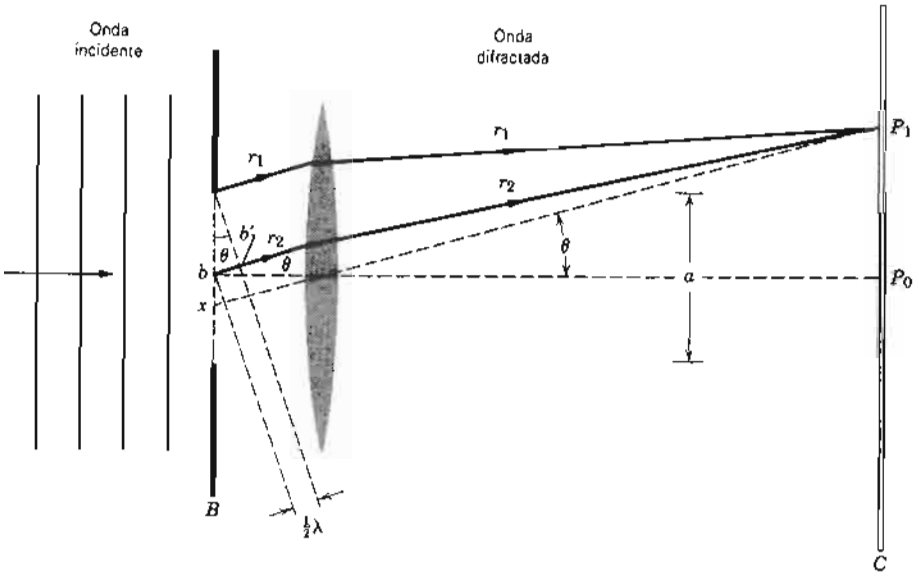


Figura 7 Las condiciones en el primer mínimo del patrón de difracción. El ángulo θ es tal que la distancia bb' es media longitud de onda.

rayos abajo de r_1 y r_2 se cancelan, como también los dos rayos abajo de r_3 y r_4. Podemos proceder a lo largo de toda la rendija y concluir nuevamente que no llega nada de luz a P_2; hemos localizado un segundo punto de intensidad cero.

La condición descrita (véase la Fig. 8) requiere que

$$\frac{a}{4}\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{2},$$

o sea

$$a\operatorname{sen}\theta = 2\lambda. \qquad (2)$$

Para una anchura a de la rendija y una longitud de onda λ dadas, la ecuación 2 da la posición en la pantalla del segundo mínimo en términos del ángulo θ. Por extensión de las ecuaciones 1 y 2, la expresión general para los mínimos en el patrón de la difracción de la pantalla C es

$$a\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(mínimos)}. \quad (3)$$

Existe un máximo aproximadamente a medio camino entre cada par de mínimos contiguos. Más adelante en el capítulo obtendremos una fórmula para la intensidad de la luz difractada, de la cual pueden hallarse exactamente las posiciones de los máximos. Nótese que la ecuación 3 indica *dos* mínimos (y sus máximos correspondientes) por cada m, uno en un ángulo θ arriba del eje central y uno abajo (correspondiente a $m < 0$). Al deducir la ecuación 3, obsérvese cómo la suposición de rayos paralelos (difracción de Fraunhofer) simplificó el análisis.

Problema muestra 1 Una rendija de anchura a está iluminada con luz blanca. ¿Para qué valor de a cae el primer mínimo de la luz roja (λ = 650 nm) a θ = 15°?

Solución En el primer mínimo, m = 1 en la ecuación 3. Resolviendo para a, hallamos entonces

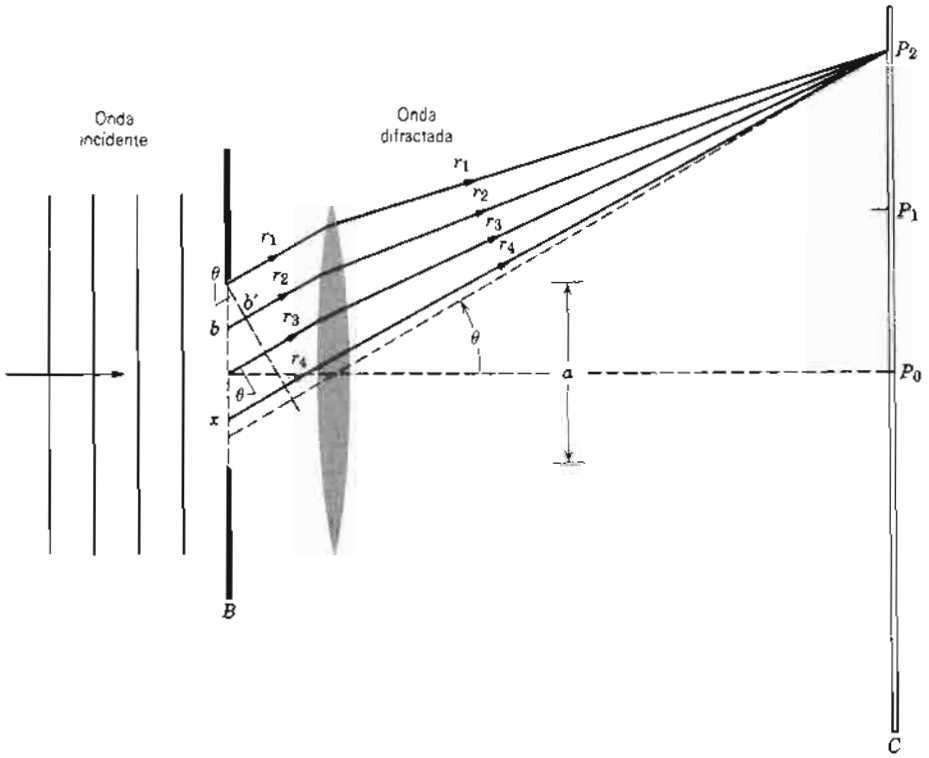


Figura 8 Las condiciones en el segundo mínimo del patrón de difracción. El ángulo θ es tal que la distancia bb' es media longitud de onda.

$$a = \frac{m\lambda}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{(1)(650\text{ nm})}{\operatorname{sen}15^\circ}$$

$$= 2510\text{ nm} = 2.51\ \mu\text{m}.$$

Para que la luz incidente se disperse ese tanto (±15°) la rendija debe ser realmente muy angosta, siendo de unas cuatro veces la longitud de onda (y mucho menor que el diámetro de un cabello humano delgado, el cual debe ser de unos 100 μm de diámetro).

Problema muestra 2 En el problema muestra 1, ¿cuál es la longitud de onda λ' de la luz cuyo primer máximo de difracción (sin contar el máximo central) cae a 15°, coincidiendo así con el primer mínimo de la luz roja?

Solución Los máximos se presentan más o menos a la mitad entre los mínimos, de modo que existe un máximo a 15° cuando el primer mínimo está a 10° y el segundo mínimo está a 20°. En este caso, para el segundo mínimo,

$$a\operatorname{sen}\theta = 2\lambda',$$

o sea

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}(2510\text{ nm})(\operatorname{sen}\ 20^\circ) = 430\text{ nm}.$$

La luz de esta longitud de onda es de color violeta. El segundo máximo para luz de 430 nm de longitud de onda coincide siempre con el primer mínimo para luz de longitud de onda de 650 nm, independiente de cuál sea la anchura de la rendija. Si la rendija es relativamente angosta, el ángulo θ en el cual ocurre este traslape es relativamente grande, y viceversa.

46-3 INTENSIDAD DE LA DIFRACCIÓN POR UNA SOLA RENDIJA

En la sección 46-2 se determinaron las posiciones de los mínimos de un patrón de difracción de una sola rendija. Ahora deseamos hallar una expresión para la intensidad de *todo* el patrón en función del ángulo de difracción θ. Esta expresión nos permitirá determinar la posición y la intensidad de los máximos.

La figura 9 muestra una rendija de anchura a dividida en N tiras paralelas, cada una de anchura Δx. Las tiras son muy angostas, de modo que cada una de ellas puede considerarse como un radiador de pequeñas ondas de Huygens, y toda la luz de una tira dada llega al punto P con la misma fase. Las ondas que llegan a P desde cualquier par de tiras contiguas tienen la misma diferencia de fase (constante)$\Delta\phi$, lo cual puede hallarse a partir de

$$\frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia del camino}}{\lambda}$$

o sea

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\operatorname{sen}\theta, \qquad (4)$$

donde Δx sen θ, como lo muestra el detalle de la figura 9, es la diferencia del camino de los rayos que se originan en los puntos correspondientes de las tiras contiguas.

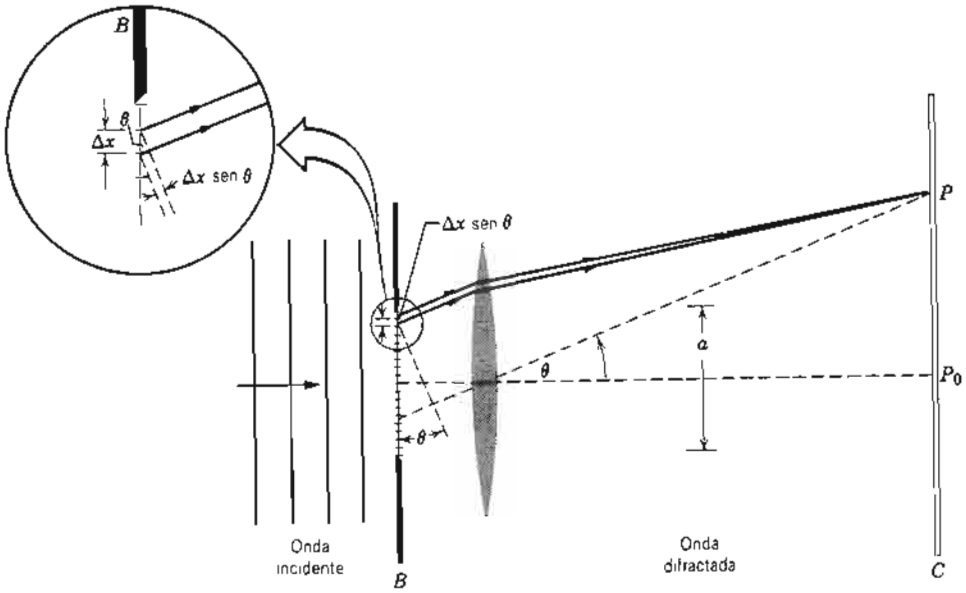


Figura 9 Una rendija de anchura a está dividida en N tiras de anchura Δx. La ampliación muestra con mayor claridad las condiciones en la segunda tira. En el límite diferencial, la anchura dx de cada tira se hace infinitesimalmente pequeña y el número de tiras se vuelve infinitamente grande. Aquí y en la próxima figura consideraremos que $N = 18$ por claridad.

Si el ángulo θ no es demasiado grande, cada tira produce una onda de la misma amplitud ΔE_0 en P. El efecto neto en P proviene de la superposición de N vectores de la misma amplitud, cada uno con una diferencia de fase del siguiente, de $\Delta\phi$. Para hallar la intensidad en P, debemos primero calcular el campo eléctrico neto de los N vectores.

En la sección 45-3, se presentó un método gráfico para sumar las perturbaciones ondulatorias lo cual nos permitió calcular la intensidad de la interferencia por una rendija doble. Este método se basa en representar cada perturbación ondulatoria como un fasor (un vector giratorio) y determinar el fasor de la amplitud resultante mediante la suma de vectores, teniendo en cuenta la fase relativa dada por la ecuación 4. El campo eléctrico resultante E_θ varía con θ, porque la diferencia de fase $\Delta\phi$ varía con θ.

Consideremos algunos ejemplos de la suma de fasores en la difracción de una sola rendija. Primero consideraremos el campo eléctrico resultante en el punto P_0 (el centro del patrón de difracción en la pantalla). En este caso $\theta = 0$, y la ecuación 4 da $\Delta\phi = 0$ como diferencia de fase entre tiras contiguas. De acuerdo con el método de la sección 45-3, trazamos, entonces, N vectores de longitud ΔE_0 punta con cola y paralelos entre sí ($\Delta\phi = 0$). En la figura 10*a* se muestra el E_θ resultante. Éste es claramente el valor máximo que puede tener la resultante de estos N vectores, de modo que lo representamos como E_m.

Conforme nos alejamos de $\theta = 0$, la diferencia de fase $\Delta\phi$ asume un valor definido distinto de cero. De nuevo, trazamos los N vectores punta con cola, difiriendo cada uno en dirección por $\Delta\phi$ respecto del anterior, y obtenemos la resultante que se muestra en la figura 10*b*. Nótese que E_θ es menor de lo que era en la figura 10*a*.

Consideremos ahora el primer mínimo del patrón de difracción (punto P_1 en la Fig. 7). En este punto la intensidad es cero, de modo que el E_θ resultante debe ser cero. Esto significa que los N fasores, trazados punta con cola, deben formar un anillo cerrado, como se muestra en la figura 10*c*.

Más allá del primer mínimo, el corrimiento o desplazamiento de fase $\Delta\phi$ es todavía mayor, y la cadena de vectores forma una helicoidal de un ángulo mayor de 360°. A un cierto ángulo (correspondiente a un cierto corrimiento de fase, como en la Fig.10*d*), el E_θ resultante tiene su longitud mayor dentro de este anillo, correspondiente al primer máximo más allá del central. Nótese que la intensidad de este máximo es mucho menor que la intensidad del máximo central, representado en la figura 10*a*. Al final, este anillo se cierra a sí mismo, dando una resultante de cero y corresponde al segundo mínimo.

Nuestro objetivo en determinar la intensidad del patrón de difracción producido por una sola rendija para cualquier θ era evaluar el corrimiento de fase de acuerdo con la ecuación 4 y hallar el E_θ resultante, como en la figura 10*b*. El cuadrado de esta resultante da entonces la intensidad relativa, como en la sección 45-3.

La luz que llega a P desde una tira dada está en fase sólo si la tira es infinitesimalmente pequeña y el número de

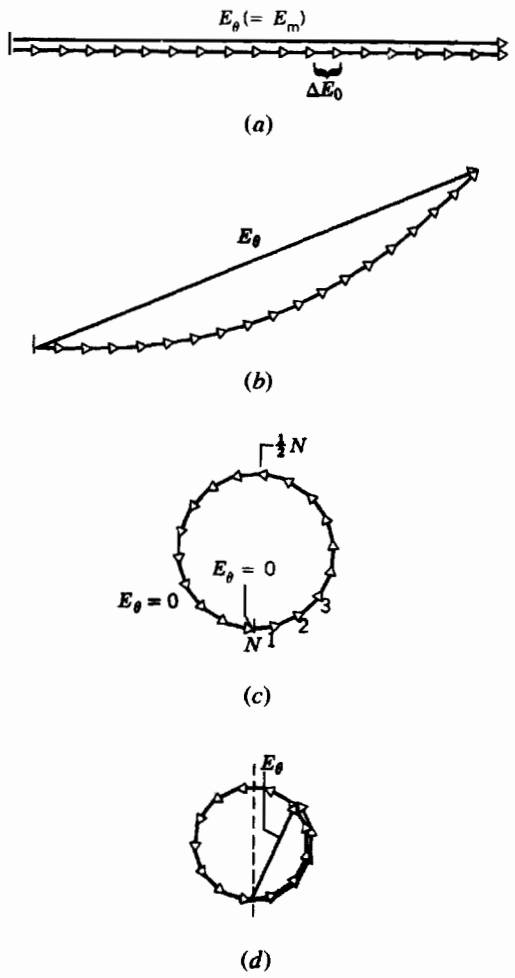


Figura 10 Los fasores en la difracción por una sola rendija, mostrando las condiciones en (*a*) el máximo central, (*b*) una dirección ligeramente separada del máximo central, (*c*) el primer mínimo, y (*d*) el primer máximo más allá del máximo central. Esta figura corresponde a $N = 18$ de la figura 9.

tiras es correspondientemente grande. La cadena de fasores de la figura 10*b* tiende, entonces, a formar el arco de un círculo, como se dibuja en la figura 11. La longitud del arco es de E_m, mientras que la amplitud del campo resultante que buscamos se indica mediante la cuerda E_θ. El ángulo ϕ es la diferencia de fase total entre los rayos de la parte superior e inferior de la tira; como se muestra en la figura 11, ϕ es también el ángulo entre los dos radios R.

De esta figura podemos escribir

$$E_\theta = 2R \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}.$$

De la figura 11, ϕ expresado en radianes es

$$\phi = \frac{E_m}{R}.$$

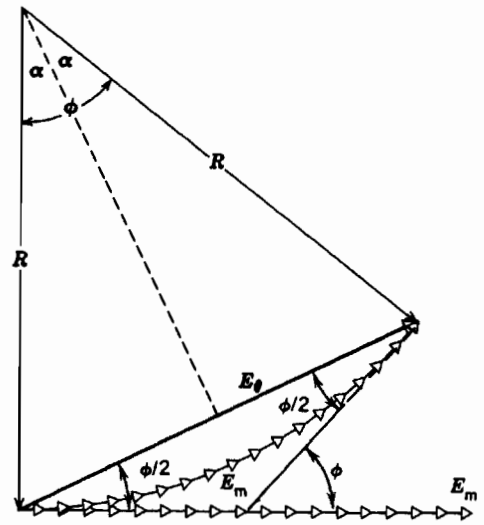


Figura 11 Construcción utilizada para calcular la intensidad de la difracción por una sola rendija. La situación corresponde a la de la figura 10*b*.

Al combinar las ecuaciones se obtiene

$$E_\theta = \frac{E_m}{\phi/2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2},$$

o sea

$$E_\theta = E_m \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}, \tag{5}$$

donde

$$\alpha = \frac{\phi}{2}. \tag{6}$$

De la figura 9, recordando que ϕ es la diferencia de fase entre los rayos de la parte superior y de la parte inferior de la rendija y que la diferencia del camino para estos rayos es a sen θ, tenemos

$$\frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia del camino}}{\lambda}$$

o bien

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(a \operatorname{sen} \theta).$$

Al combinar con la ecuación 6 tenemos

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \tag{7}$$

La ecuación 5, con α evaluada de acuerdo con la ecuación 7, da la amplitud de la perturbación ondulatoria de un patrón de difracción por una sola rendija para cualquier ángulo θ. La intensidad I_θ para el patrón es proporcional al cuadrado de la amplitud, de modo que

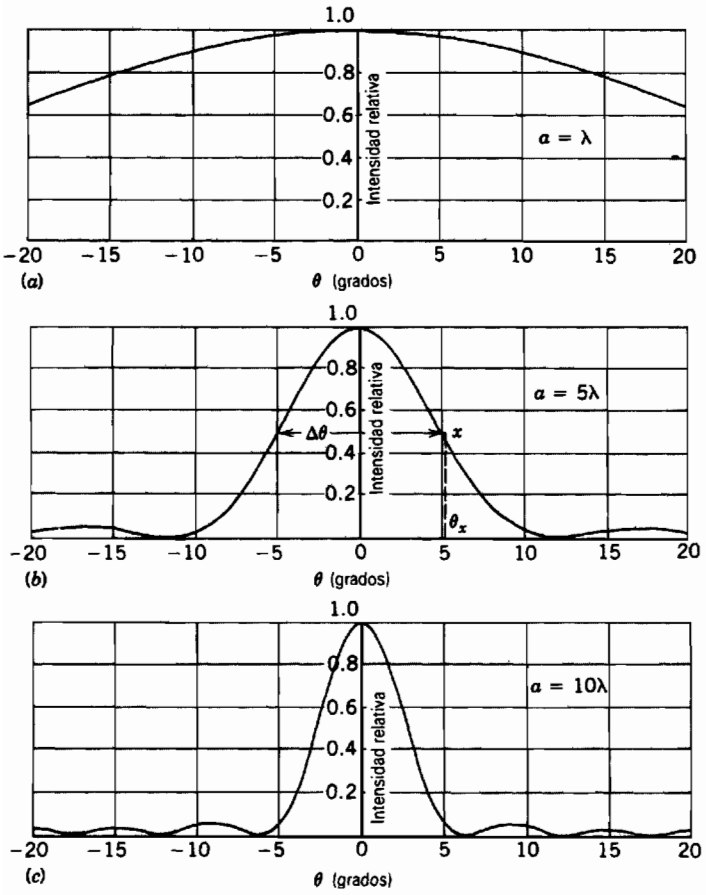


Figura 12 La distribución de intensidades de la difracción por una sola rendija para tres valores diferentes de la razón a/λ. Cuanto más ancha es la rendija, más angosto es el pico de la difracción central. Como se indica en (*b*), $\Delta\theta$ da una medida de la anchura del pico central.

$$I_\theta = I_m\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2. \qquad (8)$$

La ecuación 8, combinada con la ecuación 7, da el resultado de la intensidad del patrón por una sola rendija para cualquier θ que buscamos. La figura 12 muestra gráficas de la intensidad relativa I_θ/I_m para varios valores de la razón a/λ. Nótese que el patrón se vuelve más angosto conforme aumenta a/λ. (Véase también la Fig. 1 del capítulo 43.)

Los mínimos se presentan en la ecuación 8 cuando

$$\alpha = m\pi \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \qquad (9)$$

Al combinar con la ecuación 7 nos conduce a

$$a\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ (mínimos)},$$

que es el resultado obtenido en la sección precedente (Ec. 3). Sin embargo, en esa sección *sólo* dedujimos este resultado, sin obtener ninguna información cuantitativa acerca de la intensidad del patrón de difracción en lugares en los cuales ésta era diferente de cero. Aquí (Ec. 8) hemos obtenido la información completa de la intensidad.

Problema muestra 3 Calcule, aproximadamente, las intensidades relativas de los máximos secundarios en el patrón de difracción de Fraunhofer para una sola rendija.

Solución Los máximos secundarios se encuentran de modo aproximado a la mitad entre los mínimos y están dados, aproximadamente, por (véase el problema 15)

$$\alpha \approx (m + \tfrac{1}{2})\,\pi \qquad m = 1, 2, 3, \ldots ,$$

con un resultado similar cuando $m < 0$. Al sustituir en la ecuación 8 da

$$I_\theta = I_m\left[\frac{\operatorname{sen}(m+\frac{1}{2})\pi}{(m+\frac{1}{2})\pi}\right]^2,$$

lo que se reduce a

$$\frac{I_\theta}{I_m} = \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\,\pi^2}.$$

Esto da $I_\theta/I_m = 0.045$ ($m = 1$), 0.016 ($m = 2$), 0.0083 ($m = 3$), y así sucesivamente. Los máximos consecutivos disminuyen de intensidad rápidamente.

Problema muestra 4 Obtenga la anchura $\Delta\theta$ del máximo central de la difracción de Fraunhofer por una sola rendija (véase la Fig. 12*b*). La anchura puede representarse como el ángulo que se forma entre los dos puntos del patrón en donde la intensidad es la mitad que en el centro del patrón.

Solución El punto x en la figura 12*b* se elige de modo que $I_\theta = \frac{1}{2}I_m$, o, de la ecuación 8,

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha_x}{\alpha_x}\right)^2.$$

Esta ecuación no puede resolverse analíticamente para α_x. Con una calculadora de bolsillo o una computadora, podemos obtener una solución aproximada con cualquier precisión deseada. Reescribamos la ecuación así:

$$\alpha_x = \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha_x. \qquad (10)$$

Para resolverla con la calculadora, ingrese el modo "radián". Escoja cualquier valor inicial para α_x, digamos $\alpha_x = 1$. Introduzca este valor en el lado derecho de la ecuación 10 y resuelva, obteniéndose 1.19. La ecuación 10 requiere que este valor debe ser entonces igual a α_x, que claramente no lo es ($1 \neq 1.19$). Tome 1.19 como el nuevo valor de intento, y evalúe de nuevo el lado derecho, obteniéndose ahora 1.31. Todavía no tenemos una solución que satisfaga a la ecuación 10 ($1.19 \neq 1.31$), pero estamos más cerca de lo que estábamos en nuestro primer intento. Continúe de esta manera, usando el resultado de un cálculo como el punto inicial del siguiente, hasta que la diferencia entre el valor calculado del lado derecho de la ecuación 10 y el valor inicial sea tan pequeño como se quiera. (Es posible diseñar un programa para una calculadora o una computadora y de tal modo que el programa realice las repeticiones automáticamente. También es posible que tenga que detenerse cuando la diferencia entre valores consecutivos se vuelva menor que un

límite preestablecido.) Este método se llama la técnica *iterativa* para resolver ecuaciones. Después de 10 iteraciones, el resultado es

$$\alpha_x = 1.39156,$$

y si se realizan más iteraciones sólo cambia la quinta cifra decimal. Al sustituir este valor en la ecuación 7, obtenemos

$$\theta_x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\alpha_x \lambda}{\pi a}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1.39}{5\pi}\right) = 5.1°.$$

La anchura de la curva se encuentra entonces de

$$\Delta\theta = 2\theta_x = 10.2°.$$

46-4 DIFRACCIÓN POR UNA ABERTURA CIRCULAR

Al enfocar una imagen, una lente deja pasar sólo luz que llega dentro de su perímetro circular. Desde este punto de vista, una lente se comporta del mismo modo que una abertura circular en una pantalla opaca. Tal abertura forma un patrón de difraccion análogo al de una sola rendija. Los efectos de la difracción limitan a menudo la capacidad de los telescopios y otros instrumentos ópticos para formar imágenes precisas.

La imagen formada por una lente puede distorsionarse por otros efectos, incluyendo las aberraciones esférica y cromática. Estos efectos pueden reducirse sustancialmente o eliminarse mediante el formado apropiado de las superficies de la lente o al introducir elementos correctores en el sistema óptico. Sin embargo, ningún esfuerzo en un diseño inteligente puede eliminar los efectos de difracción, los cuales están determinados únicamente por el tamaño de la abertura (el diámetro de la lente) y la longitud de onda de la luz. En la difracción, la naturaleza impone un límite fundamental en la precisión de nuestros instrumentos.

Cuando usamos la óptica geométrica para analizar las lentes, suponemos que no ocurre difracción. No obstante, la óptica geométrica es en sí misma una aproximación, por ser el límite de la óptica ondulatoria. Si quisiéramos realizar un análisis riguroso basado en la óptica ondulatoria de la formación de una imagen por una lente, descubriríamos que los efectos de difracción surgen de manera natural.

La figura 13 muestra la imagen de una fuente puntual de luz distante (una estrella) formada en una película fotográfica situada en el plano focal de la lente convergente de un telescopio. No es un punto, como parece sugerir (en forma aproximada) el tratamiento de la óptica geométrica, sino un disco circular rodeado de varios anillos secundarios progresivamente más débiles. Al comparar con la figura 1 queda poca duda de que estamos tratando con un fenómeno de difracción.

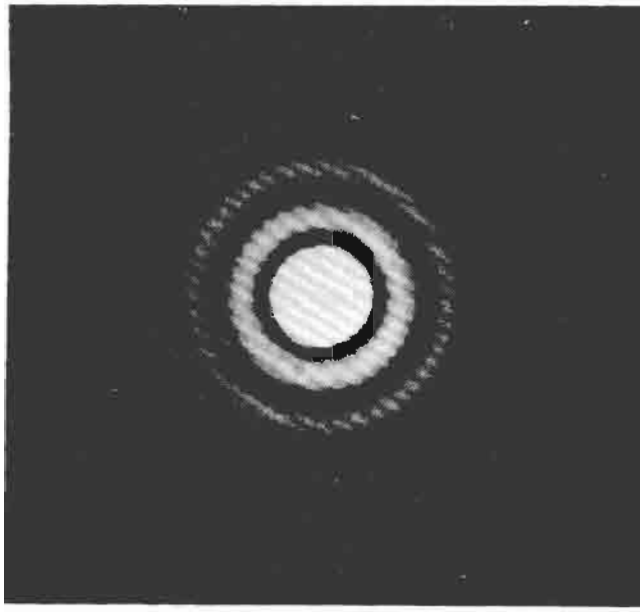


Figura 13 El patrón de difracción de una abertura circular. El máximo central se conoce a veces como el disco de Airy (en honor de Sir George Airy, quien fue el primero en resolver el problema de la difracción por una abertura circular en 1835). Nótense los máximos circulares secundarios.

El análisis matemático de la difracción por una abertura circular, que está más allá del nivel de este texto, demuestra que (con las condiciones de Fraunhofer) el primer mínimo se presenta a un ángulo respecto al eje central dado por

$$\text{sen}\,\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{d}, \qquad (11)$$

donde d es el diámetro de la abertura. Esto debe de compararse con la ecuación 1,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\lambda}{a},$$

la cual ubica el primer mínimo de una rendija de anchura a. Estas expresiones difieren por el factor 1.22, que surge cuando dividimos la abertura circular en fuentes de Huygens elementales e integramos para la abertura.

El hecho de que las imágenes de una lente sean patrones de difracción es importante cuando deseamos distinguir dos objetos puntuales distantes cuya separación angular sea pequeña. La figura 14 muestra cómo se manifiestan, y los patrones de intensidad correspondientes de dos objetos puntuales distantes (las estrellas, por ejemplo) con separaciones angulares pequeñas e intensidades centrales aproximadamente iguales. En la figura 14*a* los objetos no se resuelven; esto es, no pueden distinguirse de un solo objeto puntual. En la figura 14*b*

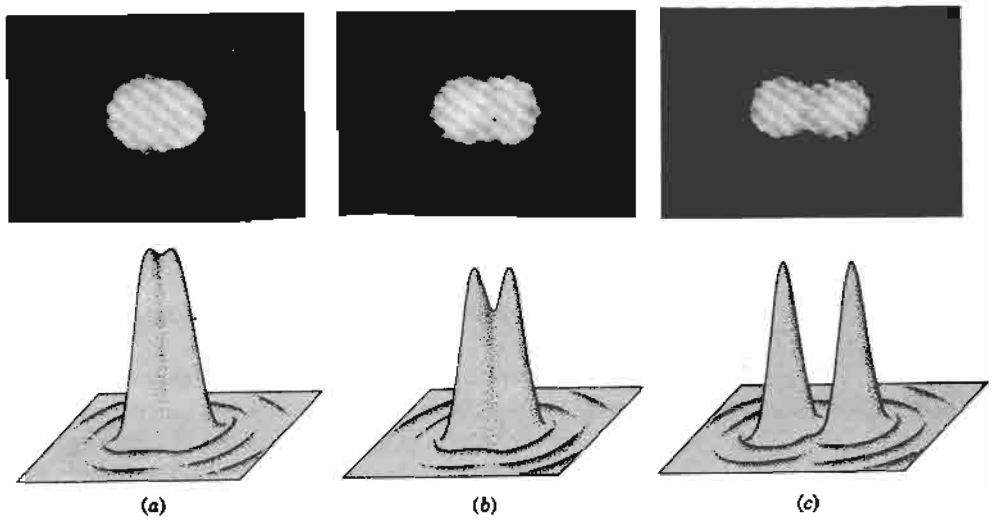


Figura 14 Las imágenes de dos fuentes puntuales distantes (estrellas) formadas por una lente convergente. El diámetro de la lente (que es la abertura difractante) es de 10 cm, de modo que $a/\lambda = 200{,}000$ cuando la longitud de onda efectiva es de unos 500 nm. En (*a*) las estrellas están tan próximas entre sí que apenas pueden distinguirse sus imágenes, debido al traslape de sus patrones de difracción. En (*b*) las estrellas están más separadas y su separación cumple el criterio de Rayleigh para la resolución de sus imágenes. En (*c*) las estrellas están más apartadas aún y sus imágenes se resuelven bien. Abajo de las imágenes se muestran los perfiles de las intensidades generados por computadora.

se resuelven apenas, y en la figura 14*c* se resuelven por completo.

En la figura 14*b* la separación angular de las dos fuentes puntuales es tal que el máximo central del patrón de difracción de una fuente cae sobre el primer mínimo del patrón de difracción de la otra. Esto se llama *criterio de Rayleigh* para la resolución de imágenes. De la ecuación 11, dos objetos que sean apenas resolubles mediante el criterio de Rayleigh deben tener una separación angular θ_R de

$$\theta_R = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1.22\lambda}{d}\right).$$

Puesto que los ángulos implicados son más bien pequeños, podemos reemplazar a sen θ_R por θ_R, de modo que

$$\theta_R = 1.22\,\frac{\lambda}{d}, \qquad (12)$$

donde θ_R está expresado en radianes. Si la separación angular θ entre los objetos es mayor que θ_R, podemos resolver los dos objetos; si es menor, no podemos. El ángulo θ_R es la mínima separación angular para la cual es posible la resolución, usando el criterio de Rayleigh.

Cuando deseamos usar una lente para resolver objetos de separación angular pequeña, es deseable hacer el disco central del patrón de difracción tan pequeño como sea posible. Esto puede realizarse (véase la Ec. 12) al aumentar el diámetro de la lente o usando una longitud de onda más corta. Una razón para la construcción de telescopios grandes es producir imágenes *bien definidas* de modo que podamos examinar los objetos astronómicos con mayor detalle. Las imágenes son también *más brillantes*, no sólo porque la energía se concentra en un disco de difracción menor, sino porque la lente más grande capta más luz. Entonces pueden observarse objetos más débiles, por ejemplo, galaxias distantes.

Para reducir los efectos de difracción en los *microscopios* se usa a menudo luz ultravioleta, la cual, gracias a su longitud de onda más corta, permite que se examinen detalles más finos de lo que sería posible si el mismo microscopio usara luz visible. En el capítulo 50 veremos que los haces de electrones se comportan como si fueran ondas en ciertas circunstancias. En el *microscopio electrónico* tales haces pueden tener una longitud de onda efectiva de 4×10^{-3} nm, del orden de 10^5 veces más corta que la de la luz visible. Esto permite el examen detallado de objetos minúsculos como las bacterias o los virus (Fig. 15). Si se examinaran tales objetos minúsculos con un microscopio óptico, su estructura se ocultaría sin remedio por la difracción.

Problema muestra 5 Una lente convergente de 32 mm de diámetro tiene una distancia focal f de 24 cm. (*a*) ¿Qué separación angular debe haber entre dos objetos puntuales distantes para satisfacer el criterio de Rayleigh? Suponga que $\lambda = 550$

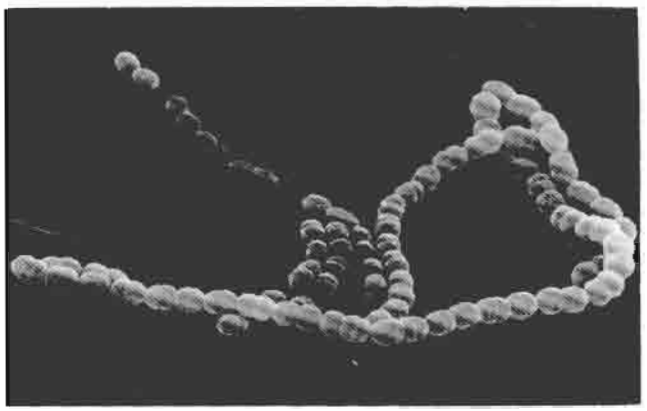


Figura 15 Imagen de una cadena de las bacterias llamadas estreptococos (diámetro 10^{-6} m) obtenida con un microscopio electrónico. Nótese la definición de la imagen, la cual no sería posible obtener con luz visible.

nm. (*b*) ¿Cuál es la separación entre los centros de los patrones de difracción en el plano focal de la lente?

Solución (*a*) De la ecuación 12

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d} = \frac{(1.22)(550\times10^{-9}\text{ m})}{32\times10^{-3}\text{ m}}$$
$$\approx 2.10\times10^{-5}\text{ rad} \approx 4.3\text{ segundos de arco.}$$

(*b*) La separación lineal es

$$\Delta x = f\theta_R = (0.24\text{ m})(2.10\times10^{-5}\text{ rad})$$
$$= 5.0\,\mu\text{m},$$

o sea unas 9 longitudes de onda de la luz.

46-5 INTERFERENCIA POR UNA RENDIJA DOBLE Y DIFRACCIÓN COMBINADAS

En nuestro análisis de la interferencia por una rendija doble (Sec. 45-1) supusimos que las rendijas eran arbitrariamente angostas; esto es, que $a \ll \lambda$. Para tales rendijas angostas, la parte central de la pantalla en la que incide la luz se ilumina uniformemente mediante las ondas difractadas de cada rendija. Cuando tales ondas interfieren, producen franjas de interferencia de intensidad uniforme.

En la práctica, la condición $a \ll \lambda$ no se cumple, por regla general, para la luz visible. En tales rendijas relativamente anchas, la intensidad de las franjas de interferencia que se forman en la pantalla *no* es uniforme. En su lugar, la intensidad de las franjas varía dentro de una envolvente debida al patrón de difracción de una sola rendija.

En la figura 16 se ilustra el efecto de difracción en un patrón de interferencia de rendija doble, la cual compara el patrón de la rendija doble con el patrón de difracción producido por una sola rendija de la misma anchura que cada una de las rendijas dobles. Podemos ver de la figura 16*a* que la difracción proporciona realmente una envolvente de intensidad para las franjas de interferencia de la rendija doble más estrechamente espaciadas.

Analicemos ahora los patrones de interferencia y de difracción de la figura 16*a* combinados. El patrón de interferencia para dos rendijas infinitesimalmente angostas está dado por la ecuación 11 del capítulo 45, o, con un pequeño cambio en la notación,

$$I_{\theta,\text{int}} = I_{\text{m,int}}\cos^2\beta, \tag{13}$$

donde

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta \tag{14}$$

donde d es la distancia entre las líneas de centro de las rendijas.

La intensidad de la luz difractada de una u otra rendija está dada por la ecuación 8, o, nuevamente con un pequeño cambio en la notación,

$$I_{\theta,\text{dif}} = I_{\text{m,dif}}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{15}$$

donde

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta. \tag{16}$$

Hallamos el efecto combinado al considerar $I_{\text{m,int}}$ en la ecuación 13 como amplitud variable, dada de hecho por

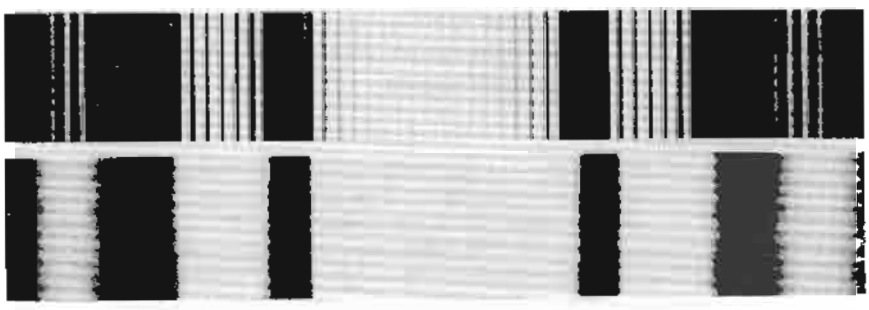


Figura 16 (*a*) Franjas de interferencia de un sistema de rendija doble en el que la anchura de la rendija no es despreciable en comparación con la longitud de onda. (*b*) El patrón de difracción de una sola rendija de la misma anchura. Nótese que el patrón de difracción modula la intensidad de las franjas de interferencia, como se muestra en la parte (*a*).

$I_{\theta,\text{dif}}$ de la ecuación 15. Esta suposición, para el patrón combinado, conduce a

$$I_\theta = I_m(\cos\beta)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad (17)$$

donde se han suprimido todos los subíndices que se refieren a la interferencia y a la difracción por separado. Más adelante, en esta misma sección, deduciremos este resultado usando fasores.

Expresemos este resultado en palabras. En cualquier punto de la pantalla, la intensidad de la luz disponible de cualquier rendija, considerada por separado, está dada por el patrón de difracción de esa rendija (Ec. 15). Los patrones de difracción de las dos rendijas, otra vez consideradas por separado, coinciden porque en la difracción de Fraunhofer los rayos paralelos se enfocan en el mismo punto. Puesto que dos ondas difractadas son coherentes, interfieren.

El efecto de la interferencia es redistribuir la energía disponible sobre la pantalla, produciendo un conjunto de franjas. En la sección 45-1, donde supusimos que $a \ll \lambda$, la energía disponible era virtualmente la misma en todos los puntos de la pantalla, de modo que las franjas de interferencia tenían virtualmente las mismas intensidades (véase la Fig. 8 del capítulo 45). Si relajamos la suposición de que $a \ll \lambda$, la energía disponible *no* es uniforme en la pantalla sino que está dada por el patrón de difracción de una rendija de anchura a. En este caso las franjas de interferencia tienen intensidades las cuales se determinan mediante la intensidad del patrón de difracción en la posición de una franja en particular. La ecuación 17 es la expresión matemática de este argumento. Esto es especialmente claro en la figura 17, la cual muestra (*a*) el "factor de interferencia" en la ecuación 17 (esto es, el factor $\cos^2\beta$), (*b*) el "factor de difracción" (sen $\alpha/\alpha)^2$ y (*c*) su producto.

La figura 18 es una gráfica de la intensidad relativa I_θ/I_m dada por la ecuación 17 para $d = 50\lambda$ y para tres valores de a/λ. Ésta muestra claramente que en rendijas angostas ($a = \lambda$) las franjas son de intensidad casi uniforme. Cuando las rendijas se ensanchan, las intensidades de las franjas están marcadamente moduladas por el "factor de difracción" de la ecuación 17, esto es, por el factor (sen $\alpha/\alpha)^2$; compárese con la figura 12.

Si disminuimos la anchura a de la rendija, la envolvente del patrón de la franja se vuelve más ancha, y el pico central se amplía (compárense las Figs. 18*a* y 18*b*). Conforme la anchura a de la rendija tiende a cero, $\alpha \to 0$ y sen $\alpha/\alpha \to 1$. Entonces la ecuación 17 se reduce a la ecuación 13, la cual describe la interferencia de un par de ranuras muy angostas. Si hacemos que la separación d de las rendijas tienda a cero, las dos rendijas se funden en una sola rendija de anchura a. De la ecuación 14, $\beta \to 0$ cuando $d \to 0$, y la ecuación 17 se reduce a la ecuación 15, la ecuación de difracción para una sola rendija de anchura a.

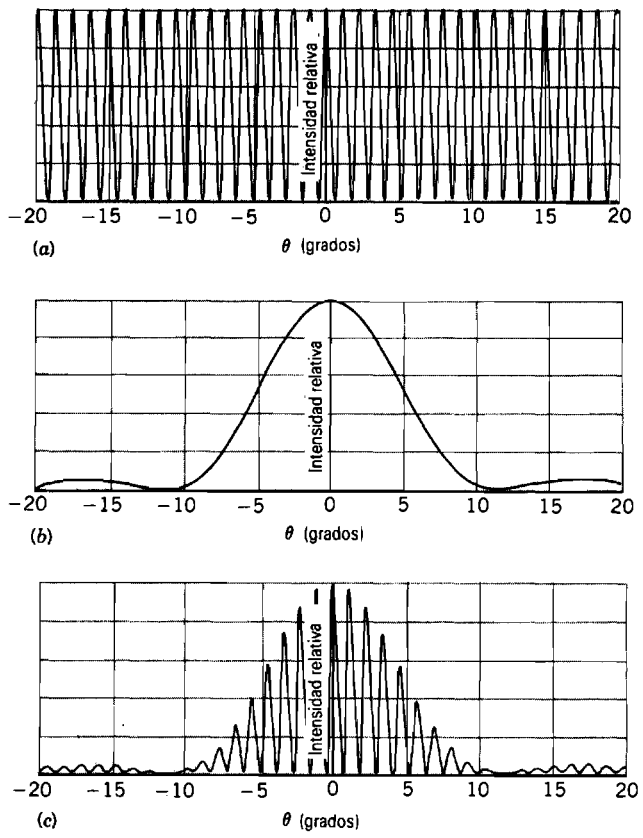


Figura 17 (*a*) Las franjas de interferencia que se producirían por una rendija doble de anchuras muy angostas. (*b*) El patrón de difracción de una rendija de anchura finita. (*c*) El patrón de franjas de interferencia formadas por dos ranuras de la misma anchura que la de (*b*). Este patrón es equivalente al producto de las curvas mostradas en (*a*) y (*b*). Compárese con la figura 16*a*.

Si aumentamos la anchura a de la rendija, la envolvente del patrón de franjas se vuelve más angosta, y el pico central se vuelve más pronunciado (compárense las Figs. 18*b* y 18*c*). La separación entre las franjas, que depende de d/λ, no cambia. Si aumentamos la separación d de las ranuras, las franjas están más cerca entre sí, pero la envolvente del patrón de franjas, que depende de a/λ, no cambia.

Si aumentamos la longitud de onda de la luz incidente, los patrones, tanto el de difracción, como el de interferencia, se ensanchan: la envolvente de difracción se vuelve más ancho y la separación entre franjas aumenta. El efecto opuesto se presenta cuando disminuimos la longitud de onda. Puesto de otra manera, la relación entre la envolvente de difracción y las franjas de interferencia (por ejemplo, el número de franjas en el pico central) depende de la razón d/a y es independiente de λ.

El patrón de la rendija doble que se ilustra en la figura 17 combina la interferencia y la difracción de manera muy estrecha. Ambos son efectos de superposición que dependen de sumar las perturbaciones ondulatorias en un punto

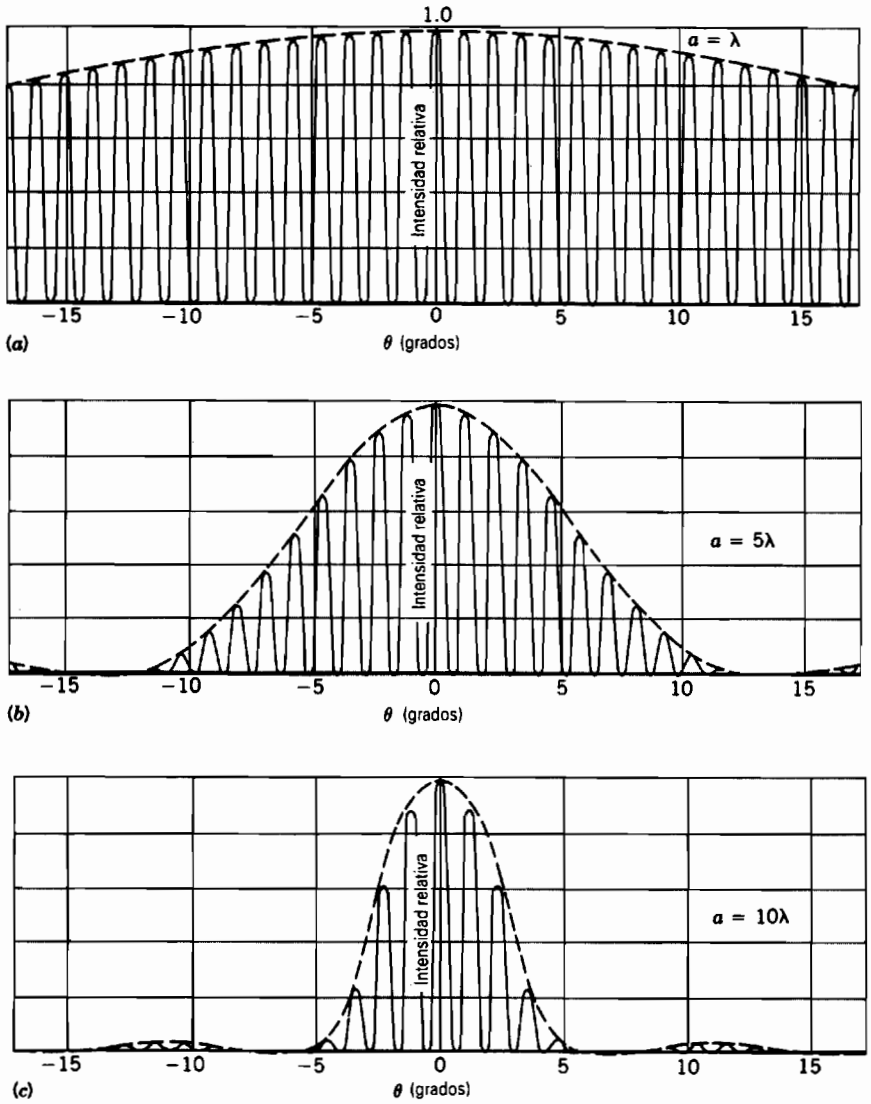


Figura 18 Las franjas de interferencia en una rendija doble con separación $d = 50\lambda$ entre rendijas. Se muestran tres anchuras de rendija diferentes.

dado, teniendo en cuenta las diferencias de fase apropiadamente. Si las ondas que van a combinarse se originan de un número *finito* (y por lo general pequeño) de radiadores elementalmente coherentes, como en la rendija doble, al efecto lo llamamos *interferencia*. Si las ondas que van a combinarse se originan al subdividir una onda en radiadores *infinitesimalmente* coherentes, como en nuestro tratamiento de una sola rendija, el efecto se llama *difracción*. Esta distinción entre la interferencia y la difracción es conveniente y útil. Empero, no debería causar que perdiésemos de vista el hecho de que ambos son efectos de superposición y que, a menudo, se presentan ambos simultáneamente, como en el experimento de la rendija doble.

Problema muestra 6 En un experimento de rendija doble, la distancia D entre la pantalla y las rendijas es de 52 cm, la longitud de onda λ es de 480 nm, la separación d entre rendijas es de 0.12 mm, y la anchura a de la rendija, de 0.025 mm. (*a*) ¿Cuál es la separación entre franjas contiguas? (*b*) ¿Cuál es la distancia del máximo central al primer mínimo del paquete de franjas?

Solución (*a*) El patrón de intensidad está dado por la ecuación 17, estando determinada la separación de las franjas por el factor de interferencia $\cos^2\beta$. Del problema muestra 2, capítulo 45, tenemos

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}.$$

Al sustituir nos da

$$\Delta y = \frac{(480 \times 10^{-9}\ \text{m})(52 \times 10^{-2}\ \text{m})}{0.12 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$

$$= 2.1\ \text{mm}.$$

(*b*) La posición angular del primer mínimo se deduce de la ecuación 1, es decir,

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{480 \times 10^{-9}\text{ m}}{25 \times 10^{-6}\text{ m}} = 0.0192.$$

Esto es tan pequeño que, con poco error, podemos utilizar las aproximaciones sen $\theta \approx \tan \approx \theta \approx \theta$, de modo que

$$y = D \tan \theta \approx D\theta = (52 \times 10^{-2}\text{ m})(0.0192)$$
$$= 10\text{ mm}.$$

Se deja al lector que demuestre que hay alrededor de 9 franjas en el pico central de la envolvente de la difracción.

Problema muestra 7 ¿Qué requisitos deben cumplirse para que el máximo central de la envolvente del patrón de interferencia de la rendija doble contenga exactamente 11 franjas?

Solución La condición requerida se cumplirá cuando el sexto mínimo del factor de interferencia ($\cos^2\beta$ en la ecuación 17) coincida con el primer mínimo del factor de difracción [(sen $\alpha/\alpha)^2$ en la ecuación 17].

El sexto mínimo del factor de interferencia se presenta cuando

$$\beta = (11/2)\pi$$

en la ecuación 17. El primer mínimo en el término de la difracción ocurre para

$$\alpha = \pi$$

en la ecuación 17. Al dividir (véanse las Ecs. 14 y 16) se tiene

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{a} = \frac{11}{2}.$$

Esta condición sólo depende de la razón de la separación d entre rendijas y la anchura a de las rendijas y no depende, en absoluto, de la longitud de onda. Para λ mayores el patrón es más ancho que para λ menores, pero siempre habrá 11 franjas en el pico central de la envolvente.

Deducción de la ecuación 17 mediante fasores *(Opcional)*

La figura 19 muestra la geometría apropiada para el análisis de la rendija doble usando fasores. Cada una de las dos rendijas está dividida en N zonas, como se hizo en la figura 9 para el caso de una sola rendija. El campo eléctrico neto en P se halla de la superposición de los N vectores del campo eléctrico de la rendija superior y los N vectores del campo eléctrico de la rendija inferior. El método de los fasores nos permite combinar estas contribuciones al campo eléctrico en P, teniendo en cuenta su relación de fases.

La figura 20 muestra los primeros N fasores (correspondientes a la rendija superior de la Fig. 19) y su E_1 resultante, como en la figura 11. Existe una diferencia de fase $\Delta\phi = \phi/N$ entre cada uno de los N fasores. Para sumar el segundo grupo de N fasores (correspondientes a la rendija inferior) debemos encontrar el ángulo de fase ξ entre el último fasor de la rendija superior y el primer fasor de la rendija inferior. Trazamos entonces los N fasores de la rendija inferior y hallamos su resultante, E_2. La suma de los fasores E_1 y E_2 da el E_θ resultante que caracteriza a la rendija doble.

De la figura 20 vemos que E_θ es la base de un triángulo isósceles cuyos lados tienen longitudes E_1 y E_2 iguales, los

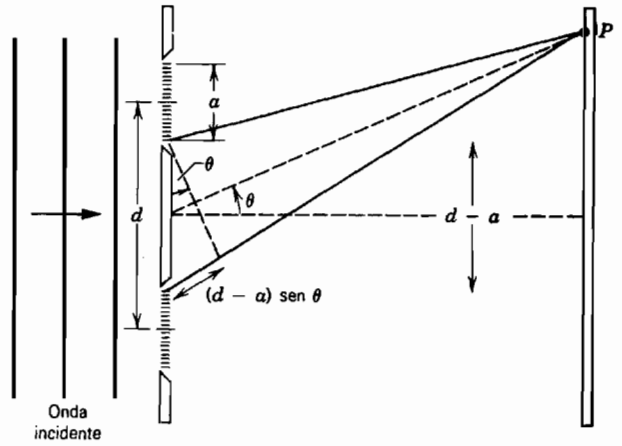


Figura 19 Cada rendija en una rendija doble se divide en N tiras. En el límite diferencial, las tiras se vuelven infinitesimalmente pequeñas e infinitamente numerosas. Aquí, como lo hicimos en la figura 9, se muestran $N = 18$.

cuales están dados por la ecuación 5. De la geometría de la figura 20,

$$E_\theta = 2E_1 \text{ sen } \frac{\delta}{2}, \tag{18}$$

donde δ, el ángulo del triángulo, puede determinarse a partir de

$$\frac{\phi}{2} + \delta + \frac{\phi}{2} + \xi = \pi, \tag{19}$$

lo cual da

$$\delta = \pi - (\xi + \phi). \tag{20}$$

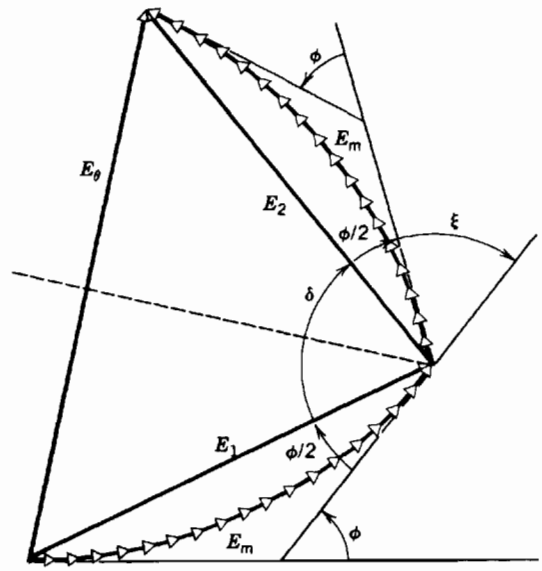


Figura 20 El diagrama de fasores usado para calcular el campo eléctrico resultante en la interferencia producida por una rendija doble.

Al emplear la ecuación 20 para evaluar sen $\delta/2$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi+\phi}{2}\right) = \cos\frac{\xi+\phi}{2}. \qquad (21)$$

De la expresión

$$\frac{\text{diferencia del camino}}{\lambda} = \frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi}$$

con la diferencia de fase entre los dos rayos (de la parte inferior de la rendija de arriba y la parte superior de la rendija de abajo, como se muestra en la Fig. 19) de ξ y la diferencia del camino de $(d - a)$ sen θ, tenemos

$$\frac{\xi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(d-a)\operatorname{sen}\theta.$$

Si se combina ésta con la ecuación 7, $\phi/2 = (\pi a/\lambda)$ sen θ, hallamos

$$\frac{\xi+\phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta,$$

que es precisamente β, de acuerdo con la ecuación 14. Al sustituir en la ecuación 21, obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} = \cos\beta.$$

Al introducir este resultado en la ecuación 18 y si se usa la ecuación 5 para la magnitud de E_1 (o de E_2), obtenemos

$$E_\theta = 2E_m \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\cos\beta. \qquad (22)$$

Al elevar al cuadrado la ecuación 22 nos da las intensidades

$$I_\theta = I_m (\cos\beta)^2 \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

que es idéntica a la ecuación 17. Nótese que, como fue el caso en la ecuación 11 del capítulo 45, $I_m = 4I_0$. ■

PREGUNTAS

1. Diga las diferencias entre la difracción de Fresnel y la difracción de Fraunhofer. ¿Se basan en principios físicos diferentes? De ser así, ¿cuáles son? Si se basan en el mismo principio, ¿cuál es?
2. ¿De qué modo son similares la interferencia y la difracción? ¿De qué modo son diferentes?
3. Supóngase que usted sostiene una sola rendija vertical angosta enfrente de la pupila de su ojo y mira hacia una fuente de luz distante en forma de un largo filamento incandescente. El patrón de difracción que observa ¿es un patrón de Fresnel o uno de Fraunhofer?
4. ¿Los efectos de difracción en imágenes virtuales ocurren también en imágenes reales? Explique.
5. ¿Tienen lugar los efectos de difracción en las imágenes formadas por (*a*) espejos planos y (*b*) espejos esféricos? Explique.
6. Comente este enunciado: "La difracción ocurre en todas las regiones del espectro electromagnético". Considere, por ejemplo, la región de rayos X y la región de microondas y dé argumentos para creer que el postulado es verdadero o falso.
7. Hemos dicho (correctamente) que las ecuaciones de Maxwell predicen todos los fenómenos ópticos clásicos. Sin embargo, en el capítulo 45 (interferencia) y en este capítulo (difracción), se hace poca mención de las ecuaciones de Maxwell. ¿Hay aquí una inconsistencia? ¿En dónde se percibe el impacto de las ecuaciones de Maxwell? Analícelo.
8. Si fuésemos a repetir nuestro análisis de las propiedades de las lentes expuesto en el capítulo 44 mediante los métodos de la óptica geométrica pero sin restringir nuestra consideración a rayos paraxiales y a lentes "delgadas", ¿surgirían del análisis los fenómenos de la difracción? Explique.
9. ¿Por qué es más evidente la difracción en las ondas de sonido que en las ondas de luz?
10. Las ondas de sonido pueden difractarse. ¿Qué anchura de una sola rendija usaría usted cuando desea ampliar la distribución de una onda plana de sonido incidente de 1 kHz de frecuencia?
11. ¿Por qué se difractan las ondas de radio alrededor de los edificios, y no las ondas de luz?
12. Un cono de altavoz, usado en un concierto de música de rock, tiene una abertura rectangular de 1 m de altura y 30 cm de anchura. ¿Será más amplio el patrón de intensidad del sonido en el plano horizontal o en el vertical?
13. Una antena particular de radar en está diseñada para proporcionar mediciones precisas de la altitud de un aeroplano pero mediciones menos precisas de su dirección en un plano horizontal. ¿La razón altura/anchura de la antena de radar debe ser menor que, igual que o mayor que la unidad?
14. Describa lo que le sucede a un patrón de difracción de Fraunhofer de una rendija simple cuando todo el aparato está inmerso en agua.
15. En la difracción producida por una sola rendija, ¿cuál es el efecto de aumentar (*a*) la longitud de onda y (*b*) la anchura de la rendija?
16. Al escuchar la radio del automóvil pasando bajo un puente, es posible que usted haya notado que la señal de AM se desvanece, pero que la señal de FM no. ¿Tiene algo que ver la difracción con esto?
17. ¿Cómo se verá el patrón de difracción de una sola rendija cuando $\lambda > a$?
18. ¿Cómo se vería en una pantalla el patrón formado por una rendija doble cuando las rendijas no tienen la misma anchura? ¿Cambiaría la posición de las franjas?

19. La sombra del asta vertical de una bandera producida por el sol tiene bordes claramente definidos cerca de su base, pero bordes menos definidos cerca de su extremo superior. ¿Por qué?

20. Sobre una sola rendija de 1 μm de anchura incide la luz solar. Describa cualitativamente cómo se verá el patrón de difracción resultante.

21. En la figura 8, los rayos r_1 y r_3 están en fase; así también r_2 y r_4. ¿Por qué no hay un máximo de intensidad en P_2 más bien que un mínimo?

22. Cuando hablamos de la difracción producida por una sola rendija implicamos que la anchura de la rendija debe ser mucho menor que su longitud. Supóngase que, de hecho, la longitud sea igual al doble de la anchura. Haga una conjetura sobre cómo se vería más o menos el patrón de difracción.

23. En la figura 7 las longitudes del camino óptico desde la rendija hasta el punto P_0 son todas iguales. ¿Por qué?

24. En la figura 10*d*, ¿por qué E_θ, que representa el primer máximo más allá del máximo central, no es vertical? (*Sugerencia*: Considérense los efectos de un ligero enrollado o desenrollado del anillo de fasores en esta figura.) Véase el problema 16.

25. Diga por lo menos dos razones del por qué aumenta la utilidad de los grandes telescopios al incrementar el diámetro de la lente.

26. ¿Los efectos de difracción se asocian con los telescopios de reflexión, como el telescopio espacial Hubble, que usan espejos en lugar de lentes? De ser así, ¿por qué tomarnos el trabajo de colocar a tales telescopios en el espacio?

27. Hemos visto que la difracción limita el poder de resolución de los telescopios ópticos (véase la Fig. 14). ¿Ocurre lo mismo en los grandes radiotelescopios?

28. La difracción es más molesta en un telescopio que en una cámara. ¿Por qué?

29. El patrón producido por una rendija doble de la figura 21*a* visto con una fuente de luz monocromática ha alterado un poco al patrón de la figura 21*b*. Considérense los siguientes cambios posibles en las condiciones: (*a*) la longitud de onda de la luz disminuyó; (*b*) la longitud de onda de la luz aumentó; (*c*) la anchura de cada rendija aumentó; (*d*) la separación entre rendijas aumentó; (*e*) la separación entre rendijas disminuyó; (*f*) la anchura de cada rendija disminuyó. ¿Qué selección(es) de entre los cambios de arriba explicarían la alteración del patrón?

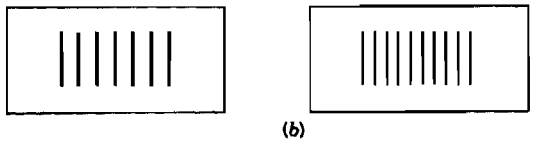


Figura 21 Pregunta 29.

30. Hemos dicho que, en patrones de interferencia de la rendija doble como el de la figura 16*a*, las franjas de interferencia modulaban su intensidad de acuerdo con el patrón de difracción de una sola ranura. ¿Podríamos invertir este postulado y decir que el patrón de difracción de una sola rendija modula su intensidad mediante las franjas de interferencia? Explique.

PROBLEMAS

Sección 46-2 Difracción por una sola rendija

1. Cuando luz monocromática incide sobre una rendija de 0.022 mm de anchura, el primer mínimo de difracción se observa a un ángulo de 1.8° de la dirección del haz incidente. Determine la longitud de onda de la luz incidente.

2. ¿Puede demostrar la naturaleza ondulatoria de los rayos X al difractarlos por una sola ranura? Determine la anchura máxima de la rendija que se usaría al detectar precisamente una anchura angular central máxima de 0.12 mrad y considerando que la longitud de onda de los rayos X sea de 0.10 nm.

3. Una luz monocromática de 441 nm de longitud de onda incide sobre una rendija angosta. En una pantalla que esté alejada a 2.16 m, la distancia entre el segundo mínimo y el máximo central es de 1.62 cm. (*a*) Calcule el ángulo de difracción θ del segundo mínimo. (*b*) Halle la anchura de la rendija.

4. Luz de 633 nm de longitud de onda incide sobre una rendija angosta. El ángulo entre el primer mínimo en un lado del máximo central y el primer mínimo en el otro lado es de 1.97°. Encuentre la anchura de la rendija.

5. Una sola rendija está iluminada por luz cuyas longitudes de onda son λ_a y λ_b, elegidas de modo que el primer mínimo de difracción de la componente λ_a coincide con el segundo mínimo de la componente λ_b. (*a*) ¿Qué relación existe entre las dos longitudes de onda? (*b*) ¿Coinciden cualesquier otros mínimos en los dos patrones?

6. Una onda plana, cuya longitud de onda es de 593 nm, incide sobre una rendija de 420 μm de anchura. Detrás de la rendija se coloca una lente convergente delgada con una distancia focal de 71.4 cm que enfoca la luz sobre la pantalla. Calcule la distancia en la pantalla desde el centro del patrón hasta el segundo mínimo.

7. En un patrón de difracción de una sola rendija la distancia entre el primer mínimo a la derecha y el primer mínimo a la izquierda es de 5.20 mm. La pantalla sobre la que se exhibe el patrón está a 82.3 cm de la rendija y la longitud de onda es de 546 nm. Calcule la anchura de la rendija.

8. La distancia entre el primero y el quinto mínimos de un patrón de una sola rendija es de 0.350 mm con la pantalla alejada a 41.3 cm de la rendija, usando una luz que tiene una longitud de onda de 546 nm. (*a*) Calcule el ángulo θ

de difracción del primer mínimo. (*b*) Halle la anchura de la rendija.

9. Una rendija de 1.16 mm de anchura es iluminada por luz de 589 nm de longitud de onda. El patrón de difracción se observa en una pantalla alejada a 2.94 m. Determine la distancia entre los dos primeros mínimos de difracción en el mismo lado del máximo central.
10. Los fabricantes de alambre (y de otros objetos de pequeñas dimensiones) usan a veces un láser para monitorear continuamente el espesor del producto. El alambre intercepta el haz del láser, produciendo un patrón de difracción como el de una sola rendija de la misma anchura que el diámetro del alambre; véase la figura 22. Supóngase un láser He-Ne, de 632.8 nm de longitud de onda, que ilumine un alambre, proyectándose el patrón de difracción sobre una pantalla situada a 2.65 m. Si el diámetro deseado del alambre es de 1.37 mm, ¿cuál sería la separación observada entre los dos mínimos del décimo orden a cada lado del máximo central?

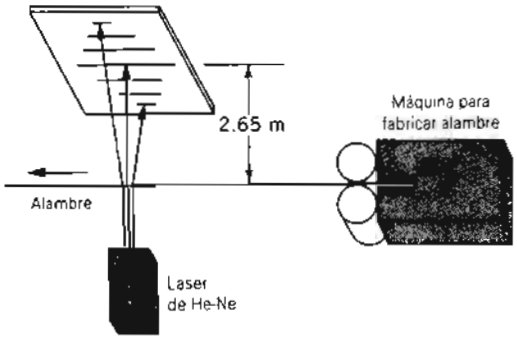


Figura 22 Problema 10.

Sección 46-3 Intensidad de la difracción por una sola rendija

11. Sobre una rendija de 25.2 μm de anchura incide luz monocromática de 538 nm de longitud de onda. La distancia entre la rendija y la pantalla es de 3.48 m. Considérese un punto sobre la pantalla a 1.13 cm del máximo central. (*a*) Calcule θ. (*b*) Calcule α. (*c*) Calcule la razón entre la intensidad en este punto y la intensidad en el máximo central.
12. Si se duplica la anchura de una sola rendija, la intensidad del máximo central del patrón de difracción aumenta por un factor de cuatro, aun cuando la energía que pasa por la rendija sólo se duplica. Explique esto cuantitativamente.
13. Calcule la anchura del máximo central en un patrón de difracción producida por una sola rendija donde $a = 10\lambda$. Compare su resultado con la figura 12*c*. Véase el problema muestra 4.
14. Un haz monocromático de luz paralela incide sobre un orificio "colimador" de diámetro $a \gg \lambda$. El punto P se encuentra en la región de sombra geométrica en una pantalla distante, como se muestra en la figura 23*a*. Se colocan uno a la vez dos obstáculos, que se muestran en la figura 23*b*, en el orificio colimador. A es un círculo opaco con un orificio en él y B es el "negativo fotográfico" de A. Usando los conceptos de superposición, demuestre que la intensidad en P es idéntica para cada uno de los dos objetos difractantes A y B (*principio de Babinet*). En relación con esto puede demostrarse que el patrón de difracción de un alambre corresponde al de una rendija de igual anchura. Véase "Measuring the Diameter of a Hair by Diffraction", por S. M. Curry y A. L. Schawlow, *American Journal of Physics*, mayo de 1974, pág. 412.

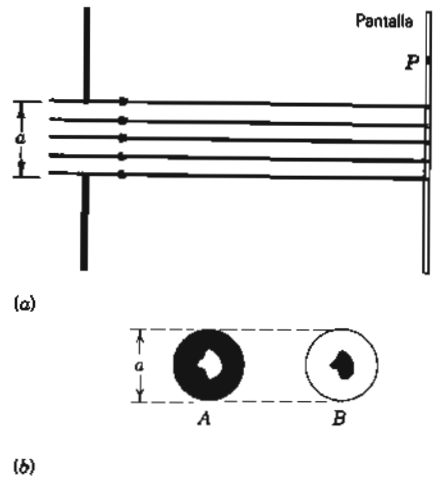


Figura 23 Problema 14.

15. (a) Demuestre que los valores de α para los que ocurren los máximos de intensidad producida por la difracción por una sola rendija pueden hallarse exactamente al derivar la ecuación 8 con respecto a α e igualando a cero, obteniéndose la condición

$$\tan \alpha = \alpha.$$

(*b*) Halle los valores de α que satisfacen esta relación trazando gráficamente la curva $y = \tan \alpha$ y la línea recta $y = \alpha$ y hallando sus intersecciones o usando una calculadora de bolsillo para encontrar el valor apropiado de α por medio de prueba y error repetidos. (*c*) Determine los valores (no enteros) de m correspondientes a los máximos consecutivos en el patrón producido por una sola rendija. Nótese que los máximos secundarios no se encuentran exactamente a la mitad entre los mínimos.

16. En la figura 10*d*, calcule el ángulo que forma E_0 con la vertical; véase la pregunta 24 y el problema 15.

Sección 46-4 Difracción por una abertura circular

17. Los dos faros de un automóvil que se acerca están a 1.42 m entre sí. ¿A qué (*a*) separación angular y (*b*) distancia máxima los resolverá el ojo? Supóngase un diámetro de la pupila de 5.00 mm y una longitud de onda de 562 nm. También considere que sólo los efectos de la difracción limitan la resolución.

18. Un astronauta que viaja en un satélite afirma ser capaz de resolver apenas dos fuentes puntuales en la Tierra, a 163 km abajo. Calcule, suponiendo condiciones ideales, (*a*) su separación angular y (*b*) su separación lineal. Considere que $\lambda = 540$ nm y que el diámetro de la pupila del ojo del astronauta es de 4.90 mm.

19. Halle la separación entre dos puntos sobre la superficie de la Luna que puedan ser resueltos precisamente mediante el telescopio de 200 in (= 5.08 m) de Monte Palomar, suponiendo que su distancia esté determinada por los efectos de la difracción. Suponga una longitud de onda de 565 nm.

20. El muro de un gran salón está cubierto con losetas acústicas en las que se han practicado pequeños orificios a 5.20 mm entre centros. ¿Cuán lejos de las losetas puede estar una persona y todavía distinguir cada uno de los orificios, suponiendo condiciones ideales? Supóngase que el diámetro de la pupila del ojo del observador sea de 4.60 mm y que la longitud de onda sea de 542 nm.

21. Si Superman tuviese realmente una visión de rayos X de 0.12 nm de longitud de onda y un diámetro de pupila de 4.3 mm, ¿a qué altitud máxima podría distinguir a los villanos de los héroes suponiendo que el detalle mínimo requerido sea de 4.8 cm?

22. Un navío crucero emplea radar con una longitud de onda de 1.57 cm. La antena circular tiene un diámetro de 2.33 m. Con un alcance de 6.25 km, ¿cuál es la menor distancia a la que pueden estar entre sí dos lanchas veloces y ser aún resueltas por el sistema de radar como dos objetos separados?

23. Las pinturas de Georges Seurat constan de pequeños puntos de pigmento puro a una distancia muy próxima entre ellos (≈2 mm de diámetro), como se indica en la figura 24. La ilusión de la mezcla de colores tiene lugar porque las pupilas de los ojos del observador difractan la luz que entra a ellos. Calcule la distancia mínima a la que un observador puede estar de un cuadro de esta técnica para obtener la mezcla de colores deseada. Considere que la longitud de onda de la luz sea de 475 nm y que el diámetro de la pupila sea de 4.4 mm.

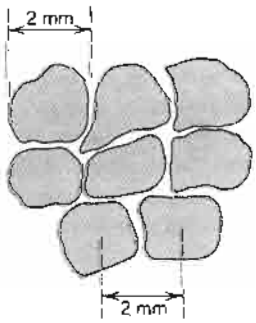


Figura 24 Problema 23.

24. Un satélite "espía en el cielo" que gira en órbita a 160 km de la superficie de la Tierra tiene una lente con una distancia focal de 3.6 m. Su poder de resolución para los objetos en el terreno es de 30 cm; podría medir fácilmente el tamaño de la toma de aire de un aeroplano. ¿Cuál es el diámetro efectivo de la lente, determinado sólo por consideraciones de difracción? Supóngase $\lambda = 550$ nm. En la actualidad se sabe que están en operación satélites mucho más efectivos.

25. (*a*) Un diafragma circular de 60 cm de diámetro oscila con una frecuencia de 25 kHz en una fuente de sonido subacúatica empleada para la detección de submarinos. Lejos de la fuente la intensidad del sonido se distribuye como un patrón de difracción por un orificio circular cuyo diámetro es igual al del diafragma. Considere que la velocidad del sonido en el agua sea de 1450 m/s y determine el ángulo entre la normal al diafragma y la dirección del primer mínimo. (*b*) Repita para una fuente que tenga una frecuencia (audible) de 1.0 kHz.

26. En junio de 1985 se envió un haz de láser desde la Optical Station de la Fuerza Aérea en Maui, Hawai, y se reflejó desde el transbordador *Discovery* mientras viajaba a 354 km arriba de ella. Se dijo que el diámetro del máximo central del haz en la posición del transbordador era de 9.14 m y que la longitud de onda del haz era de 500 nm. ¿Cuál es el diámetro efectivo de la abertura del láser en la estación terrestre de Maui? (*Sugerencia*: Un haz de láser se dispersa a causa de la difracción; supóngase una abertura de salida circular.)

27. Un radar de onda milimétrica genera un haz más angosto que el radar de microondas convencional. Esto lo hace menos vulnerable a los proyectiles antirradar. (*a*) Calcule la anchura angular, entre mínimos primeros, del "lóbulo" central producido por un haz de radar de 220 GHz emitido por una antena circular de 55 cm de diámetro. (Se elige que la frecuencia coincida con una "ventana" atmosférica de baja absorción.) (*b*) Calcule la misma cantidad para el radar de barco descrito en el problema 22.

28. En un experimento ruso-francés para observar la superficie de la Luna con un haz de luz, se dirigió radiación pulsada con un láser de rubí ($\lambda = 0.69\ \mu$m) por medio de un telescopio de reflexión con un radio del espejo de 1.3 m. Un reflector situado en la Luna se comportó como un espejo plano circular con radio de 10 cm, reflejando la luz directamente hacia abajo y hacia un telescopio en la Tierra. La luz reflejada se detectó más tarde mediante un fotómetro después de enfocarla por este telescopio. ¿Qué fracción de la energía luminosa inicial se captó en el detector? Supóngase que, en cada dirección de viaje, toda la energía está en el círculo de difracción central.

29. Puede demostrarse que, excepto para $\theta = 0$, un obstáculo circular produce el mismo patrón de difracción que un orificio circular del mismo diámetro. Además, si existen muchos de estos obstáculos, como gotas de agua distribuidas al azar, entonces los efectos de interferencia desaparecen quedando únicamente la difracción asociada con un solo obstáculo. (*a*) Explique por qué vemos un "anillo" alrededor de la Luna en una noche brumosa. El anillo es generalmente de color rojizo; explique por qué. (*b*) Calcule el tamaño de las gotas de agua en el aire cuando el anillo que rodea la Luna parece tener un diámetro de 1.5 veces el de la Luna. El diámetro angular de la Luna en el cielo es de 0.5°. (*c*) ¿A qué distancia de la Luna sería

posible ver un anillo azulado? A veces los anillos son blancos; ¿por qué? (*d*) La disposición de los colores es opuesta a la de un arco iris; ¿por qué es esto así?

Sección 46-5 Interferencia por una rendija doble y difracción combinadas

30. (*a*) Diseñe un sistema de rendija doble en el que falte la cuarta franja, sin contar el máximo central. (*b*) ¿Qué otras franjas faltan?

31. Dos rendijas de anchura a y separación d están iluminadas por un haz de luz coherente de longitud de onda λ. ¿Cuál es la separación lineal de las franjas de interferencia que se observan en una pantalla que está alejada a una distancia D?

32. Supóngase que, como en el problema muestra 7, la envolvente del pico central contenga 11 franjas. ¿Cuántas franjas se encontrarían entre los mínimos primero y segundo de la envolvente?

33. (*a*) Para $d = 2a$ en la figura 25, ¿cuántas franjas de interferencia se encuentran en la envolvente central de difracción? (*b*) Si hacemos que $d = a$, las dos rendijas se unen en una sola rendija de anchura $2a$. Demuestre que la ecuación 17 se reduce al patrón de difracción para una de estas rendijas.

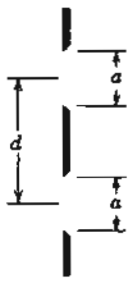


Figura 25 Problema 33.

34. (*a*) ¿Cuántas franjas completas aparecen entre los primeros mínimos de la envolvente de las franjas en cada lado del máximo central en un patrón de rendija doble cuando $\lambda = 557$ nm, $d = 0.150$ mm y $a = 0.030$ mm? (*b*) ¿Cuál es la razón entre las intensidades de la tercera franja al lado del centro y la franja central?

35. Luz de 440 nm de longitud de onda pasa por una rendija doble, produciendo un patrón de difracción de intensidad I contra el ángulo de desviación θ como se muestra en la figura 26. Calcule (*a*) la anchura de la rendija y (*b*) la separación entre rendijas. (*c*) Verifique las intensidades de las franjas de interferencia $m = 1$ y $m = 2$.

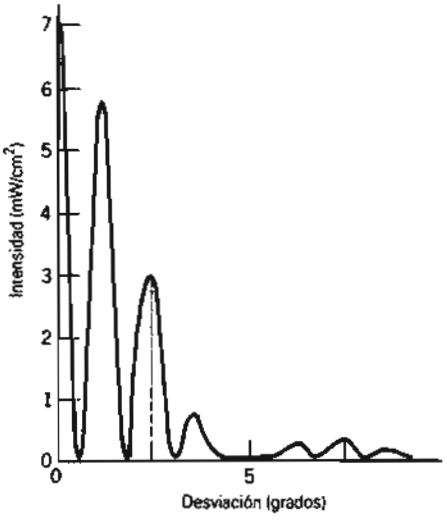


Figura 26 Problema 35.

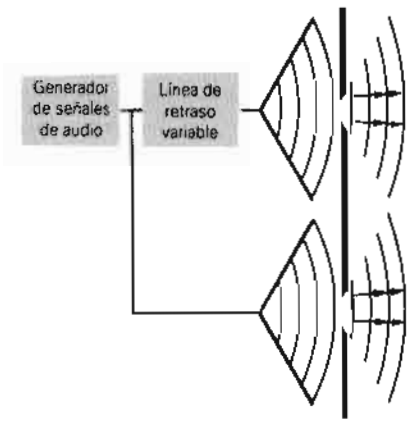


Figura 27 Problema 36.

36. Un sistema acústico de rendija doble (separación d entre rendijas, anchura a de la rendija) se excita por dos altavoces como se muestra en la figura 27. Puede variarse la fase de uno de ellos mediante el uso de una línea de retraso variable. Describa en detalle qué cambios ocurren en el patrón de intensidad a grandes distancias cuando esta diferencia de fase varía desde cero hasta 2π. Tenga en cuenta los efectos tanto de interferencia como de difracción.

CAPÍTULO 47

REJILLAS Y ESPECTROS

En el capítulo 45 estudiamos el patrón de interferencia que se produce cuando luz monocromática incide sobre una rendija doble: se produce un patrón de bandas claras y oscuras (franjas de interferencia). Cada una de las rendijas puede considerarse un radiador elemental. Al principio (en el capítulo 45) supusimos que la anchura de la rendija era mucho menor que la longitud de onda de la luz, de modo que la luz difractada desde cada rendija cubría uniformemente la pantalla de observación. Después (en el capítulo 46) tomábamos en cuenta la anchura de la rendija y se determinó el "factor de difracción" que modula al patrón de interferencia.

En el presente capítulo ampliamos nuestro estudio a los casos en que el número de radiadores elementales o centros de difracción es mayor (a menudo, mucho mayor) de dos. Consideramos múltiples disposiciones de rendijas en un plano y también las disposiciones tridimensionales de los átomos en un sólido (para lo cual usamos los rayos X más bien que la luz visible).

En ambos casos, debemos distinguir cuidadosamente entre las propiedades difractantes de un solo radiador (una rendija o un átomo) y la interferencia de las ondas difractadas coherentemente del conjunto de radiadores.

47-1 RENDIJAS MÚLTIPLES

Una extensión lógica de la interferencia producida por una rendija doble es aumentar el número de rendijas desde dos hasta un número N más grande. La figura 1 muestra un ejemplo de cinco rendijas. Tal arreglo de rendijas múltiples (donde N puede ser tan grande como 10^4) se llama *rejilla de difracción*. Como en el caso de la rendija doble, se produce un patrón de franjas de interferencia cuando luz monocromática incide sobre dicho arreglo de rendijas múltiples. A una longitud de onda dada, el espaciamiento de las franjas está determinado por la separación d entre rendijas, mientras que las intensidades relativas de las franjas está determinada por los efectos de difracción asociados con la anchura a de la rendija.

En este capítulo analizaremos los patrones de interferencia producidos por rendijas múltiples. Consideramos sólo la región de Fraunhofer, donde existe una distancia que se supone infinita entre la fuente de luz y las rendijas así como entre las rendijas y la pantalla. De igual manera, incide luz paralela sobre las rendijas, y emergen rayos paralelos de las rendijas (quizás para enfocarlos por una lente) para formar una imagen en la pantalla.

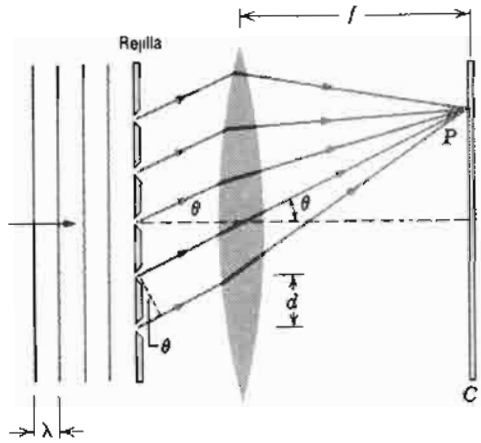


Figura 1 Una rejilla de difracción idealizada que contiene cinco rendijas. Se supone que la anchura a de la rendija es mucho menor que λ, si bien esta condición puede no lograrse en la práctica. También, la distancia focal f será mucho mayor que d en la práctica; en la figura se distorsionan estas dimensiones por claridad.

La figura 2 muestra una porción del máximo central de la envolvente de la difracción cuando $N = 2$ y $N = 5$.

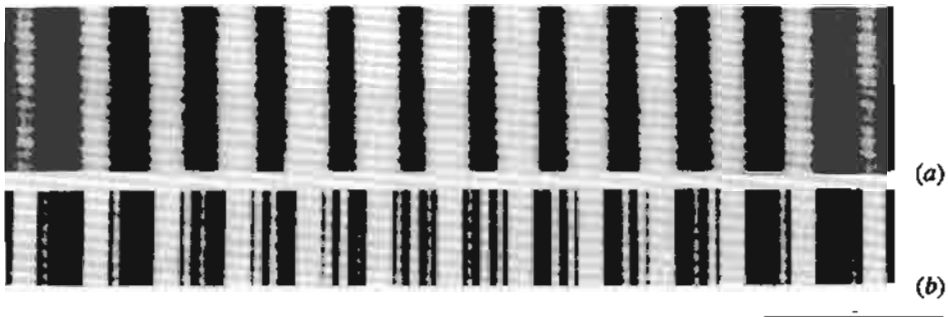


Figura 2 El patrón de difracción producido por una rejilla con (*a*) dos rendijas y (*b*) cinco rendijas. Nótese que, en el caso de la rejilla de cinco rendijas, las franjas son más definidas (más angostas) y, entre los máximos principales brillantes, aparecen los máximos secundarios de baja intensidad.

Vemos que se presentan dos cambios importantes cuando el número de rendijas aumenta de dos a cinco: (1) las franjas claras se vuelven más angostas, y (2) aparecen *máximos secundarios* (tres en la Fig. 2*b*) débiles entre las franjas claras. La figura 3 muestra los resultados de un cálculo teórico de las intensidades (despreciando el efecto de la envolvente de la difracción), donde la definición de los máximos principales es más evidente. Al aumentar N, el número de máximos secundarios aumenta y su claridad disminuye, hasta ser despreciable; en correspondencia, los máximos principales se vuelven más definidos con el aumento de N. En el análisis que sigue haremos caso omiso de los máximos secundarios y sólo consideraremos los máximos principales.

Se tiene un máximo principal cuando la diferencia del camino entre los rayos de cualquier par de rendijas contiguas, que está dada por d sen θ, es igual a un número entero de longitudes de onda, o sea

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (1)$$

donde m se llama el *número de orden*. La ecuación 1 es idéntica a la ecuación 1 del capítulo 45 para los máximos de la rendija doble. Nótese que cuando la luz que pasa a través de cualquier par de rendijas *contiguas* está en fase en un punto de la pantalla en particular, entonces la luz que pasa por cualquier par de rendijas, aun cuando no sean contiguas, está también en fase en ese punto. Para determinada separación d entre rendijas, las posiciones de los máximos principales están determinadas por la longitud de onda, y así la medición de sus posiciones es un medio para determinar de modo preciso las longitudes de onda. Las ubicaciones de los máximos principales son independientes del número de rendijas N, el cual, como lo veremos, determina la anchura o la definición de los máximos principales. Las intensidades relativas de los máximos principales dentro de la envolvente de difracción se deter-

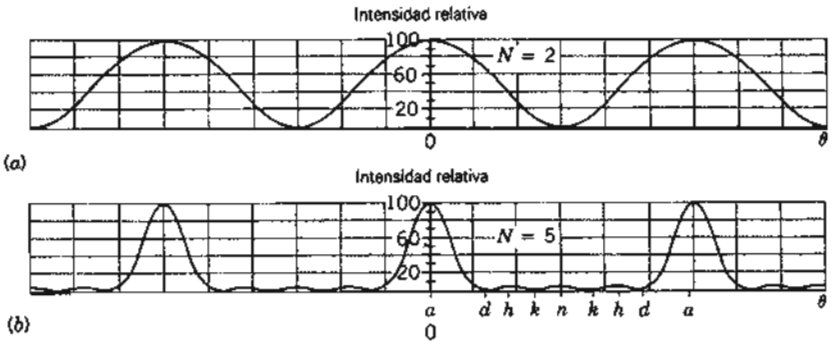


Figura 3 Los patrones de intensidad calculados en (*a*) una rejilla de dos rendijas y (*b*) una rejilla de cinco rendijas, teniendo los mismos valores de d y λ. Nótese lo bien definido o delineado de los máximos principales y la aparición de máximos secundarios débiles en (*b*); compárese con la figura 2. Las letras en (*b*) se refieren a la figura 6. Este cálculo no incluye los efectos de la difracción debidos a la anchura de la rendija; esto es, suponemos que estamos cerca de la región central de la figura 2 donde los máximos principales tienen intensidades esencialmente iguales.

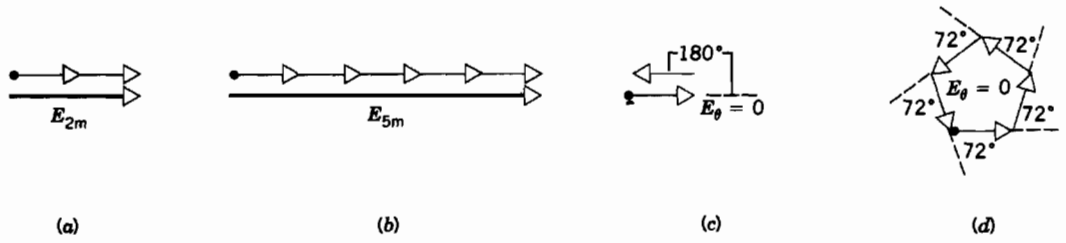


Figura 4 (*a*,*b*) Las condiciones en el máximo central para una rejilla de dos rendijas y una de cinco rendijas, respectivamente. (*c*,*d*) Las condiciones correspondientes en un mínimo, de intensidad cero, que se encuentra en ambos lados de este máximo central.

minan mediante la razón a/λ, la cual no afecta sus situaciones.

Anchura de los máximos

Lo bien definido o delineado de los máximos principales cuando N aumenta puede entenderse mediante un argumento gráfico, usando fasores. Las figuras 4*a* y 4*b* muestran las condiciones en el máximo central principal en rejillas de dos rendijas y de cinco rendijas. Las flechas pequeñas representan las amplitudes de las perturbaciones ondulatorias que llegan a la pantalla en la posición del máximo central, para el cual $m = 0$, y entonces $\theta = 0$, en la ecuación 1.

En cada lado del máximo central existe un mínimo de intensidad cero, que se encuentra a un ángulo $\delta\theta_0$ fuera del eje central, como se muestra en la figura 5. Las figuras 4*c* y 4*d* muestran los fasores en este punto. La diferencia de fase entre las ondas de rendijas contiguas, que es cero en el máximo principal central, debe aumentar en una cantidad $\Delta\phi$ elegida de modo que la disposición de los fasores se cierre justo sobre sí misma, produciendo una intensidad resultante cero. Para $N = 2$, $\Delta\phi = 2\pi/2$ (= 180°); para $N = 5$, $\Delta\phi = 2\pi/5$ (= 72°). En el caso general esto está dado por

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}. \tag{2}$$

Este aumento en la diferencia de fase de dos ondas contiguas corresponde a un aumento en la diferencia de camino ΔL dado por

$$\frac{\text{diferencia de fase}}{2\pi} = \frac{\text{diferencia de camino}}{\lambda}$$

o sea

$$\Delta L = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\Delta\phi = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{\lambda}{N}. \tag{3}$$

Sin embargo, de la figura 1 el aumento en la diferencia de camino ΔL en el primer mínimo está dado también por d sen $\delta\theta_0$, de modo que podemos escribir

$$d \operatorname{sen} \delta\theta_0 = \frac{\lambda}{N},$$

o bien

$$\operatorname{sen} \delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{4}$$

Puesto que $N \gg 1$ para rejillas reales, sen $\delta\theta_0$ es ordinariamente muy pequeño (es decir, las líneas están bien definidas), y, con buena aproximación, podemos reemplazar sen $\delta\theta_0$ por $\delta\theta_0$, expresado en radianes, o sea

$$\delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{5}$$

Esta ecuación muestra específicamente que si aumentamos a N para una λ y una d dadas, entonces $\delta\theta_0$ disminuye, lo que significa que el máximo principal central se vuelve más agudo.

Para obtener el resultado para *cualquier* máximo principal, consideremos la geometría de la figura 5, donde el *m*ésimo máximo principal ocurre a un ángulo θ. Nos alejamos del máximo por un desplazamiento angular $\delta\theta$ para llegar al mínimo siguiente; consideramos que este ángulo $\delta\theta$ es una medida de la anchura angular del máxi-

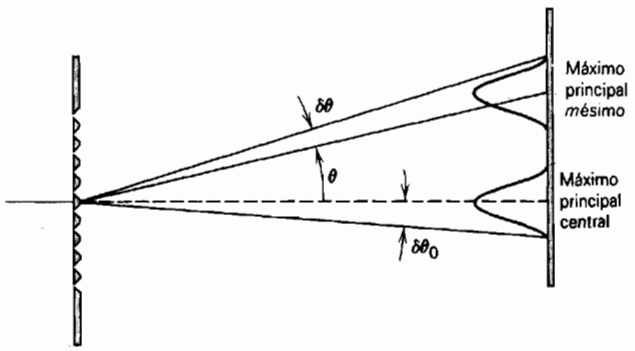


Figura 5 En la posición dada por el ángulo θ se encuentra un máximo principal, y el primer mínimo se presenta en el ángulo $\delta\theta$ de dicho máximo. Puede considerarse el ángulo $\delta\theta$ como una medida de la anchura o definición del máximo. La anchura del máximo central está dada por el ángulo $\delta\theta_0$.

mo. En el máximo, la diferencia de caminos entre los rayos que proceden de rendijas contiguas es $m\lambda$ (véase la Ec. 1). En el siguiente mínimo, la diferencia de caminos entre los rayos que proceden de rendijas contiguas es $m\lambda + \lambda/N$, estando dada la longitud adicional del camino de λ/N por la ecuación 3. Por ejemplo, consideremos el caso de $N = 10$. La longitud adicional del camino entre rendijas contiguas en el mínimo es de 0.1λ. La diferencia de caminos entre las rendijas 1 y 6 es, por lo tanto, $5(m\lambda + 0.1\lambda) = 5m\lambda + 0.5\lambda$; las distancias de los caminos difieren en un número semientero de longitudes de onda, de modo que los rayos interfieren destructivamente. Lo mismo ocurre para las rendijas 2 y 7, rendijas 3 y 8, y así sucesivamente. Si la diferencia del camino adicional es λ/N, entonces los rayos que proceden de las $N/2$ rendijas inferiores experimentan interferencia destructiva en pares con los rayos que proceden de las $N/2$ rendijas superiores.

A un ángulo $\theta + \delta\theta$, la diferencia de caminos entre los rayos que proceden de rendijas contiguas es

$$d \operatorname{sen}(\theta + \delta\theta) = d(\operatorname{sen}\theta \cos\delta\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\delta\theta)$$
$$\approx d \operatorname{sen}\theta + (d\cos\theta)\delta\theta,$$

donde suponemos que $\delta\theta$ es pequeño, lo que nos permite aproximar $\cos\delta\theta \approx 1$ y $\operatorname{sen}\delta\theta \approx \delta\theta$. Al hacer esta diferencia de caminos igual a $m\lambda + \lambda/N$, su valor en el mínimo, obtenemos

$$d \operatorname{sen}\theta + (d\cos\theta)\delta\theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

o, usando la ecuación 1,

$$(d\cos\theta)\delta\theta = \frac{\lambda}{N}.$$

Al resolver para $\delta\theta$ da

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}. \qquad (6)$$

Este resultado da la anchura angular* del máximo principal que ocurre en el ángulo θ, correspondiente al orden m particular. Nótese que la ecuación 6 se reduce a la ecuación 5 para el máximo central ($\theta = 0$). Para N, d y λ dadas, el máximo central es el más angosto ($\cos\theta = 1$); las anchuras aumentan conforme vamos a θ mayores (y por lo tanto, a órdenes m mayores). La ecuación 6 demuestra que $\delta\theta$ se vuelve menor (los máximos se vuelven más agudos) al aumentar el producto Nd. Este producto (el número de rendijas multiplicado por la distancia entre ellas) da la anchura total de la rejilla. Así, los picos se vuelven más agudos al aumentar la anchura de la rejilla.

* Como se definió mediante la ecuación 6, la anchura es el intervalo angular desde el pico hasta el primer mínimo. La definición usual de la anchura de un pico es todo el intervalo que el pico cubre a la mitad de su altura máxima (véase, por ejemplo, la Fig. 12 del capítulo 46). Estas dos medidas de la anchura son aproximadamente iguales, y consideramos que la ecuación 6 representa una medida de la anchura del pico.

Máximos secundarios *(Opcional)*

El origen de los máximos secundarios que aparecen cuando $N > 2$ puede entenderse también usando el método de los fasores. La figura 6*a* muestra las condiciones del máximo principal central en una rejilla de cinco rendijas. Los fasores están en fase. Conforme nos alejamos del máximo central, θ en la figura 1 aumenta desde cero y el ángulo entre fasores contiguos aumenta desde cero hasta $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(d \operatorname{sen}\theta)$. Las figuras sucesivas muestran cómo varía la amplitud E_0 de la onda resultante en función de $\Delta\phi$. Verifique, mediante una construcción gráfica, que una figura dada representa las condiciones tanto para $\Delta\phi$ como para $2\pi - \Delta\phi$. Así, comenzamos en $\Delta\phi = 0$, procedemos a $\Delta\phi = 180°$, y luego trazamos de retorno por la secuencia, siguiendo las diferencias de fase mostradas entre paréntesis, hasta llegar a $\Delta\phi = 360°$. Esta secuencia corresponde a recorrer el patrón de intensidad desde el máximo principal central hasta uno contiguo. La figura 6, que se debería comparar con la figura 3*b*, muestra que para $N = 5$ existen tres máximos secundarios, correspondientes a $\Delta\phi = 110°$, 180° y 250°. Haga un análisis semejante para $N = 3$ y demuestre que sólo ocurre un máximo secundario. En general, en una rejilla con N rendijas, existen $N - 2$ máximos secundarios. En rejillas reales, que contienen comúnmente de 10,000 a 50,000 "rendijas", los máximos secundarios están tan cerca de los máximos principales o son de una intensidad tan reducida que no pueden observarse experimentalmente. ■

Problema muestra 1 Cierta rejilla tiene 10^4 rendijas con un espaciamiento $d = 2.1\ \mu\text{m} = 2100$ nm. Está iluminada con luz de sodio amarilla ($\lambda = 589$ nm). Halle (*a*) la posición angular de todos los máximos principales observados y (*b*) la anchura angular del máximo de mayor orden.

Solución (*a*) De la ecuación 1, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{m(589\text{ nm})}{2100\text{ nm}},$$

lo cual da

$$\theta = 16.3°\ (m = 1),\ 34.1°\ (m = 2),\ \text{y}\ \ 57.3°\ (m = 3),$$

con valores correspondientes a $\theta < 0$ cuando $m < 0$. Si $m = 4$, $\operatorname{sen}\theta > 1$. Entonces, $m = 3$ es el orden más elevado observado, lo cual corresponde a un total de siete máximos principales (un máximo central y tres a cada lado del centro).

(*b*) Para el máximo $m = 3$, la ecuación 6 da

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{589\text{ nm}}{(10^4)(2100\text{ nm})(\cos 57.3°)}$$
$$= 5.2 \times 10^{-5}\text{ rad} = 0.0030°.$$

Éste es un máximo principal sumamente angosto.

Nótese que la ecuación 6, por ser una razón adimensional, da su resultado en radianes. Esto ocurre porque obtuvimos la ecuación 6 usando la aproximación $\operatorname{sen}\delta\theta \approx \delta\theta$, lo cual sólo es válido cuando el ángulo se expresa en radianes.

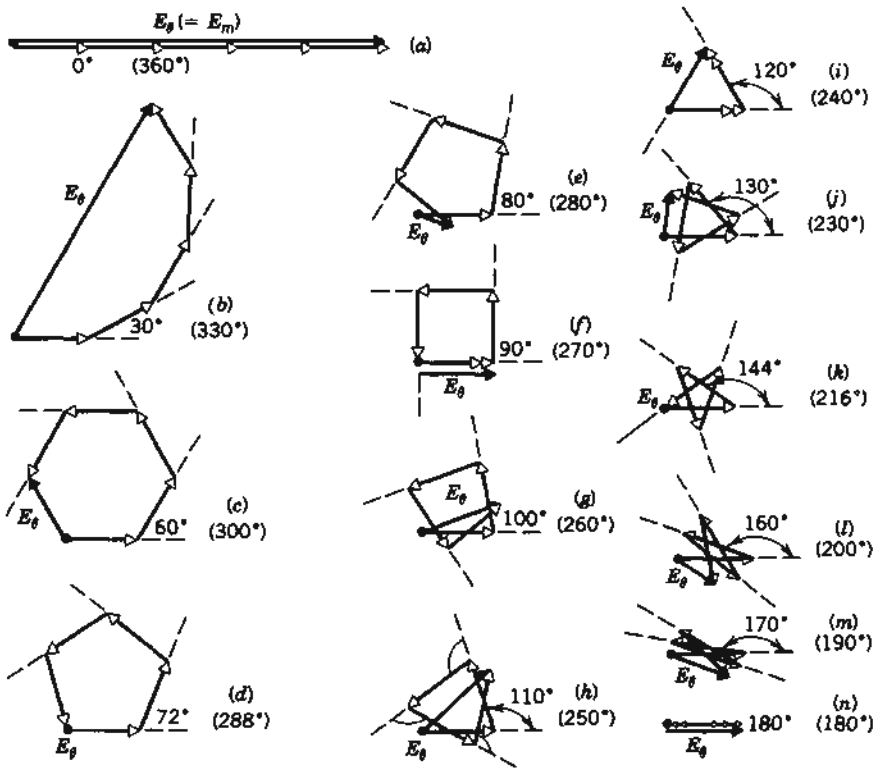


Figura 6 Las figuras se consideran en secuencia de (*a*) a (*n*) y luego de (*n*) a (*a*) para demostrar las condiciones cuando el patrón de intensidad de una rejilla de cinco rendijas se recorre desde el máximo principal central hasta un máximo principal contiguo. Se muestran directamente las diferencias de fase entre las ondas que proceden de rendijas contiguas; aquellas que van de (*n*) a (*a*) están entre paréntesis. Se presentan máximos principales en (*a*), máximos secundarios en, o cerca de, (*h*) y (*n*), y mínimos de intensidad cero en (*d*) y (*k*). Compárese con la figura 3*b*.

47-2 REJILLAS DE DIFRACCIÓN

Una rejilla típica puede contener $N = 10{,}000$ rendijas distribuidas en una anchura de unos cuantos centímetros, equivalente a un espaciamiento de rejilla d de unos cuantos micrometros. Como lo vimos en el problema muestra 1, cuando Nd es de unos cuantos centímetros, los máximos son muy angostos, lo que permite que sus posiciones se midan con gran precisión. Las rejillas se usan, por tanto, para determinar las longitudes de onda y estudiar la estructura e intensidad de los máximos principales.

Cualquier estructura periódica regular puede servir como una rejilla de difracción, por ejemplo, los surcos de un disco compacto, los cuales producen un patrón irisado cuando la superficie del disco refleja luz. Las rejillas pueden producir sus imágenes por luz transmitida, como en la figura 1; existen también *rejillas de reflexión*, las cuales producen sus imágenes por luz reflejada. En la rejilla de la figura 1, existe un cambio periódico en la *amplitud* (sin que haya ningún cambio de fase) de la luz en función de la posición a lo largo de la rejilla. También es posible fabricar rejillas (ya sea del tipo de reflexión o del tipo de transmisión) que provoquen un cambio periódico en la *fase* (y un cambio despreciable en la amplitud) de la luz en función de la posición a lo largo de la rejilla. La mayoría de las rejillas empleadas para luz visible, ya sea del tipo de reflexión o del tipo de transmisión, son rejillas de fase.

Se fabrican rejillas mediante el rayado de surcos paralelos igualmente espaciados en una capa delgada de aluminio o de oro depositada en una placa de vidrio, usando una punta cortadora de diamante cuyo movimiento se controla automáticamente mediante una máquina de rayar. Una vez que se ha preparado una rejilla maestra de esta manera, pueden formarse réplicas (copias) vertiendo un plástico líquido sobre la rejilla, permitiendo que se endurezca, y desprendiéndolo. El plástico desprendido, fijado a un trozo plano de vidrio u otro sustrato, forma una buena rejilla.

La figura 7 muestra una sección transversal de un tipo común de rejilla de fase por reflexión. (Si la rejilla fuera

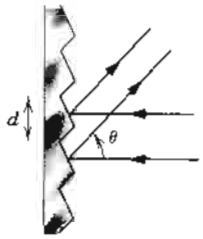


Figura 7 Sección transversal de una rejilla surcada vista por luz reflejada. Existe una diferencia de camino de d sen θ entre los dos rayos que se muestran.

transparente, podría funcionar como una rejilla de fase por transmisión, puesto que la luz que atraviesa diferentes espesores tendrá cambios variables de fase.) Los ángulos de los surcos se eligen de modo que la luz de un orden particular se refleje en una dirección determinada. De esta manera puede aumentarse la intensidad de un orden particular a otra de otros órdenes. El corte de las rejillas de este modo se llama *surcado*. La mayoría de las rejillas que se usan hoy día son rejillas surcadas.

La figura 8 muestra una rejilla de espectroscopio simple, que se utiliza para observar el espectro de una fuente de luz, que se supone emite un número de longitudes de ondas discretas. La luz que proviene de la fuente S se enfoca por la lente L_1 sobre una rendija S_1 situada en el plano focal de la lente L_2. La luz paralela que emerge del colimador C incide sobre la rejilla G. Los rayos paralelos asociados con un máximo de interferencia en particular que se presenta a un ángulo θ inciden sobre la lente L_3, haciéndolos pasar por un foco en el plano FF'. La imagen formada en este plano se examina, usando un arreglo de lentes de aumento E (el ocular). Puede verse todo el espectro girando el telescopio T diversos ángulos. Los instrumentos usados en la investigación científica o en la industria son más complejos que el arreglo sencillo de la figura 8. Invariablemente emplean un registro fotográfico o fotoeléctrico y se llaman *espectrógrafos*. La figura 9 muestra ejemplos de espectros de luz visible registrados por un espectrógrafo. Cada línea en la figura es, en efecto, una imagen de la rendija S_1 correspondiente a una de las muchas longitudes de onda individuales emitidas desde la fuente. Por esta razón, tales imágenes se llaman *líneas espectrales*. Una "línea" en un espectro, no importa qué técnica se emplee para registrarla, significa una componente de una longitud de onda en particular.

En general, las rejillas pueden producir varias imágenes de líneas espectrales, correspondientes a $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, en la ecuación 1, y pueden también separar longitudes de onda las cuales se distribuyen de modo continuo (como en la Fig. 10) más bien que como líneas espectrales bien definidas. La luz de un objeto caliente luminiscente, como el filamento de una lámpara o el Sol, da un espectro continuo. El espectro del Sol contiene también líneas espectrales bien definidas, que aparecen como líneas oscuras superpuestas en el espectro continuo. Estas líneas se producen por la absorción de luz por los átomos de los elementos que existen en la atmósfera que rodea al Sol. El elemento helio (del griego *helios*, que significa Sol) se descubrió de un análisis de estas líneas.

La luz puede también analizarse en sus longitudes de onda componentes si se reemplaza la rejilla de la figura 8 por un prisma. En un *espectrógrafo de prisma*, cada longitud de onda en el haz incidente se desvía en un ángulo θ definido, determinado por el índice de refracción del material del prisma para esa longitud de onda. Curvas como las de la figura 4 del capítulo 43, que dan el índice de refracción del cuarzo fundido en función de la longitud de onda, muestran que cuanto más corta sea la longitud de onda, mayor será el ángulo de desviación θ. Tales curvas varían de sustancia a sustancia y deben hallarse por medición. Los instrumentos de prisma no son adecuados

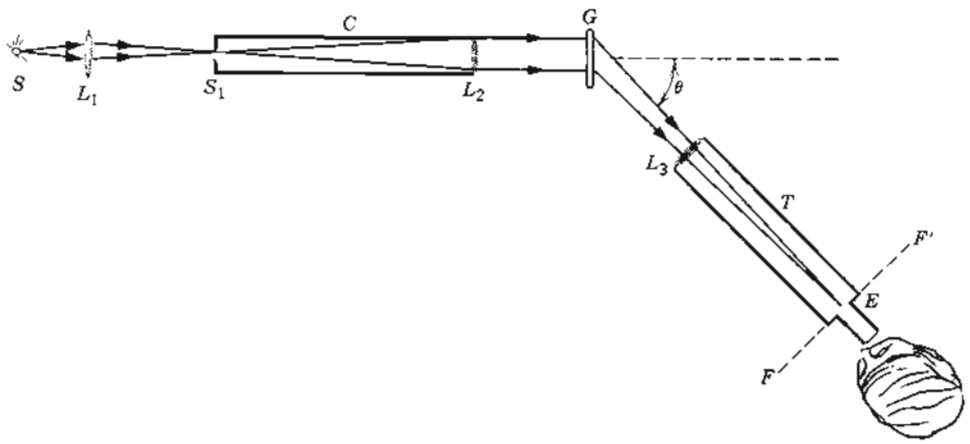


Figura 8 Un tipo sencillo de espectroscopio de rejilla usado para analizar las longitudes de onda de la luz emitida por la fuente S.

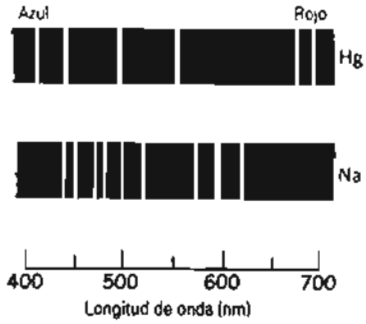


Figura 9 Ejemplos de espectros de luz visible emitida por gases de sodio (Na) y de mercurio (Hg).

para mediciones *absolutas* precisas de la longitud de onda, porque el índice de refracción del material del prisma a la longitud de onda en cuestión no se conoce con la precisión suficiente. Tanto los instrumentos de prisma como los de rejilla hacen *comparaciones* precisas de la longitud de onda, usando un espectro de comparación apropiado como el mostrado en la figura 9, donde se han realizado determinaciones absolutas cuidadosas de las longitudes de onda de las líneas espectrales.

Problema muestra 2 Una rejilla de difracción tiene 10^4 rayas espaciadas uniformemente a 25.0 mm. Está iluminada con incidencia normal por medio de luz amarilla de una lámpara de vapor de sodio. Esta luz contiene dos líneas estrechamente espaciadas (el bien conocido *doblete del sodio*) de longitudes de onda 589.00 y 589.59 nm. (*a*) ¿A qué ángulo ocurrirá el máximo de primer orden para la primera de estas longitudes de onda? (*b*) ¿Cuál es la separación angular entre los máximos de primer orden para estas líneas?

Solución (*a*) El espaciamiento d de la rejilla es de 2500 nm. El máximo de primer orden corresponde a $m = 1$ en la ecuación 1. Entonces tenemos

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(589\text{ nm})}{2500\text{ nm}}\right) = 13.6°.$$

(*b*) La manera directa de hallar la separación angular es repetir el cálculo de la parte (*a*) con $\lambda = 589.59$ nm y obtener la diferencia de los dos ángulos. Una dificultad, que puede apreciarse mejor al realizar el cálculo, es que debemos considerar un gran número de cifras significativas para obtener un valor significativo de la diferencia entre los ángulos. Para calcular *directamente* la diferencia en las posiciones angulares, resolvamos la ecuación 1 para $\operatorname{sen}\theta$ y derivemos el resultado, tratando a θ y λ como variables:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{m}{d}\, d\lambda.$$

Si las longitudes de onda están suficientemente próximas entre sí, como en este caso $d\lambda$ puede ser reemplazada por $\Delta\lambda$, la diferencia real en la longitud de onda; $d\theta$ se convierte entonces en $\Delta\theta$, la cantidad que buscamos. Esto da

$$\Delta\theta = \frac{m\,\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{(1)(0.59\text{ nm})}{(2500\text{ nm})(\cos 13.6°)}$$
$$= 2.4 \times 10^{-4}\text{ rad} = 0.014°.$$

Nótese que, si bien las longitudes de onda contienen cinco cifras significativas, nuestro cálculo, hecho de este modo, sólo contiene dos o tres, con la consiguiente reducción en la manipulación numérica.

47-3 DISPERSIÓN Y PODER DE RESOLUCIÓN

La capacidad de una rejilla para producir espectros que permitan mediciones precisas de las longitudes de onda se determina por medio de dos propiedades intrínsecas de la rejilla: (1) la separación $\Delta\theta$ entre las líneas espectrales que difieren en longitud de onda por una pequeña cantidad $\Delta\lambda$ y (2) la anchura o definición de las líneas.

En el problema muestra 2, calculamos la separación angular entre las líneas estrechamente espaciadas del doblete del sodio amarillo, para el cual $\Delta\lambda = 0.59$ nm. Hallamos en este caso una separación de $\Delta\theta = 0.014°$ entre los máximos principales de primer orden de estas líneas. La separación angular $\Delta\theta$ por intervalo unitario de longitud de onda $\Delta\lambda$ se llama la *dispersión D* de la rejilla, o sea

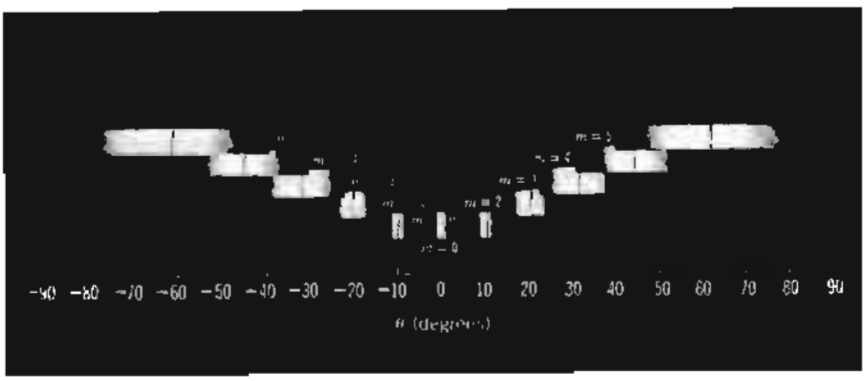


Figura 10 El espectro de la luz blanca visto en un espectroscopio de rejilla como el de la figura 8. Los diferentes órdenes, identificados por el índice m, se muestran separados verticalmente, a efectos de claridad. Tal como se ven realmente, no estarían tan desplazados. La línea central en cada orden corresponde a una longitud de onda de 550 nm. Las rejillas de difracción en uso común hoy día se diseñan para concentrar la intensidad de la luz en un orden particular, y no muestran los patrones simétricos ideales que se ilustran aquí.

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}. \tag{7}$$

Para que las líneas de longitudes de onda casi iguales aparezcan tan separadas como sea posible, sería deseable que nuestra rejilla tuviese la máxima dispersión posible.

Para ver qué propiedad física de la rejilla determina su dispersión, derivamos la ecuación 1 (d sen $\theta = m\lambda$), tratando a θ y λ como variables, lo cual da

$$d\cos\theta\, d\theta = m\, d\lambda,$$

o, en términos de pequeñas diferencias en lugar de diferenciales,

$$d\cos\theta\,\Delta\theta = m\,\Delta\lambda. \tag{8}$$

La dispersión D está dada por $\Delta\theta/\Delta\lambda$, o sea

$$D = \frac{m}{d\cos\theta}. \tag{9}$$

La dispersión aumenta conforme el espaciamiento entre las rendijas disminuye. Podemos también aumentar la dispersión al considerar un orden mayor (m grande), como lo ilustra la figura 10. Nótese que la dispersión no depende del número de rayas.

Poder de resolución

Si una rejilla produce líneas de anchura grande, entonces los máximos de las líneas espectrales de longitudes de onda estrechamente espaciadas pueden traslaparse, haciendo difícil la determinación de si cada una de tales líneas tiene una o más componentes y la medición de las longitudes de onda de las líneas con alta precisión. En consecuencia debemos elegir una rejilla que produzca las líneas más angostas posibles.

Obtenemos una medida razonable de la capacidad de resolver líneas cercanas de diferentes longitudes de onda si se aplica el criterio de Rayleigh (véase la Sec. 46-4): si el máximo de una línea cae en el primer mínimo de su vecina, seremos capaces de resolver las líneas. En la sección 47-1 definimos la anchura de la línea espectral de esa manera precisamente, como el intervalo angular $\delta\theta$ desde el máximo hasta el primer mínimo. El límite de resolución de la rejilla ocurre cuando dos líneas del espectro están separadas por un intervalo de longitudes de onda $\Delta\lambda$ tal que la diferencia $\delta\theta$ entre sus posiciones angulares esté dada por la ecuación 6. Definimos el *poder de resolución* R de la rejilla así:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \tag{10}$$

Si las líneas han de ser angostas ($\delta\theta$ es pequeño), entonces el intervalo de longitudes de onda $\Delta\lambda$ correspondiente debe ser pequeño, y el poder de resolución debe ser grande. Por lo tanto, elegiríamos una rejilla con la R más grande.

TABLA 1 PROPIEDADES DE TRES REJILLAS[a]

Rejilla	N	d (nm)	θ	R	D (10^{-4} rad/nm)
A	5,000	10,000	2.9°	5,000	1.0
B	5,000	5,000	5.7°	5,000	2.0
C	10,000	10,000	2.9°	10,000	1.0

[a] Para $\lambda = 500$ nm y $m = 1$.

Para hallar las propiedades físicas de la rejilla que determina a R, resolvamos la ecuación 8 para el espaciamiento $\Delta\theta$ entre líneas cercanas y (usando el criterio de Reyleigh) hagamos este resultado igual a la anchura $\delta\theta$ de la línea, dada por la ecuación 6 como el espaciamiento entre el máximo y el primer mínimo. Esto da

$$\frac{m\,\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta},$$

y resolviendo para R ($= \lambda/\Delta\lambda$) da

$$R = Nm. \tag{11}$$

El poder de resolución, al igual que la dispersión, aumenta con el número de orden. Al contrario de la dispersión, R depende del número de líneas N pero es independiente de su separación d. Para maximizar el poder de resolución, elegimos una rejilla con el máximo número de líneas. Para un espaciamiento d entre rendijas dado, la rejilla con la anchura total máxima tiene el poder de resolución máximo (esto es, produce las líneas espectrales más definidas).

La dispersión y el poder de resolución miden aspectos diferentes de la capacidad de una rejilla de difracción para producir líneas separadas nítidamente. Consideremos, por ejemplo, tres rejillas A, B y C cuyas propiedades se listan en la tabla 1. Supongamos que las rejillas están iluminadas con luz consistente en un doblete de líneas a 500 nm separadas por un intervalo $\Delta\lambda = 0.10$ nm. Hemos elegido las propiedades de la rejilla A de tal modo que las dos líneas del doblete en el máximo de primer orden estén precisamente en el límite de resolución; esto es, el máximo de una línea cae sobre el mínimo de la otra, como se muestra en la figura 11*a*. La rejilla B tiene el doble de dispersión que A pero el mismo poder de resolución, y produce el espectro que se muestra en la figura 11*b*. En efecto, todos los intervalos angulares están medidos a escala por un factor de 2, incluyendo la anchura angular y la separación angular de los picos. Si nuestra medición con la rejilla A estuviese limitada por nuestra capacidad para determinar los pequeños intervalos angulares, al cambiar a la rejilla B mejoraría la medición.

La rejilla C tiene el doble de poder de resolución que A pero la misma dispersión. En la figura 11*c* los picos aparecen con la misma separación angular que los de la figura 11*a*, pero con anchuras menores. El máximo de un

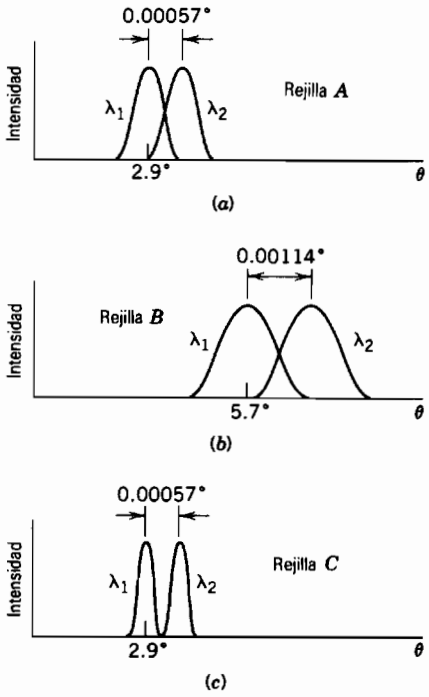


Figura 11 El patrón de intensidad de dos líneas a $\lambda = 500$ nm, separadas por $\Delta\lambda = 0.10$ nm, producido por las tres rejillas de la tabla 1. La rejilla *B* tiene la máxima dispersión y la rejilla *C* tiene el máximo poder de resolución.

pico cae ahora claramente fuera del primer mínimo del otro, y las dos líneas se distinguen más claramente una de la otra usando la rejilla *C*.

Las anchuras totales de las tres rejillas, iguales al producto *Nd*, son 50 mm en la rejilla *A*, 25 mm en la rejilla *B* y 100 mm en la rejilla *C*. Nótese en la figura 11 que las anchuras de los picos dependen inversamente de la anchura de la rejilla, como se encontró de la ecuación 6.

Problema muestra 3 Una rejilla tiene 9600 líneas espaciadas uniformemente en una anchura $W = 3.00$ cm y está iluminada por luz de una descarga de vapor de mercurio. (*a*) ¿Cuál es la dispersión esperada, en el tercer orden, en la vecindad de la línea verde intenso ($\lambda = 546$ nm)? (*b*) ¿Cuál es el poder de resolución de esta rejilla en el quinto orden?

Solución (*a*) El espaciamiento de la rejilla está dado por

$$d = \frac{W}{N} = \frac{3.00 \times 10^{-2}\ \text{m}}{9600} = 3125\ \text{nm}.$$

Debemos hallar el ángulo θ para el cual se presente la línea en cuestión. De la ecuación 1, tenemos

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(3)(546\ \text{nm})}{3125\ \text{nm}}\right) = 31.6°.$$

Ahora podemos calcular la dispersión. De la ecuación 9

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{3}{(3125\ \text{nm})(\cos 31.6°)}$$
$$= 1.13 \times 10^{-3}\ \text{rad/nm}$$
$$= 0.0646°/\text{nm} = 3.87\ \text{minutos de arco/nm}.$$

(*b*) De la ecuación 11

$$R = Nm = (9600)(5) = 4.80 \times 10^4.$$

Entonces, cerca de $\lambda = 546$ nm y en el quinto orden, puede resolverse una diferencia de longitud de onda dada por (véase la Ec. 10):

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{546\ \text{nm}}{4.80 \times 10^4} = 0.011\ \text{nm}$$

Problema muestra 4 Una rejilla de difracción tiene 1.20×10^4 rayas espaciadas uniformemente en una anchura $W = 2.50$ cm. Está iluminada con incidencia normal por la luz amarilla de una lámpara de vapor de sodio. Esta luz contiene dos líneas estrechamente espaciadas de longitudes de onda de 589.00 y 589.59 nm. (*a*) ¿A qué ángulo tendrá lugar el máximo de primer orden para la primera de estas longitudes de onda? (*b*) ¿Cuál es la separación angular entre estas dos líneas (en el primer orden)? (*c*) ¿Cuán próximas, en longitudes de onda, pueden estar dos líneas (en el primer orden) y todavía ser resueltas mediante esta rejilla? (*d*) ¿Cuántas rayas puede tener una rejilla y resolver precisamente el doblete de líneas de sodio?

Solución (*a*) El espaciamiento *d* de la rejilla está dado por

$$d = \frac{W}{N} = \frac{2.50 \times 10^{-2}\ \text{m}}{1.20 \times 10^4} = 2083\ \text{nm}.$$

El máximo de primer orden corresponde a $m = 1$ en la ecuación 1. Entonces tenemos

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(589.00\ \text{nm})}{2083\ \text{nm}}\right) = 16.4°.$$

(*b*) Aquí interviene la *dispersión* de la rejilla. De la ecuación 9, la dispersión es

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2083\ \text{nm})(\cos 16.4°)}$$
$$= 5.01 \times 10^{-4}\ \text{rad/nm}.$$

De la ecuación 7, la ecuación que define la dispersión, tenemos

$$\Delta\theta = D\,\Delta\lambda$$
$$= (5.01 \times 10^{-4}\ \text{rad/nm})(589.59\ \text{nm} - 589.00\ \text{nm})$$
$$= 2.95 \times 10^{-4}\ \text{rad} = 0.0169° = 1.02\ \text{minutos de arco}.$$

En tanto que permanezca fijo el espaciamiento *d* de la rejilla, este resultado se cumple independiente de cuántas líneas haya en la rejilla.

(*c*) Aquí interviene el *poder de resolución*. De la ecuación 11, el poder de resolución es

$$R = Nm = (1.20 \times 10^4)(1) = 1.20 \times 10^4.$$

De la ecuacion 10, la ecuación que define el poder de resolución, tenemos

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{589\text{ nm}}{1.20 \times 10^4} = 0.049\text{ nm}.$$

Esta rejilla puede resolver fácilmente las dos líneas del sodio, que tienen una separación de longitud de onda de 0.59 nm. Nótese que este resultado sólo depende del número de rayas de la rejilla y es independiente de d, el espaciamento entre rayas contiguas.

(d) De la ecuación 10, la ecuación que define R, la rejilla debe tener un poder de resolución de

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\text{ nm}}{0.59\text{ nm}} = 998.$$

De la ecuación 11, el número de rayas que se necesita para obtener este poder de resolución (en el primer orden) es

$$N = \frac{R}{m} = \frac{998}{1} = 998\text{ rayas}$$

Puesto que la rejilla tiene unas 12 veces más rayas que esto, puede resolver fácilmente el doblete de líneas de sodio, como ya lo hemos demostrado en la parte (c).

47-4 DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X

Los rayos X son radiación electromagnética con longitudes de onda del orden de 0.1 nm (comparado con 500 nm en una longitud de onda típica de la luz visible). La figura 12 muestra cómo se producen los rayos X cuando los electrones de un filamento calentado F son acelerados por medio de una diferencia de potencial V y chocan con un blanco metálico.

Para estas pequeñas longitudes de onda no puede usarse una rejilla de difracción óptica estándar, como se emplea normalmente. Por ejemplo, para $\lambda = 0.10$ nm y $d = 3000$ nm, la ecuación 1 muestra que el máximo de primer orden tiene lugar en

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(0.10\text{ nm})}{3 \times 10^3\text{ nm}}\right) = 0.0019°.$$

Esto está demasiado cerca del máximo central para ser práctico. Es deseable una rejilla con $d = \lambda$ pero, puesto que las longitudes de onda de los rayos X son casi iguales a los diámetros atómicos, tales rejillas no pueden construirse mecánicamente.

En 1912 al físico Max von Laue se le ocurrió que un sólido cristalino, por poseer una disposición regular de átomos, podría formar una "rejilla de difracción" tridimensional natural para los rayos X. La figura 13 muestra que cuando se deja que un haz colimado de rayos X, con una distribución continua de sus longitudes de onda, incida sobre un cristal, de cloruro de sodio por ejemplo, aparecen haces intensos (correspondientes a una interferencia constructiva de los muchos centros difractantes de

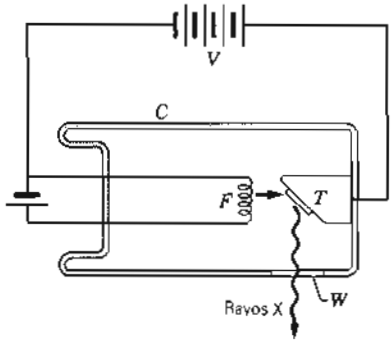


Figura 12 Se generan rayos X cuando los electrones de un filamento calentado F acelerados mediante una diferencia de potencial V, chocan con un blanco metálico T dentro de una cámara evacuada C. La ventana W es transparente a los rayos X.

que está hecho el cristal) en ciertas direcciones precisamente definidas. Cuando estos haces inciden sobre una película fotográfica, forman un conjunto de "puntos de Laue". La figura 14, que muestra un ejemplo real de estos puntos, demuestra que la hipótesis de Laue es realmente correcta. Pueden deducirse los arreglos atómicos del cristal de un estudio cuidadoso de las posiciones e intensidades de los puntos de Laue de una manera muy parecida a como puede deducirse la estructura de una rejilla óptica (es decir, el perfil detallado de sus rendijas) mediante un estudio de las posiciones e intensidades de las líneas en el patrón de interferencia. En la actualidad la técnica de Laue ha sido superada considerablemente por otras configuraciones experimentales, pero el principio permanece invariable (véase la pregunta 25).

La figura 15 muestra cómo se distribuyen los átomos de sodio y cloro (estrictamente, iones Na^+ y Cl^-) para formar un cristal de cloruro de sodio. Este modelo, que tiene una simetría *cúbica*, es uno de los muchos arreglos atómicos posibles exhibidos por los sólidos. El modelo

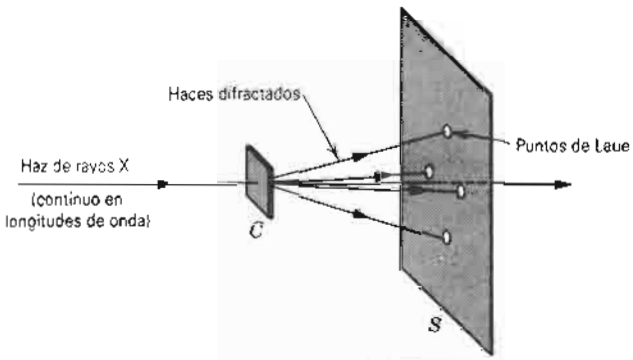


Figura 13 Un haz de rayos X choca con un cristal C. Aparecen haces difractados intensos en ciertas direcciones, formando un patrón de Laue sobre la película fotográfica S.

Figura 14 Patrón de Laue de la difracción de rayos X de un cristal de cloruro de sodio.

representa la *celda unidad* o *unitaria* del cloruro de sodio. Es la unidad más pequeña de la que puede estar construido el cristal mediante la repetición en tres dimensiones. Se recomienda al lector comprobar por sí mismo que ningún conjunto más pequeño de átomos posee esta propiedad. En el cloruro de sodio la longitud a_0 de la arista del cubo de la celda unitaria es de 0.563 nm.

Cada celda unitaria de cloruro de sodio tiene cuatro iones sodio y cuatro iones cloro asociados con ella. En la figura 15 el ion sodio que está en el centro pertenece enteramente a la celda mostrada. Cada uno de los otros doce iones sodio mostrados es compartido con tres celdas unitarias adyacentes de tal modo que cada uno contribuye con un cuarto de ion a la celda en consideración. El número total de iones sodio es, entonces, $1 + \frac{1}{4}(12) = 4$. Mediante un razonamiento similar puede demostrarse que, si bien existen catorce iones cloro en la figura 15, sólo cuatro están asociados con la celda unitaria mostrada.

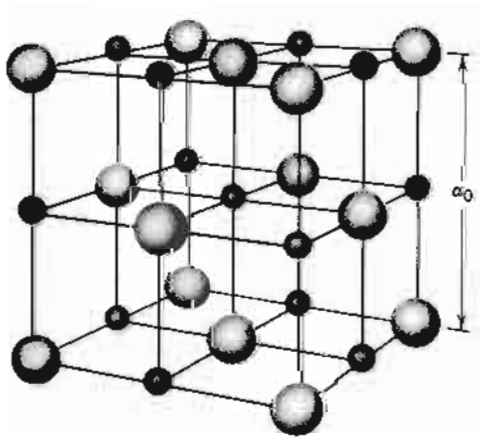


Figura 15 Modelo de un cristal de cloruro de sodio, que muestra cómo se distribuyen los iones sodio Na^+ (esferas pequeñas) y los iones cloro Cl^- (esferas grandes) en la celda unitaria, cuya arista a tiene la longitud de 0.563 nm.

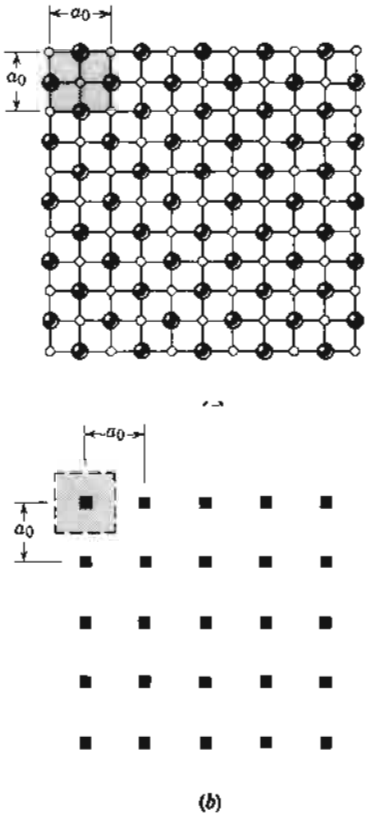


Figura 16 (*a*) Plano a través de un cristal de NaCl, que muestra los iones Na y Cl. (*b*) Las celdas unitarias correspondientes en esta sección. Cada celda se representa por un pequeño cuadrado negro.

La celda unitaria es la unidad difractante repetitiva fundamental en el cristal, correspondiendo a la rendija (y su tira opaca contigua) en la rejilla de difracción óptica de la figura 1. La figura 16*a* muestra un plano particular en un cristal de cloruro de sodio. Cuando cada celda unitaria intersecada por este plano se representa mediante un pequeño cubo, resulta la figura 16*b*. Uno debe imaginarse a cada una de estas figuras prolongada indefinidamente en tres dimensiones.

Tratemos a cada pequeño cubo de la figura 16*b* como un centro difractante elemental, correspondiente a una rendija en una rejilla óptica. Las *direcciones* (pero no las intensidades) de todos los haces de los rayos X difractados que pueden emerger de un cristal de sodio (para una longitud de onda de rayos X y una orientación del haz incidente dados) están determinadas por la geometría de esta red tridimensional de centros de difracción . De la misma forma, exactamente, *las direcciones* (no las intensidades)

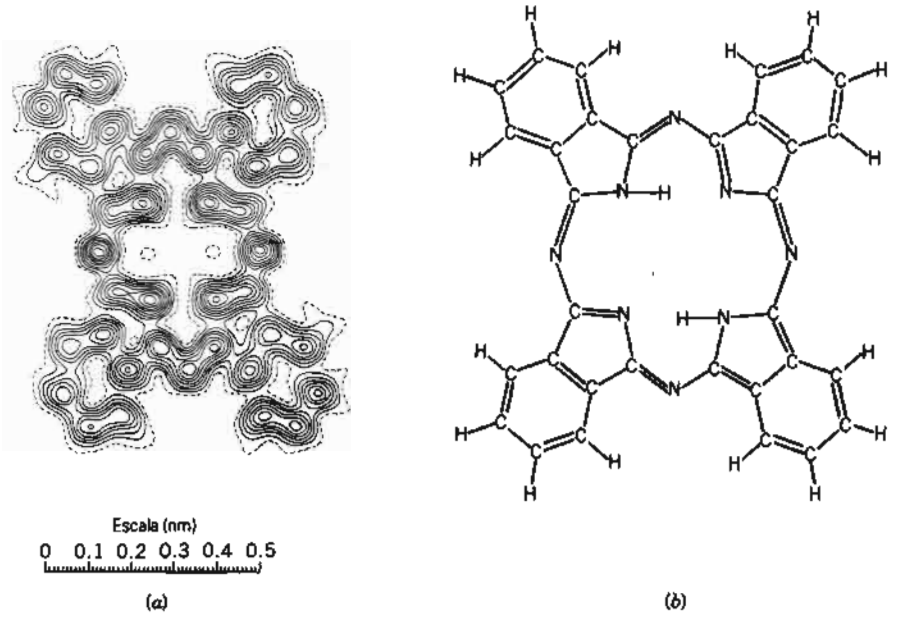


Figura 17 (*a*) Los contornos de la densidad electrónica de la ftalocianina ($C_{32}H_{16}N_8$) determinados de la distribución de intensidades de los rayos X dispersados. Las curvas de líneas punteadas representan una densidad de un electrón por 0.01 nm², y cada curva adyacente representa un aumento de un electrón por 0.01 nm². (*b*) Representación de la estructura de la molécula. Nótese que la máxima densidad electrónica en (*a*) ocurre cerca de los átomos de N, los cuales tienen el máximo de electrones (7). Nótese también que los átomos de H, que contienen únicamente un solo electrón, no son prominentes en (*a*).

de todos los haces difractados que pueden surgir de una rejilla óptica en particular (para determinadas longitud de onda y orientación del haz incidente) son determinadas solamente por la geometría de la rejilla, es decir, por el espaciamiento d de la rejilla. El representar a la celda unitaria por lo que es esencialmente un punto, como en la figura 16*b*, corresponde a representar las rendijas de una rejilla de difracción por líneas, como lo hicimos al estudiar el experimento de la rendija doble en la sección 45-1.

Las *intensidades* de las líneas que parten de una rejilla de difracción óptica dependen de las características difractantes de una rendija individual, determinadas en particular por la anchura a de la rendija; véase, por ejemplo, la figura 2 para un juego de rendijas. Las características de las rejillas ópticas reales se determinan mediante el perfil del rayado de la rejilla.

De la misma manera exactamente, las *intensidades* de los haces difractados que emergen de un cristal, dependen de las características difractantes de la celda unitaria. Fundamentalmente, los rayos X son difractados por los electrones, siendo despreciable la difracción mediante los núcleos en la mayoría de los casos. Así, las características difractantes de una celda unitaria dependen de cómo están distribuidos los electrones en todo el volumen de la celda. Podemos conocer la simetría básica del cristal mediante el estudio de las *direcciones* de los haces de los rayos X difractados. Podemos conocer cómo se distribuyen los electrones en una celda unitaria mediante el estudio de las *intensidades*. La figura 17 muestra un ejemplo de esta técnica.

Ley de Bragg

La ley de Bragg predice las condiciones para las que son posibles los haces de rayos X difractados de un cristal. Al deducirla, no tomamos en cuenta la estructura de la celda unitaria, que se relaciona únicamente con las intensidades de estos haces. Las líneas inclinadas de trazos entrecortados de la figura 18*a* representan la intersección con el plano de la figura de un conjunto arbitrario de planos que pasan a través de los centros difractantes elementales. La distancia perpendicular entre planos contiguos es d. Pueden definirse muchas otras de tales familias de planos, con diferentes *espaciamientos interplanares*.

La figura 18*b* muestra una onda incidente que choca con la *familia* de planos, formando los rayos incidentes un ángulo θ con el plano.* En un solo plano, tiene lugar una

* En la difracción de los rayos X se acostumbra especificar la dirección de una onda dando el ángulo entre el rayo y el plano (el *ángulo de oblicuidad* o de sesgado) más bien que el ángulo entre el rayo y la normal.

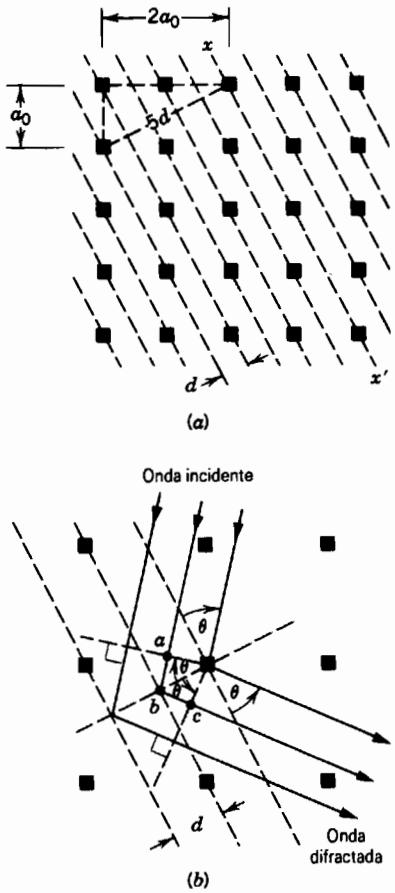


Figura 18 (*a*) Una sección a través de la red del NaCl de la figura 16. Las líneas de trazos representan un conjunto arbitrario de planos paralelos que unen a las celdas unitarias. El espaciamiento interplanar es *d*. (*b*) Un haz incidente cae sobre un conjunto de planos. Se observará un intenso haz difractado si se satisface la ley de Bragg.

"reflexión" especular (de espejo) para *cualquier* valor de θ. Para lograr interferencia constructiva del haz difractado de toda la familia de planos en la dirección θ, los rayos que parten de planos separados deben reforzarse entre sí. Esto significa que la diferencia del camino de los rayos que proceden de planos adyacentes (*abc* en la Fig. 18*b*) debe ser un número entero de longitudes de onda, o sea

$$2d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (12)$$

Esta relación se llama *ley de Bragg* en honor de W. L. Bragg quien la dedujo por vez primera. En esta ecuación la cantidad *d* (el espaciamiento interplanar) es la distancia perpendicular entre los planos. Para los planos de la figura 18*a* vemos que *d* se relaciona con la dimensión a_0 de la celda unitaria mediante

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}}. \qquad (13)$$

Cuando un haz monocromático de rayos X incide con un ángulo arbitrario θ sobre un conjunto de planos atómicos en particular, *no* resultará un haz difractado porque la ecuación 12 no se satisface, en general. Si los rayos X incidentes son *continuos* en cuanto a su longitud de onda, resultarán haces difractados cuando en el haz incidente (véase la Ec. 12) estén presentes las longitudes de onda dadas por

$$\lambda = \frac{2d \operatorname{sen}\theta}{m} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

La difracción de rayos X es una herramienta poderosa para el estudio tanto de los espectros de los rayos X como de la disposición de los átomos en los cristales. Para estudiar el espectro de una fuente de rayos X, se elige un conjunto particular de planos del cristal, que tengan un espaciamiento *d* conocido. La difracción de estos planos da las diferentes longitudes de onda a ángulos diferentes. Puede usarse un detector capaz de discriminar un ángulo de otro para determinar la longitud de onda de la radiación que le llega. Por otra parte, podemos estudiar al cristal mismo usando un haz monocromático de rayos X para determinar no sólo el espaciamiento de los diversos planos cristalinos, sino también la estructura de la célula unitaria. La molécula de DNA y muchas otras estructuras igualmente complejas han sido mapeadas por métodos de difracción de rayos X.

Problema muestra 5 ¿A qué ángulos debe un haz de rayos X con $\lambda = 0.110$ nm incidir sobre la familia de planos representada en la figura 18*b* si se quiere que haya un haz difractado? Supóngase que el material es cloruro de sodio ($a_0 = 0.563$ nm).

Solución El espaciamiento *d* interplanar para estos planos está dado por la ecuación 13, o sea

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}} = \frac{0.563 \text{ nm}}{\sqrt{5}} = 0.252 \text{ nm}.$$

La ecuación 12 da

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{2d}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(m)(0.110 \text{ nm})}{(2)(0.252 \text{ nm})}\right).$$

Los rayos difractados son posibles para $\theta = 12.6°$ ($m = 1$), $\theta = 25.9°$ ($m = 2$), $\theta = 40.9°$ ($m = 3$) y $\theta = 60.9°$ ($m = 4$). Haces de un orden más alto no pueden existir, porque para ello es preciso que sen $\theta > 1$.

En realidad, la célula unitaria de los cristales cúbicos, como el NaCl tiene propiedades de simetría que requieren que la intensidad de los haces de rayos X difractados, que correspondan a valores impares de *m*, sea cero. (Véase el problema 42.) Así, los únicos haces que cabe esperar son $\theta = 25.9°$ ($m = 2$) y $\theta = 60.9°$ ($m = 4$).

47-5 HOLOGRAFÍA *(Opcional)*

La luz emitida por un objeto contiene la información completa del tamaño y forma del objeto. Podemos considerar que la

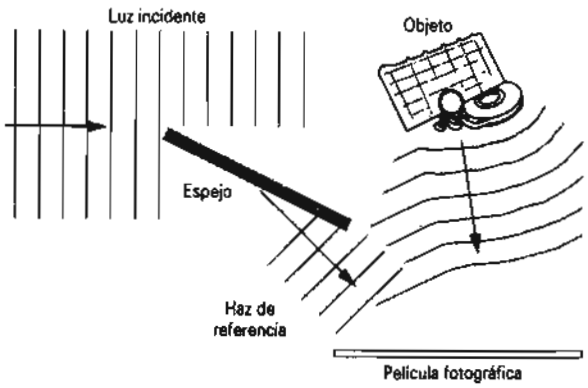


Figura 19 Aparato para producir hologramas. Una parte del haz de una fuente de luz coherente (un láser, por ejemplo) ilumina el objeto. La luz difractada por el objeto interfiere en la película con una parte del haz original, que sirve de referencia.

información se almacena en los frentes de ondas de la luz del objeto, específicamente en la variación de la intensidad y la fase de los campos electromagnéticos. Si pudiéramos registrar esta información, podríamos reproducir una imagen tridimensional completa del objeto. Sin embargo, las películas fotográficas registran sólo las variaciones de la intensidad; las películas no son sensibles a las variaciones de fase. Por tanto, no es posible emplear un negativo fotográfico para reconstruir una imagen tridimensional.

En el caso de difracción de rayos X de un cristal se tiene una excepción a esta restricción. A causa del espaciamiento regular de los átomos de un cristal, podemos deducir fácilmente las fases relativas de las ondas difractadas que llegan a la película desde diferentes átomos. Esta posibilidad fue realizada por W. L. Bragg, quien iluminó un negativo fotográfico de un patrón de difracción de rayos X y así reconstruyó la imagen de un cristal. En este método de "doble refracción", la difracción de la radiación de un patrón de difracción da una imagen del objeto original. En objetos cuyos átomos no estén ordenados de un modo periódico, este sencillo método de reconstrucción de la imagen no funciona.

Dennis Gabor en 1948 desarrolló un método para registrar la intensidad y fase de las ondas procedentes de objetos; Gabor fue galardonado con el premio Nobel de física de 1971 por su descubrimiento. Este tipo de formación de la imagen se llama *holografía*, cuyo término proviene del griego y significa "toda la imagen", y la imagen se llama *holograma*. En la figura 19 se ilustra el procedimiento. Una onda difractada desde un objeto interfiere en la película fotográfica con una onda de referencia. La interferencia entre las dos ondas sirve como el medio para almacenar en la película la información de la fase de la onda que procede del objeto. Cuando se ve la imagen fotográfica usando luz idéntica al haz de referencia, se reconstruye una imagen virtual tridimensional del objeto original (Fig. 20). También se produce mediante el holograma una segunda imagen (una imagen real), que no se muestra en la figura 20.

Puesto que la película se ilumina uniformemente mediante la luz difractada del objeto y el haz de referencia, cada sección de la película contiene la información necesaria para reproducir la imagen tridimensional. El holograma propiamente dicho (Fig. 21) muestra únicamente las franjas de interferencia; en general, es necesario usar un haz monocromático y coherente apropiado para reconstruir la imagen. Por esta razón, el desarrollo activo de la holografía no ocurrió sino hasta principios de los años sesenta, cuando el uso del láser comenzó a generalizarse.

Ciertos hologramas pueden verse con luz blanca. Los hologramas de luz blanca usan una emulsión fotográfica gruesa, en la que la luz se refleja por las capas consecutivas de los granos de la película. Ocurre una interferencia constructiva en la luz reflejada para la longitud de onda del haz de referencia original, y una interferencia destructiva para otras longitudes de onda. Puede producirse una imagen a todo color mediante el uso de haces de referencia de varios colores diferentes.*

El holograma reconstruye una imagen tridimensional real; por ejemplo, los objetos cercanos aparecen "enfrente de" los objetos más distantes, y al mover la cabeza de un lado a otro se puede cambiar la orientación espacial relativa de los objetos. La figura 22 muestra dos vistas diferentes del mismo holograma,

* Véase "White-Light Holograms", por Emmett N. Leith, *Scientific American*, octubre de 1976, pág. 80.

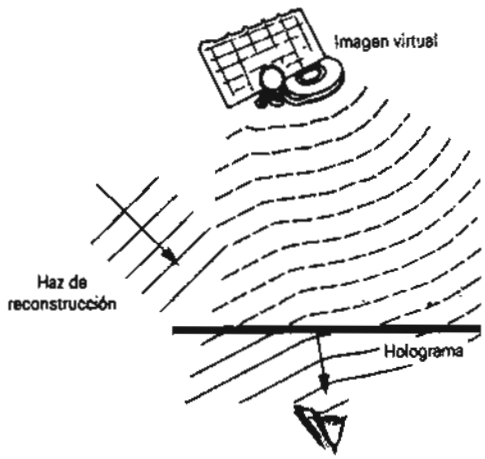


Figura 20 Para ver un holograma, éste se ilumina con luz idéntica al del haz de referencia. Puede verse una imagen virtual tridimensional en la ubicación del objeto original.

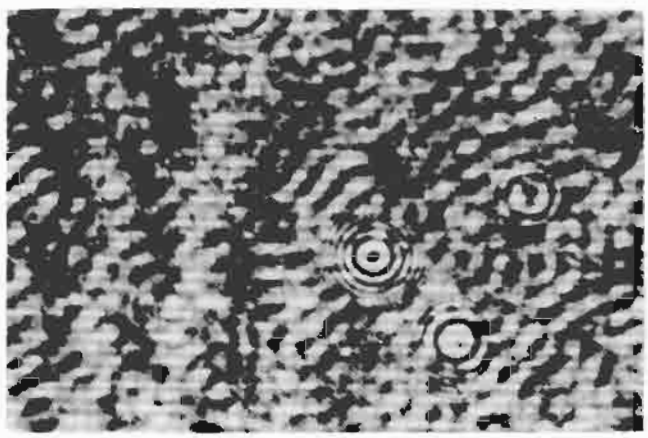


Figura 21 Vista en acercamiento de un holograma, mostrando el patrón de interferencia.

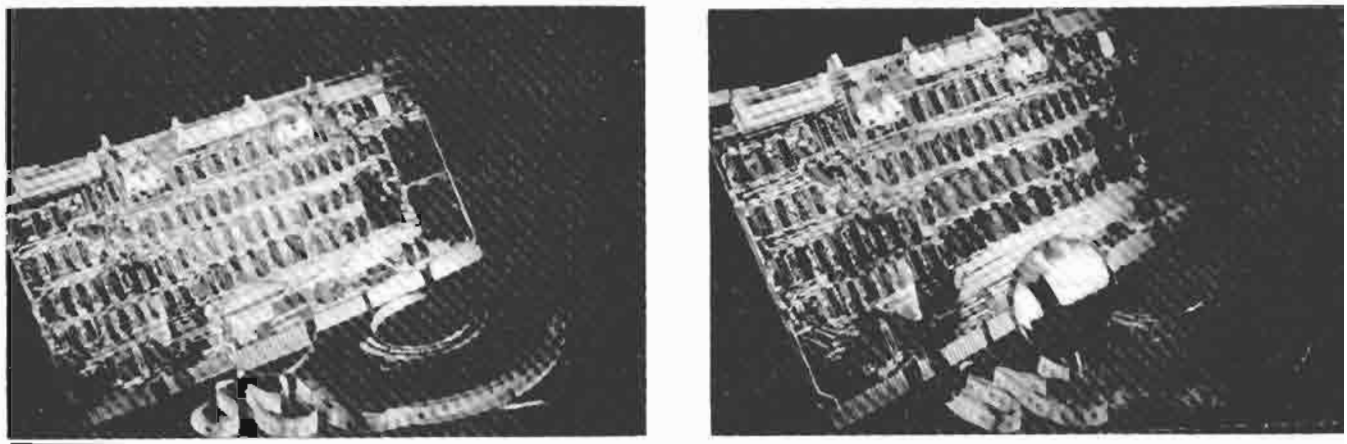


Figura 22 Dos vistas diferentes del mismo holograma, tomadas desde direcciones diferentes. Nótese el movimiento relativo de los objetos en las imágenes.

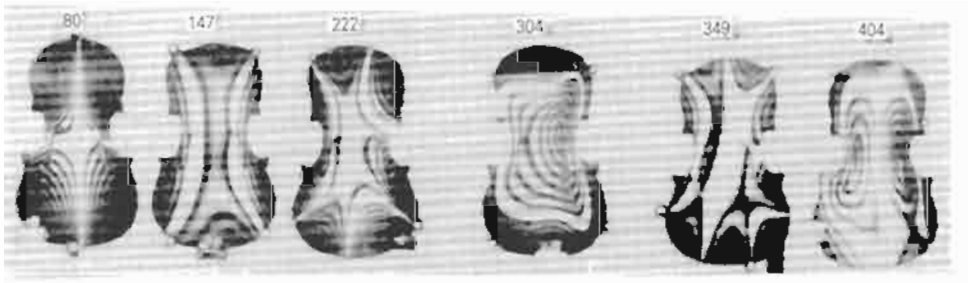


Figura 23 Patrón de interferencia holográfica de la parte superior de un violín que vibra a frecuencias diferentes. Arriba de cada placa se muestran las frecuencias (en Hz).

ilustrando el *efecto de paralaje* cuando el holograma se ve desde dos direcciones diferentes.

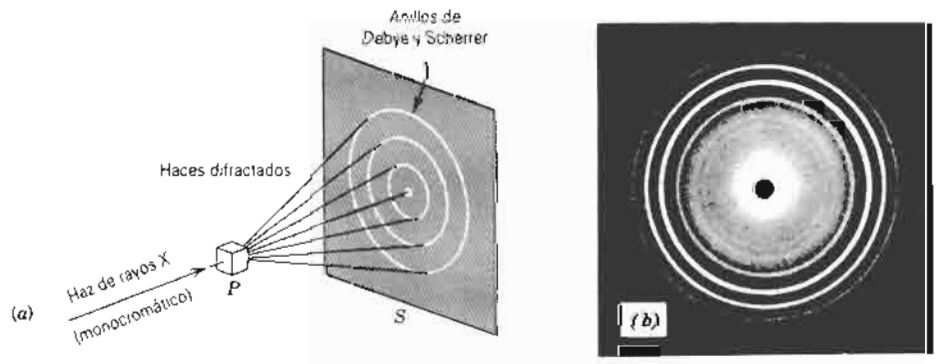
Los hologramas tienen una variedad de aplicaciones en las ciencias básica y aplicada. Por ejemplo, para la producción de los hologramas el objeto debe estar absolutamente en reposo mientras se expone la película; cualquier pequeño movimiento cambiará la fase relativa entre los haces difractado y de referencia y, por ende, cambiará el patrón de interferencia almacenado en la película. Si se hace un holograma por superposición en la película de dos exposiciones sucesivas de un objeto vibrante, como las partes superior o inferior de un violín, las partes del objeto que se movieron entre exposiciones en un número entero de longitudes de onda, mostrarán interferencia constructiva, mientras que en las partes del objeto que se movieron un número semientero de longitudes de onda ($\lambda/2$, $3\lambda/2$,...) mostrarán una interferencia destructiva. La figura 23 muestra un ejemplo del uso de esta técnica, llamada *interferometría holográfica*. ■

PREGUNTAS

1. Análice este postulado: "A la rejilla de difracción puede llamársele también rejilla de interferencia".
2. ¿Cómo cambiaría (en caso de hacerlo) el espectro de una fuente encerrada que esté formada por una rejilla de difracción sobre una pantalla cuando la fuente luminosa, la rejilla y la pantalla están todas ellas sumergidas en agua?
3. (*a*) ¿Para qué clase de ondas podría considerarse como una rejilla útil a una cerca larga de estacas puntiagudas? (*b*) ¿Puede usted hacer una rejilla de difracción de hileras paralelas de alambre delgado estiradas y muy apretadas entre sí?
4. ¿Podría usted construir una rejilla de difracción para el sonido? De ser así, ¿cuál es el espaciamiento de la rejilla apropiado para una longitud de onda de 0.5 m?
5. Una rejilla de difracción en cruz está rayada en dos direcciones que forman un ángulo recto entre ellas. Prediga el patrón de intensidad de la luz sobre la pantalla cuando se envía luz a través de esa rejilla. ¿Existe cualquier valor práctico para tal rejilla?

6. Supóngase que se situase una pequeña abertura circular, en vez de una rendija, en el plano focal de la lente colimadora del telescopio de un espectrómetro. ¿Qué se vería cuando el telescopio se ilumina con luz de sodio? ¿Por qué, entonces, llamamos a los espectros "*espectros de líneas*"?
7. En un espectrógrafo de rejilla pueden aparecer varias líneas que tienen longitudes de onda diferentes y se forman en órdenes diferentes cerca de cierto ángulo. ¿Cómo podría usted determinar a qué orden pertenecen?
8. Se le da una fotografía de un espectro en el que están marcadas las posiciones angulares y las longitudes de onda de las líneas espectrales. (*a*) ¿Cómo puede decir si el espectro se obtuvo con un prisma o con un instrumento de rejilla? (*b*) ¿Qué información puede reunir ya sea acerca del prisma o de la rejilla al estudiar tal espectro?
9. Un prisma de vidrio puede formar un espectro. Explique cómo. ¿Cuántos "órdenes" de espectros producirá un prisma?
10. En el espectroscopio sencillo que se muestra en la figura 8 demuestre (*a*) que θ aumenta con λ en una rejilla y (*b*) que θ disminuye con λ en un prisma.
11. De acuerdo con la ecuación 6 los máximos principales se vuelven más anchos (es decir, aumenta $\delta\theta$) cuanto más elevado sea el orden de m (esto es, θ se vuelve mayor). De acuerdo con la ecuación 11 el poder de resolución se vuelve más grande cuanto más elevado sea el orden de m. Explique esta aparente paradoja.
12. Dé su propia versión de por qué el aumento del número de rendijas N en una rejilla de difracción define mejor los máximos. ¿Por qué sucede lo mismo al disminuir la longitud de onda? Por qué sucede lo mismo cuando aumenta el espaciamiento d de la rejilla?
13. ¿Cuánta información puede usted descubrir con respecto a la estructura de una rejilla de difracción analizando el espectro que se forma con una fuente de luz monocromática? Sea λ = 589 nm, por ejemplo.
14. Suponga que los límites del espectro visible sean 430 y 680 nm. ¿Cómo diseñaría una rejilla, suponiendo que la luz incida normalmente sobre ella, de modo que el espectro del primer orden se traslape apenas con el espectro del segundo orden?
15. (*a*) ¿Por qué una rejilla de difracción tiene un rayado estrechamente espaciado? (*b*) ¿Por qué tiene un número grande de rayas?
16. Dos haces de luz de longitudes de onda casi iguales inciden sobre una rejilla de N rayas y no se resuelven. Sin embargo, se pueden resolver cuando el número de rayas aumenta. Sin considerar fórmulas, ¿explica esto algunos de los siguientes puntos?: (*a*) puede entrar más luz por la rejilla; (*b*) los máximos principales se vuelven más intensos y, por lo tanto, resolubles; (*c*) el patrón de la difracción se dispersa más y, por lo tanto, se pueden resolver las longitudes de onda; (*d*) existe un número grande de órdenes; (*e*) los máximos principales se vuelven más angostos y, por lo tanto, resolubles.
17. La relación $R = Nm$ indica que el poder de resolución de una rejilla dada puede hacerse tan grande como se desee eligiendo un orden de difracción arbitrariamente elevado. Analice esta posibilidad.
18. Demuestre que, dados una longitud de onda y un ángulo de difracción, el poder de resolución de una rejilla depende únicamente de su anchura W ($= Nd$).
19. ¿Cómo medirías usted experimentalmente (*a*) la dispersión D y (*b*) el poder de resolución R de un espectrógrafo de rejilla?
20. Para una familia dada de planos en un cristal, ¿puede ser la longitud de onda de los rayos X incidentes (*a*) demasiado grande o (*b*) demasiado pequeña para formar un haz difractado?
21. En general no se obtendrán haces difractados intensos cuando se permite que un haz paralelo de rayos X de longitud de onda incida sobre un cristal de cualquier material orientado al azar. Tales haces aparecen cuando (*a*) el haz de rayos X consta de una distribución continua de longitudes de onda más bien que de una sola longitud de onda o (*b*) la muestra no es un monocristal, sino un polvo finamente dividido. Explique cada caso.
22. ¿Experimenta refracción un haz de rayos X al entrar y salir de un cristal? Explique su respuesta.
23. ¿Por qué no puede usarse un simple cubo de arista $a_0/2$ como el de la figura 15 como una celda unitaria de cloruro de sodio?
24. En ciertos aspectos la reflexión de Bragg *difiere* de la difracción de la rejilla plana. De los siguientes postulados, ¿cuál es válido para la reflexión de Bragg y cuál no para la difracción de la rejilla? (*a*) Dos longitudes de onda diferentes deben superponerse. (*b*) La radiación de una longitud de onda dada debe enviarse en más de una dirección. (*c*) Las ondas largas se desvían más que las ondas cortas. (*d*) Existe únicamente un espaciamiento de rejilla. (*e*) Los máximos de difracción de una longitud de onda dada ocurren sólo para ángulos de incidencia particulares.
25. En la figura 24*a* se muestra esquemáticamente el arreglo experimental de Debye y Scherrer y en la figura 24*b* el

Figura 24 Pregunta 25.



patrón de difracción de rayos X correspondiente. (*a*) Explique el origen de los puntos en la figura 14, teniendo en cuenta que el método de Laue usa un monocristal grande y un haz de rayos X con una distribución continua de longitudes de onda. (*Sugerencia*: Cada punto corresponde a la dirección de dispersión de una familia de planos.) (*b*) Explique el origen de los anillos teniendo en cuenta que el método de Debye y Scherrer usa un gran número de pequeños cristales aislados orientados al azar y un haz monocromático de rayos X. (*Sugerencia*: Se obtienen todos los ángulos de incidencia posibles puesto que los pequeños cristales están orientados al azar.)

PROBLEMAS

Sección 47-1 Rendijas múltiples

1. Una rejilla de difracción de 21.5 mm de anchura tiene 6140 rayas. (*a*) Calcule la distancia d entre rayas adyacentes. (*b*) ¿A qué ángulos tendrán lugar los haces de intensidad máxima cuando la radiación incidente tiene una longitud de onda de 589 nm?
2. Una rejilla de difracción de 2.86 cm de anchura produce una desviación de 33.2° en el segundo orden con luz de 612 nm de longitud de onda. Halle el número total de rayas en la rejilla.
3. Con luz que procede de un tubo de descarga de gas incidiendo normalmente sobre una rejilla con una distancia de 1.73 μm entre los centros de rendijas adyacentes, aparece una línea verde con máximos bien definidos en los ángulos de transmisión medidos $\theta = \pm 17.6°$, 37.3°, -37.1°, 65.2° y -65.0°. Calcule la longitud de onda de la línea verde que mejor se ajuste a los datos.
4. Un haz angosto de luz monocromática choca con una rejilla con una incidencia normal y produce máximos bien definidos en los siguientes ángulos medidos desde la normal: 6°40′, 13°30′, 20°20′, 35°40′. No aparece ningún otro máximo en cualquier ángulo entre 0 y 35° 40′. La separación entre centros de rayas adyacentes en la rejilla es de 5040 nm. Halle la longitud de onda de la luz empleada.
5. Sobre una rejilla de difracción incide normalmente luz de 600 nm de longitud de onda. Se obtienen dos máximos principales en sen $\theta = 0.20$ y sen $\theta = 0.30$. Falta el cuarto orden. (*a*) ¿Cuál es la separación entre rendijas adyacentes? (*b*) ¿Cuál es la mínima anchura posible de cada rendija? (*c*) Nombre todos los órdenes que aparecen realmente en la pantalla con los valores obtenidos en (*a*) y en (*b*).
6. Una rejilla de difraccion está hecha de rendijas de 310 nm de anchura con una separación de 930 nm entre centros. La rejilla está iluminada mediante ondas planas monocromáticas, $\lambda = 615$ nm, siendo cero el ángulo de incidencia. (*a*) ¿Cuántos máximos de difraccion existen? (*b*) Halle la anchura de las líneas espectrales observadas en el primer orden cuando la rejilla tiene 1120 rendijas.
7. Deduzca la siguiente expresión para el patrón de intensidades en una "rejilla" de tres rendijas:

$$I = \tfrac{1}{9} I_m (1 + 4\cos\phi + 4\cos^2\phi),$$

donde

$$\phi = \frac{2\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}.$$

Suponga que $a \ll \lambda$ y guíese por la deducción de la fórmula que corresponde a la rendija doble (Ec. 17 del capítulo 46).

8. (*a*) Utilice el resultado del problema 7 y demuestre que la semianchura de las franjas en un patrón de difracción de tres rendijas, suponiendo que θ sea lo suficientemente pequeño de tal modo que sen $\theta \approx \theta$, es

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{3.2d}.$$

(*b*) Compárela con la expresión obtenida para el patrón de la rendija doble del problema 25 del capítulo 45, y demuestre que estos resultados apoyan la conclusión de que, para un espaciamiento de rendijas fijo, los máximos de interferencia resultan más definidos cuando el número de rendijas aumenta.

9. (*a*) Utilice el resultado del problema 7 y demuestre que una "rejilla" de tres rendijas tiene únicamente un máximo secundario. Encuentre (*b*) su posición y (*c*) su intensidad relativa.
10. Una rejilla de tres rendijas tiene una separación d entre rendijas adyacentes. Si se tapa la rendija del centro, ¿se volverán las semianchuras de los máximos de intensidad más anchas o más angostas y por qué factor? Véase el problema 8.
11. Una rejilla de difracción tiene un número N de rendijas grande, cada una de anchura a. Sea que $I_{máx}$ denote la intensidad en cierto máximo principal, y que I_k denote la intensidad del $k$ésimo máximo secundario adyacente. (*a*) Si $k \ll N$, demuestre por medio de un diagrama de fasores que, aproximadamente, $I_k/I_{máx} = 1/(k+\frac{1}{2})^2\pi^2$. (Compare esto con la fórmula de una sola rendija.) (*b*) Para aquellos máximos secundarios que están más o menos a la mitad entre dos máximos principales adyacentes, demuestre que, aproximadamente, $I_k/I_{máx} = 1/N^2$. (*c*) Considere el máximo principal central y aquellos máximos secundarios adyacentes para los que $k \ll N$. Demuestre que esta parte del patrón de difracción se parece cuantitativamente al de una sola rendija de anchura Na.

Sección 47-2 Rejillas de difracción

12. Una rejilla de difracción tiene 200 rayas/mm y se observa un máximo principal en $\theta = 28°$. (*a*) ¿Cuáles son las

longitudes de onda posibles de la luz visible incidente? (*b*) ¿De qué color son?

13. Una rejilla tiene 315 rayas/mm. ¿Para qué longitudes de onda en el espectro visible puede observarse la difracción de quinto orden?

14. Demuestre que en una rejilla con tiras alternativamente transparentes y opacas de igual anchura, están ausentes todos los órdenes pares (excepto $m = 0$).

15. Dada una rejilla con 400 rayas/mm, ¿cuántos órdenes de todo el espectro visible (400 a 700 nm) pueden producirse?

16. Supóngase que la luz está incidiendo sobre una rejilla con un ángulo ψ como se muestra en la figura 25. Demuestre que la condición para un máximo de difracción es

$$d(\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta) = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

En este capítulo sólo se ha tratado el caso $\psi = 0$ (compárese con la ecuación 1).

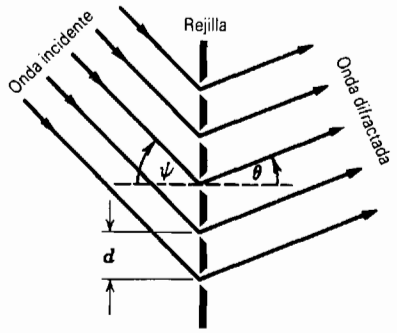


Figura 25 Problema 16.

17. Una rejilla de transmisión con $d = 1.50\ \mu$m está iluminada con diversos ángulos de incidencia por luz de 600 nm de longitud de onda. Trace la desviación angular del haz difractado de primer orden en función del ángulo de incidencia (0 a 90°) de la dirección incidente. Véase el problema 16.

18. Supóngase que los límites del espectro visible se eligen arbitrariamente como 430 nm y 680 nm. Calcule el número de rayas por mm de una rejilla que disperse el espectro de primer orden en un intervalo angular de 20.0°.

19. Luz blanca ($400\text{ nm} < \lambda < 700\text{ nm}$) incide sobre una rejilla. Demuestre que, no importa cuál sea el valor del espaciamiento d de la rejilla, los espectros del segundo y tercer orden se traslapan.

20. Una rejilla tiene 350 rayas/mm y está iluminada con incidencia normal por luz blanca. Sobre una pantalla que está a 30 cm de la rejilla se forma un espectro. Si se corta un orificio cuadrado de 10 mm en la pantalla, estando su borde interno a 50 mm del máximo central y paralelo a él, ¿qué intervalo de longitudes de onda pasa por el orificio?

Sección 47-3 Dispersión y poder de resolución

21. El "doblete del sodio" del espectro del sodio es un par de líneas con longitudes de onda de 589.0 y 589.6 nm. Calcule el número mínimo necesario de rayas en una rejilla para resolver este doblete en el espectro de segundo orden.

22. Una rejilla tiene 620 rayas/mm y una anchura de 5.05 mm. (*a*) ¿Cuál es el mínimo intervalo de longitudes de onda que puede ser resuelto en el tercer orden a $\lambda = 481$ nm? (*b*) ¿Cuántos órdenes superiores pueden verse?

23. Una fuente que contiene una mezcla de átomos de hidrógeno y deuterio emite luz que contiene dos colores rojos estrechamente espaciados a $\lambda = 656.3$ nm cuya separación es 0.180 nm. Halle el número mínimo de rayas necesario en una rejilla de difracción que pueda resolver estas líneas en el primer orden.

24. (*a*) ¿Cuántas rayas debe tener una rejilla de difracción de 4.15 cm de anchura para resolver las longitudes de onda de 415.496 nm y 415.487 nm en el segundo orden? (*b*) ¿A qué ángulo se encuentran los máximos?

25. En una rejilla particular se ve el doblete del sodio (véase problema 21) en tercer orden a 10.2° de la normal y apenas resuelto. Halle (*a*) el espaciamiento del rayado y (*b*) la anchura total de la rejilla.

26. Demuestre que la dispersión de una rejilla puede escribirse como

$$D = \frac{\tan\theta}{\lambda}.$$

27. Una rejilla tiene 40,000 rayas distribuidas en 76 mm. (*a*) ¿Cuál es su dispersión D esperada en °/nm para luz de sodio ($\lambda = 589$ nm) en los primeros tres órdenes? (*b*) ¿Cuál es su poder de resolución en estos órdenes?

28. Una luz que contiene una mezcla de dos longitudes de onda, 500 nm y 600 nm, incide normalmente sobre una rejilla de difracción. Se desea (1) que los máximos principales primero y segundo de cada longitud de onda aparezcan a $\theta \leq 30°$, (2) que la dispersión sea tan alta como es posible, y (3) que el tercer orden para 600 nm sea un orden faltante. (*a*) ¿Cuál sería la separación entre rendijas adyacentes? (*b*) ¿Cuál es la menor anchura posible de cada rendija? (*c*) Nombre todos los órdenes para 600 nm que aparecen realmente en la pantalla con los valores obtenidos en (*a*) y (*b*).

29. Una rejilla de difracción tiene un poder de resolución $R = \lambda/\Delta\lambda = Nm$. (*a*) Demuestre que el intervalo de frecuencias $\Delta\nu$ correspondiente que puede ser resuelto con precisión está dado por $\Delta\nu = c/Nm\lambda$. (*b*) De la ecuación 1, demuestre que "los tiempos de viaje" de los dos rayos extremos difieren en una cantidad $\Delta t = (Nd/c)\operatorname{sen}\theta$. (*c*) Demuestre que $(\Delta\nu)(\Delta t) = 1$, siendo esta relación independiente de los diversos parámetros de la rejilla. Suponga que $N \gg 1$.

Sección 47-4 Difracción de los rayos X

30. Se encuentra que rayos X de 0.122 nm de longitud de onda se reflejan en el segundo orden de la cara de un cristal de fluoruro de litio a un ángulo Bragg de 28.1°. Calcule la distancia entre planos adyacentes del cristal.

31. Un haz de rayos X de 29.3 pm de longitud de onda incide sobre un cristal de calcita con espaciamiento de 0.313 nm en la red. Halle el mínimo ángulo entre los planos del

cristal y el haz que resultará en una reflexión constructiva de los rayos X.

32. Unos rayos X monocromáticos de energía elevada inciden sobre un cristal. Si se observa una reflexión del primer orden a un ángulo Bragg de 3.40°, ¿a qué ángulo se esperaría la reflexión del segundo orden?

33. Un haz de rayos X, que contiene radiación de dos longitudes de onda distintas, se dispersa de un cristal, produciendo el espectro de intensidad que se muestra en la figura 26. El espaciamiento interplanar de los planos dispersantes es de 0.94 nm. Determine las longitudes de onda de los rayos X presentes en el haz.

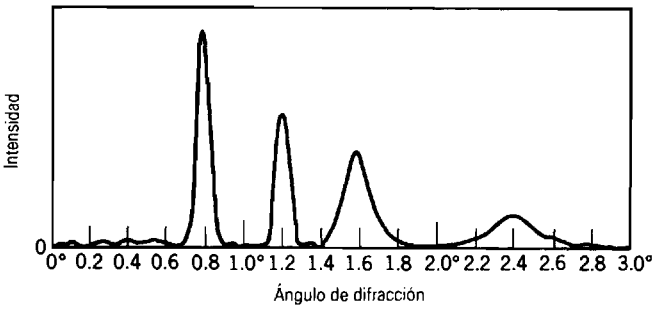


Figura 26 Problema 33.

34. Al comparar las longitudes de onda de dos líneas de rayos monocromáticos se observa que la línea *A* da un máximo de reflexión del primer orden a un ángulo de oblicuidad de 23.2° con la cara de un cristal. La línea *B*, que se sabe tiene una longitud de onda de 96.7 pm, da un máximo de reflexión del tercer orden a un ángulo de 58.0° de la misma cara del mismo cristal. (*a*) Calcule el espaciamiento interplanar. (*b*) Halle la longitud de onda de la línea *A*.

35. Unos rayos X monocromáticos inciden sobre un grupo de planos de un cristal de NaCl cuyo espaciamiento interplanar es de 39.8 pm. Cuando se gira el haz a 51.3° de la normal, se observa una reflexión de Bragg del primer orden. Halle la longitud de onda de los rayos X.

36. Demuestre que, en la difracción de Bragg por un haz monocromático de rayos X, no se obtendrá ningún máximo intenso cuando la longitud de onda de los rayos X sea mayor que el doble de la separación más grande entre los planos del cristal. Véase la pregunta 20.

37. Compruebe que no es posible determinar la longitud de onda de la radiación y el espaciamiento de los planos de Bragg reflejantes en un cristal midiendo los ángulos de la reflexión de Bragg en varios órdenes.

38. Supóngase que el haz incidente de rayos X de la figura 27 no es monocromático sino que contiene longitudes de onda en una banda de 95.0 a 139 pm. ¿Ocurrirán haces difractados asociados con los planos mostrados? De ser así, ¿qué longitudes de onda se difractan? Supóngase que d = 275 pm.

39. En un cierto cristal ocurre una dispersión de Bragg de primer orden a un ángulo de incidencia de 63.8°; véase la figura 28. La longitud de onda de los rayos X es de 0.261 nm. Si se supone que la dispersión proviene de los planos que se muestran con trazos entrecortados, determine el tamaño a_0 de la celda unitaria.

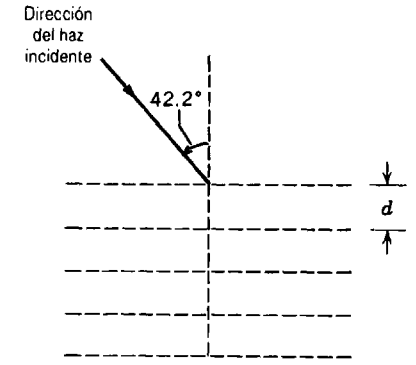


Figura 27 Problemas 38 y 40.

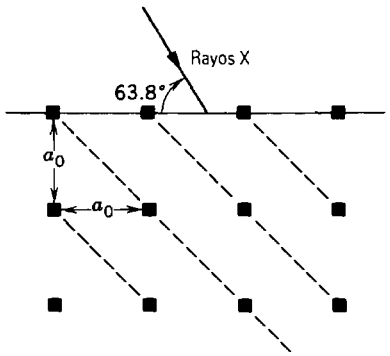


Figura 28 Problema 39.

40. Unos rayos X monocromáticos (λ = 0.125 nm) inciden sobre un cristal de cloruro de sodio, formando un ángulo de 42.2° con la línea de referencia que se muestra en la figura 27. Los planos mostrados son los de la figura 18*a*, para los cuales d = 0.252 nm. ¿A qué ángulos debe girarse el cristal para producir un haz difractado asociado con los planos que se muestran? Suponga que el cristal se gira alrededor de un eje que es perpendicular al plano de la página.

41. Considere una red cuadrada bidimensional e infinita como la de la figura 16*b*. Obviamente, el propio a_0 es un espacio interplanar. (*a*) Calcule los siguientes cinco espaciamientos interplanares más pequeños trazando figuras similares a la figura 18*a*. (*b*) Demuestre que la fórmula general es

$$d = a_0/\sqrt{h^2 + k^2},$$

donde h y k son ambas primos enteros relativos que no tienen otros factores comunes distintos de la unidad.

42. En el problema muestra 5 el haz con m = 1, permitido por consideraciones de interferencia, tiene una intensidad cero a causa de las propiedades difractantes de la celda unitaria para esta geometría de haces y cristal. Demués-

trelo. (*Sugerencia*: Demuestre que la "reflexión" de un plano atómico en la parte superior de una capa de celdas unitarias se cancela mediante una "reflexión" de un plano a través del centro de esta capa de celdas. Se prueba que todos los haces de orden impar tienen una intensidad de cero.)

CAPÍTULO 48

POLARIZACIÓN

En el capítulo 41 mostrábamos que las ondas electromagnéticas viajan de tal forma que el vector **E** *del campo eléctrico y el vector* **B** *del campo magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda. Es decir, las ondas electromagnéticas son ondas* transversales. *Esta predicción es consecuencia de las ecuaciones de Maxwell.*

En muchos de los experimentos que hemos descrito hasta ahora, las ondas luminosas no revelan su naturaleza transversal. Por ejemplo, la reflexión, la refracción, la interferencia y la difracción puede ocurrir tanto con ondas longitudinales (como el sonido) como con ondas transversales. Thomas Young (a quien se le recuerda también por el experimento de la rendija doble) proporcionó en 1817 la base experimental para creer que las ondas luminosas son transversales, basándose en los experimentos de sus contemporáneos Arago y Fresnel sobre el fenómeno que ahora llamamos doble refracción (véase la Sec. 48-4).

En el presente capítulo estudiamos la polarización *de la luz y de otras ondas electromagnéticas. La dirección de la polarización se refiere a la dirección del vector* **E** *de la onda. Estudiaremos los diferentes tipos de polarización, incluyendo la lineal y la circular, y consideraremos las técnicas experimentales para la generación y detección de luz polarizada.*

48-1 POLARIZACIÓN

Consideremos el arreglo experimental que se muestra en la figura 1. El transmisor de microondas de la izquierda está conectado a una antena de dipolo. Las cargas que se mueven de arriba a abajo de la antena producen una onda electromagnética cuyo vector **E** es (a distancias grandes del dipolo) paralelo a su eje. Cuando esta onda incide sobre la antena del receptor de microondas de la derecha,

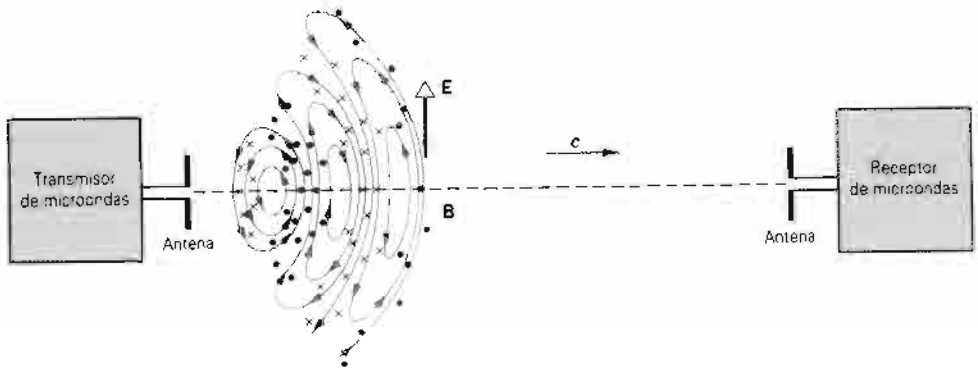


Figura 1 La onda electromagnética generada por el transmisor se polariza en el plano de la página, siendo su vector **E** paralelo al eje de la antena transmisora. La antena receptora puede detectar esta onda con una efectividad máxima cuando su antena se encuentra también en el plano y paralela a **E**. Si la antena receptora se gira a 90° alrededor de la dirección de propagación, no se detectaría ninguna señal.

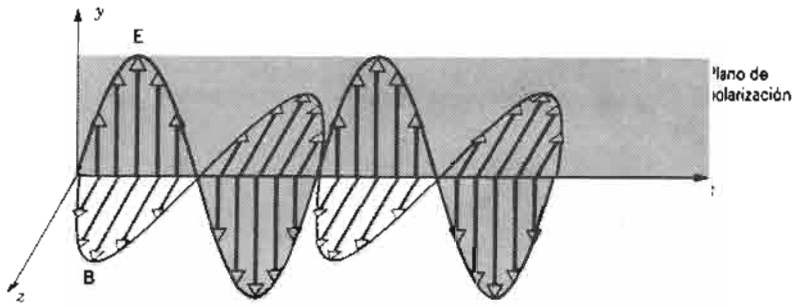


Figura 2 Una instantánea de una onda electromagnética viajera que muestra los vectores **E** y **B**. La onda está polarizada linealmente, en este caso en la dirección *y*. Se define al *plano de polarización* como el plano que contiene al vector **E** y la dirección de propagación; en este caso, el plano de polarización es el plano *xy*.

el vector **E** de la onda provoca que las cargas se muevan de arriba abajo de la antena. Estas cargas en movimiento producen una señal en el receptor.

Si el transmisor se gira 90° alrededor de la dirección de propagación de la onda, la señal caería a cero en el receptor. En este caso, el vector **E** de la onda estaría en ángulo recto con el eje de la antena receptora; la onda no produciría un movimiento de cargas a lo largo de la antena y, por lo tanto, no habría señal en el receptor. Si se girara el receptor en lugar del transmisor se obtendría un resultado similar.

La figura 2 representa una onda electromagnética como la de la figura 1. Como siempre sucede, los vectores **E** y **B** son perpendiculares uno al otro y a la dirección de propagación de la onda, que es la imagen básica de una onda transversal. Por convención, definimos la *dirección de polarización* de la onda como la dirección del vector **E** (la dirección *y* en la Fig. 2). El plano determinado por el vector **E** y la dirección de propagación de la onda (el plano *xy* en la Fig. 2) se llama *plano de polarización* de la onda. Nótese que al especificar dos direcciones de una onda electromagnética (la dirección de propagación y la dirección de **E**) se especifica la onda por completo, porque la dirección de **B** está fijada por estas dos direcciones.*

Se dice que la onda ilustrada en la figura 2 está *polarizada linealmente* (también se le llama planamente polarizada). Esto significa que el campo **E** permanece en una dirección fija (la dirección *y* en la Fig. 2) al propagarse la onda.

Al igual que en el experimento que se muestra en la figura 1, las ondas electromagnéticas polarizadas linealmente en la región de las microondas o de las de radio pueden producirse mediante la orientación del eje de una antena de dipolo que transmita en determinada dirección. Por ejemplo, las ondas que se usan para transmitir señales de televisión en Estados Unidos (y en México) están polarizadas en un plano horizontal; por esta razón, las antenas receptoras situadas en los techos de las casas están en un plano horizontal. (En Inglaterra, las señales de TV se transmiten con un plano de polarización vertical, por lo que las antenas se montan en un plano vertical.)

Los movimientos de los electrones en la antena de microondas de la figura 1 son *coherentes*; actúan al unísono al transmitir una onda electromagnética polarizada (véase la Fig. 3*a*). En fuentes luminosas ordinarias, como una lámpara incandescente o el Sol, los átomos se comportan independientemente y emiten ondas cuyos planos de polarización están orientados al azar con respecto a la dirección de propagación (Fig. 3*b*). Esta luz es transversal pero *no polarizada*; esto es, no existe un plano de polarización preferido. La simetría con respecto a la dirección de propagación oculta la verdadera naturaleza transversal de las ondas. Por el contrario, la luz láser es coherente y polarizada. La figura 3*c* muestra una manera alternativa y útil de representar una onda no polarizada. Los vectores **E** aleatorios se representan por medio de componentes en dos ejes perpendiculares cualesquiera (aquí *y* y *z*). En las ondas no polarizadas, las componentes tienen amplitudes iguales, y la diferencia de fase entre ellas varía al azar con el tiempo.

48-2 LÁMINAS POLARIZADORAS

La figura 4 muestra luz no polarizada que incide sobre una lámina de un material polarizador comercial llamado *Polaroid*.† En la lámina existe cierta dirección de polarización característica mostrada mediante líneas paralelas. La lámina transmite sólo aquellas componentes del tren de ondas cuyos vectores del campo eléctrico vibran paralelamente a esta dirección y absorben a los que vibran en ángulo recto a esta dirección. La luz que emerge de la

* Recuérdese el vector de Poynting, $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0$, estudiado en la sección 41-4, donde **S** está en la dirección de propagación de la onda. Dados **S** y **E**, podemos hallar la magnitud y dirección de **B**.

† Existen otras maneras de producir luz polarizada sin usar este conocido producto comercial. Más adelante mencionaremos algunas de ellas. Véase también "The Amateur Scientist", por Jearl Walker, *Scientific American*, diciembre de 1977, pág. 172, acerca de las maneras de fabricar láminas polarizadoras y placas de un cuarto de onda y de media onda, y para los diversos experimentos que pueden llevarse a cabo con ellas.

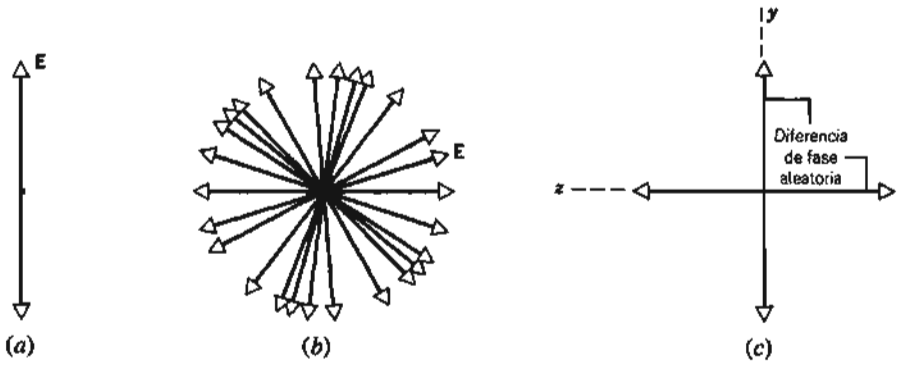


Figura 3 (*a*) Una onda polarizada linealmente, como la de la figura 2, vista desde la dirección de propagación. La onda se mueve hacia afuera del plano de la página. Sólo se muestra la dirección del vector **E**. (*b*) Una onda no polarizada, que puede considerarse como una superposición desordenada de muchas ondas polarizadas. (*c*) Una manera equivalente de mostrar una onda no polarizada, como dos ondas polarizadas linealmente formando un ángulo recto entre sí y con una diferencia de fase aleatoria entre ellas. La orientación de los ejes *y* y *z* con respecto a la dirección de la propagación es completamente arbitraria.

lámina está polarizada linealmente. La dirección de polarización de la lámina se fija durante el proceso de fabricación al incorporar ciertas moléculas de cadena larga en una lámina de plástico flexible y estirando luego la lámina de modo que las moléculas se alineen paralelamente entre sí. La radiación con su vector **E** paralelo a las moléculas largas se absorbe fuertemente, mientras que la radiación con su vector **E** perpendicular a esa dirección atraviesa la lámina.

En la figura 5 la lámina o *polarizador* está en el plano de la página, y la dirección de propagación sale de la página. El vector **E** muestra el plano de vibracion de un tren de ondas elegido al azar cayendo sobre la lámina. Dos componentes del vector, $\mathbf{E}_z$ (de magnitud E sen θ) y $\mathbf{E}_y$ (de magnitud E cos θ), pueden reemplazar a **E**, una paralela a la dirección de polarización y la otra en ángulo recto con ella. Sólo se transmite la componente $\mathbf{E}_y$; la componente $\mathbf{E}_z$ se absorbe en la lámina.

Cuando incide luz no polarizada sobre una lámina polarizadora ideal, la intensidad de la luz polarizada transmitida a través de la lámina es la mitad de la intensidad incidente, independientemente de cuál sea la orientación de la lámina. Podemos ver esto de la representación de la luz incidente no polarizada que aparece en la figura 3*c*, donde cada una de las componentes tiene, en promedio, la mitad de la intensidad de la luz incidente. Puesto que la orientacion de los ejes en la figura 3*c* es arbitraria, estamos en libertad de elegir que uno de ellos esté a lo largo de la dirección de transmisión de la lámina polarizadora sobre la que incide. Puesto que esta componente de la luz se transmitiría completamente y la otra se absorbería completamente, la lámina transmite el 50% de la luz incidente. Podemos llegar a esta misma conclusión a partir de la

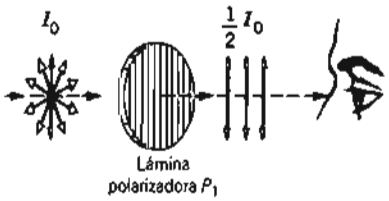


Figura 4 La luz no polarizada se polariza linealmente (y reduce su intensidad a la mitad) después de pasar a través de una lámina polarizadora. Las líneas paralelas, que no son realmente visibles en la lámina, indican su dirección de polarización.

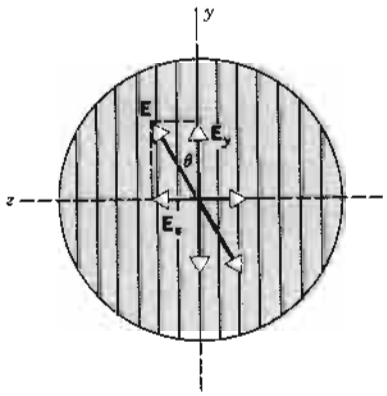


Figura 5 Otra vista de la acción de una lámina polarizadora. Sobre la lámina recae una onda polarizada linealmente (quizás una de las que se muestran en la Fig. 3*b*) orientada en una dirección θ aleatoria. Se transmite la componente *y* de **E**, y se absorbe la componente *z*.

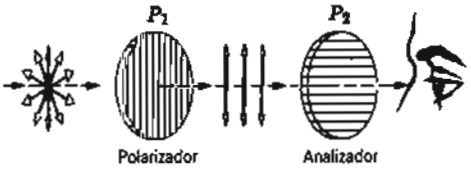


Figura 6 La luz no polarizada no se transmite a través de dos láminas polarizadoras cuyas direcciones de polarización sean perpendiculares entre sí.

figura 5, donde una onda polarizada en una dirección arbitraria incide en una lámina polarizadora. La componente E_y ($= E \cos \theta$) se transmite, de modo que la intensidad transmitida es proporcional a $E_y^2 = E^2 \cos^2 \theta$. Si la luz incidente no está polarizada, hallamos la intensidad total transmitida promediando esta expresión para todas las orientaciones posibles del plano de polarización de la luz incidente, esto es, para todos los valores posibles de θ. El valor promedio de $\cos^2 \theta$ es $\frac{1}{2}$, de modo que nuevamente concluimos que se transmite la mitad de la luz incidente. A causa de la reflexión y de la absorción parciales de la luz a lo largo de la dirección de polarización, las láminas polarizadoras reales transmiten sólo el 40% de la intensidad incidente. En nuestro estudio supodremos polarizadores ideales.

Coloquemos una segunda lámina polarizadora P_2 (la cual suele llamarse, cuando así se usa, *analizador*) como en la figura 6. Si P_2 se gira alrededor de la dirección de propagación, existen dos posiciones, a 180° entre sí, en las que la intensidad de la luz transmitida cae a cero; éstas son las posiciones en las que las direcciones de polarización de P_1 y P_2 están en ángulo recto.

Si la amplitud de la luz polarizada linealmente que incide sobre P_2 es E_m, la amplitud de la luz que emerge es $E_m \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre las direcciones polarizadoras de P_1 y P_2. Recordando que la intensidad del haz luminoso es proporcional al cuadrado de la amplitud, vemos que la intensidad I transmitida varía con θ de acuerdo con

$$I = I_m \cos^2 \theta, \qquad (1)$$

donde I_m, el valor máximo de la intensidad transmitida, ocurre cuando las direcciones de polarización de P_1 y P_2 son paralelas, esto es, cuando $\theta = 0$ o 180°. La figura 7*a*, en la que dos láminas polarizadoras que se traslapan están en la posición paralela ($\theta = 0$ o 180° en la Ec. 1), muestra que la intensidad de la luz transmitida a través de la región del traslape tiene su valor máximo. En la figura 7*b* una u otra de las láminas se ha girado 90° de modo que θ en la ecuación 1 tiene el valor 90° o 270°; la intensidad de la luz transmitida a través de la región del traslape es ahora un mínimo. La ecuación 1, llamada *ley de Malus*, fue descubierta por Etienne Louis Malus (1775-1812) experimentalmente en 1809, usando otras técnicas polarizadoras distintas a las que hemos descrito hasta ahora (véase la Sec. 48-3).

Históricamente, los estudios sobre la polarización (por Young y por Malus, por ejemplo) se realizaron para investigar la naturaleza de la luz. En la actualidad invertimos el procedimiento y deducimos algo sobre la naturaleza de un objeto del estado de polarización de la luz emitida, o dispersada, por ese objeto. De los estudios sobre la polarización de la luz reflejada por ellos, ha sido posible deducir que los granos del polvo cósmico presentes en nuestra galaxia se han orientado en el campo magnético galáctico débil (alrededor de 10^{-8} T) de modo que su dimensión de largo es paralelo a este campo. Los estudios de la polarización han indicado que los anillos de Saturno constan de cristales de hielo. El tamaño y forma de las partículas de virus puede determinarse por medio de la polarización de la luz ultravioleta dispersada por ellas.

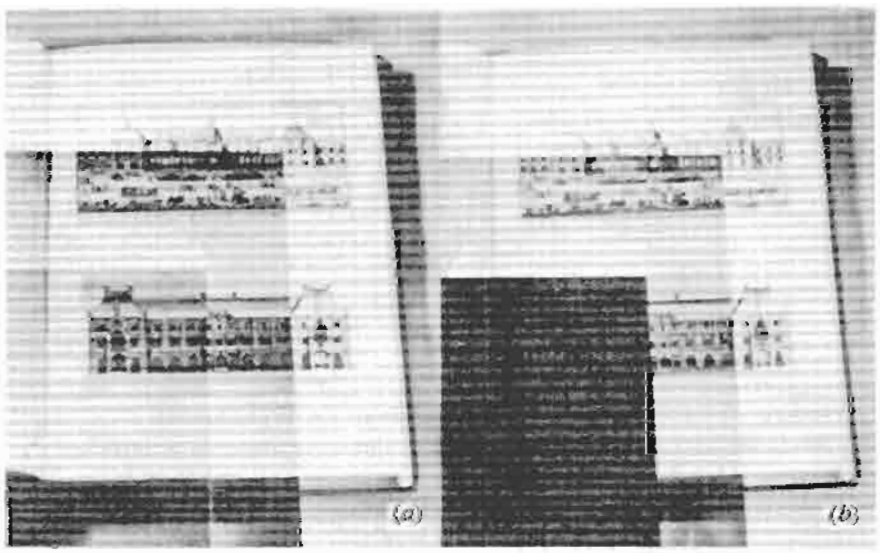


Figura 7 Dos láminas de material polarizador se colocan sobre la ilustración de un libro. En (*a*) las direcciones de polarización de las dos láminas son paralelas, de tal modo que la luz pasa a través de ellas; en (*b*) las direcciones de polarización son perpendiculares, de tal modo que la luz no pasa a través de ellas. (La ilustración muestra el Palacio de Luxemburgo en París. Malus descubrió el fenómeno de la polarización por la reflexión, usando un cristal de calcita para ver la luz solar reflejada desde las ventanas de este edificio.)

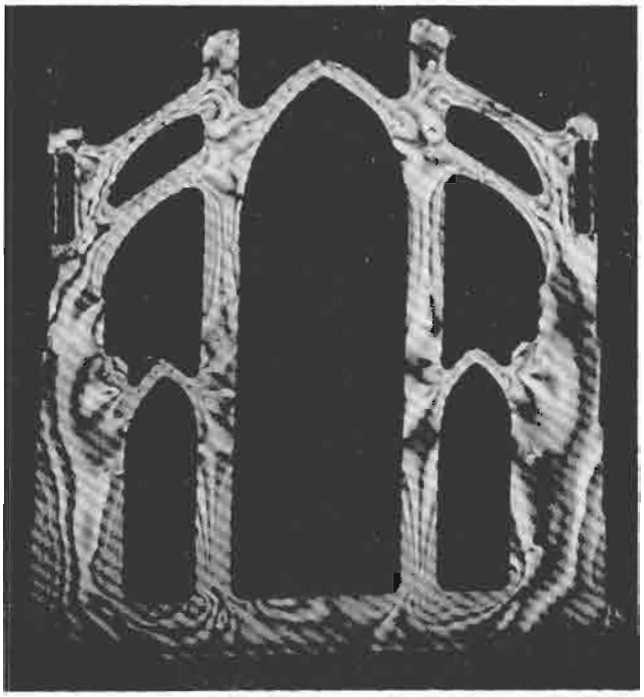


Figura 8 Una pieza de plástico vista entre láminas polarizadoras cruzadas. Los patrones de claros y oscuros muestan las regiones de esfuerzo en la estructura.

Información acerca de la estructura de los átomos y de los núcleos se obtiene a partir de estudios de la polarización de sus radiaciones emitidas en todas las partes del espectro electromagnético. Así, poseemos una técnica de investigación útil para estructuras que van desde el tamaño de una galaxia (10^{+22} m) hasta el de un núcleo (10^{-14} m).

La luz polarizada tiene también muchas aplicaciones en la industria y en la ingeniería. La figura 8 muestra una pieza de plástico que ha sido esforzada y colocada entre láminas polarizadoras, donde se revela el patrón de esfuerzos, que permite a los ingenieros refinar sus diseños para reducir el esfuerzo en lugares críticos de la estructura.* La figura 9 muestra una pantalla de cristal líquido común, que emplea la luz polarizada para formar letras y números, como se utiliza en las pantallas de relojes y calculadoras. El cristal líquido es un material con moléculas estiradas al igual que en las láminas polarizadoras; sin embargo, puede hacerse que la dirección larga siga a un campo eléctrico aplicado. El cristal líquido está dispuesto de modo que transmita la luz normalmente a través del polarizador y el analizador. Cuando se aplica el campo

* Para ejemplos de cómo se emplean tales modelos para estudiar la arquitectura clásica, véase "The Architecture of Christopher Wren", por Harold Dorn y Robert Mark, *Scientific American*, julio de 1981, pág. 160, y "Gothic Structural Experimentation", por Robert Mark y William W. Clark, *Scientific American*, noviembre de 1984, pág. 176.

Figura 9 Una computadora portátil con pantalla de cristal líquido.

eléctrico (por medio de una batería) a ciertas regiones, las moléculas se alinean de tal modo que no se transmite luz a través de esas regiones, las cuales forman los patrones oscuros en la pantalla.

Problema muestra 1 Dos láminas polarizadoras tienen sus direcciones de polarización paralelas de tal modo que la intensidad I_m de la luz transmitida sea máxima. ¿A qué ángulo debe girarse cualquiera de las láminas si se quiere que la intensidad disminuya a la mitad?

Solución De la ecuación 1, puesto que $I = \frac{1}{2}I_m$, tenemos

$$\tfrac{1}{2}I_m = I_m \cos^2 \theta,$$

o sea

$$\theta = \cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 45°, \pm 135°.$$

Se obtiene el mismo efecto, independientemente de qué lámina se gire o en qué dirección.

48-3 POLARIZACIÓN POR REFLEXIÓN

Malus descubrió en 1809 que la luz puede ser parcial o totalmente polarizada por reflexión. Cualquiera que haya visto el reflejo del Sol en el agua mientras usaba un par de anteojos de material polarizador para protegerse de sus rayos ha notado probablemente el efecto. Sólo es necesario inclinar la cabeza de un lado al otro, haciendo girar así las láminas polarizadoras, para observar que la intensidad de la luz solar reflejada pasa por un mínimo.

La figura 10 muestra un haz no polarizado cayendo sobre una superficie de vidrio. Los vectores **E** se resuelven

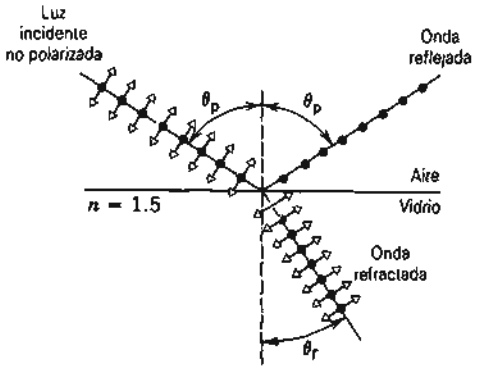


Figura 10 Para un ángulo particular de incidencia θ_p, la luz reflejada está completamente polarizada. La luz refractada está parcialmente polarizada. Los puntos indican las componentes de la polarización perpendiculares al plano de la página, y las flechas dobles indican las componentes de la polarización paralelas al plano de la página.

en dos componentes (como en la Fig. 3*c*), una perpendicular al plano de incidencia (el plano de la Fig. 10) y otra paralela a este plano. En promedio, estas dos componentes son de igual amplitud para luz incidente completamente no polarizada.

En el vidrio y en otros materiales dieléctricos existe un ángulo de incidencia en particular, llamado el *ángulo de polarización* θ_p (conocido también como *ángulo de Brewster*), en el que el coeficiente de reflexión de la componente de la polarización en el plano de la figura 10 es cero. Esto significa que el haz reflejado desde el vidrio, si bien de baja intensidad, está polarizado linealmente, con su plano de polarización perpendicular al plano de incidencia. Esta polarización del haz reflejado puede verificarse fácilmente analizándolo con una lámina polarizada.

Cuando la luz incide con el ángulo de polarización, la componente con la polarización paralela al plano de incidencia se refracta por completo, mientras que la componente perpendicular se refleja en parte y se refracta en parte. Así, el haz refractado, que es de alta intensidad, está parcialmente polarizado. Si este haz refractado pasara fuera del vidrio hacia el aire e incidiera entonces sobre una segunda superficie de vidrio (de nuevo con el ángulo θ_p), la componente perpendicular se reflejaría, y el haz refractado tendría una polarización ligeramente mayor. Usando una pila de placas de vidrio, obtendremos reflejos de las superficies sucesivas, y podremos aumentar la intensidad del haz emergente reflejado (véase la Fig. 11). Las componentes perpendiculares se suprimen progresivamente del haz transmitido, haciéndolo más completamente polarizado en el plano de la figura 11.

En el ángulo de polarización se encuentra experimentalmente que los haces reflejado y refractado están en ángulo recto, o sea (Fig. 10)

$$\theta_p + \theta_r = 90°.$$

De la ley de Snell,

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_p = n_2 \operatorname{sen} \theta_r.$$

Al combinar estas ecuaciones se llega a

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_p = n_2 \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = n_2 \cos \theta_p,$$

o sea

$$\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1}, \tag{2}$$

donde el haz incidente está en el medio 1 y el haz refractado está en el medio 2. Si el medio 1 es el aire ($n_1 = 1$), se obtiene que

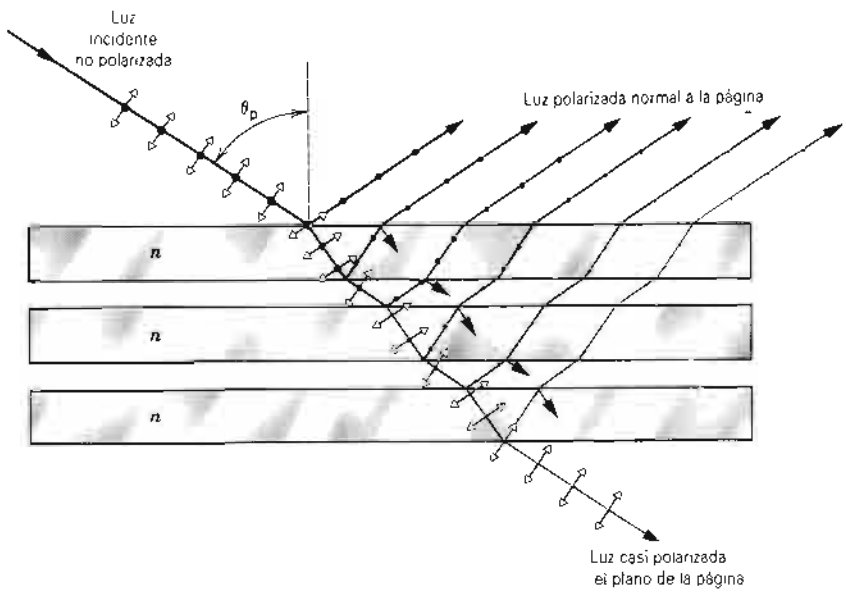


Figura 11 La polarización de la luz en un apilamiento de placas de vidrio. La luz no polarizada incide con el ángulo θ_p. Todas las ondas reflejadas se polarizan perpendicularmente al plano de la página. Después de pasar por varias capas, la onda transmitida ya no contiene ninguna componente apreciable polarizada perpendicular a la página.

$$\tan \theta_p = n, \qquad (3)$$

donde n es el índice de refracción del medio en donde incide la luz. La ecuación 2 se conoce como la *ley de Brewster* en honor de Sir David Brewster (1781-1868), quien la dedujo empíricamente en 1812. Es posible probar esta ley rigurosamente de las ecuaciones de Maxwell (véase también la pregunta 14).

Problema muestra 2 Deseamos usar una placa de vidrio (n = 1.50) en el aire como un polarizador. Determine el ángulo de polarización y el ángulo de refracción.

Solución De la ecuación 3

$$\theta_p = \tan^{-1} 1.50 = 56.3°.$$

El ángulo de refracción se deduce de la ley de Snell:

$$\text{sen } \theta_p = n \text{ sen } \theta_r,$$

o sea

$$\text{sen } \theta_r = \frac{\text{sen } 56.3°}{1.50} = 0.555 \text{ o sea } \theta_r = 33.7°.$$

48-4 DOBLE REFRACCIÓN

En capítulos anteriores supusimos que la velocidad de la luz, y en consecuencia el índice de refracción, es independiente de la dirección de propagación en el medio y del estado de polarización de la luz. Los líquidos, los sólidos amorfos como el vidrio, y los sólidos cristalinos que tienen simetría cúbica muestran normalmente este comportamiento y se dice que son *ópticamente isotrópicos*. Muchos otros sólidos cristalinos son ópticamente *anisotrópicos* (esto es, no son isotrópicos).* La anisotropía óptica es la responsable del patrón de esfuerzos que se ilustra en la figura 8, si bien en este caso el material no es cristalino.

La figura 12, en la que un cristal pulido de calcita ($CaCO_3$) se encuentra sobre un modelo impreso, muestra la anisotropía óptica de este material; *la imagen aparece doble*. Además, las dos imágenes muestran polarizaciones perpendiculares, como se indica en la figura 13, la cual muestra un haz de luz no polarizada que incide sobre un

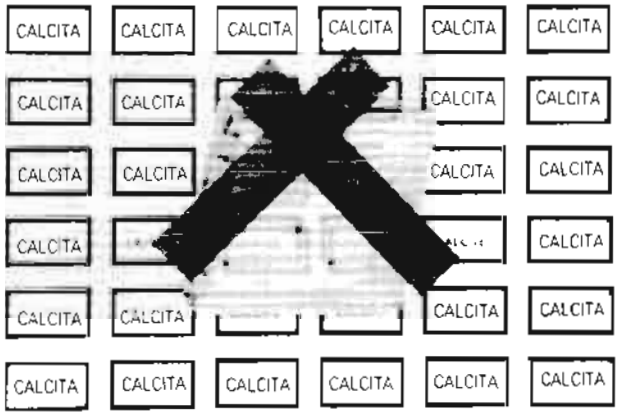


Figura 12 Una vista a través de un cristal birrefringente, que muestra las dos imágenes resultantes de los dos índices de refracción diferentes. Pueden verse imágenes dobles donde no hay una tira de material polarizador. El eje de polarización de cada tira es paralelo a su dirección larga. Nótese que las dos imágenes tienen polarizaciones perpendiculares.

cristal de calcita en ángulo recto con una de sus caras. El haz se divide en dos en la superficie del cristal. La "doble desviación" de un haz transmitido a través de la calcita, que se exhibe en las figuras 12 y 13, se llama *doble refracción* o *birrefringencia*. Este fenómeno fue estudiado por Huygens, quien lo describió en su *Tratado sobre la luz*, publicado en 1678.

Si los dos haces emergentes de la figura 13 se analizan con una lámina polarizadora, se encuentra que están polarizados linealmente, con sus planos de vibración en ángulo recto entre sí. La figura 12 muestra que cada uno de los dos polarizadores cruzados transmite únicamente una de las dos imágenes (pero no la otra).

Algunos materiales birrefringentes son fuertemente absorbentes para una componente de polarización, mientras

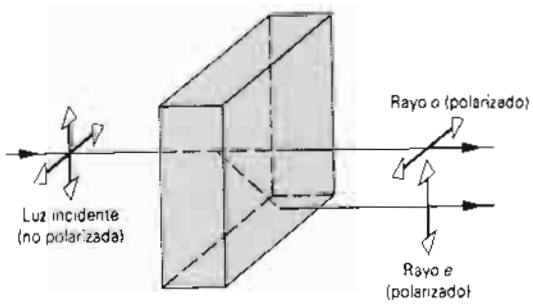


Figura 13 La luz no polarizada que incide sobre un material birrefringente (como un cristal de calcita) se divide en dos componentes, el rayo *o* (que sigue la ley de refracción de Snell) y el rayo *e* (que no sigue la ley de Snell). Los dos rayos refractados tienen polarizaciones perpendiculares, como se muestra.

* Los sólidos pueden ser anisotrópicos en muchas de sus propiedades: mecánica (la mica se corta sin dificultad en sólo un plano), eléctrica (un cubo de grafito cristalino no tiene la misma resistencia eléctrica entre todos los pares de caras opuestas), magnética (un cubo de níquel cristalino se magnetiza más fácilmente en ciertas direcciones que en otras), y así sucesivamente.

TABLA 1 ÍNDICES DE REFRACCIÓN PRINCIPALES DE VARIOS CRISTALES BIRREFRINGENTES[a]

Cristal	*Fórmula*	n_o	n_e	$n_e - n_o$
Hielo	H_2O	1.309	1.313	+0.004
Cuarzo	SiO_2	1.544	1.553	+0.009
Wurtzita	ZnS	2.356	2.378	+0.022
Calcita	$CaCO_3$	1.658	1.486	−0.172
Dolomita	$CaO \cdot MgO \cdot 2CO_2$	1.681	1.500	−0.181
Siderita	$FeO \cdot CO_2$	1.875	1.635	−0.240

[a] Para luz de sodio, $\lambda = 589$ nm.

que la otra pasa a través con poca absorción. Tales materiales se llaman *dicroicos*. Las láminas polarizadoras son ejemplos de un material dicroico.

Cuando se llevan a cabo experimentos en varios ángulos de incidencia, se encuentra que uno de los haces en la figura 13 (representado por el *rayo ordinario*, o rayo *o*) obedece la ley de la refracción de Snell en la superficie del cristal, de igual manera que un rayo que pasa de un medio isotrópico a otro. El segundo haz (representado por el *rayo extraordinario*, o rayo *e*) no obedece la ley de Snell. En la figura 13, por ejemplo, el ángulo de incidencia de la luz incidente es cero pero el ángulo de refracción del rayo *e*, contrario a la predicción de la ley de Snell, no es cero. En general, el rayo *e* ni siquiera se encuentra en el plano de incidencia.

Esta diferencia entre las ondas representadas por los rayos *o* y *e* con respecto a la ley de Snell puede explicarse en estos términos:

1. La onda *o* viaja en el cristal con la misma velocidad v_o en todas direcciones. En otras palabras, el cristal tiene, para esta onda, un solo índice de refracción n_o, precisamente como un sólido isotrópico.

2. La onda *e* viaja en el cristal con una velocidad que varía con la dirección entre v_o y v_e. Es decir, el índice de refracción, que se define como c/v, varía con la dirección entre n_o y n_e.

Las cantidades n_o y n_e se llaman *índices de refracción principales* del cristal. El problema 19 sugiere cómo medirlos. La tabla 1 muestra estos índices para seis cristales birrefringentes. Para tres de ellos la onda *e* es más lenta; para los otros tres es más rápida que la onda *o*. Algunos cristales birrefringentes (como la mica y el topacio) son más complejos ópticamente que la calcita y requieren *tres* índices de refracción principales para una descripción completa de sus propiedades ópticas. Los cristales cuya estructura básica es cúbica (como el NaCl; véase la Fig. 15 del capítulo 47) son ópticamente isotrópicos, requiriendo sólo *un* índice de refracción.

En la figura 14 se resume el comportamiento de las velocidades de las dos ondas que viajan en la calcita; en ella se muestran dos superficies de onda dispersándose desde una fuente puntual de luz *S* imaginaria incrustada en el cristal. La dirección característica en el cristal donde $v_o = v_e$ se llama *eje óptico*. El eje óptico es una propiedad del cristal y es independiente de la polarización o la dirección de propagación de la luz.

La superficie de la onda *o* en la figura 14 es una esfera, porque el medio es isotrópico para las ondas *o*. La superficie de la onda *e* no puede ser esférica, porque la velocidad de la onda *e* varía con la dirección relativa al eje óptico. La superficie de la onda *e* es un elipsoide de revolución alrededor del eje óptico. Las dos superficies de onda representan luz que tiene dos estados de polarización diferentes. Si consideramos por el momento sólo rayos que estén en el plano de la figura 14, entonces (1) el plano de polarización para los rayos *o* es perpendicular a la figura, como se indica por medio de los puntos, y (2) el de los rayos *e* coincide con el plano de la figura, como se

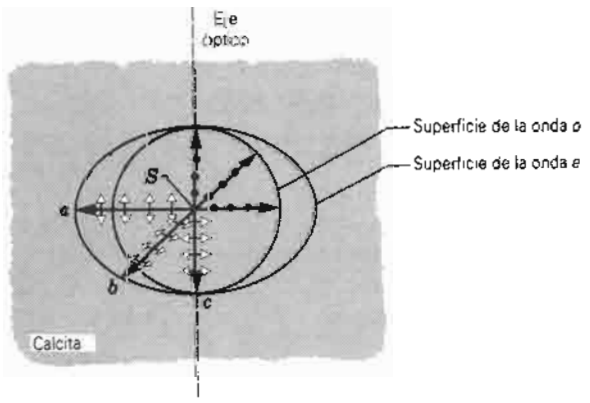


Figura 14 Superficies de onda de Huygens producidas por una fuente puntual *S* incorporada en la calcita. Se muestran los estados de polarización de tres rayos *o* y tres rayos *e* por medio de puntos y flechas, respectivamente. En el caso general (véase, por ejemplo, el rayo *Sb*), la dirección de la polarización no es perpendicular al rayo.

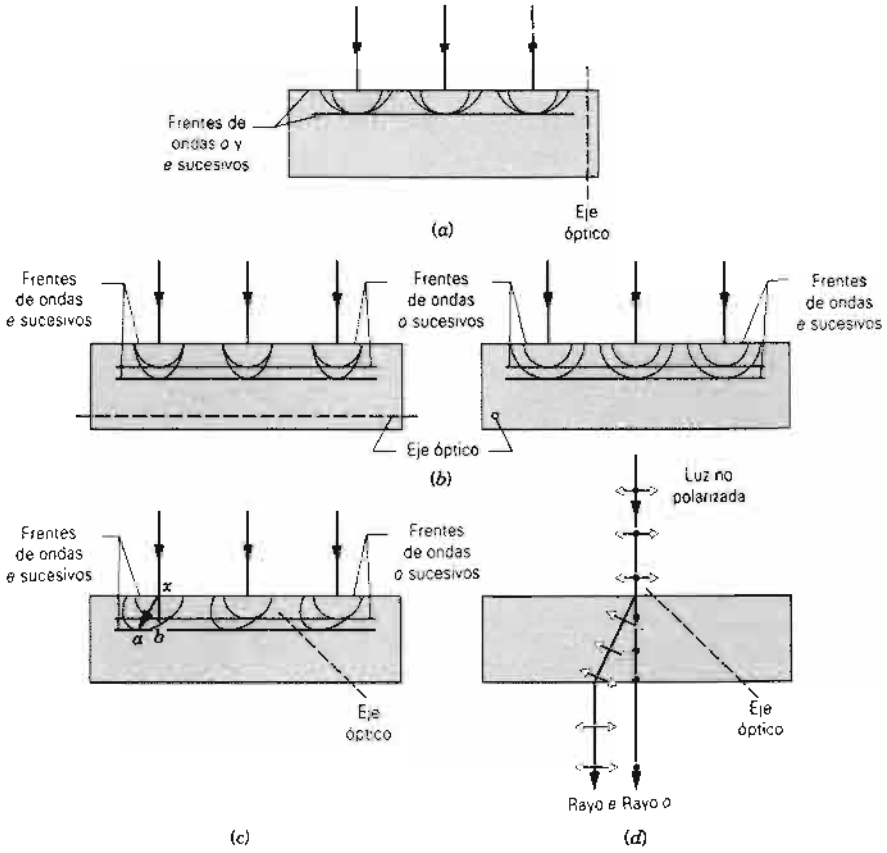


Figura 15 Sobre una placa cortada de un cristal de calcita cae luz no polarizada con incidencia normal. Se muestran las pequeñas ondas secundarias de Huygens, como en la figura 14. (*a*) No ocurre una doble refracción o una diferencia de velocidad. (*b*) No se presenta una doble refracción, pero existe una diferencia de velocidad. (*c*) Ocurre tanto doble refracción como una diferencia de velocidad. (*d*) Lo mismo que (*c*), pero mostrando los estados de polarización y los rayos emergentes.

muestra por medio de las flechas dobles. Al final de esta sección describimos los estados de polarización más plenamente.

Podemos emplear el principio de Huygens para estudiar la propagación de las ondas luminosas en los cristales birrefringentes. La situación general puede ser muy complicada, con la onda *e* emergiendo en un plano diferente del de la onda *o*. Sin embargo, podemos orientar al cristal de tal modo que las direcciones de propagación de la onda incidente, la onda *o*, y la onda *e* estén todas ellas en el mismo plano. En el análisis que sigue suponemos que así se ha hecho en este caso.

La figura 15*a* muestra el caso especial en que cae luz no polarizada con incidencia normal sobre una placa de calcita cortada de un cristal de tal forma que el eje óptico sea normal a la superficie. Consideremos un frente de ondas que, en el tiempo $t = 0$, coincida con la superficie del cristal. Según Huygens, podemos hacer que cualquier punto de esta superficie sirva de centro de radiación de un conjunto doble de las ondas de Huygens, como las de la figura 14. El plano tangencial a estas ondas representa la nueva posición de este frente de ondas a un tiempo t posterior. El haz incidente de la figura 15*a* se propaga a través del cristal sin desviación con la velocidad v_o. El haz que emerge de la placa tiene el mismo carácter de polarización que el haz incidente. La placa de calcita, en estas circunstancias especiales únicamente, se comporta como un material isotrópico, y no puede hacerse una distinción entre las ondas *o* y las ondas *e*. Ambas viajan paralelas al eje óptico y, por lo tanto, tienen la misma velocidad.

La figura 15*b* muestra dos vistas de otro caso especial, es decir, luz incidente no polarizada que cae en ángulo recto sobre una placa cortada, de tal modo que el eje óptico sea paralelo a su superficie. En este caso también el haz incidente se propaga sin desviarse. Sin embargo, la dirección de la propagación es perpendicular el eje óptico, y aquellas ondas que se polariza perpendicularmente al eje tienen una velocidad diferente que las que se polarizan a lo largo del eje. Las primeras son ondas *o* y su velocidad es v_o; las segundas son ondas *e* y su velocidad es v_e. Existirá una diferencia de fase entre las ondas *o* y las ondas *e* cuando emergen desde el fondo de la placa.

La figura 15*c* muestra luz no polarizada cayendo con incidencia normal sobre una placa de calcita cortada de tal modo que su eje óptico forme un ángulo arbitrario con la superficie del cristal. Se producen dos haces separados espacialmente, como en la figura 13. Viajan a través del cristal con velocidades diferentes, siendo v_o la de las ondas *o* e intermedia entre v_o y la v_e la de las ondas *e*. Nótese que el rayo *xa* representa el camino *óptico* más corto para la transferencia de la energía luminosa entre el

punto x y el frente de ondas e. La energía transferida a lo largo de cualquier otro rayo, en particular a lo largo del rayo xb, tendría un tiempo de tránsito mayor, consecuencia del hecho de que la velocidad de las ondas e varía con la dirección. La figura 15*d* representa el mismo caso que la figura 15*c*. Muestra a los rayos que emergen de la placa, como en la figura 13, y aclara que los haces emergentes se polarizan en ángulo recto entre sí; esto es, presentan una *polarización cruzada*.

Una analogía mecánica (*Opcional*)

Buscamos ahora entender, en términos de la estructura atómica de los cristales ópticamente anisotrópicos, cómo pueden existir ondas luminosas con polarización cruzada con velocidades diferentes. La luz se propaga en un cristal por la acción de los vectores vibratorios **E** de la onda sobre los electrones del cristal. Estos electrones, los cuales experimentan fuerzas de restitución electrostáticas si se desplazan de sus posiciones de equilibrio, se ponen en una oscilación periódica forzada alrededor de estas posiciones y transmiten en la perturbación ondulatoria transversal que consituye la onda luminosa. La intensidad de las fuerzas de restitución puede medirse por una constante de fuerza k, como en el oscilador armónico simple estudiado en el capítulo 15 (para el cual $F = -kx$).

En materiales ópticamente isotrópicos la constante de fuerza k es la misma para todas las direcciones del desplazamiento de los electrones de sus posiciones de equilibrio. Sin embargo, en los cristales birrefringentes k varía con la dirección. Para los desplazamientos de los electrones que se encuentren en un plano en ángulo recto con el eje óptico, k tiene el valor constante k_o, independientemente de cómo se oriente el desplazamiento en este plano. Para los desplazamientos paralelos al eje óptico, k tiene el valor mayor (en la calcita) k_e. Nótese cuidadosamente que la velocidad de una onda en un cristal está determinada por la dirección en la que vibran los vectores **E** y *no* por la dirección de propagación. Son las vibraciones del vector transversal **E** las responsables de las fuerzas de restitución y determinan, por lo tanto, la velocidad de las ondas. Nótese también que, cuanto más intensa sea la fuerza de restitución, es decir, cuanto mayor sea k, más rápida será la onda. Para ondas que viajen a lo largo de una cuerda estirada, por ejemplo, la fuerza de restitución de los desplazamientos transversales está determinada por la tensión F en la cuerda. La ecuación 18 del capítulo 19 ($v = \sqrt{F/\mu}$) demuestra que un aumento en F implica un aumento en la velocidad v de la onda.

La figura 16, que muestra una cadena larga y pesada colgada en su extremo superior, proporciona una analogía mecánica unidimensional de la doble refracción. Se aplica específicamente a las ondas o y e que viajan en ángulo recto con el eje óptico, como en la figura 15*b*. Si se hace que el bloque del que está colgada oscile, como en la figura 16*a*, a lo largo de la cadena viaja una onda transversal con cierta velocidad. Si el bloque oscila en sentido longitudinal, como en la figura 16*b*, se propaga también otra onda transversal. La fuerza de restitución de la segunda onda es mayor que la de la primera, siendo más rígida la cadena para las vibraciones en su plano (Fig. 16*b*) que perpendicularmente al plano (Fig. 16*a*). Así, la segunda onda viaja a lo largo de la cadena con una velocidad mayor.

En el lenguaje de la óptica diríamos que la velocidad de una onda transversal en la cadena depende de la orientación del plano de vibración de la onda. Si hacemos oscilar la parte superior de la cadena de una manera aleatoria, la perturbación ondulatoria en un punto a lo largo de la cadena puede describirse como la suma de las dos ondas, polarizadas en ángulo recto y viajando con velocidades diferentes. Esto corresponde exactamente a la situación óptica de la figura 15*b*.

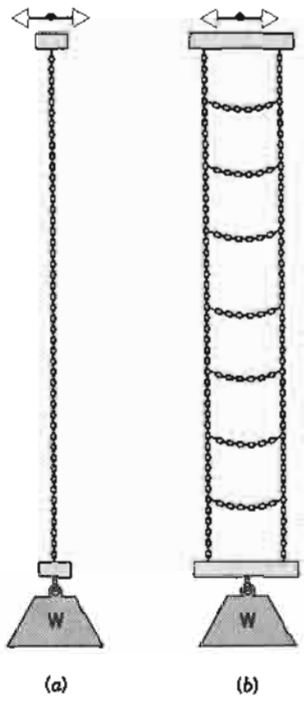


Figura 16 Modelo mecánico unidimensional de la doble refracción. (*a*) La vibración es perpendicular al plano de la cadena. (*b*) La vibración está en el plano de la cadena.

Para las ondas que viajen paralelamente al eje óptico, como en la figura 15*a*, o en las que viajan en materiales ópticamente isotrópicos, la analogía mecánica apropiada es una sola cadena suspendida con un peso en su extremo inferior. Aquí existe una sola velocidad de propagación, independientemente de cómo oscile el extremo superior. Las fuerzas de restitución son las mismas para todas las orientaciones del plano de polarización de las ondas que viajan a lo largo de la cadena.

Estas consideraciones nos permiten entender con mayor claridad los estados de polarización de la luz representados por la superficie de la doble onda de la figura 14. En la superficie (esférica) de la onda o, las vibraciones del vector **E** deben estar en todas partes en ángulo recto con el eje óptico. Si esto es así, se aplica siempre la misma constante de fuerza k_o, y las ondas o viajan con la misma velocidad en todas direcciones. Más específicamente, si trazamos un rayo en la figura 14 desde S hasta la superficie de la onda o, considerada tridimensionalmente (esto es, como una esfera), las vibraciones del vector **E** están siempre en ángulo recto con el plano definido por este rayo y el eje óptico. Así, estas vibraciones están siempre en ángulo recto con el eje óptico.

Para la superficie (elipsoidal) de la onda e, las vibraciones del vector **E** tienen, en general, una componente paralela al eje óptico. Para los rayos como Sa en la figura 14 o los rayos e de la figura 15*b*, las vibraciones son completamente paralelas a este eje. Así, opera una constante de fuerza k_e (en la calcita) relativamente intensa, y la velocidad v_e de la onda es relativamente grande. Para los rayos e como Sb en la figura 14, la componente paralela de las vibraciones del vector **E** es menor que el 100%, de modo que la velocidad correspondiente de la onda es menor

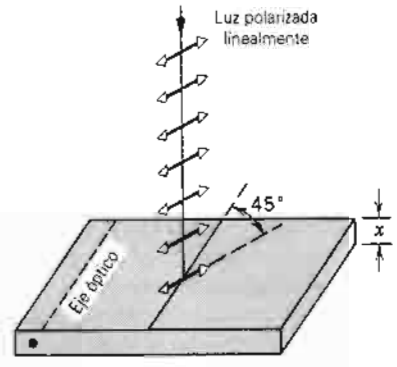


Figura 17 Luz polarizada linealmente incide sobre una placa birrefringente cortada con su eje óptico paralelo a la superficie. El plano de polarización forma un ángulo de 45° con el eje óptico.

que v_e. Para el rayo *Sc* en la figura 14, la componente paralela es cero, y desaparece la distinción entre los rayos *o* y *e*. ■

48-5 POLARIZACIÓN CIRCULAR

Hagamos que luz polarizada linealmente de frecuencia angular ω ($= 2\pi\nu$) incida normal sobre una placa de calcita cortada de tal modo que el eje óptico sea paralelo a la cara de la placa, como se muestra en la figura 17. Las dos ondas que emergen están polarizadas linealmente formando un ángulo recto entre ellas y, si el plano de vibración incidente está a 45° del eje óptico, tienen amplitudes iguales. Puesto que las ondas viajan a través del cristal con velocidades diferentes, existe una diferencia de fase ϕ entre ellas al emerger del cristal. Si se elige el espesor del cristal de tal modo que (para una frecuencia de la luz dada) $\phi = 90°$, decimos que la placa es de *un cuarto de onda*. Se dice que la luz emergente está *polarizada circularmente*.

En la sección 15-7 vimos que dos ondas polarizadas linealmente que vibren en ángulo recto con una diferencia de fase de 90° pueden representarse como las proyecciones de dos ejes perpendiculares de un vector que gire con una frecuencia angular ω alrededor de la dirección de propagación. Esta descripción se aplica a la luz emergente en la figura 17. Estas dos descripciones de la luz polarizada circularmente son por completo equivalentes. La figura 18 aclara la relación entre estas dos descripciones.

Supongamos luz polarizada circularmente, como la de la figura 18, que incide sobre una lámina polarizadora. La luz emergente está polarizada linealmente. Calculemos su intensidad. Al entrar en la lámina, la luz polarizada circularmente puede representarse por

$$E_y = E_m \operatorname{sen} \omega t \quad \text{y} \quad E_z = E_m \cos \omega t, \tag{4}$$

donde *y* y *z* representan ejes arbitrariamente perpendiculares de una onda que se propaga en la dirección *x*. Estas ecuaciones representan la equivalencia entre una onda polarizada circularmente y dos ondas polarizadas linealmente con amplitudes E_m iguales y una diferencia de fase de 90°. La intensidad resultante en la onda incidente polarizada circularmente es proporcional a $E^2 = E_y^2 + E_z^2$, que es igual a E_m^2 cuando las componentes del campo eléctrico están dadas por la ecuación 4. De aquí que

$$I_{cp} \propto E_m^2 \tag{5}$$

Hagamos que la dirección polarizadora de la lámina forme un ángulo arbitrario θ con el eje *y* como se muestra en la figura 19. La amplitud instantánea de la onda polarizada linealmente transmitida por la lámina es

$$\begin{aligned} E &= E_z \operatorname{sen} \theta + E_y \cos \theta \\ &= E_m \cos \omega t \operatorname{sen} \theta + E_m \operatorname{sen} \omega t \cos \theta \\ &= E_m \operatorname{sen} (\omega t + \theta). \end{aligned} \tag{6}$$

La intensidad de la onda transmitida por la lámina es proporcional a E^2, o sea

$$I \propto E_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \theta). \tag{7}$$

El ojo y otros instrumentos de medición sólo responden a la intensidad promedio $\bar{I}$, la cual se halla al reemplazar $\operatorname{sen}^2(\omega t + \theta)$ por su valor promedio sobre uno o más ciclos ($= \frac{1}{2}$), y entonces

$$\bar{I} \propto \tfrac{1}{2} E_m^2. \tag{8}$$

Al comparar con la ecuación 5 se encuentra que la inserción de la lámina polarizadora reduce la intensidad a la mitad. La orientación de la lámina no constituye una diferencia, puesto que θ no aparece en esta ecuación; esto es de esperarse si la luz polarizada circularmente se representa por un vector rotatorio, porque todas las orientaciones alrededor de la dirección de propagación son equivalentes. Cuando la luz no polarizada incide sobre una lámina polarizadora, la intensidad de la luz transmitida se reduce también en $\frac{1}{2}$, independientemente de la orientación de la lámina, como lo vimos en la sección 48-2. Por lo tanto, una sola lámina polarizadora no puede usarse para distinguir entre la luz no polarizada y la luz polarizada circularmente.

Para distinguir entre luz polarizada y luz no polarizada, podemos usar una placa de un cuarto de onda. Supongamos que la luz polarizada circularmente incide sobre una placa de un cuarto de onda cuyo eje óptico tiene una orientación arbitraria. Las componentes de la luz incidente a lo largo y perpendicular a la dirección del eje óptico difieren en fase en 90°. Después de pasar a través de la placa de un cuarto de onda, se introduce una diferencia de fase *adicional* de 90°, que se sumará o se restará de la diferencia de fase anterior, dependiendo de la orientación del eje de la placa de un cuarto de onda. La diferencia de

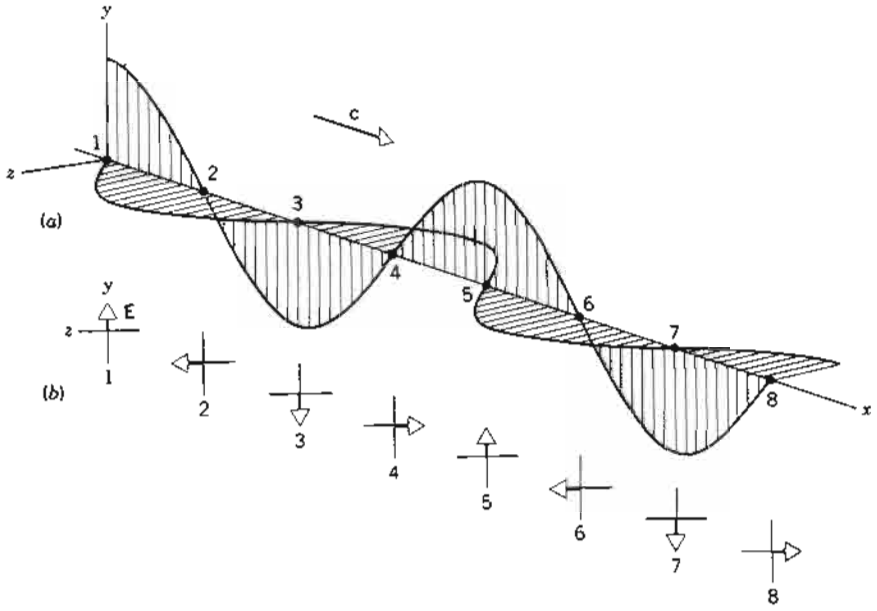


Figura 18 (*a*) Dos ondas de igual amplitud y polarizadas linealmente en direcciones perpendiculares se mueven en la dirección *x*. Sólo se muestran los vectores **E**. Las ondas difieren en fase en 90°, de modo que una alcanza su máximo cuando la otra es cero. (*b*) La amplitud resultante de la onda que se acerca vista por observadores en las posiciones numeradas que se muestran sobre el eje *x*. Nótese que, al propagarse la onda, cada observador verá en tiempos posteriores lo que el observador anterior había visto. Por ejemplo, un cuarto de ciclo después del instante de esta "instantánea", la condición que se muestra aquí para el observador 7 tendrá lugar para el observador 8. Cada observador ve que el vector resultante **E** gira en el sentido de las manecillas del reloj al paso del tiempo.

fase resultante es de 0° o bien 180°; esto es, las componentes de la polarización a lo largo de dos ejes perpendiculares alcanzan sus valores máximos en el mismo instante. El campo total **E** es la suma de estos dos vectores y forma un ángulo de 45° con las dos componentes. La luz emergente está, por lo tanto, polarizada linealmente en una dirección que forma un ángulo de ±45° con el eje óptico, lo que podríamos demostrar colocando una lámina polarizada en el camino de la luz y girando la lámina para mostrar la extinción de la intensidad.

Este experimento es en efecto el opuesto de la figura 17, donde la luz polarizada circularmente emerge cuando la luz polarizada linealmente incide sobre una placa de un cuarto de onda. Aquí tenemos luz polarizada linealmente que emerge mientras que la luz polarizada circularmente incide. Éste es un ejemplo de la *simetría de inversión del tiempo* en la Naturaleza; si en una situación física invertimos todos los movimientos, el resultado debe ser también una situación física permitida. Si bien ciertas fuerzas muy débiles entre partículas elementales pueden no seguir esta simetría, todas las demás fuerzas conocidas, incluyendo al electromagnetismo y a la gravedad, cumplen estrictamente la simetría de inversión temporal.

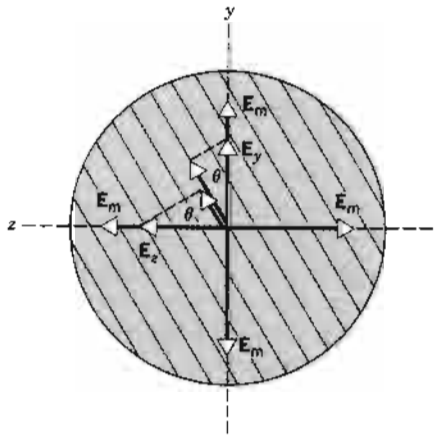


Figura 19 Luz polarizada circularmente incide sobre una lámina polarizadora. E_y y E_z son valores instantáneos de las dos componentes, que tienen valores máximos E_m.

Problema muestra 3 Una placa de cuarzo de un cuarto de onda va a emplearse con luz de sodio (λ = 589 nm). ¿Cuál es el espesor mínimo de la placa?

Solución Por la placa viajan dos ondas con velocidades correspondientes a los dos índices de refracción principales dados en la tabla 1 (n_e = 1.553 y n_o = 1.544). Si el espesor del cristal es x, el número de longitudes de onda de la primera onda que contiene el cristal es

$$N_e = \frac{x}{\lambda_e} = \frac{xn_e}{\lambda},$$

donde λ_e es la longitud de onda de la onda *e* en el cristal y λ es la longitud de onda en el aire. Para la segunda onda el número de longitudes de onda es

$$N_o = \frac{x}{\lambda_o} = \frac{xn_o}{\lambda},$$

donde λ_o es la lngitud de onda de la onda *o* en el cristal. La diferencia $H_e - N_o$ debe ser $m + \frac{1}{4}$, donde m = 0, 1, 2,... El espesor mínimo corresponde a m = 0, en cuyo caso

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{\lambda}(n_e - n_o).$$

Esta ecuación da

$$x = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{589 \text{ nm}}{(4)(1.553 - 1.544)} = 0.016 \text{ mm}.$$

Esta placa es más bien delgada. La mayoría de las placas de un cuarto de onda se hacen de mica; la lámina se divide para lograr el espesor correcto mediante el procedimiento de ensayo y error.

Problema muestra 4 Una onda de luz polarizada linealmente de amplitud E_0 cae sobre una placa de un cuarto de onda de calcita con su plano de polarización a 45° del eje óptico de la placa, que se toma como el eje y; véase la figura 20. La luz emergente se polarizará circularmente. ¿En qué dirección se verá que gira el vector eléctrico? La dirección de la propagación es hacia afuera de la página.

Solución La componente de onda cuyas vibraciones son paralelas al eje óptico (la onda e) puede representarse cuando emerge de la placa así:

$$E_y = (E_0 \cos 45°) \operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \operatorname{sen} \omega t = E_m \operatorname{sen} \omega t.$$

La componente de onda cuyas vibraciones están en ángulo recto con el eje óptico (la onda o) pueden representarse así:

$$E_z = (E_0 \operatorname{sen} 45°) \operatorname{sen} (\omega t - 90°) = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \cos \omega t$$
$$= -E_m \cos \omega t,$$

donde el corrimiento de fase de 90° representa la acción de la placa de un cuarto de onda. Nótese que E_z alcanza su valor máximo un cuarto de ciclo *más tarde* de lo que lo hace E_y, ya que, en la calcita, la onda E_z (la onda o) viaja *más lentamente* que la onda E_y (la onda e).

Para decidir la dirección de la rotación, localicemos la punta del vector eléctrico rotatorio en dos instantes de tiempo (Fig. 20*a*) $t = 0$ y (Fig. 20*b*) un breve tiempo t_1 más tarde elegido de modo que ωt_1 sea un ángulo pequeño. En $t = 0$ las coordenadas de la punta del vector rotatorio (véase la Fig. 20*a*) son

$$E_y = 0 \quad \text{y} \quad E_z = -E_m.$$

En $t = t_1$ estas coordenadas se convierten, aproximadamente, en

$$E_y = E_m \operatorname{sen} \omega t_1 \approx E_m \omega t_1$$
$$E_z = -E_m \cos \omega t_1 \approx -E_m.$$

La figura 20*b* muestra que el vector que representa a la luz emergente polarizada circularmente está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj; por convención, tal luz se llama *polarizada circularmente hacia la izquierda*, considerando siempre que el observador ve de frente la fuente luminosa.

Debería verificar que cuando el plano de vibración de la luz incidente en la figura 20 gira ±90°, la luz emergente estará *polarizada circularmente hacia la derecha.*

48-6 DISPERSIÓN DE LA LUZ

Una onda luminosa, al caer sobre un sólido transparente, causa que los electrones del sólido oscilen periódicamente en respuesta al vector eléctrico variable en el tiempo, de la onda incidente. La onda que viaja por el medio es la resultante de la onda incidente y las radiaciones de los electrones oscilatorios. La onda resultante tiene una intensidad máxima en la dirección del haz incidente, disminuyendo rápidamente en uno y otro lado. La ausencia de una dispersión lateral, la cual sería esencialmente completa en un cristal grande "perfecto", se presenta porque las cargas que oscilan en el medio actúan cooperativamente o coherentemente.

Al pasar la luz por un líquido o un gas, encontramos una dispersión lateral mucho mayor. En este caso, los electrones oscilatorios, por estar separados por distancias relativamente grandes y no estar ligados (enlazados químicamente) entre sí en una estructura rígida, actúan independientemente más bien que cooperativamente. Así, es menos probable que ocurra una cancelación rígida de las perturbaciones ondulatorias que no están en la dirección de avance; hay una mayor dispersión lateral.

La luz dispersada lateralmente por un gas puede polarizarse parcial o totalmente, aun cuando la luz incidente no se polarice. La figura 21 muestra un haz no polarizado

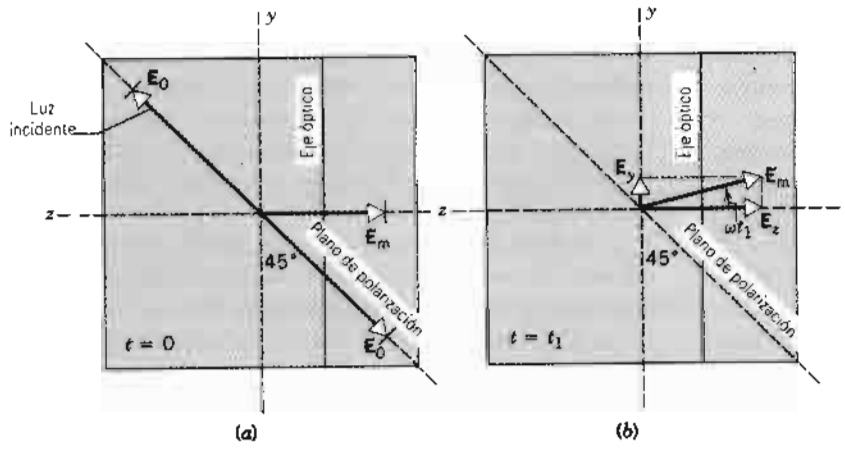


Figura 20 Problema muestra 4. Sobre una placa de un cuarto de onda cae luz polarizada linealmente (desde atrás de la página). La luz incidente se polariza a 45° con los ejes y y z. (*a*) En determinado tiempo $t = 0$, el vector emergente E apunta en la dirección $-z$. (*b*) Un breve intervalo de tiempo t_1 más tarde el vector ha girado a su nueva posición. En este caso el vector E gira en sentido contrario a las manecillas del reloj visto por un observador en el eje x que ve hacia la fuente luminosa.

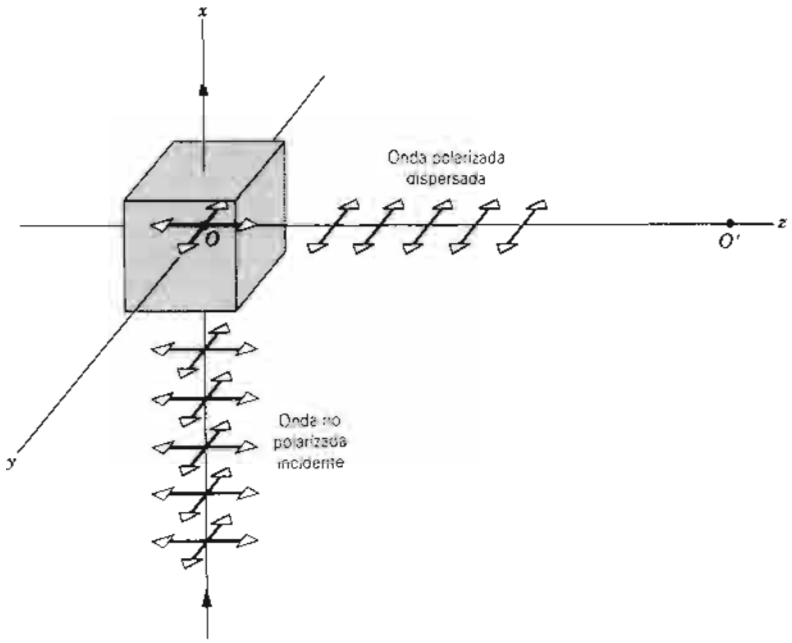


Figura 21 Una onda incidente no polarizada es dispersada por un átomo en *O*. La onda dispersada hacia *O'* en el eje *z* está polarizada linealmente.

que se mueve hacia arriba de la página y choca con un átomo de gas en *O*. Los electrones que se encuentran en *O* oscilan en respuesta a las componentes eléctricas de la onda incidente, siendo su movimiento equivalente a dos dipolos oscilatorios cuyos ejes estén en las direcciones *y* y *z* en *O*. En las ondas electromagnéticas transversales, un dipolo oscilatorio no irradia a lo largo de su propio eje. Así, un observador en *O'* no recibiría ninguna radiación del dipolo en *O* que oscila en la dirección *z*. La radiación que llega a *O'* provendría por completo del dipolo en *O* que oscila en la dirección *y* y se polarizaría linealmente en la dirección *y*.

Cuando el observador *O'* se aleja del eje *z*, la radiación se vuelve menos que completamente polarizada, porque el dipolo en *O* que oscila a lo largo del eje *z* puede irradiar un tanto en estas direcciones. En aquellos puntos a lo largo del eje *x*, la radiación transmitida ($x > 0$) o retrodispersada ($x < 0$) no se polariza, porque ambos dipolos pueden irradiar igualmente bien en la dirección *x*.

Un ejemplo familiar de este efecto es la dispersión de la luz solar mediante las moléculas de la atmósfera de la Tierra. Si no estuviese presente la atmósfera, el cielo se vería negro excepto en la dirección del Sol, como lo observan los astronautas al orbitar sobre la atmósfera. Podemos comprobar fácilmente con un polarizador que la luz que procede de un cielo sin nubes está polarizada cuando menos parcialmente. Este hecho se emplea en la exploración polar en la *brújula solar*. En este dispositivo se establece la dirección observando la naturaleza de la polarización de la luz solar dispersa. Como es bien sabido, las brújulas magnéticas no son útiles en estas regiones. Se ha observado* que las abejas se orientan en sus vuelos entre la colmena y las fuentes de polen por medio de la polarización de la luz que procede del cielo; los ojos de las abejas contienen dispositivos sensibles a la polarización.

Todavía resta por explicar por qué la luz dispersada del cielo es predominantemente azul y por qué la luz que se recibe directamente del Sol —en particular en el ocaso cuando la longitud de atmósfera que debe atravesar es mayor— es roja. La sección transversal de un átomo o de una molécula para que se presente la dispersión de la luz depende de la longitud de onda, siendo dispersada la luz azul más efectivamente que la luz roja. Puesto que la luz azul se dispersa con mayor intensidad, la luz transmitida tiene el color de la luz solar normal con los azules fuertemente suprimidos; por lo tanto, tiene una apariencia más rojiza.

La conclusión de que la sección transversal de dispersión de la luz azul es mayor que la de la luz roja puede explicarse de modo razonable mediante una analogía mecánica. En un átomo o en una molécula, un electrón está ligado allí mediante fuerzas de restitución intensas. Tiene una frecuencia natural definida, de la misma manera que una pequeña masa suspendida en el espacio por medio de un conjunto de resortes. La frecuencia natural en los electrones de los átomos y de las moléculas está, por lo general, en una región que corresponde a la luz violeta o ultravioleta.

Cuando se permite que caiga luz sobre tales electrones ligados, se crean oscilaciones forzadas a la frecuencia del haz de luz incidente. En los sistemas resonantes mecánicos es posible "excitar" al sistema más efectivamente cuando

* Véase "Polarized-Light Navigation by Insects", por Rudiger Wehner, *Scientific American*, julio de 1976, pág. 106.

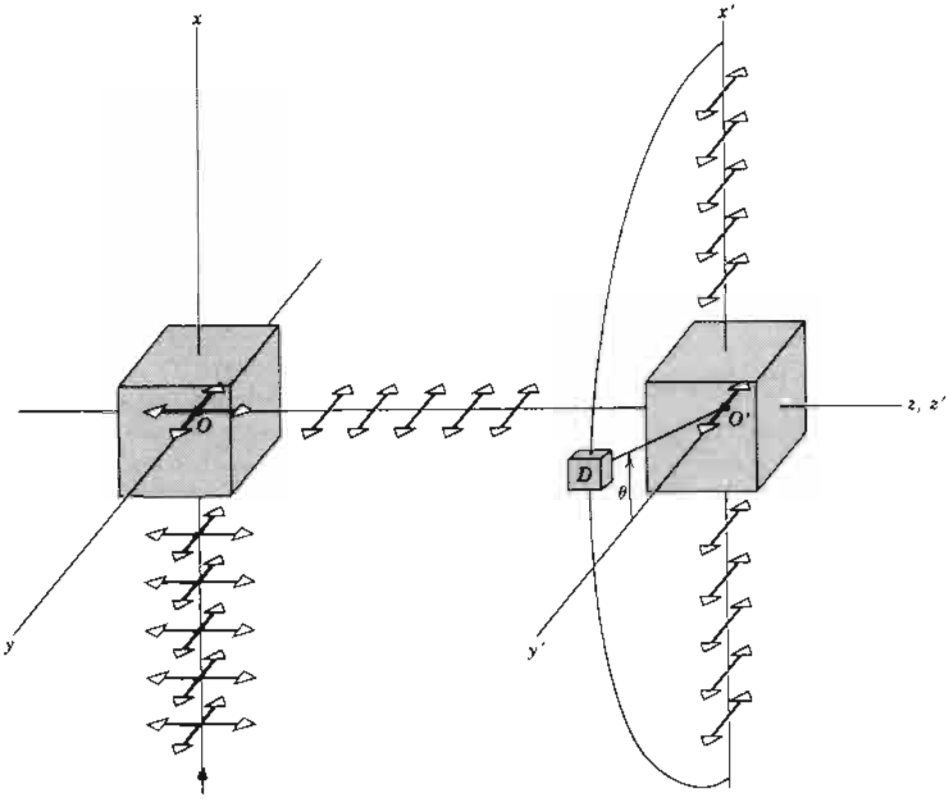


Figura 22 La radiación polarizada dispersada en O puede dispersarse mediante otro átomo que se encuentre en O'. Un detector D mide la intensidad de la radiación dispersada por O' en varias posiciones θ en el plano $x'y'$.

imprimimos sobre él una fuerza externa cuya frecuencia esté tan cerca como sea posible de la frecuencia natural de resonancia. En el caso de la luz, la frecuencia de la luz azul está más cerca de la frecuencia de resonancia natural del electrón ligado de lo que está en la luz roja. Es de esperarse que la luz azul sea más efectiva en provocar que el electrón oscile, y que la luz azul se disperse más efectivamente.

Doble dispersión *(Opcional)*

Experimentos similares al mostrado en la figura 21 pueden demostrar que las ondas electromagnéticas deben ser transversales; esto es, no puede haber una componente del vector **E** paralela a la dirección de propagación. Supongamos que existiera tal componente a lo largo de la dirección de la onda incidente (la dirección x en la Fig. 21). Entonces los electrones que están en O oscilarían en las tres direcciones, y la onda dispersada que se dirige hacia O' mostraría las tres direcciones de polarización posibles (dos transversales y una longitudinal). Esta radiación no se polarizaría entonces. Si la radiación incidente es únicamente transversal, como en la figura 21, la radiación propagada a O' se polariza linealmente. La cuestión en cuanto a la naturaleza transversal de la radiación equivale entonces a determinar si la radiación que viaja a O' es polarizada o no polarizada.

Existe otro modo de llevar a cabo esta determinación. Coloquemos un segundo dispersor en O'. Un dipolo en O' oscilará en respuesta a la onda incidente (polarizada) únicamente en una dirección (la dirección y', la del vector incidente **E**, como se muestra en la Fig. 22). La radiación dispersada por ese dipolo puede viajar en las direcciones $\pm x'$, pero (para una radiación transversal) *no en la dirección* y'. Entonces, un detector D que mida la *intensidad* de la radiación vería un máximo en las direcciones $\pm x'$ y un mínimo de intensidad cero en la dirección y'. Tal experimento, que se ilustra en la figura 22, se llama de *doble dispersión*. Nótese que la *polarización* de la radiación dispersada mediante el primer blanco se determina de acuerdo con la *intensidad* de la radiación dispersada por el segundo blanco. Si la radiación que viaja hacia O' no estuviese polarizada (y no fuese puramente transversal), entonces el detector D registraría la misma intensidad en todas direcciones.

Podemos establecer la naturaleza transversal de la radiación electromagnética ya sea midiendo la polarización de la radiación dispersada desde el primer blanco (como se muestra en la Fig. 21) o bien la distribución de la intensidad de la radiación dispersada desde el segundo blanco (como se muestra en la Fig. 22). En ciertas radiaciones (como la luz), las mediciones de la polarización son relativamente fáciles de llevar a cabo, y el método de la doble dispersión no significa una gran ventaja. En otras radiaciones (tales como los rayos X o los rayos gamma), la doble dispersión es, por lo general, el método preferido. En efecto, después del descubrimiento de los rayos X en 1898, se especuló acerca de si eran ondas o partículas. Un experimento de doble dispersión, realizado por Charles Barkla en 1906, estableció que los rayos X, al igual que la luz visible, eran de una naturaleza transversal y ayudó a confirmar que los rayos X son parte del espectro electromagnético. ■

48-7 HACIA EL LÍMITE DEL CUANTO

En este capítulo hemos descrito propiedades de las ondas electromagnéticas como la polarización y la dispersión

basándonos en un análisis en términos ondulatorios. A modo de explicación alternativa y complementaria, podemos considerar al cuanto, donde las propiedades de la radiación se asocian no con los campos sino con los cuantos de radiación (los fotones) individuales.

Como ejemplo, revisemos el ímpetu *lineal* de una onda de luz monocromática. En la sección 41-5 demostramos que la absorción de una onda de luz por un objeto de energía U estaba acompañada por la transferencia del ímpetu P al objeto, donde U y P se relacionan según

$$P = \frac{U}{c}, \tag{9}$$

donde c es la velocidad de la luz. En contraste con el concepto ondulatorio, podemos considerar la luz como una corriente de fotones, cada uno de los cuales lleva una energía E. El fotón es una partícula sin masa, para el cual la ecuación 32 del capítulo 21 da $E = pc$, de modo que el ímpetu p que tiene cada partícula (fotón) está dado por

$$p = \frac{E}{c}. \tag{10}$$

La comparación de las ecuaciones 9 y 10 indica la relación entre el concepto del fotón y el ondulatorio o, equivalentemente, entre los dominios del cuanto y de lo clásico (no cuanto). La absorción de energía U de una onda luminosa se lleva a cabo mediante la absorción de muchos fotones individuales de energía E por los átomos del objeto. De modo parecido, el ímpetu P entregado al objeto por la onda luminosa puede analizarse en términos del ímpetu p entregado a los átomos individuales por los fotones del haz.

La absorción de una onda luminosa polarizada *circularmente* puede, de una manera análoga, entregar un ímpetu *angular* a un objeto. El electromagnetismo clásico da la relación entre la energía U y el ímpetu angular L como

$$L = \frac{U}{\omega}, \tag{11}$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda. De acuerdo con la mecánica cuántica, la energía E de un fotón puede escribirse (véase la Ec. 38 del capítulo 8, $\Delta E = h\nu$)

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega, \tag{12}$$

donde h es la constante de Planck. En la sección 13-6 demostramos que $h/2\pi$ es la unidad cuántica básica del ímpetu angular, el cual designamos aquí como l. De aquí que la ecuación 12 pueda escribirse

$$l = \frac{E}{\omega}. \tag{13}$$

Desde el punto de vista del cuanto, cuando un átomo absorbe un fotón de energía E, su ímpetu angular cambia por una cantidad definida l. Al comparar las ecuaciones 11 y 13 vemos la correspondencia entre las descripciones clásica y cuántica. El ímpetu angular total L absorbido por el objeto puede considerarse como el efecto neto de los cuantos de el ímpetu angular l absorbidos por los átomos individuales.

La física clásica, que incluye la descripción ondulatoria de la radiación electromagnética, funciona perfectamente bien en el análisis de una amplia clase de fenómenos, que comprenden la difracción, la polarización y la dispersión. No es necesario recurrir a la teoría del cuanto para explicar estos efectos (si bien a menudo pueden igualmente explicarse con base en los efectos cuánticos, como lo vimos en esta sección). Por ejemplo, el experimento de Barkla de la doble dispersión de los rayos X, considerado en la sección anterior, puede interpretarse también en la descripción cuántica si asignamos a cada fotón una cantidad intrínseca de ímpetu angular (el "espín") y exigimos que los fotones individuales tengan sus espines alineados paralela o antiparalelamente a su dirección de propagación. Éste es, de hecho, el comportamiento de los fotones que predice la teoría cuántica.

Esta competencia entre la descripción de la partícula y la descripción ondulatoria de los fenómenos asociados con las ondas electromagnéticas data del tiempo de Newton, quien buscó con avidez explicar la refracción con base en la teoría de la luz como partículas. A final de cuentas, son los experimentos de interferencia y de difracción, estudiados en los capítulos 45 y 46, los que nos llevan a inclinarnos más en favor de la interpretación ondulatoria.

Al comenzar el siglo XX se realizó una nueva clase de experimentos que derrumbaron la visión convencional de las ondas electromagnéticas. El efecto fotoeléctrico (donde una superficie de metal irradiada con luz emite electrones) y la dispersión de Compton (donde se encuentra que la longitud de onda de la radiación dispersada en la geometría de la figura 21 difiere de la longitud de onda incidente) no tienen cabida en la descripción ondulatoria. Más tarde, surgieron dificultades con la física clásica cuando se encontró que las partículas como los electrones exhiben un comportamiento parecido al ondulatorio en ciertas circunstancias. La teoría del cuanto, desarrollada en los años de 1920, ofrece una explicación alternativa para todas estas fallas de la física clásica y refuerza los papeles complementarios de las concepciones ondulatoria y de partículas. Los capítulos 49 a 56 de este texto presentan una introducción a la teoría del cuanto y algunas de sus muchas aplicaciones, que van desde la estructura del quark de las partículas elementales hasta el origen y evolución del Universo.

PREGUNTAS

1. Se dice que la luz de ciertas fuentes ordinarias es no polarizada. ¿Puede usted pensar en algunas fuentes comunes que emitan luz polarizada?
2. La luz de un tubo de descarga de gas en el laboratorio es no polarizada. ¿Cómo puede hacerse esto consistente con el hecho de que los átomos y las moléculas irradian como dipolos eléctricos cuya radiación esté polarizada linealmente?
3. Las láminas polarizadoras contienen cadenas de hidrocarburos a las que se les fuerza durante el proceso de producción a alinearse en un arreglo paralelo. Explique cómo es capaz una lámina polarizadora de polarizar la luz. (*Sugerencia*: Los electrones son relativamente libres de moverse a lo largo de estas cadenas.)
4. Como lo experimentamos normalmente, las ondas de radio están casi siempre polarizadas y la luz visible es casi siempre no polarizada. Explique por qué.
5. ¿Qué determina la longitud y orientación deseables de las antenas de orejas de conejo en un aparato de TV portátil?
6. ¿Por qué las ondas de sonido son no polarizadas?
7. Supóngase que cada rendija en la figura 4 del capítulo 45 esté cubierta con una lámina polarizadora, estando las direcciones polarizadoras de las dos láminas en ángulo recto. Cuál es el patrón de intensidad de la luz en la pantalla C? (La luz incidente es no polarizada.)
8. ¿Por qué los anteojos hechos de materiales polarizadores tienen una marcada ventaja sobre los que dependen simplemente de los efectos de la absorción? ¿Qué desventajas podrían tener?
9. Luz no polarizada incide sobre dos láminas polarizadoras orientadas de modo tal que no se transmite ninguna luz. Si entre ellas se sitúa una tercera lámina polarizadora, ¿puede transmitirse la luz? De ser así, explique cómo.
10. El problema muestra 1 enseña que, cuando el ángulo entre dos direcciones polarizadoras se gira entre 0° y 45°, la intensidad del haz transmitido cae a la mitad de su valor inicial. ¿Qué le pasa a esta energía "faltante"?
11. Se le da un número de láminas polarizadoras. Explique cómo las usaría para girar el plano de polarización de una onda polarizada linealmente para cualquier ángulo dado. ¿Cómo podría hacerse con la menor pérdida de energía?
12. A principios de los años cincuenta fueron muy populares las películas de 3-D (tres dimensiones). Los espectadores usaban anteojos polarizadores y enfrente de cada uno de los *dos* proyectores necesarios se colocaba una lámina polarizadora. Explique cómo funcionaba el sistema. ¿Puede usted indicar algunos de los problemas que pudieron llevar al abandono temprano del sistema?
13. Una rejilla de alambre, que consta de un arreglo de alambres dispuestos paralelamente unos a otros, puede polarizar un haz incidente no polarizado de ondas electromagnéticas que pase por ella. Explique los hechos de que (*a*) el diámetro de los alambres y el espaciamiento entre ellos debe ser mucho menor que la longitud de la onda incidente para obtener una polarización efectiva y (*b*) la componente transmitida es aquella cuyo vector eléctrico oscila en una dirección perpendicular a los alambres.
14. La ley de Brewster, la ecuación 2, determina el ángulo de polarización por reflexión en un material dieléctrico como el vidrio; véase la figura 10. Una posible interpretación de la nula reflexión de la componente paralela a ese ángulo es que provoca que las cargas en el dieléctrico oscilen paralelamente al rayo reflejado por esta componente y no producen radiación en esta dirección. Explique esto y comente si es verosímil.
15. Explique cómo podría presentarse la polarización por reflexión cuando la luz incide sobre una interfaz (vidrio a aire, por ejemplo) desde el lado que tiene en mayor índice de refracción.
16. Halle una manera de identificar la dirección de polarización de una lámina polarizadora. No hay ninguna marca en la lámina.
17. ¿Es el eje óptico de un cristal birrefringente simplemente una línea o una dirección en el espacio? Tiene un sentido de dirección, como una flecha? ¿Qué se puede decir de la dirección característica de una lámina polarizadora?
18. Si el hielo es birrefringente (véase la tabla 1), ¿por qué no vemos dos imágenes de los objetos a través de un cubo de hielo?
19. ¿Es posible producir efectos de interferencia entre el haz o y el haz e, que son separados por el haz incidente no polarizado del cristal de calcita en la figura 13, recombinándolos? Explique su respuesta.
20. De la tabla 1, ¿esperaría que una placa de un cuarto de onda hecha de calcita fuera más gruesa que una de cuarzo?
21. ¿Viaja siempre la onda e en los cristales birrefringentes a una velocidad dada por c/n_e?
22. En las figuras 15*a* y 15*b*, describa cualitativamente lo que sucede cuando el haz incidente cae sobre el cristal con un ángulo de incidencia distinto de cero. Suponga en cada caso que el haz incidente permanece en el plano de la figura.
23. Imagine una manera de identificar la dirección del eje óptico en una placa de un cuarto de onda.
24. Describa la luz que se transmite cuando cae luz polarizada linealmente sobre una placa de un cuarto de onda con su plano de vibración formando un ángulo de (*a*) 0° o (*b*) 90° con el eje de la placa. (*c*) Si este ángulo se elige arbitrariamente, la luz transmitida se llama *polarizada elípticamente*; describa tal luz.
25. Se le da un objeto que puede ser (*a*) un disco de vidrio gris, (*b*) una lámina polarizadora, (*c*) una placa de un cuarto de onda, o (*d*) una placa de media onda (véase el problema 21). ¿Cómo podría identificarlo?
26. ¿Puede representarse un haz de luz polarizada linealmente como la suma de dos haces de luz polarizada circularmente que giran en direcciones opuestas? ¿Qué efecto tiene sobre el haz resultante el cambio de fase de una de las componentes circulares?
27. ¿Puede ser polarizado circularmente un haz de radar?

28. ¿Cómo puede transformarse un haz de luz polarizada circularmente a la derecha en un haz polarizado circularmente a la izquierda?
29. Se dice que un haz de luz está no polarizado, polarizado linealmente o polarizado circularmente. ¿Cómo podría diferenciarlos experimentalmente?
30. Un haz paralelo de luz es absorbido por un objeto situado en su trayectoria. ¿En qué circunstancias se transferirá al objeto (*a*) un ímpetu lineal y (*b*) un ímpetu angular?
31. Cuando se observa un cielo claro a través de una lámina polarizadora, puede observarse que la intensidad varía al girar la lámina. Esto no sucede cuando se ve una nube a través de la lámina. ¿Por qué?
32. En 1949 se descubrió que la luz que procede de estrellas distantes en nuestra galaxia está ligeramente polarizada linealmente, estando el plano de vibración preferido paralelo a la galaxia. Esto se debe probablemente a la dispersión anisotrópica de la luz de las estrellas debido a los granos alargados y ligeramente alineados del polvo interestelar (véase el problema 31 del capítulo 24). Si los granos se orientan con sus ejes largos paralelos a las líneas del campo magnético interestelar, como se vió en la sección 48-2, y absorben e irradian ondas electromagnéticas como los electrones oscilatorios en una antena de radio, ¿cómo debe orientarse el campo magnético con respecto al plano galáctico?
33. Verifique si la ecuación 11 es correcta dimensionalmente.
34. ¿Cuál es una mejor prueba para identificar ondas, la polarización o la interferencia? ¿Proporcionan la misma información?

PROBLEMAS

Sección 48-1 Polarización

1. Las ecuaciones del campo magnético para una onda electromagnética en el vacío son $B_x = B$ sen $(ky + \omega t)$, $B_y = B_z = 0$. (*a*) ¿Cuál es la dirección de la propagación? (*b*) Escriba las ecuaciones del campo eléctrico. (*c*) ¿Está polarizada la onda? De ser así, ¿en qué dirección?
2. Demuestre que dos ondas de luz de igual amplitud polarizadas linealmente, estando sus planos de vibración en ángulo recto entre sí, no pueden producir efectos de interferencia. (*Sugerencia*: Demuestre que la intensidad de la onda luminosa resultante, promediada sobre uno o más ciclos de oscilación, es la misma independientemente de qué diferencia de fase exista entre las dos ondas.)

Sección 48-2 Láminas polarizadoras

3. Un haz de luz no polarizada de 12.2 mW/m^2 de intensidad cae con incidencia normal sobre una lámina polarizadora. (*a*) Halle el valor máximo del campo eléctrico del haz transmitido. (*b*) Calcule la presión de radiación ejercida sobre la lámina polarizadora.
4. Sobre dos láminas polarizadoras situadas una encima de otra cae luz no polarizada. ¿Cuál debe ser el ángulo entre las direcciones características de las láminas si la intensidad de la luz transmitida es un tercio de la intensidad del haz incidente? Supóngase que cada lámina polarizadora es ideal, esto es, que reduce la intensidad de la luz no polarizada al 50% exactamente.
5. Tres placas polarizadoras están apiladas. La primera y la tercera están cruzadas; la que está en el medio tiene su eje a 45° respecto a los ejes de las otras dos. ¿Qué fracción de la intensidad de un haz incidente no polarizado se transmite por la pila?
6. Un haz de luz polarizada linealmente choca con dos láminas polarizadoras. La dirección característica de la segunda está a 90° con respecto a la luz incidente. La dirección característica de la primera está a un ángulo θ con respecto a la luz incidente. Encuentre el ángulo θ de la intensidad del haz transmitido que sea 0.100 veces la intensidad del haz incidente.
7. Un haz de luz no polarizada incide sobre una pila de cuatro láminas polarizadoras que están alineadas de modo que la dirección característica de cada una está girada en 30° en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a la lámina precedente. ¿Qué fracción de la intensidad incidente se transmite?
8. Un haz de luz está polarizado linealmente en la dirección vertical. El haz cae con incidencia normal sobre una lámina polarizadora con su dirección de polarización a 58.8° de la vertical. El haz transmitido cae, también con incidencia normal, sobre una segunda lámina polarizadora con su dirección de polarización horizontal. La intensidad del haz inicial es de 43.3 W/m^2. Halle la intensidad del haz trasmitido por la segunda lámina.
9. Supóngase que en el problema 8 el haz incidente sea no polarizado. ¿Cuál sería ahora la intensidad del haz transmitido por la segunda lámina?
10. Un haz de luz es una mezcla de luz polarizada y luz no polarizada. Cuando se le envía a través de una lámina Polaroid, hallamos que la intensidad transmitida puede variar en un factor de cinco que depende de la orientación de la Polaroid. Halle las intensidades relativas de estas dos componentes de haz incidente.
11. En una playa determinada en un día en particular cerca de la puesta del sol la componente horizontal del vector del campo eléctrico es 2.3 veces la componente vertical. Un bañista que está de pie tomando el sol se pone sus anteojos polaroid; los anteojos suprimen la componente horizontal del campo. (*a*) ¿Qué fracción de la energía luminosa recibida antes de que se pusiera los anteojos llega ahora a sus ojos? (*b*) El bañista, con sus anteojos puestos todavía, se recuesta de lado. ¿Qué fracción de la energía luminosa que recibía antes de ponerse los anteojos llega ahora a sus ojos?

12. Se desea girar el plano de vibración de un haz de luz polarizada en 90°. (*a*) ¿Cómo podría hacerse usando únicamente láminas polarizadoras? (*b*) ¿Cuántas láminas se necesitan para que la pérdida de intensidad total sea menor del 5.0%?

Sección 48-3 Polarización por reflexión

13. (*a*) ¿A qué ángulo de incidencia estará completamente polarizada la luz que se refleja del agua? (*b*) ¿Depende este ángulo de la longitud de onda de la luz?

14. Una luz que viaja en agua de índice de refracción 1.33 incide sobre una placa de vidrio de índice de refracción 1.53. ¿A qué ángulo de incidencia está completamente polarizada linealmente la luz reflejada?

15. Calcule el intervalo de ángulos polarizadores para luz blanca que incide sobre cuarzo fundido. Suponga que los límites de las longitudes de onda sean de 400 y 700 nm y use la curva de dispersión de la figura 4, capítulo 43.

16. Cuando luz roja en el vacío incide con el ángulo de polarización sobre una cierta placa de vidrio, el ángulo de refracción es de 31.8°. ¿Cuáles son (*a*) el índice de refracción del vidrio y (*b*) el ángulo de polarización?

Sección 48-4 Doble refracción

17. Luz de 525 nm de longitud de onda polarizada linealmente choca, con incidencia normal, contra un cristal de wurtzita, cortado con sus caras paralelas al eje óptico. ¿Cuál es el mínimo espesor posible del cristal si los rayos emergentes *o* y *e* se combinan para formar luz polarizada linealmente? Véase la tabla 1.

18. Un haz estrecho de luz no polarizada cae sobre un cristal de calcita cortado con su eje óptico como se muestra en la figura 23. (*a*) Para $t = 1.12$ cm y para $\theta_i = 38.8°$, calcule la distancia perpendicular entre los dos rayos emergentes *x* y *y*. (*b*) ¿Cuál es el rayo *o* y cuál el rayo *e*? (*c*) ¿Cuáles son los estados de polarización de los rayos emergentes? (*d*) Describa lo que pasa cuando se sitúa un polarizador dentro del haz incidente y se gira. (*Sugerencia*: Dentro del cristal las vibraciones del vector **E** en un rayo son siempre perpendiculares al eje óptico y en el otro son siempre paralelas. Los dos rayos se describen mediante los índices n_e y n_o; *en este plano* cada rayo obedece a la ley de Snell.)

19. Se corta un prisma de calcita de modo que el eje óptico sea paralelo a la arista del prisma como se muestra en la figura 24. Describir cómo pudiera usarse tal prisma para medir los dos índices de refracción principales de la calcita. (*Sugerencia*: Véase la sugerencia del problema 18; véase también el problema muestra 3, capítulo 43.)

Sección 48-5 Polarización circular

20. Halle el número mayor de placas de un cuarto de onda, para usarse con luz de 488 nm de longitud de onda, que podrían cortarse de un cristal de dolomita de 0.250 mm de espesor.

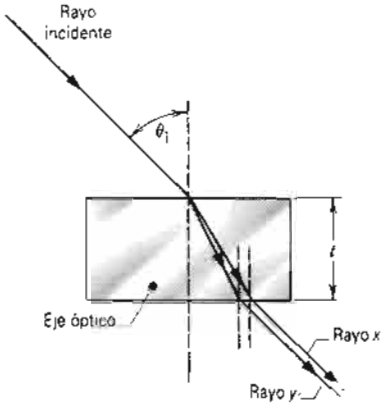


Figura 23 Problema 18.

Figura 24 Problema 19.

21. ¿Cuál sería la acción de una *placa de media onda* (esto es, una placa el doble de gruesa que una placa de un cuarto de onda) sobre (*a*) luz polarizada linealmente (suponga que el plano de vibración esté a 45° del eje óptico de la placa), (*b*) luz polarizada circularmente y (*c*) luz no polarizada?

22. Una lámina polarizadora y una placa de un cuarto de onda están pegadas una contra la otra de modo tal que, si la combinación se coloca con la cara *A* contra una moneda brillosa, la cara de la moneda puede verse cuando se ilumina con luz de la longitud de onda apropiada. Cuando la combinación se coloca con la cara *A* lejos de la moneda, no puede verse la moneda. (*a*) ¿Qué componente está en la cara *A* y (*b*) cuál es la orientación relativa de las componentes?

Sección 48-7 Hacia el límite del cuanto

23. Supóngase que un haz paralelo de luz polarizada circularmente cuya potencia es de 106 W es absorbido por un objeto. (*a*) ¿A qué velocidad se transferirá al objeto el ímpetu angular? (*b*) Si el objeto es un disco plano de 5.20 mm de diámetro y 9.45 mg de masa, ¿después de cuánto tiempo (suponiendo que puede girar libremente alrededor de su eje) alcanzará una velocidad angular de 1.50 rev/s? Supóngase una longitud de onda de 516 nm.

CAPÍTULO 49

LA LUZ Y LA FÍSICA CUÁNTICA

Hasta ahora hemos estudiado la radiación —incluyendo no sólo la luz sino todo el espectro electromagnético— por medio de los fenómenos de la reflexión, la refracción, la interferencia, la difracción y la polarización, todos los cuales pueden comprenderse al tratar la radiación como una onda. *Las pruebas evidentes que apoyan a este comportamiento ondulatorio son abrumadoras.*

Ahora tomaremos una nueva dirección y consideraremos experimentos que sólo pueden entenderse si hacemos una suposición muy diferente acerca de la radiación electromagnética, a saber, que ésta se comporta como una corriente de partículas.

Los conceptos de onda y partícula son tan diferentes que es difícil comprender cómo la luz (y otras radiaciones) pueden ser ambas cosas. Por ejemplo, en una onda la energía y el ímpetu se distribuyen suavemente en el frente de onda, mientras que, por otra parte, se concentran en haces, en una corriente de partículas. Posponemos el estudio de esta naturaleza dual hasta el capítulo 50; entre tanto, le pedimos al lector no preocuparse por este acertijo y que considere la apabullante evidencia experimental de que la radiación tiene esta naturaleza de partícula. Esto inicia nuestro estudio de la física cuántica, que conduce finalmente a nuestra comprensión de la estructura fundamental de la materia.

49-1 RADIACIÓN TÉRMICA

La mayoría de los objetos los vemos gracias a la luz que reflejan. Sin embargo, a temperaturas suficientemente elevadas, los cuerpos se vuelven autoluminosos, y podemos ver que brillan en la oscuridad. Los filamentos de una lámpara incandescente y una fogata (véase la Fig. 1) son ejemplos comunes. Si bien vemos a tales objetos por medio de la luz visible que emiten, no tenemos que quedarnos mucho tiempo frente a una fogata para percatarnos de que también emite copiosamente en la región del infrarrojo del espectro. Es un hecho curioso que la física cuántica, que domina nuestra visión moderna del mundo que nos rodea, surgió del estudio —en condiciones controladas de laboratorio— de las radiaciones emitidas por los objetos calientes.

La radiación emitida por un cuerpo a causa de su temperatura se llama *radiación térmica*. Los cuerpos no sólo emiten tal radiación sino que también la absorben de su entorno. Si un cuerpo está más caliente que su entorno emite más radiación de la que absorbe y tiende a enfriarse. Normalmente, llegará a un equilibrio térmico con su entorno, una condición en la que sus velocidades de absorción y emisión de radiación son iguales.

El espectro de la radiación térmica de un cuerpo sólido caliente es continuo, dependiendo mucho sus detalles de la temperatura. Si quisiéramos elevar uniformemente la temperatura de tal cuerpo, notaríamos dos cosas: (1) cuanto más elevada es la temperatura, mayor radiación térmica se emite —al principio el cuerpo se ve oscuro, luego resplandece; y (2) cuanto más elevada la temperatura, más corta será la longitud de onda de aquella parte del espectro que irradia más intensamente— el color predominante del cuerpo caliente cambia del rojo oscuro al amarillo-naranja brillante y al "blanco vivo". Puesto que las características de su espectro dependen de la temperatura, podemos calcular la temperatura de un cuerpo caliente, como pueden ser un lingote candente de acero o una estrella, a partir de la radiación que emite. El ojo ve principalmente el color que corresponde a la emisión más intensa en la región del visible.

La radiación emitida por un cuerpo caliente depende no sólo de la temperatura sino también del material del que

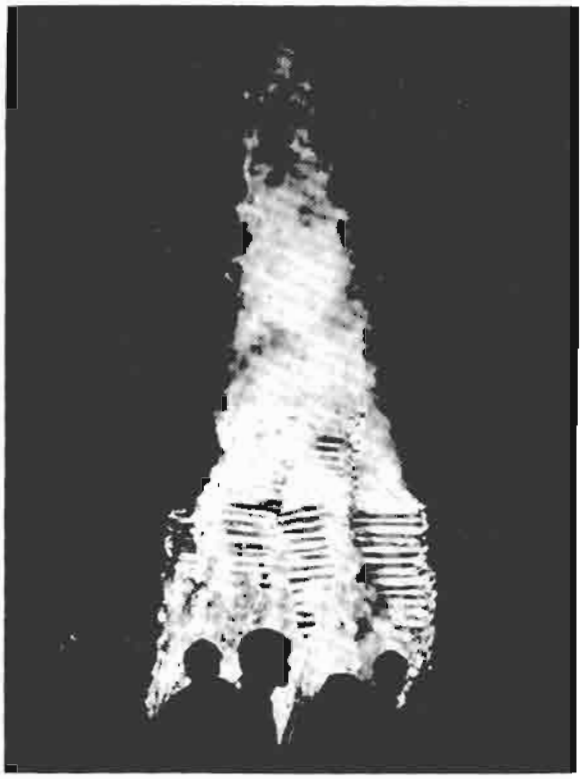


Figura 1 Un grupo de estudiantes observa una radiación térmica. El estudio de tal radiación, en condiciones controladas de laboratorio, conduce a los fundamentos de la mecánica cuántica moderna.

está hecho, su forma y la naturaleza de su superficie. Por ejemplo, a 2000 K una superficie de tungsteno plana y pulida emite radiación a razón de 23.5 W/cm^2; sin embargo, en el molibdeno la cantidad correspondiente es de 19.2 W/cm^2. En cada caso la cantidad aumenta un tanto cuando la superficie es rugosa. Aparecen otras diferencias cuando medimos la distribución de la longitud de onda de la radiación emitida. Tales detalles hacen más difícil comprender la radiación térmica en términos de ideas físicas más sencillas; nos recuerda las complicaciones que surgen al tratar de entender las propiedades de los gases reales en términos de un modelo atómico sencillo. El "problema del gas" se trató al introducir la noción de gas ideal. Dentro de lo mismo, el "problema de la radiación" puede hacerse manejable si se introduce un "radiador ideal" en el que el espectro de la radiación térmica emitida dependa *sólo* de la temperatura del radiador y no del material, la naturaleza de la superficie, u otros factores.

Podemos fabricar este radiador ideal al formar una cavidad dentro de un cuerpo y manteniendo las paredes de la cavidad a una temperatura uniforme. Podemos perforar un pequeño orificio a través de la pared de tal modo que pueda escapar, del interior de la cavidad al laboratorio, una muestra de la radiación para ser examinada. Sucede que tal radiación térmica, llamada *radiación de cavidad*,* tiene un espectro muy sencillo cuya naturaleza se determina realmente sólo mediante la temperatura de las paredes y de ninguna manera por el material de la cavidad, su forma o su tamaño. La radiación de la cavidad (radiación en una caja) nos ayuda a entender la naturaleza de la radiación térmica, del mismo modo que el gas ideal (materia en una caja) nos ayudó a entender a la materia en su forma gaseosa.

La figura 2 muestra un radiador de cavidad hecho de un tubo cilíndrico de tungsteno de pared delgada de aproximadamente 1 mm de diámetro calentado hasta la incandescencia por el paso de una corriente a través de él. De la figura resulta evidente que la radiación que emerge de este orificio es mucho más intensa que la de la pared exterior de la cavidad, aunque las temperaturas de las paredes interior y exterior sean más o menos iguales.

Son tres las propiedades interrelacionadas de la radiación de la cavidad —todas ellas perfectamente verificadas en el laboratorio— que cualquier teoría de la radiación de la cavidad debe explicar.

1. *La ley de Stefan-Boltzmann.* La potencia total irradiada por unidad de área de la abertura de la cavidad, sumada para todas las longitudes de onda, se llama su *intensidad radiante* $I(T)$ y se relaciona con la temperatura por

$$I(T) = \sigma T^4, \qquad (1)$$

donde σ ($= 5.670 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4) es una constante universal, llamada *constante de Stefan-Boltzmann*. Los

* Conocida también como *radiación de cuerpo negro*, porque un cuerpo negro ideal (aquel que absorbe toda la radiación que incide sobre él) emitiría el mismo tipo de radiación. Suponemos que las dimensiones de la cavidad son mucho mayores que la longitud de onda de la radiación.

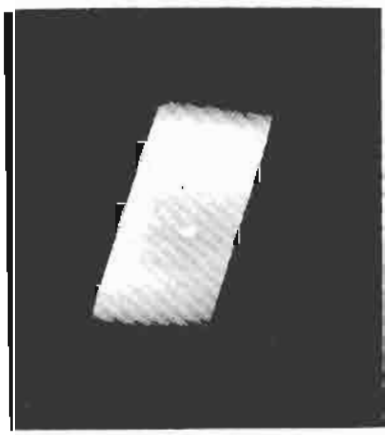


Figura 2 Un tubo incandescente de tungsteno con un pequeño orificio taladrado en su pared. La radiación que emerge del orificio es la radiación de la cavidad.

objetos calientes ordinarios irradian siempre menos eficientemente de lo que lo hacen los radiadores de cavidad. Expresamos esto al generalizar la ecuación 1 a

$$I(T) = \epsilon\sigma T^4, \tag{2}$$

donde ϵ, una cantidad adimensional, se llama *emisividad* de la superficie del material. En un radiador de cavidad, $\epsilon = 1$, pero en las superficies de los objetos ordinarios, la emisividad es siempre menor a la unidad y casi siempre es función de la temperatura.

2. *La radiancia espectral. La radiancia espectral* $R(\lambda)$ nos dice cómo varía la intensidad de la radiación de la cavidad con la longitud de onda para una temperatura determinada. Se define de modo que el producto $R(\lambda)d\lambda$ da la potencia irradiada por unidad de área que se encuentra en la banda de longitudes de onda que se extiende desde λ hasta $\lambda + d\lambda$. $R(\lambda)$ es una función de distribución estadística del mismo tipo que consideramos en el capítulo 24. Podemos hallar la intensidad radiante $I(T)$ para cualquier temperatura al sumar (esto es, integrando) la radiancia espectral en toda la región de longitudes de onda. Entonces

$$I(T) = \int_0^\infty R(\lambda)\, d\lambda \qquad (T \text{ fija}), \tag{3}$$

La figura 3 muestra la radiancia espectral de la radiación de la cavidad para cuatro temperaturas seleccionadas. La ecuación 3 muestra que podemos interpretar a la intensidad radiante $I(T)$ como el área bajo la curva de la radiancia espectral apropiada. De la figura vemos que, conforme aumenta la temperatura, aumenta también esta área y por lo tanto la intensidad radiante, como lo predice la ecuación 1.

3. *La ley del desplazamiento de Wien.* De las curvas de la radiancia espectral de la figura 3 podemos ver que $\lambda_{máx}$, la longitud de onda para la que la radiancia espectral es máxima, disminuye conforme aumenta la temperatura. Wilhelm Wien (alemán, 1864-1928) dedujo que $\lambda_{máx}$ varía según $1/T$ y que el producto $\lambda_{máx}T$ es una constante universal. Su valor medido es

$$\lambda_{máx}T = 2898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}. \tag{4}$$

Esta relación se llama *ley del desplazamiento de Wien*; Wien fue galardonado con el premio Nobel de 1911 de física por su investigación sobre la radiación térmica.

Problema muestra 1 ¿Cuán caliente es una estrella? Las "superficies" de las estrellas no son fronteras definidas como la superficie de la Tierra. La mayoría de la radiación que emite una estrella está en equilibrio térmico con los gases calientes que forman las capas externas de la estrella. Entonces, sin equivocarnos en mucho, podemos tratar a la luz de la estrella como una radiación de cavidad. He aquí las longitudes de onda a las cuales tienen sus valores máximos las radiancias espectrales de tres estrellas.

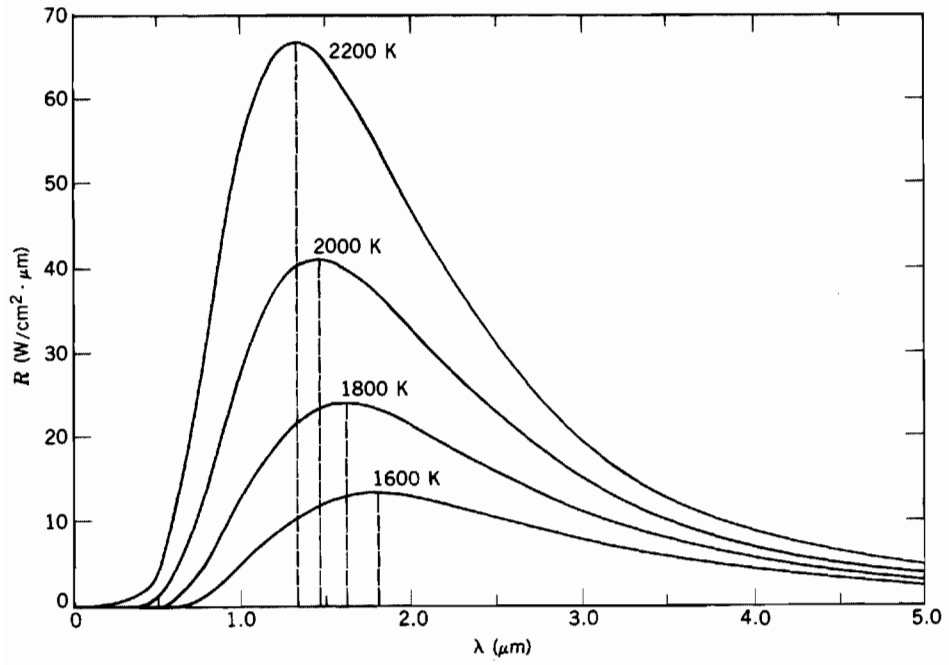


Figura 3 Las curvas de la radiancia espectral para la radiación de la cavidad a cuatro temperaturas seleccionadas. Nótese que cuando la temperatura aumenta, la longitud de onda de la radiancia espectral máxima se recorre hacia valores menores.

Estrella	$\lambda_{máx}$	*Apariencia*
Sirio	240 nm	Azul-blanca
El Sol	500 nm	Amarilla
Betelgeuse	850 nm	Roja

(*a*) ¿Cuáles son las temperaturas de las superficies de estas estrellas? (*b*) ¿Cuáles son las intensidades radiantes de estas tres estrellas? (*c*) El radio r del Sol es de 7.0×10^8 m y el de Betelgeuse es más de 500 veces mayor, o sea 4.0×10^{11} m. ¿Cuál es la potencia total irradiada (esto es, la *luminosidad L*) que procede de esas estrellas?

Solución (*a*) De la ecuación 4 hallamos, para Sirio,

$$T = \frac{2898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}}{\lambda_{máx}} = \left(\frac{2898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}}{240\ \text{nm}}\right)\left(\frac{1000\ \text{nm}}{1\ \mu\text{m}}\right) = 12{,}000\ \text{K}.$$

Las temperaturas del Sol y de Betelgeuse halladas de la misma manera son 5800 K y 3400 K, respectivamente. A 5800 K, la mayor parte de la radiación de la superficie del Sol se encuentra en la región visible del espectro. Esto indica que, a través de los tiempos de su evolución, los ojos se han adaptado al Sol hasta volverse más sensibles a aquellas longitudes de onda a las que nuestro astro irradia más intensamente.

(*b*) Para Sirio tenemos, de la ley de Stefan-Boltzmann (Ec. 1)

$$I = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4)(12{,}000\ \text{K})^4 = 1.2 \times 10^9\ \text{W/m}^2.$$

Las intensidades radiantes del Sol y de Betelgeuse resultan ser de 6.4×10^7 W/m² y 7.7×10^2 W/m², respectivamente.

(*c*) Hallamos la luminosidad de una estrella si multiplicamos su intensidad radiante por el área de su superficie. Entonces, para el Sol,

$$L = I(4\pi r^2) = (6.4 \times 10^7\ \text{W/m}^2)(4\pi)(7.0 \times 10^8\ \text{m})^2 = 3.9 \times 10^{26}\ \text{W}.$$

La luminosidad de Betelgeuse resulta ser de 1.5×10^{31} W, alrededor de 38,000 veces mayor. El enorme tamaño de Betelgeuse, que está clasificada como una "gigante roja", es en gran parte causante de la intensidad radiante relativamente baja que se asocia con su baja temperatura superficial.

Los colores de las estrellas no son claramente distinguibles para el observador promedio porque los conos de la retina, que son los responsables de la visión en color, no funcionan bien en luz atenuada. Si esto no fuese así, el cielo estrellado de la noche estaría repleto de colores.

49-2 LEY DE LA RADIACIÓN DE PLANCK

¿Existe una fórmula sencilla, que pueda deducirse de principios básicos, que se ajuste a las curvas de radiancia experimental de la figura 3? En septiembre de 1900 existían dos fórmulas, ninguna de las cuales se podía ajustar a las curvas para la gama entera de longitudes de onda.

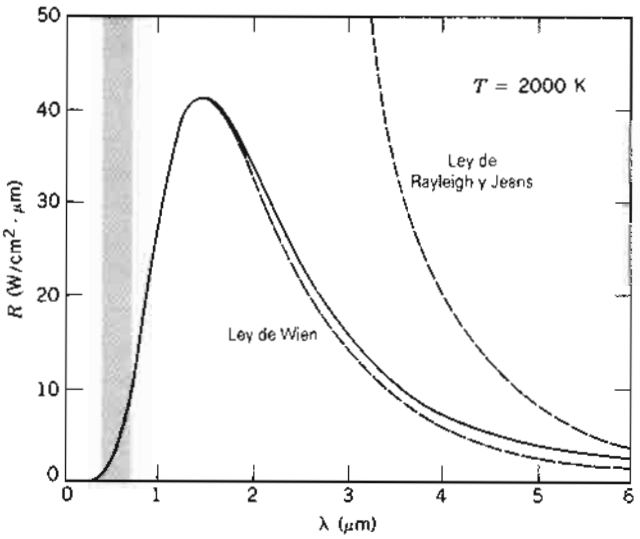


Figura 4 La curva representada por la línea sólida muestra la radiancia espectral experimental de la radiación de una cavidad a 2000 K. Las predicciones de la ley clásica de Rayleigh y Jeans y de la ley de Wien se muestran como líneas entrecortadas. La barra vertical sombreada representa las longitudes de onda de la región visible.

La primera, debida originalmente a Lord Rayleigh pero más tarde deducida independientemente por Einstein y modificada por James Jeans, se desarrolló rigurosamente de su base clásica. Desafortunadamente, falla por completo en el ajuste de las curvas, no pasando ni siquiera por un máximo. Sin embargo, la fórmula de Reyleigh y Jeans, como se le llama, *se ajusta* a las curvas bastante bien en la región de las longitudes de onda muy largas. La figura 4 muestra la curva de radiancia espectral de la cavidad de radiación a 2000 K, junto con la predicción de Rayleigh y Jeans. El buen ajuste del que hablamos ocurre para longitudes de onda mucho mayores de 50 μm, mucho más allá de la escala de esa figura. La fórmula de Rayleigh y Jeans, con todo lo insatisfactoria que pueda ser, es la mejor que puede ofrecer la física clásica.

Wilhelm Wien también dedujo una expresión teórica para la radiancia espectral. Su fórmula (véase también la Fig. 4) es mucho mejor. Se ajusta a las curvas bastante bien para longitudes de onda cortas, pasa por un máximo, pero se aparta notablemente en el extremo de grandes longitudes de onda de la escala. Sin embargo, la fórmula de Wien no se basó en la teoría clásica de la radiación sino en una conjetura —se le ha llamado una "conjetura"— de que existe una analogía entre las curvas de la radiancia espectral y las curvas de distribución de velocidades de las moléculas de un gas ideal.

Así, tenemos dos fórmulas, una que concuerda con el experimento para longitudes de onda largas y la otra para

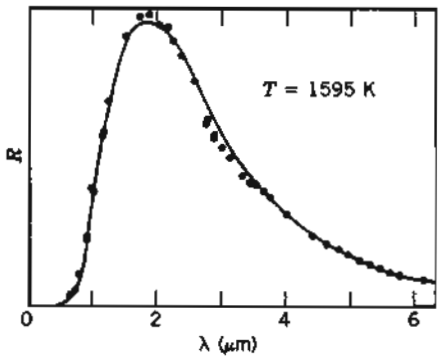


Figura 5 La ley de la radiación de Planck ajustada con los datos experimentales de un radiador de cavidad a 1595 K.

longitudes de onda cortas. Max Planck,* buscando reconciliar estas dos leyes de la radiación, realizó una inspirada interpolación entre ellas que dio por resultado el ajuste de los datos para *todas* las longitudes de onda. La fórmula de la radiación de Planck, que él hizo pública dándola a conocer a la Sociedad de física de Berlín el 19 de octubre de 1900, es

$$R(\lambda) = \frac{a}{\lambda^5} \frac{1}{e^{b/\lambda T} - 1}, \tag{5}$$

donde a y b son constantes empíricas, elegidas como tales para lograr el mejor ajuste de la ecuación 5 a los datos experimentales. La figura 5 nos muestra lo bueno que resulta este acuerdo. Si bien la fórmula de Planck es correcta, ésta era en un principio solamente empírica, y no constituía una verdadera teoría.

Planck se puso inmediatamente a trabajar en la obtención de una expresión haciendo suposiciones simples y, en 2 meses, tuvo éxito. En el proceso reescribió su fórmula ligeramente, presentando a las dos constantes arbitrarias que contenía de una forma diferente. En esta nueva notación, la ley de la radiacion de Planck se convierte en

$$R(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \tag{6}$$

Las dos constantes ajustables a y b en la ecuación 5 están reemplazadas aquí por cantidades que contienen dos constantes diferentes, la *constante de Boltzmann k* (véase la Sec. 23-1) y una nueva constante, llamada ahora la *constante de Planck h*; la cantidad c es la velocidad de la luz.

Al ajustar la ecuación 6 con los datos experimentales, Planck pudo hallar los valores de k y h. Sus valores estuvieron dentro de un porcentaje pequeño de los valores aceptados actualmente, que son

$$k = 1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

y

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

Problema muestra 2 La figura 4 indica que la ley de la radiación de Planck (Ec. 6) se aproxima a la ley clásica de Rayleigh y Jeans para longitudes de onda largas. ¿A qué expresión se reduce la ley de Planck cuando $\lambda \to \infty$?

Solución Por conveniros algebraicamente, podemos escribir la ecuación 6 en la forma

$$R(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^x - 1},$$

donde $x = hc/\lambda kT$. Cuando $\lambda \to \infty$, vemos que $x \to 0$. Si se recuerda que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(véase el apéndice H) nos permite hacer la aproximación

$$e^x - 1 \approx x.$$

Así, tenemos

$$R(\lambda) \approx \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{x} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \left(\frac{\lambda kT}{hc}\right) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}.$$

Nótese que la constante de Planck h, que identifica que se trata de una fórmula cuántica, se cancela convenientemente conforme nos acercamos al límite clásico de ondas largas. De hecho, el resultado anterior es precisamente la expresión clásica de Rayleigh y Jeans de la radiancia espectral.

49-3 CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA

Regresemos ahora a las suposiciones que hizo Planck para deducir su ley de la radiación y al significado de la constante h que aparece en ella. Estas suposiciones y sus consecuencias no fueron inmediatamente claras para los contemporáneos de Planck o, por cierto (como él mismo lo confirmó más tarde), para el propio Planck. En lo que sigue describimos la situación como se veía unos 6 o 7 años después de que Planck presentara su teoría. Parece ser cierto que la premisa en la que se basa la ley de la radiación de Planck —la cuantización de la energía— no fue entendida en los primeros tiempos.

* Max Planck (1858-1947) fue un físico teórico alemán cuya especialización en termodinámica le condujo al estudio de la radiación térmica y al descubrimiento de la cuantización de la energía, por lo cual fue galardonado con el premio Nobel de física en 1918. En los años de 1920 florecieron en Alemania los físicos teóricos bajo su liderazgo: físicos jóvenes capacitados por Planck y sus colegas produjeron una formulación matemática completa de la teoría del cuanto. En los últimos años de su vida, Planck escribió extensamente sobre asuntos religiosos y filosóficos.

Planck dedujo su ley de la radiación al analizar la interacción entre la radiación en el volumen de la cavidad y los átomos que forman las paredes de la cavidad. Planck supuso que estos átomos se comportaban como osciladores minúsculos, cada uno con una frecuencia de oscilación característica. Estas oscilaciones irradian energía en la cavidad y absorben energía de ella. Debería ser posible deducir las características de la radiación de la cavidad a partir de las características de los osciladores que la generan.

Clásicamente, la energía de estos minúsculos osciladores es una variable suavemente continua. Lo suponemos sin duda para osciladores a gran escala como los péndulos o los sistemas masa-resorte. Sin embargo, sucede que, con objeto de deducir la ley de la radiación de Planck, es necesario hacer una suposición radical; esto es, *los osciladores atómicos no deben emitir o absorber ninguna energía E sino sólo energías seleccionadas de un conjunto discreto, definidas por*

$$E = nh\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

donde ν es la frecuencia del oscilador. Aquí se presenta a la constante de Planck h por primera vez en física. Decimos que la energía de un oscilador atómico *se cuantiza* y que el entero n es un *número cuántico*. La ecuación 7 nos dice que los niveles de energía del oscilador están espaciados igualmente, siendo $h\nu$ el intervalo entre niveles contiguos; véase la figura 6.

La suposición de la cuantización de la energía es verdaderamente radical, y el propio Planck se resistió a aceptarla durante muchos años. En sus palabras, "Mis intentos fútiles por encajar al cuanto de acción elemental [esto es, h] de alguna manera en la teoría clásica continuó durante varios años, y me costó un esfuerzo enorme". Max von Laue, el laureado Nobel de 1914 en física y alumno de Planck, ha escrito: "Después de 1900 Planck se esforzó durante muchos años en salvar el espacio, si no cerrarlo, entre la física antigua y la física cuántica. El esfuerzo falló, pero fue valioso en cuanto a que proporcionó la prueba más convincente de que no podían unirse a las dos".

Veamos la cuantización de la energía en el contexto de un oscilador a gran escala como un péndulo oscilatorio. Nuestra experiencia muestra que un péndulo puede oscilar con *cualquier* energía total razonable y no sólo con ciertas energías elegidas. Conforme la fricción causa que la amplitud del péndulo disminuya, parece que la energía se disipa de una manera perfectamente continua y no en "saltos" o "cuantos". Sin embargo, a causa de que la constante de Planck es tan pequeña, no existe una base en tal experiencia cotidiana que descarte la cuantización de la energía como una violación del "sentido común". Los "saltos" están allí; son simplemente demasiado pequeños como para que podamos detectarlos.

No aplicaríamos la teoría cuántica a un péndulo porque la teoría clásica funciona perfectamente bien en ese caso. Ahora vemos la teoría clásica como un caso límite de la teoría cuántica, estando las dos relacionadas por el *principio de correspondencia*, el cual afirma que:

> *La teoría cuántica debe concordar con la teoría clásica en el límite en el cual se sabe que la teoría clásica concuerda con el experimento.*

Otra manera de enunciar el principio de correspondencia es:

> *La teoría cuántica debe concordar con la teoría clásica en el límite de los números cuánticos grandes.*

Ésta es la manera en que se relacionan entre sí el péndulo oscilatorio y el átomo oscilatorio. El límite clásico se ilustra en el siguiente problema muestra.

Problema muestra 3 Un cuerpo de 300 g, unido a un resorte cuya constante de fuerza k es de 3.0 N/m, oscila con una amplitud A de 10 cm. Trate este sistema como un oscilador

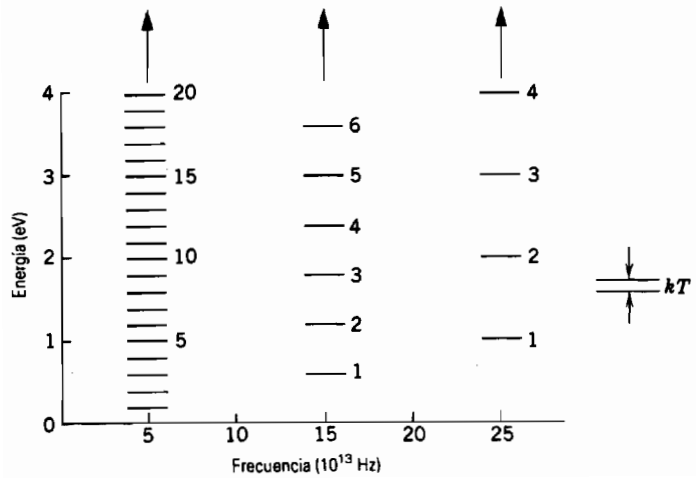


Figura 6 Los niveles de energía de los osciladores atómicos en tres frecuencias elegidas. Se indican los números cuánticos de algunos de estos niveles. A la derecha se muestra la energía kT de un oscilador clásico a 2000 K.

cuántico y halle (*a*) el intervalo de energía entre niveles de energía contiguos y (*b*) el número cuántico que describe las oscilaciones.

Solución (*a*) La frecuencia de oscilación se halla de

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3.0\ \text{N/m}}{0.3\ \text{kg}}} = 0.50\ \text{s}^{-1}.$$

La energía mecánica total E del sistema oscilatorio es

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(3.0\ \text{N/m})(0.10\ \text{m})^2 = 0.015\ \text{J}.$$

Conforme disminuye la amplitud de las oscilaciones por fricción, la teoría cuántica predice que la energía E caerá en "saltos" cuyo tamaño es

$$\Delta E = h\nu = (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(0.50\ \text{s}^{-1}) = 3.3 \times 10^{-34}\ \text{J}.$$

Entonces

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3.3 \times 10^{-34}\ \text{J}}{0.015\ \text{J}} = 2.2 \times 10^{-32}.$$

Mediciones de energía de tal precisión simplemente no pueden realizarse. Los saltos del cuanto de este oscilador son demasiado pequeños como para detectarlos, y podemos tratar al problema con bastante seguridad mediante los métodos de la física clásica.

(*b*) De la relación de cuantización, ecuación 7, tenemos

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{0.015\ \text{J}}{3.3 \times 10^{-34}\ \text{J}} = 4.6 \times 10^{31},$$

¡un número enorme! No es sorprendente que no podamos detectar la cuantización de la energía en la operación de un oscilador; no podemos medir cambios de una unidad en 4.6×10^{31}.

La cuantización de la energía simplemente no se revela en los osciladores a gran escala. La pequeñez de la constante h de Planck hace la granulosidad de la energía demasiado fina como para poder detectarla. De manera muy similar, no podemos afirmar que, al mover la mano en el aire, percibimos que el aire está hecho de moléculas.

La constante de Planck podría ser cero en lo que concierne a los sistemas clásicos y, ciertamente, una manera de reducir las fórmulas cuánticas a sus contrapartes clásicas límites es hacer que $h \to 0$ en aquellas fórmulas. De manera similar, reducimos las fórmulas relativistas a sus contrapartes clásicas límites haciendo que $c \to \infty$, en donde c es la velocidad de la luz.

Esto trae una pregunta: "¿Por qué el hacer que la longitud de onda aumente significa que nos aproximamos a un dominio en que rige la física clásica?". La respuesta es que al aumentar la longitud de onda, la frecuencia decrece y entonces el cuanto de energía básica ($= h\nu$) se vuelve más pequeño. Para poder decir si estamos en una situación clásica o en una situación cuántica debemos comparar esta cantidad con kT, que es una medida (clásica) de la energía media de traslación de una partícula a la temperatura T. Si $h\nu \ll kT$, la "granulosidad" de la energía de los osciladores atómicos (que se mide mediante $h\nu$) no se notará y estamos en los dominios clásicos. En suma, nos aproximamos a las situaciones clásicas cuando $\nu \to 0$, cuando, $\lambda \to \infty$, o (para tal caso) cuando $T \to \infty$; las tres conducen a la condición de que $h\nu \ll kT$.

49-4 CAPACIDAD CALORÍFICA DE LOS SÓLIDOS

La cuantización de la energía se aceptó lentamente, un destino nada raro para una idea radicalmente nueva. No es difícil ver por qué. Los sistemas cuyas energías se cuantizaron primero fueron los "osciladores" hipotéticos que Planck supuso formaban las paredes de un radiador de cavidad. De hecho, no existen tales osciladores armónicos simples, unidimensionales. Los átomos que forman la pared son mucho más complejos.

La cuantización de la energía comenzó a consolidarse únicamente después de 1907, cuando Einstein demostró que las mismas ideas que habían funcionado tan bien para el problema de la radiación de la cavidad podían usarse para resolver otro problema, el de las capacidades caloríficas de los sólidos. Aquí, como veremos, los sistemas cuyas energías han de cuantizarse son los conocidos y reales átomos.

Cuando transferimos calor Q a 1 mol de un sólido y resulta una elevación de temperatura ΔT, la *capacidad calorífica molar* se define como

$$C_V = \frac{Q}{\Delta T} \quad \text{(a volumen constante)}. \qquad (8)$$

Hemos elegido transferir calor en condiciones de volumen constante, de tal modo que las distancias entre los átomos permanecen constantes y cualquier energía de más aparece por completo como energía de oscilación de los átomos alrededor de sus lugares fijos en la red. Consideramos que la cantidad de sustancia es 1 mol, de modo que puedan realizarse las comparaciones entre elementos con base en el mismo número de átomos. Véase la sección 25-3 para más detalles sobre las capacidades caloríficas molares y la relación entre C_V, que es más fácil de calcular, y C_p, que es más fácil de medir.

La tabla 1 muestra las capacidades caloríficas molares de algunos sólidos elementales a la temperatura ambiente o cerca de ella. Una mirada a esta tabla muestra una regularidad conocida como la regla de Dulong y Petit, en honor de los investigadores que primero la señalaron en 1819. Simplemente asevera que, con unas cuantas excepciones, todos los sólidos tienen la misma capacidad calorífica molar, esto es, alrededor de 25 J/mol · K. Los valores que fueron sustancialmente menores a éste se llamaron "anómalos" en aquellos tempranos días.

TABLA 1 CAPACIDADES CALORÍFICAS MOLARES DE ALGUNOS SÓLIDOS[a]

Sólido	C_V (J/mol · K)
Aluminio	23
Berilio	11
Bismuto	25
Boro	13
Cadmio	25
Carbono (diamante)	6
Cobre	24
Oro	25
Plomo	25
Platino	25
Plata	24
Tungsteno	24

[a] Todas las mediciones se llevaron a cabo a la temperatura ambiente, habiéndose puesto en otra columna tres valores "anómalos" para resaltarlos.

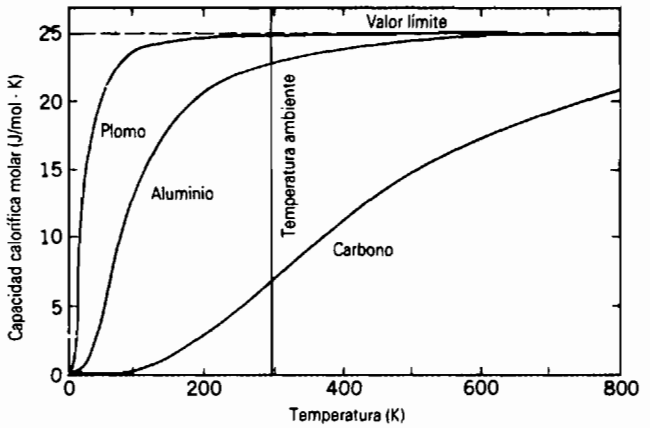


Figura 7 Las capacidades caloríficas molares de tres sólidos en función de la temperatura.

La figura 7, que muestra la capacidad calorífica molar del plomo, el aluminio y el carbono en función de la temperatura, aclara la situación. Vemos que C_V para los tres elementos tiende al mismo valor límite a temperaturas elevadas. El que el carbono aparezca como "anómalo" en la tabla 1 refleja simplemente el hecho de que, para este elemento, la temperatura ambiente no es una temperatura muy elevada.

¿Qué predice la física clásica en cuanto a la capacidad calorífica molar de un sólido?

Los átomos de un sólido están dispuestos en una red tridimensional. Cada átomo, ligado a su sitio en la red mediante fuerzas electromagnéticas, oscila alrededor de ese sitio con una amplitud que aumenta al aumentar la temperatura. Cada átomo se comporta como un oscilador diminuto con tres grados de libertad independientes, que corresponden a tres ejes direccionales independientes a lo largo de los cuales se mueve libremente el átomo.

El teorema clásico de la equipartición de la energía asocia una energía de $\frac{1}{2}kT$ con cada grado de libertad. El oscilador tridimensional tiene seis grados de libertad, dos para cada dirección (correspondiendo a las energías potencial y cinética del movimiento de la oscilación en esa dirección). La energía interna por mol de un sólido es, entonces,

$$E_{int} = 6(\tfrac{1}{2}kT)N_A = 3RT, \tag{9}$$

donde N_A es la constante de Avogadro y R es la constante universal de los gases.

Si el sólido se mantiene a volumen constante, podemos sustituir Q en la ecuación 8 (el calor transferido por mol) por ΔE_{int}, el cambio en la energía interna por mol. Al hacerlo nos da $C_V = \Delta E_{int}/\Delta T$, que se convierte en

$$C_V = \frac{dE_{int}}{dT} \tag{10}$$

en el límite diferencial. Al sustituir de la ecuación 9 finalmente obtenemos

$$C_V = \frac{d}{dT}(3RT) = 3R. \tag{11}$$

La teoría clásica predice que la capacidad calorífica molar es constante, la misma para todas las sustancias, e independiente de la temperatura. Al sustituir el valor de R (= 8.31 J/mol · K) da C_V = 24.9 J/mol · K. Esto concuerda muy bien con el valor límite de C_V a temperaturas elevadas, como lo muestran la figura 7 y la tabla 1. Sin embargo, en esta teoría clásica no existe indicación de la variación a temperaturas inferiores que se muestra en la figura 7.

Teoría cuántica de la capacidad calorífica

Volvemos ahora a la predicción de la teoría cuántica. Einstein supuso que las energías de los osciladores atómicos en el sólido se cuantizaban de acuerdo con la ecuación 7, y asignó a cada oscilador una energía promedio por dirección, no de kT como en el caso clásico, sino de

$$E = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{12}$$

Ésta es la misma expresión empleada por Planck para la energía promedio de los osciladores en el problema de la radiación de la cavidad. En la ecuación 12, ν es la frecuencia de vibración natural del átomo oscilatorio, que Einstein dejó como una constante ajustable.

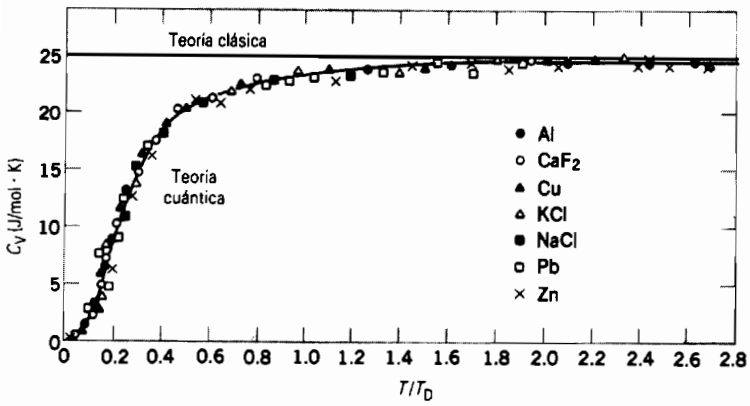


Figura 8 El resultado de la teoría cuántica para la capacidad calorífica de los sólidos concuerda excelentemente con los resultados experimentales. La escala horizontal es la razón adimensional entre la temperatura T y la temperatura Debye T_D, teniendo la última un valor característico para cada sustancia.

Al multiplicar la ecuación 12 por la constante de Avogadro y también por un factor de 3 para tener en cuenta las tres direcciones, obtenemos la energía interna por mol:

$$E_{\text{int}} = \frac{3N_A h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{13}$$

Al derivar, como en la ecuación 10, da finalmente

$$C_V = \frac{dE_{\text{int}}}{dT} = 3R(h\nu/kT)^2 \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} \tag{14}$$

como la predicción de Einstein de la capacidad calorífica molar. Existe sólo un parámetro ajustable en la ecuación 14, la frecuencia ν del oscilador. Comúnmente, esta frecuencia ν se expresa en términos de una *temperatura de Einstein* característica $T_E = h\nu/k$. Esta temperatura puede elegirse de modo que la ecuación de Einstein se ajuste a los datos bastante bien, aunque existen pequeñas desviaciones a temperaturas bajas, desviaciones que todavía no habían sido establecidas experimentalmente cuando Einstein propuso su teoría.

La falla en concordar con el experimento a bajas temperaturas puede atribuirse al hecho de que Einstein —quizá deliberadamente— llevó a cabo una hipótesis exageradamente simple, es decir, que las oscilaciones de un átomo particular no están influidas por las de sus vecinos. En 1912 el físico holandés Peter Debye refinó la teoría de Einstein al tomar en cuenta la acción mutua de los osciladores atómicos con las de sus vecinos. La figura 8 muestra la excelente concordancia de la teoría de Debye con el experimento para un número de sólidos. En esa figura la escala de temperatura no tiene dimensiones, siendo T_D una constante que tiene un valor diferente para cada material. Cuando estas *temperaturas de Debye* características, como se les llamó, se asignan apropiadamente, vemos lo bien que caen todos los puntos experimentales sobre la misma curva teórica. ¡Esta concordancia es un gran triunfo de la teoría cuántica!

Las figuras 7 y 8 sugieren inmediatamente la explicación de los valores "anómalos" de la tabla 1. En estas sustancias, T_D es mucho mayor que la temperatura ambiente, de modo que la capacidad calorífica no ha alcanzado todavía su valor límite.

A temperaturas elevadas, puede demostrarse (véase el problema 22) que la expresión de Einstein para la capacidad calorífica (Ec. 14) se reduce al resultado clásico (Ec. 11). Esto ocurre por las mismas razones que dimos al final del problema muestra 3. Einstein supuso que en un sólido, la frecuencia ν de los osciladores atómicos tenía un solo valor constante, característico de la sustancia. Así, cuando $T \to \infty$, tendemos a la condición en que $h\nu \ll kT$. Esto significa, como lo hemos visto, que el intervalo de energía entre niveles contiguos de los osciladores atómicos ($= h\nu$) es mucho menor que la energía media de traslación de los átomos (medida clásicamente por kT). En estas condiciones, la cuantización de la energía de los osciladores atómicos no se manifiesta, y se mantienen las condiciones clásicas.

Problema muestra 4 Determine, en términos de la temperatura de Einstein T_E, la temperatura a la que la capacidad calorífica de una sustancia tiene la mitad de su valor clásico.

Solución El valor clásico es $3R$, así que buscamos la temperatura para la cual C_V en la ecuación 14 tiene el valor $3R/2$, o sea

$$3R\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} = \frac{3R}{2}.$$

Haciendo que $x = h\nu/kT = T_E/T$, podemos escribir esto como

$$x^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{2}.$$

No existe una técnica analítica para resolver esta ecuación. Puede hallarse una solución numérica con una calculadora mediante ensayo y error o con una computadora al calcular y desplegar una tabla de valores de la función que aparece en el lado izquierdo y anotando el valor de x cuando la función tenga el valor de $\frac{1}{2}$. El resultado es

$$x = 2.98.$$

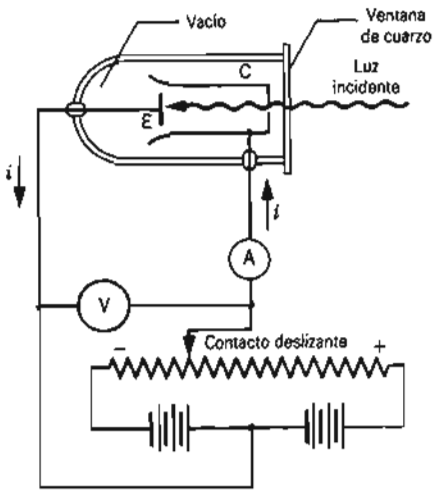


Figura 9 Aparato para estudiar el efecto fotoeléctrico. Las flechas muestran el sentido de la corriente en el circuito externo, el cual es opuesto al movimiento de los electrones. El voltímetro V mide el voltaje V_{ext} aplicado externamente.

Puesto que $x = T_E/T$, tenemos que $T/T_E = x^{-1} = 0.336$, o sea

$$T = 0.336T_E.$$

49-5 EFECTO FOTOELÉCTRICO

Llegamos a la idea de la cuantización de la energía a través de la visión de la relación mutua entre la materia y la radiación en las paredes de un radiador de cavidad. Aquí consideramos otro ejemplo de una interacción entre radiación y materia, el *efecto fotoeléctrico*. La constante de Planck interviene de un modo central y extiende la idea de la cuantización a la naturaleza misma de la radiación.

La figura 9 muestra un aparato típico empleado en el estudio del efecto fotoeléctrico. Luz de frecuencia ν incide sobre una superficie de metal (emisor E) y, si la frecuencia es lo suficientemente grande, la luz expulsará electrones de la superficie. Si se aplica una diferencia de potencial V apropiada entre E y el colector C, podemos captar estos *fotoelectrones*, como se les llama, y medirlos como una corriente fotoeléctrica i.

La diferencia de potencial V que actúa entre el emisor y el colector no es la misma que la diferencia de potencial V_{ext} suministrada por la batería externa y que indica el voltímetro de la figura 9. Existe también una segunda fem —una batería oculta, si así desea pensarse— asociada con el hecho de que el emisor y el colector están hechos casi siempre de materiales diferentes. Si se toman las precauciones pertinentes, esta *diferencia de potencial de contacto* V_{dpc} permanece constante durante el experimento. La diferencia de potencial V que "ven" los electrones es la suma algebraica de estas dos cantidades, o sea

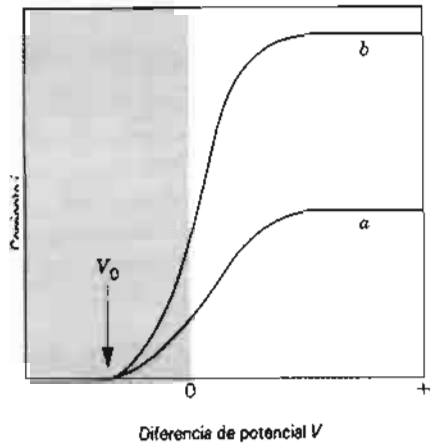


Figura 10 Gráfica (no a escala) de los datos tomados con el aparato de la figura 9. La intensidad de la luz incidente es dos veces mayor para la curva *b* que para la curva *a*.

$$V = V_{ext} + V_{dpc}. \tag{15}$$

En todo lo que sigue supondremos que esta diferencia de potencial de contacto se ha determinado y tomado en cuenta, y expresaremos todos nuestros resultados en términos de V según se define mediante la ecuación 15.

La figura 10 (curva *a*) muestra la corriente fotoeléctrica en función de la diferencia de potencial V. Vemos que si V es positiva y lo suficientemente grande, la corriente fotoeléctrica alcanza un valor de saturación constante, en el que *todos* los fotoelectrones expulsados de E son captados por C.

Si reducimos V a cero y luego la invertimos, la corriente fotoeléctrica no disminuye inmediatamente a cero porque los electrones emergen del emisor E con velocidades distintas de cero. Algunos llegarán al colector aun cuando la diferencia de potencial se oponga a su movimiento. Sin embargo, si hacemos que la diferencia de potencial se invierta y se haga lo suficientemente grande, llegamos a un valor V_0, llamado *potencial de frenado*, en el que la corriente fotoeléctrica cae realmente a cero. Esta diferencia de potencial, multiplicada por la carga electrónica e, nos da la energía cinética $K_{máx}$ de los fotoelectrones emitidos más energéticos:

$$K_{máx} = eV_0. \tag{16}$$

El potencial de frenado V_0, y por consiguiente $K_{máx}$, es independiente de la intensidad de la luz incidente. La curva *b* en la figura 10, en donde la intensidad de la luz se ha duplicado, lo demuestra. Si bien la corriente de saturación también se duplica, el potencial de frenado permanece inalterable.

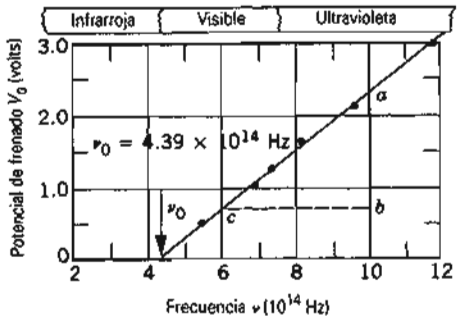


Figura 11 El potencial de frenado en función de la frecuencia en una superficie de sodio. Los datos proceden de las mediciones de Millikan en 1916.

La figura 11 es una gráfica del potencial de frenado en función de la frecuencia de la luz incidente. Vemos por extrapolación que existe una *frecuencia de corte* ν_0 pronunciada que corresponde a un potencial de frenado de cero. Para luz de una frecuencia menor que ésta, no se emiten fotoelectrones en absoluto. Simplemente no se presenta el efecto fotoeléctrico.

Tres características principales del efecto fotoeléctrico no pueden explicarse en términos de la teoría ondulatoria clásica de la luz. Como en la radiación de la cavidad y los problemas de la capacidad calorífica, la falla de la teoría ondulatoria clásica en estos casos no es un asunto de un pequeño desacuerdo numérico. La falla es total e irrefutable. He aquí los tres problemas:

1. *El problema de la intensidad.* La teoría ondulatoria requiere que el vector eléctrico oscilatorio **E** de la onda luminosa aumente de amplitud cuando aumenta la intensidad del haz luminoso. Puesto que la fuerza aplicada al electrón es $e\mathbf{E}$, esto implica que la *energía cinética* de los fotoelectrones aumentaría también conforme el haz luminoso se vuelve más intenso. Sin embargo, la figura 10 muestra que $K_{máx}$ ($= eV_0$) es *independiente de la intensidad luminosa*; esto se ha demostrado dentro de un intervalo de intensidades de 10^7.

2. *El problema de la frecuencia.* De acuerdo con la teoría ondulatoria, el efecto fotoeléctrico ocurriría para cualquier frecuencia de la luz, tan sólo si la luz es lo suficientemente intensa como para suministrar la energía necesaria para expulsar los fotoelectrones. Sin embargo, la figura 11 muestra que existe, para cada superficie, una frecuencia de corte ν_0 característica. *Para frecuencias menores que ν_0, el efecto fotoeléctrico no ocurre, independientemente de cuán intensa sea la iluminación.*

3. *El problema del retraso de tiempo.* Si la energía adquirida por un electrón es absorbida directamente de la onda incidente sobre la placa metálica, el "área blanco efectiva" para un electrón en el metal es limitada y probablemente no mucho mayor que la de un círculo de diámetro aproximadamente igual al de un átomo. En la teoría clásica, la energía luminosa se distribuye uniformemente en el frente de la onda. Así, si la luz es lo suficientemente débil, existirá un retraso de tiempo mensurable, el cual calcularemos en el problema muestra 5, entre el choque de la luz sobre la superficie y el desprendimiento del electrón. Durante este intervalo el electrón estará absorbiendo energía del haz hasta que haya acumulado la suficiente para escapar. Sin embargo, *no se ha medido nunca un retraso de tiempo detectable.*

En la sección siguiente veremos cómo la teoría del cuanto resuelve estos problemas al proporcionar la interpretación correcta del efecto fotoeléctrico.

Problema muestra 5 Una hoja delgada de potasio que está colocada a una distancia r ($= 0.5$ m) de una fuente luminosa cuya potencia de salida P_0 es de 1.0 W. ¿Cuánto tiempo le tomaría a la hoja absorber del haz la energía suficiente ($= 1.8$ eV) para desprender un electrón? Supóngase que el fotoelectrón desprendido obtuvo su energía del área circular de la hoja cuyo radio es igual al radio del átomo de potasio (1.3×10^{-10} m).

Solución Si la fuente irradia uniformemente en todas direcciones, la intensidad I de la luz a una distancia r está dada por

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2} = \frac{1.0 \text{ W}}{4\pi(0.5 \text{ m})^2} = 0.32 \text{ W/m}^2.$$

El área A del blanco es $\pi(1.3 \times 10^{-10} \text{ m})^2$ o 5.3×10^{-20} m^2, de modo que la rapidez con que la energía incide sobre el blanco está dada por

$$P = IA = (0.32 \text{ W/m}^2)(5.3 \times 10^{-20} \text{ m}^2)$$
$$= 1.7 \times 10^{-20} \text{ J/s}.$$

Si toda esta energía entrante es absorbida, el tiempo requerido para acumular la energía suficiente para que el electrón escape es

$$t = \left(\frac{1.8 \text{ eV}}{1.7 \times 10^{-20} \text{ J/s}}\right)\left(\frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right) = 17 \text{ s}.$$

Nuestra selección de un radio del área efectiva del blanco fue un tanto arbitraria, pero no importa qué área elijamos razonablemente, todavía calcularíamos un "tiempo de absorción" dentro de la región, de medición fácil. Sin embargo, no se ha observado nunca ningún retraso de tiempo en cualesquiera circunstancias, estableciendo en los primeros experimentos un límite superior de unos 10^{-9} s para tales retrasos.

49-6 TEORÍA DEL FOTÓN DE EINSTEIN

En 1905 Einstein hizo una suposición sorprendente acerca de la naturaleza de la luz; es decir, que, en cualquier circunstancia, se comporta como si la energía se concen-

trase en paquetes localizados, más tarde llamados *fotones*. La energía E de un solo fotón está dada por

$$E = h\nu, \tag{17}$$

donde ν es la frecuencia de la luz. Esta noción de que un haz luminoso se comporta como una corriente de partículas contrasta por completo con la noción de que se comporta como una onda. En la teoría ondulatoria de la luz, la energía *no* se concentra en paquetes sino que se distribuye uniformemente en los frentes de ondas.

Cuando Planck, en 1900, obtuvo su ley de la radiación e introdujo por vez primera la cantidad h en física, empleó la relación $E = h\nu$. Sin embargo, la aplicó, no a la radiación en la cavidad, sino a los osciladores atómicos que se formaban en sus paredes. Planck trató a la radiación de la cavidad con base en la teoría ondulatoria, pero más tarde Einstein fue capaz de deducir la ley de la radiación de Planck con base en su concepto del fotón. Su método fue tanto claro como sencillo y evitó muchas de las hipótesis especiales que Planck había hallado necesario hacer en su esfuerzo pionero.

Si aplicamos el concepto del fotón de Einstein al efecto fotoeléctrico, podemos escribir

$$h\nu = \phi + K_{\text{máx}}, \tag{18}$$

donde $h\nu$ es la energía del fotón. La ecuación 18 dice que un *solo* fotón porta una energía $h\nu$ hacia la superficie en donde es absorbida por un *solo* electrón. Parte de esta energía (ϕ, llamada la *función de trabajo* de la superficie emisora) se usa para provocar que el electrón escape de la superficie del metal. El exceso de energía ($h\nu - \phi$) se convierte en energía cinética del electrón; si el electrón no pierde energía a causa de colisiones internas al escapar del metal, todavía tendrá este tanto de energía cinética después de emerger. Así, $K_{\text{máx}}$ representa la energía cinética máxima que el fotoelectrón puede tener fuera de la superficie.*

Consideremos cómo la hipótesis del fotón de Einstein anula las tres objeciones surgidas contra la interpretación basada en la teoría ondulatoria del efecto fotoeléctrico. En cuanto a la primera objeción ("el problema de la intensidad"), existe una completa concordancia de la teoría del fotón con el experimento. Si duplicamos la intensidad de la luz, se duplica el número de fotones y también se duplica la corriente fotoeléctrica; no cambiamos la energía de los fotones individuales o la naturaleza de los procesos individuales fotoeléctricos descritos por la ecuación 18.

La segunda objeción ("el problema de la frecuencia") se cumple por la ecuación 18. Si $K_{\text{máx}}$ es igual a cero, tenemos

$$h\nu_0 = \phi,$$

que afirma que el fotón tiene justo la energía suficiente para expulsar a los fotoelectrones y nada extra aparece como energía cinética. Si ν se reduce por debajo de ν_0, $h\nu$ será menor que ϕ y los fotones individuales, no importa cuántos de ellos haya (es decir, independientemente de lo intensa que sea la iluminación), no tendrá la energía suficiente para expulsar fotoelectrones.

La tercera objeción ("el problema del retraso de tiempo") se deduce de la teoría del fotón porque la energía requerida se suministra en un paquete concentrado. No se distribuye uniformemente sobre la sección transversal del haz como en la teoría ondulatoria.

Reescribamos la ecuación fotoeléctrica de Einstein (Ec. 18) sustituyendo a $K_{\text{máx}}$ de la ecuación 16. Esto conduce, después de reordenar, a

$$V_0 = (h/e)\nu - (\phi/e). \tag{19}$$

Así, la teoría de Einstein predice una relación lineal entre V_0 y ν, de completo acuerdo con el experimento; véase la figura 11. La pendiente de la curva experimental en esta figura debe ser h/e, de modo que

$$\frac{h}{e} = \frac{ab}{bc} = \frac{2.30\ \text{V} - 0.68\ \text{V}}{(10 \times 10^{14} - 6.0 \times 10^{14})\ \text{Hz}}$$
$$= 4.1 \times 10^{-15}\ \text{V}\cdot\text{s}.$$

Podemos hallar h al multiplicar esta razón por la carga e del electrón,

$$h = (4.1 \times 10^{-15}\ \text{V}\cdot\text{s})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})$$
$$= 6.6 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

De un análisis más cuidadoso de éstos y otros datos, incluyendo los obtenidos con superficies de litio, Millikan determinó el valor $h = 6.57 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$ con una exactitud del 0.5% aproximadamente. Esta concordancia con el valor de h obtenido de la expresión de la radiación de Planck es una confirmación notable del concepto del fotón de Einstein.

Cuando Einstein propuso por primera vez su teoría de la luz basada en el fotón, los hechos de la fotoelectricidad no se habían establecido experimentalmente tan bien como los hemos descrito. Las mediciones fotoeléctricas precisas son difíciles, y fue hasta 1916 cuando Millikan sometió con éxito la ecuación fotoeléctrica de Einstein a una prueba experimental rigurosa. Si bien Millikan demostró que esta ecuación concuerda con el experimento en todos sus detalles, él mismo no estaba convencido de que las partículas luminosas de Einstein fueran reales. Él escribió sobre la "audaz, por no decir temeraria, hipótesis" de Einstein y, más tarde, que el concepto del fotón de

* La función de trabajo representa la energía necesaria para desprender los electrones menos ligados de la superficie. Los electrones más ligados requieren una energía mayor y (para una energía del fotón fija) emergen con una energía cinética menor de $K_{\text{máx}}$.

Einstein "parecía ser totalmente insostenible por el momento".

Planck, el verdadero iniciador de la constante h, no aceptó inmediatamente a los fotones de Einstein. Cuando recomendó la filiación de Einstein a la Real Academia Prusiana de Ciencias en 1913, escribió: "realmente no puede esgrimirse en su contra que a veces pueda haber errado el objetivo en sus especulaciones, como por ejemplo en su teoría de los cuantos de luz". No queda fuera de lo común el que las ideas realmente novedosas se acepten sólo lentamente, aun por científicos líderes como Millikan y Planck. Por cierto que, fue por su teoría del fotón, aplicada al efecto fotoeléctrico, por lo que Einstein recibió el premio Nobel de física en 1921.

Problema muestra 6 Halle la función de trabajo del sodio de los datos graficados en la figura 11.

Solución La intersección de la línea recta en la figura 11 con el eje de las frecuencias es la frecuencia teórica de corte ν_0. Si $V_0 = 0$ y $\nu = \nu_0$ en la ecuación 19, se obtiene

$$\phi = h\nu_0 = (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(4.39 \times 10^{14}\ \text{Hz})$$
$$= 2.91 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.82\ \text{eV}.$$

Notamos de la ecuación 19 que una determinación de la constante h de Planck sólo involucra la pendiente de la línea recta de la figura 11 y que una determinación de la función de trabajo ϕ sólo contiene la intersección. Convénzase usted, lector, por sí mismo de que en el primer caso no se necesita tener en cuenta la diferencia de potencial de contacto V_{dpc}, pero que sí debe hacerse así en el segundo caso.

Problema muestra 7 ¿A qué velocidad por unidad de área chocan los fotones con la placa de metal del problema muestra 5? Supóngase una longitud de onda de 589 nm (luz amarilla del sodio).

Solución Recordemos nuestra definición previa (véase la Sec. 41-4) de la intensidad de la luz: energía por unidad de tiempo por unidad de área (considerando al área como perpendicular a la dirección de propagación de la luz). Aquí consideramos la intensidad (de la luz monocromática) en términos de fotones como la energía por fotón multiplicada por la velocidad por unidad de área con que los fotones chocan contra una superficie perpendicular a su movimiento. Las dos interpretaciones de la intensidad son equivalentes.

La intensidad de la luz que cae sobre la placa es, según el problema muestra 5,

$$I = (0.32\ \text{J/m}^2\cdot\text{s})(1\ \text{eV}/1.6 \times 10^{-19}\ \text{J})$$
$$= 2.0 \times 10^{18}\ \text{eV/m}^2\cdot\text{s}.$$

Cada fotón tiene una energía dada por

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{5.89 \times 10^{-7}\ \text{m}}$$
$$= (3.4 \times 10^{-19}\ \text{J})\left(\frac{1\ \text{eV}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}}\right) = 2.1\ \text{eV}.$$

La velocidad por unidad de área r con la que los fotones chocan con la placa es, entonces, la intensidad dividida entre la energía por fotón, o sea

$$r = \frac{I}{E} = \frac{2.0 \times 10^{18}\ \text{eV/m}^2\cdot\text{s}}{2.1\ \text{eV/fotón}} = 9.5 \times 10^{17}\ \text{fotones/m}^2\cdot\text{s}.$$

Aun a esta intensidad luminosa modesta la velocidad de los fotones es muy grande, cayendo cerca de 10^{12} fotones sobre 1 mm^2 cada segundo.

49-7 EL EFECTO COMPTON

La radiación de cavidad, en la que intervenía principalmente la parte infrarroja del espectro, fue nuestro primer ejemplo de la interacción entre la radiación y la materia. El efecto fotoeléctrico, nuestro segundo ejemplo, tenía que ver con la luz visible y la luz ultravioleta. Aquí describimos el *efecto Compton*,* donde los experimentos clave se presentan en las regiones de los rayos X y de los rayos gamma del espectro electromagnético.

El efecto Compton, en el que interviene la dispersión de la radiación de los átomos, puede entenderse sin dificultad en términos de las colisiones, como en el caso de las bolas de billar, entre los fotones y los electrones. En la explicación debemos tener en cuenta no sólo la energía de los fotones sino también su ímpetu lineal, una propiedad que no habíamos tenido necesidad de introducir hasta ahora. Hemos visto que el análisis de Einstein de la capacidad calorífica de un sólido en términos cuánticos contribuyó mucho para que se aceptase la noción de la cuantización de la energía. De igual modo, el análisis Compton del efecto que lleva su nombre contribuyó mucho para que se aceptase la realidad de los fotones.

En el experimento Compton, un haz de rayos X con longitud de onda λ bien definida incide sobre un blanco de grafito T, como en la figura 12. A diversos ángulos de dispersión ϕ, la intensidad de los rayos X dispersados se mide en función de su longitud de onda. La figura 13 muestra los resultados del experimento Compton. Vemos que, si bien el haz incidente consta esencialmente de una sola longitud de onda λ, los rayos X dispersados tienen picos de intensidad en dos longitudes de onda; una de ellas es la misma que la longitud de onda incidente, pero la otra (λ') es mayor en una cantidad $\Delta\lambda$. Este *corrimiento de Compton* $\Delta\lambda$ varía con el ángulo al cual se observan los rayos X dispersados.

* Arthur H. Compton (1892-1962) descubrió en 1923 que las longitudes de onda de los rayos X cambian después de haber sido dispersadas por los electrones. Recibió el premio Nobel de 1927 en física por este descubrimiento. Más tarde llegó a ser el director del laboratorio en la Universidad de Chicago en donde se construyó el primer reactor nuclear.

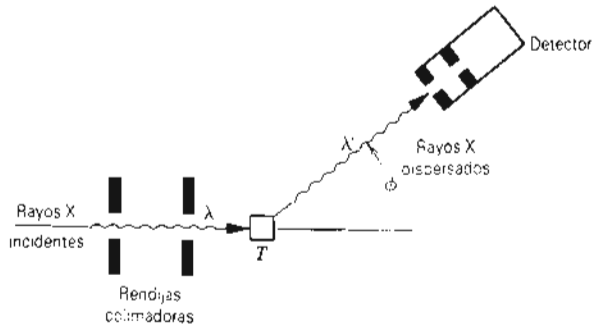


Figura 12 Un arreglo experimental para observar el efecto Compton. El detector puede moverse a diferentes ángulos ϕ.

La presencia de una onda dispersa de longitud de onda λ' no puede entenderse si los rayos X incidentes se consideran como una onda electromagnética. Desde el punto de vista ondulatorio, la onda incidente de frecuencia ν causa que los electrones que están en el blanco dispersor oscilen a esa misma frecuencia. Estos electrones oscilatorios, al igual que las oleadas de cargas de un lado al otro en una pequeña antena transmisora de radio, irradian ondas electromagnéticas que, una vez más, tienen esta misma frecuencia ν. Entonces, de acuerdo con esta interpretación, la onda dispersada debería tener la misma frecuencia y la misma longitud de onda que la onda incidente. Esta conclusión está en desacuerdo con la evidencia experimental (Fig. 13) que muestra una variación en la longitud de onda de la onda dispersada.

Compton explicó sus resultados experimentales al postular que el haz de rayos X incidente se comportaba no como una onda sino como un conjunto de fotones de energía E (= $h\nu$) y que estos fotones experimentaban colisiones del tipo de bolas de billar con los electrones libres en el blanco dispersor. Con este panorama, la radiación dispersada consta del retroceso de los fotones que emergen del blanco. Puesto que el fotón incidente transfiere parte de su energía al electrón con el cual choca, el fotón dispersado debe tener una energía menor E'. En consecuencia, debe tener una frecuencia ν' (= E'/h) menor, lo cual implica una longitud de onda λ' (= c/ν') mayor. Este punto de vista explica, al menos cualitativamente, el corrimiento $\Delta\lambda$ de la longitud de onda. Nótese cuán diferente es este modelo de la dispersión de las partículas de rayos X del modelo basado desde el punto de vista ondulatorio.

Analicemos ahora cuantitativamente una sola colisión fotón-electrón. La figura 14 muestra una colisión entre un fotón y un electrón. Se supone que el electrón está inicialmente en reposo y es esencialmente libre, esto es, no está ligado a los átomos del dispersor. (Esta explicación es buena para los electrones externos débilmente ligados, cuya energía de amarre es mucho menor que la energía del fotón de rayos X.) Apliquemos la ley de conservación de la energía a esta colisión. Puesto que los electrones de retroceso pueden tener una velocidad v comparable con la de la luz, debemos usar la expresión relativista de la energía cinética del electrón. De la expresión relativista para la conservación de la energía (véase la Sec. 21-9), podemos escribir

$$E_i = E_f$$

o sea

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + mc^2 + K, \tag{20}$$

donde mc^2 es la energía de reposo del electrón golpeado y K es su energía cinética (relativista). Al sustituir ν por c/λ (y a ν' por c/λ'), y al emplear la ecuación 25 del capítulo 7 de la energía cinética relativista, tenemos

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right). \tag{21}$$

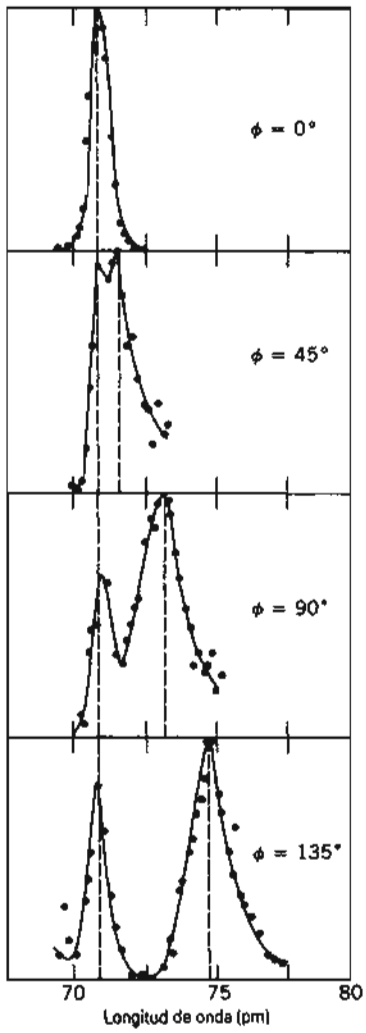


Figura 13 Los resultados experimentales de Compton para cuatro valores diferentes del ángulo de dispersión ϕ.

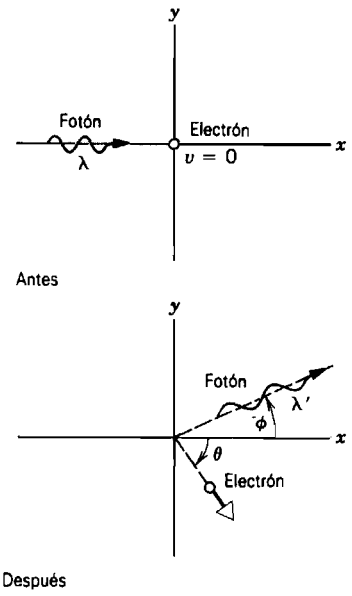


Figura 14 Un fotón de longitud de onda λ choca con un electrón en reposo. El fotón es dispersado con un ángulo ϕ con una longitud de onda λ' mayor. El electrón sale despedido con una velocidad v con un ángulo θ.

Apliquemos ahora la ley (vectorial) de la conservación del ímpetu lineal a la colisión de la figura 14. Necesitamos primero una expresión para el ímpetu de un fotón. En la sección 41-5 vimos que cuando un objeto absorbe completamente una energía U de un haz luminoso paralelo que incida sobre él, el haz luminoso, de acuerdo con la teoría ondulatoria de la luz, transfiere simultáneamente al objeto un ímpetu lineal U/c. En la sección 48-7 demostramos que podíamos considerar esta situación desde el punto de vista de un haz de fotones de energía E, entregando cada uno un ímpetu (cantidad de movimiento) $p = E/c$ al objeto absorbente. En este caso

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{22}$$

Para el electrón, la expresión relativista del ímpetu lineal está dada por la ecuación 22 del capítulo 9,

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Podemos entonces escribir para la conservación de la componente x del ímpetu lineal

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cos\theta \tag{23}$$

y para la componente y

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\operatorname{sen}\phi - \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\operatorname{sen}\theta. \tag{24}$$

Nuestra meta es hallar $\Delta\lambda$ ($= \lambda' - \lambda$), el corrimiento de la longitud de onda de los fotones dispersados, de modo que podamos compararlo con los resultados experimentales de la figura 13. El experimento de Compton no tiene que ver con observaciones del electrón de retroceso en el bloque dispersante. De las cinco variables (λ, λ', v, ϕ y θ) que aparecen en las tres ecuaciones (21, 23 y 24) podemos eliminar dos. Elegimos eliminar v y θ, que sólo tienen que ver con el electrón, reduciendo, por consiguiente, las tres ecuaciones a una sola relación entre las variables.

Mediante los pasos algebraicos necesarios (véase el problema 64) llegamos a este simple resultado para el cambio en la longitud de onda de los fotones dispersados:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi). \tag{25}$$

El corrimiento Compton $\Delta\lambda$ depende únicamente del ángulo dispersante ϕ y no de la longitud de onda inicial λ. La ecuación 25 predice, dentro del error experimental, los corrimientos Compton que se observan en la figura 13. Nótese de la ecuación que $\Delta\lambda$ varía desde cero (para $\phi = 0$, correspondiente a una colisión "rasante" en la figura 14, donde el fotón incidente apenas se desvía) hasta $2h/mc$ (para $\phi = 180°$, lo que corresponde a una colisión "de frente", en que el fotón incidente invierte su dirección).

Recuérdese que el corrimiento Compton $\Delta\lambda$ es un efecto puramente cuántico, que no se espera que ocurra con base en la física clásica. Al igual que en la radiación de cavidad y el efecto fotoeléctrico, la presencia de la constante h de Planck en la expresión del corrimiento Compton (Ec. 25) indica un fenómeno cuántico. La ecuación 25 muestra que $\Delta\lambda \to 0$ conforme $h \to 0$. El método de hacer que la constante de Planck tienda a cero es un modo formal de probar las ecuaciones cuánticas para ver si predicen lo que sucedería al aplicar las leyes de la física clásica no solamente a objetos grandes sino también a los átomos y los electrones.

Resta por explicar la presencia del pico en la figura 13 en el que la longitud de onda no cambia en la dispersión. Este pico resulta de las colisiones entre fotones y electrones que, en lugar de estar casi libres, están fuertemente ligados en la coraza iónica en el blanco dispersante. Durante las colisiones de los fotones, los electrones ligados se comportan como electrones libres muy pesados. Esto es porque la coraza iónica retrocede totalmente durante la colisión. Así, la masa efectiva M de un dispersor de carbono es aproximadamente la masa de un núcleo de carbono. Toda vez que este núcleo contiene seis protones y seis neutrones, tenemos aproximadamente, $M = 12 \times 1840m = 22{,}000m$. Si sustituimos m por M en la ecuación 25, vemos que el corrimiento Compton para colisiones con electrones fuertemente ligados es inmensamente pequeño.

Problema muestra 8 De un blanco de carbono se dispersan rayos X con $\lambda = 100$ pm. La radiación dispersada se observa a 90° del haz incidente. (*a*) ¿Cuál es el corrimiento Compton $\Delta\lambda$? (*b*) ¿Qué energía cinética se imprime al electrón de retroceso?

Solución (*a*) Poniendo $\phi = 90°$ en la ecuación 25, tenemos, para el corrimiento Compton,

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$
$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}(1 - \cos 90°)$$
$$= 2.43 \times 10^{-12}\ \text{m} = 2.43\ \text{pm}.$$

(*b*) Al emplear $v = c/\lambda$, podemos escribir la ecuación 20 así:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K.$$

Si se sustituye $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ y se despeja para K, obtenemos

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})(2.43 \times 10^{-12}\ \text{m})}{(100 \times 10^{-12}\ \text{m})(100\ \text{pm} + 2.43\ \text{pm})(10^{-12}\ \text{m/pm})}$$
$$= 4.72 \times 10^{-17}\ \text{J} = 295\ \text{eV}.$$

Usted puede demostrar que la energía inicial del fotón E en este caso ($= hv = hc/\lambda$) es de 12.4 keV, de modo que el fotón pierde alrededor del 2.4% de su energía en la colisión. Puede demostrarse que un fotón cuya energía fuese diez veces mayor (= 124 keV) pierde 20% de su energía en una colisión similar. Esto es consistente con el hecho de que no depende de la longitud de onda inicial. Los rayos X más energéticos, que tienen longitudes de onda menores, experimentarán un mayor porcentaje de aumento en su longitud de onda y, en consecuencia, un mayor porcentaje de pérdida de energía.

49-8 ESPECTROS DE LÍNEAS

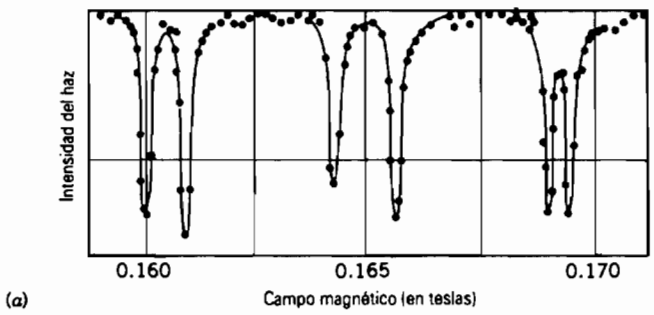
Los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico y del efecto Compton proporcionan una prueba indiscutible de la existencia del fotón o de la naturaleza de partícula de la radiación electromagnética. Sin embargo, históricamente el concepto del fotón surgió del estudio de la radiación térmica, que tiene un espectro de energías continuo. La naturaleza discreta (cuantizada) de las energías del fotón, en este caso, se oculta en esta amplia distribución de energías. Una verificación más directa de la naturaleza cuantizada de la radiación daría por resultado la detección de fotones individuales y la medición de sus energías.

La complicación en el caso de la radiación térmica se origina porque los átomos de las paredes de la cavidad se comportan cooperativamente y deben analizarse mediante consideraciones estadísticas. Si analizamos sistemas absorbedores o emisores que estén aislados uno del otro, hallamos que el espectro de la radiación no es continuo sino *discreto*, constando de longitudes de onda individuales separadas por espacios en donde no existe radiación. En el caso de la luz visible, los espectros a menudo se exhiben y analizan usando espectroscopios con prismas o con rejillas de difracción, como los de la figura 8 del capítulo 47, que producen espectros como los de la figura 9 del capítulo 47.

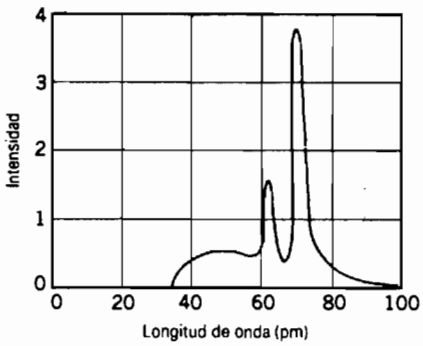
Estos espectros se llaman *espectros de línea*, y las componentes individuales se llaman *líneas espectrales*. Los espectros de líneas pueden ser consecuencia de la emisión o de la absorción por radiación por cualquier sistema aislado, incluyendo moléculas, átomos, núcleos o partículas subnucleares. (Los espectros de línea de los átomos y de las moléculas estaban disponibles en tiempo de Planck, pero no se interpretaron en términos de la cuantización de la energía hasta que Planck y Einstein propusieron el concepto del fotón.)

El análisis de la radiación como fotones con una energía definida indica sin lugar a duda que el sistema emisor o absorbedor de la radiación tiene estados de energía discretos, del mismo modo que la diferencia de energía entre los estados iguala a la energía del fotón, como se indicó en las figuras 18 y 19 del capítulo 8. (Aquí estamos despreciando la pequeña energía de "retroceso" necesaria para conservar el ímpetu lineal en el proceso de absorción o de emisión.) En efecto, esto es una consecuencia de la interpretación de Einstein del espectro de la radiación de cavidad: la cuantización de la radiación implica la cuantización de las fuentes de radiación. Al estudiar los espectros de líneas podemos aprender acerca de los estados de energía de los átomos o de otros sistemas que emitan radiación. En el capítulo siguiente trataremos de la *mecánica cuántica*, un procedimiento matemático para calcular las energías de estos estados discretos, basado en la hipótesis de que entre los componentes del sistema actúa una fuerza particular (por ejemplo, la fuerza electrostática entre el electrón y el núcleo en un átomo). Las energías de los estados calculadas pueden compararse entonces con las deducidas del experimento para ver si la hipótesis acerca de la fuerza que actúa en el sistema es razonable.

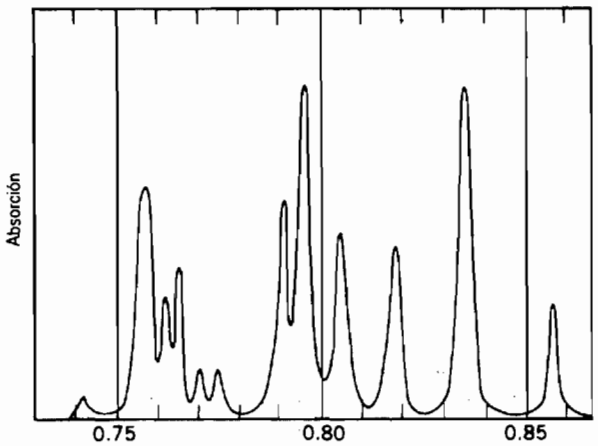
La figura 15 muestra ejemplos de espectros de líneas de moléculas, átomos, núcleos y partículas, que han contribuido a nuestro entendimiento de su estructura interna. Estos espectros, cuyos orígenes se muestran en la tabla 2, indican la gran variedad de espectros de líneas que pueden medirse en el laboratorio y la región de longitudes de onda correspondiente. En el capítulo 51 consideraremos el espectro de líneas del hidrógeno atómico, que proporcionó las bases que condujeron a la teoría cuántica de la estructura atómica.



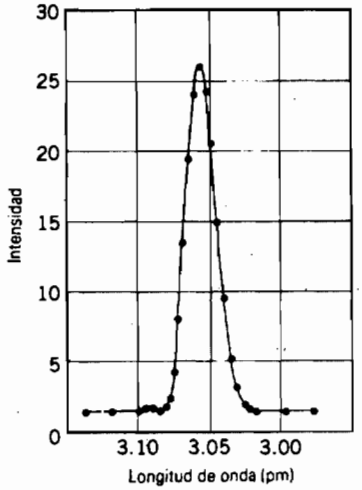
(*a*)



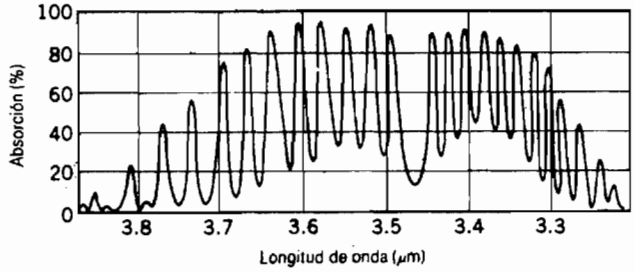
(*e*)



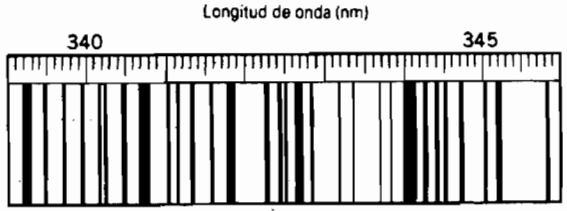
(*b*)



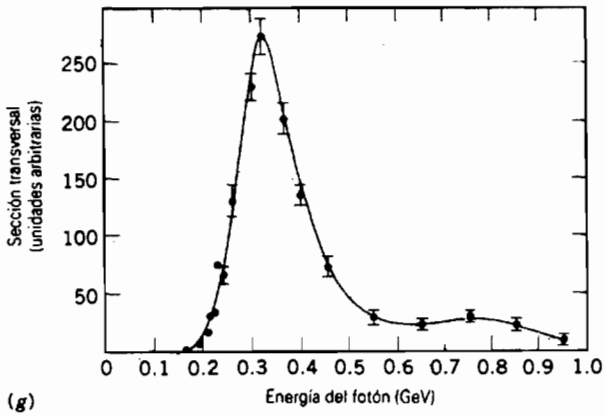
(*f*)



(*c*)



(*d*)



(*g*)

Figura 15 Algunos espectros lineales seleccionados. Véase la tabla 2 para sus identificaciones.

TABLA 2 ALGUNOS ESPECTROS DE LÍNEAS SELECCIONADOS

Figura	*Entidad*	*Región de la longitud de onda* (m)	*Región del espectro*	*Modo*
15*a*	Molécula de H_2	40	Radio	Absorción
15*b*	Molécula de NH_3	1×10^{-2}	Microondas	Absorción
15*c*	Molécula de HCl	3×10^{-6}	Infrarrojo	Absorción
15*d*	Átomo de Fe	3×10^{-7}	Ultravioleta	Emisión
15*e*	Átomo de Mo	6×10^{-11}	Rayos X	Emisión
15*f*	Núcleo de ^{198}Hg	3×10^{-12}	Rayos gamma	Emisión
15*g*	Protón	4×10^{-15}	Rayos gamma	Absorción

PREGUNTAS

1. Los "huecos" formados por los trozos de carbón en una fogata de carbón se ven más brillantes que los mismos trozos. ¿Es la temperatura en tales huecos apreciablemente mayor que la temperatura superficial de cualquier trozo de carbón luminiscente expuesto? Explique esta observación común.
2. La relación $I(T) = \sigma T^4$ (Ec. 1) es exacta para las cavidades reales y se cumple para todas las temperaturas. ¿Por qué no empleamos esta relación como la base para una definición de la temperatura a, digamos, 100° C?
3. ¿Obedecen todos los sólidos incandescentes la ley de la cuarta potencia de la temperatura, como parece indicar la ecuación 2?
4. A un hueco en la pared de un radiador de cavidad se le llama a veces *cuerpo negro*. ¿Por qué?
5. Si vemos hacia adentro de una cavidad cuyas paredes se mantienen a una temperatura constante, no son visibles detalles del interior. Explique.
6. Simplemente viendo hacia el cielo en la noche, ¿puede usted señalar las estrellas que son más calientes que el Sol? ¿Más frías que el Sol? ¿Qué es lo que se busca? ¿Es una guía la brillantez de la estrella?
7. Betelgeuse, la prominente estrella roja de la constelación de Orión, tiene una temperatura superficial mucho más baja que la del Sol, y sin embargo irradia energía en el espacio a una velocidad mucho mayor que el Sol. ¿Cómo puede ser esto?
8. Sólo un pequeño porcentaje de la energía suministrada a un foco eléctrico de 100 W se ve en forma de luz visible. ¿Qué le pasa al resto? ¿Qué podría hacerse para aumentar este porcentaje? ¿Por qué no se ha hecho todavía?
9. La temperatura de su piel es de alrededor de 300 K. ¿En qué región del espectro electromagnético emite usted radiación térmica más intensamente?
10. Las curvas de la radiancia espectral en radiadores de cavidad a temperaturas diferentes no se intersecan; véase la figura 3. Sin embargo, supóngase que lo hicieran. ¿Puede usted demostrar que esto violaría la segunda ley de la termodinámica?
11. Decimos que todos los objetos irradian energía en virtud de su temperatura y, sin embargo, no podemos ver todos los objetos en la oscuridad. ¿Por qué no?
12. ¿Se cuantiza la energía en la física clásica?
13. Demuestre que la constante de Planck tiene las dimensiones del ímpetu angular. ¿Significa esto necesariamente que el ímpetu angular es una cantidad cuantizada?
14. Para que los efectos cúanticos fuesen fenómenos "cotidianos" de nuestras vidas, ¿qué orden de magnitud necesitaría tener el valor de h? [Véase B. Gamow, *Mr. Tompkins in Wonderland* (Cambridge University Press, Cambridge, 1957), para una amena popularización de un mundo en el que las constantes físicas c, G y h se vuelven obvias por sí mismas.]
15. Para que le sea posible detectar la cuantización de la energía al observar un péndulo oscilatorio, ¿de qué orden de magnitud tendría que ser la constante de Planck? (*Sugerencia*: Véase el problema muestra 3.)
16. Dé su propia versión de por qué el suponer que la energía de los osciladores atómicos en un sólido está cuantizada conduce a una reducción de la capacidad calorífica a temperaturas bajas.
17. La ley clásica de la equipartición de la energía (véase la Sec. 23-6) conduce a la ley de la radiación de Rayleigh y Jeans cuando se aplica a la radiación de la cavidad, y a la ley de Dulong y Petit cuando se aplica a las capacidades caloríficas de los sólidos. En ambos casos existe un serio desacuerdo con el experimento. ¿Puede usted relacionar estas dos fallas de la ley de la equipartición y explicar por qué la cuantización de la energía conduce, en cada caso, a teorías que *sí* concuerdan con el experimento?
18. "En el problema de la radiación de cavidad y en el problema de la capacidad calorífica de los sólidos, los desacuerdos entre el experimento y la teoría clásica en ciertos intervalos de las variables no son pequeños sino totales, y más allá de toda discusión." ¿Puede usted identificar, en cada caso, los desacuerdos específicos a que se refiere esta aseveración?
19. Explique por qué un tubo empleado para examinar la emisión fotoeléctrica está (*a*) sometido al vacío y (*b*) equipado con una ventana hecha de cuarzo en lugar de vidrio.

20. Determine si se necesita o no la mecánica relativista para verificar la ecuación fotoeléctrica (Ec. 18) con un 1% de incertidumbre. Nótese que los potenciales de frenado típicos son de unos cuantos volts.

21. En la figura 10, ¿por qué no se eleva la corriente fotoeléctrica verticalmente hasta un valor máximo (la saturación) cuando la diferencia de potencial aplicada es ligeramente más positiva que V_0?

22. ¿Por qué, en el efecto fotoeléctrico, la existencia de una frecuencia teórica de corte habla en favor de la teoría del fotón y en contra de la teoría ondulatoria?

23. ¿Por qué son muy sensibles las mediciones fotoeléctricas a la naturaleza de la superficie fotoeléctrica?

24. Una placa metálica aislada emite fotoelectrones cuando se ilumina por vez primera con radiación ultravioleta, pero después cesa su emisión. Explique.

25. ¿Por qué es que, aun para radiación incidente que sea monocromática, los fotoelectrones se expulsan con una variedad de velocidades?

26. Decimos que toda la energía de un fotón absorbido se entrega a un fotoelectrón emitido. ¿Por qué despreciamos la energía absorbida por la red?

27. ¿Apoya más a la teoría del fotón el efecto de Compton, o bien el efecto fotoeléctrico? Explique su respuesta.

28. Considérense los procedimientos siguientes: (*a*) el bombardeo de un metal con electrones; (*b*) aplicar un campo eléctrico intenso cerca de un metal; (*c*) iluminar un metal con luz; (*d*) calentar un metal a temperatura elevada. ¿Cuál de los procedimientos anteriores puede dar por resultado la emisión de electrones?

29. Cierta placa metálica se ilumina con luz de una frecuencia definida. ¿De cuáles de las características siguientes depende que se emitan o no fotoelectrones: (*a*) de la intensidad de la iluminación; (*b*) de la longitud del tiempo de exposición a la luz; (*c*) de la conductividad térmica de la placa; (*d*) del área de la placa; (*e*) del material de la placa?

30. ¿Invalida la teoría de la fotoelectricidad de Einstein, en donde se postula que la luz es una corriente de fotones, al experimento de la interferencia de la rendija doble en donde se postula que la luz es una onda?

31. Explique la aseveración de que nuestros ojos no podrían detectar la luz de las estrellas si la luz no estuviese formada de partículas.

32. ¿Cómo puede estar dada la energía de un fotón por $E = h\nu$ cuando la presencia misma de la frecuencia ν en la fórmula implica que la luz es una onda?

33. Distinga entre la relación de Planck $E = nh\nu$ (Ec. 7) y la relación de Einstein $E = h\nu$ (Ec. 17).

34. Un fotón no tiene masa en reposo puesto que nunca puede estar en reposo con respecto a cualquier observador. Si la energía es igual a mc^2, ¿cómo puede un fotón tener cualquier cantidad de energía?

35. El ímpetu p de un fotón está dado por $p = h/\lambda$. ¿Por qué no aparece c, la velocidad de la luz, en esta expresión?

36. Al estudiar la propagación de la luz empleamos a veces rayos rectilíneos, a veces ondas, y en otras fotones discretos. ¿Hasta qué punto, de ser cierto, son compatibles entre sí estos puntos de vista? ¿Existen casos en que un punto de vista sea claramente superior a los otros?

37. Dado que, en un fotón, $E = h\nu$, el corrimiento Doppler de la frecuencia de la radiación de una fuente de luz que se aleja parecería indicar una disminución de la energía en los fotones emitidos. ¿Es esto realmente cierto? Si lo es, ¿qué pasó con el principio de conservación de la energía? (Véase "Questions Students Ask", *The Physics Teacher*, diciembre de 1983, pág. 616.)

38. El fotón *A* tiene el doble de energía que el fotón *B*. ¿Cuál es la razón entre los ímpetus de *A* y *B*?

39. ¿En qué difiere un fotón de una partícula material?

40. ¿Cómo se compara la dirección de un electrón dispersado de Compton con la energía cinética máxima con la dirección de un haz incidente de fotones monocromáticos?

41. ¿Por qué, desde el punto de vista de la dispersión de Compton (Fig. 14), esperaría usted que $\Delta\lambda$ sea independiente de los materiales de que se compone el dispersor?

42. ¿Por qué no se observa un efecto Compton con luz visible?

43. La luz procedente de estrellas distantes se dispersa por el efecto Compton muchas veces por los electrones libres en el espacio exterior antes de que llegue a nosotros. Esto recorre la luz hacia el rojo. ¿Cómo puede distinguirse este corrimiento del corrimiento Doppler hacia el rojo debido al movimiento de las estrellas al alejarse?

44. Tanto en el efecto fotoeléctrico como en el efecto Compton existe un fotón incidente y un electrón expulsado. ¿Cuál es la diferencia entre estos dos efectos?

45. Haga una lista y analice las hipótesis de Planck, en relación con el problema de la radiación de cavidad; de Einstein, en relación con el efecto fotoeléctrico; de Compton, en relación con el efecto que lleva su nombre.

46. Describa varios métodos experimentales que puedan emplearse para determinar el valor de la constante h de Planck.

PROBLEMAS

Sección 49-1 Radiación térmica

1. En 1983 el satélite astronómico infrarrojo (IRAS) detectó una nube de partículas sólidas en torno a la estrella Vega, irradiando al máximo con una longitud de onda de 32 μm. ¿Cuál es la temperatura de esta nube de partículas? Supóngase una emisividad de la unidad.

2. Al tratar de una temperatura baja, los físicos no consideran que una temperatura de 2.0 mK (0.0020 K) sea particularmente baja. ¿Para qué longitud de onda tiene su máximo la radiancia espectral de una cavidad a esta temperatura? ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece esta radiación? ¿Cuáles son algunas de las dificultades

prácticas de operar un radiador de cavidad a una temperatura tan baja?

3. Calcule la longitud de onda de la radiancia espectral máxima e identifique la región del espectro electromagnético a la que pertenece en cada uno de los incisos siguientes: (*a*) La radiación cósmica de fondo de 2.7 K, un remanente de la bola de fuego primordial. (*b*) Su cuerpo, suponiendo una temperatura de la piel de 34°C. (*c*) El filamento de tungsteno de una lámpara luminosa a 1800 K. (*d*) El Sol, suponiendo una temperatura superficial de 5800 K. (*e*) Un dispositivo termonuclear en explosión, suponiendo una temperatura de la bola de fuego de 10^7 K. (*f*) El Universo inmediatamente despúes del Big Bang, suponiendo una temperatura de 10^{38} K. Supóngan-se las condiciones de la radiación de cavidad en todos los casos.
4. (*a*) La temperatura superficial efectiva del Sol es de 5800 K. ¿A qué longitud de onda esperaría usted que el Sol irradie más intensamente? ¿En qué región del espectro se encuentra? ¿Por qué, entonces, se ve al Sol amarillo? (*b*) ¿A qué temperatura es más visible al ojo humano la radiación de cavidad? Véase la figura 1 en el capítulo 42.
5. Una cavidad cuyas paredes se mantienen a 1900 K tiene un pequeño orificio, de 1.00 mm de diámetro, perforado en su pared. ¿A qué frecuencia escapa la energía a través de este orificio de la cavidad interior?
6. Calcule la potencia térmica irradiada de una fogata suponiendo una emisividad de 0.90, una superficie efectiva de radiación de 0.50 m^2, y una temperatura de radiación de 500°C. ¿Parece razonable su respuesta?
7. (*a*) Demuestre que un cuerpo humano de 1.80 m^2 de área, una emisividad $\epsilon = 1.0$, y una temperatura de 34°C emite radiación a razón de 910 W. (*b*) ¿Por qué, entonces, no es luminiscente una persona en la oscuridad?
8. Una cavidad a la temperatura absoluta T_1 irradia energía a un nivel de potencia de 12.0 mW. ¿A qué nivel de potencia irradia la misma cavidad a la temperatura $2T_1$?
9. Un radiador de cavidad tiene su máxima radiancia espectral para una longitud de onda de 25.0 μm, en la región infrarroja del espectro. La temperatura del cuerpo se aumenta ahora hasta que la intensidad radiante $I(T)$ del cuerpo se duplique. (*a*) ¿Cuál es esta nueva temperatura? (*b*) ¿A qué longitud de onda tendrá ahora su valor máximo la radiancia espectral?
10. Una lámpara incandescente de 100 W tiene un filamento de tungsteno enrollado cuyo diámetro es de 0.42 mm y cuya longitud sin enrollar es de 33 cm. La emisividad efectiva para las condiciones de operación es de 0.22. Halle la temperatura de operación del filamento.
11. Un horno con una temperatura de $T_o = 215$°C en su interior está en una sala con una temperatura de $T_r = 26.2$°C. Existe una pequeña abertura de área $A = 5.20$ cm^2 en un costado del horno. ¿Cuánta potencia neta se transfiere del horno a la sala? (*Sugerencia*: Considérense tanto al horno como a la sala como cavidades con $\epsilon = 1$.)
12. Un *termógrafo* es un instrumento médico empleado para medir la radiación de la piel. Por ejemplo, la piel normal irradia a una temperatura de unos 34°C y la piel que cubre un tumor irradia a una temperatura ligeramente más alta. (*a*) Deduzca una expresión aproximada para la diferencia fraccionaria $\Delta I/I$ en la intensidad de la radiación entre áreas adyacentes de la piel que estén a temperaturas T y $T + \Delta T$ ligeramente diferentes. (*b*) Evalúe esta expresión para una diferencia de temperatura de 1.3°C. Suponga que la piel irradia con una emisividad constante.
13. Una lente convexa de 3.8 cm de diámetro y 26 cm de distancia focal produce una imagen del Sol sobre una pantalla negra delgada del mismo tamaño que la imagen. Halle la máxima temperatura más alta que puede alcanzar la pantalla. La temperatura efectiva del Sol es de 5800 K.
14. El filamento de una lámpara de 100 W es un alambre cilíndrico de tungsteno de 0.280 mm de diámetro y 1.8 cm de longitud. Véase el apéndice D para los datos necesarios sobre el tungsteno. Supóngase una emisividad de la unidad y no tome en cuenta la energía que el filamento pueda absorber de su entorno. (*a*) Calcule la temperatura de operación del filamento. (*b*) ¿Cuánto tiempo le toma al filamento enfriarse en 500°C después de haber apagado la lámpara?
15. Considérese un planeta, de radio R, que gira alrededor del Sol en una órbita circular de radio r. Supóngase que el planeta no tiene atmósfera (y, por lo tanto, tampoco un "efecto de invernadero" en su temperatura superficial). (*a*) Demuestre que la temperatura superficial T del planeta está dada por la relación $T^4 = P_{Sol}/16\pi\sigma r^2$, en donde P_{Sol} es la producción de potencia radiante del Sol. (*b*) Evalúe la temperatura de la Tierra numéricamente.

Sección 49-2 Ley de la radiación de Planck

16. Demuestre que la longitud de onda $\lambda_{máx}$ a la que tiene su máximo la ley de la radiacion espectral de Planck (Ec. 6) está dada por la ecuación 4:

$$\lambda_{máx} = (2898\ \mu\text{m}\cdot\text{K})/T.$$

(*Sugerencia*: Haga que $dR/d\lambda = 0$; se encontrará una ecuación cuya solución numérica es 4.965.)

17. (*a*) Al integrar la ley de la radiación de Planck (Ec. 6) para todas las longitudes de onda, demuestre que la potencia irradiada por metro cuadrado de una superficie de cavidad está dada por

$$I(T) = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}\right) T^4 = \sigma T^4.$$

(*Sugerencia*: Haga un cambio en las variables, haciendo que $x = hc/\lambda kT$. Se encontrará la integral definida

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}$$

la cual tiene el valor $\pi^4/15$.) (*b*) Verifique que el valor numérico de la constante σ es 5.67×10^{-8} $W/(m^2\cdot K^4)$.

18. (*a*) Un radiador ideal tiene una radiancia espectral a 400 nm que es 3.50 veces su radiancia espectral a 200 nm. ¿Cuál es su temperatura? (*b*) ¿Cuál sería su temperatura si su radiancia espectral a 200 nm fuera 3.50 veces su radiancia espectral a 400 nm?

Sección 49-4 Capacidad calorífica de los sólidos

19. En términos de la temperatura Einstein T_E, ¿a qué temperatura alcanzará la energía molar interna de un sólido la mitad de su valor clásico de $3RT$?

20. (*a*) Demuestre que la energía molar interna E_{int} de un sólido puede escribirse, de acuerdo con la teoría de Einstein de las capacidades caloríficas, como

$$E_{int} = 3RT_E\left(\frac{1}{e^x - 1}\right),$$

donde $x = T_E/T$, donde T_E es la *temperatura Einstein* $h\nu/k$. (*b*) Verifique que E_{int} tiende a su valor clásico de $3RT$ conforme $T \to \infty$.

21. En términos de la teoría de Einstein de la capacidad calorífica, (*a*) ¿cuál es la capacidad calorífica molar a volumen constante de un sólido a su temperatura Einstein? Exprese su respuesta como un porcentaje de su valor clásico de $3R$. (*b*) ¿Cuál es la energía molar interna a la temperatura Einstein? Exprese su respuesta como un porcentaje de su valor clásico de $3RT$.

22. Demuestre que, a temperaturas suficientemente elevadas, la expresión de Einstein para la capacidad calorífica de un sólido (Ec. 14) se reduce a la fórmula clásica (Ec. 11).

23. Las temperaturas Einstein del plomo, del aluminio y del berilio pueden considerarse como de 68 K, 290 K y 690 K, respectivamente. Encuentre, para cada uno de estos elementos (*a*) la frecuencia ν de sus osciladores atómicos, (*b*) la separación ΔE entre los niveles contiguos del oscilador y (*c*) la constante del resorte k efectiva.

24. Puede considerarse que la temperatura Einstein del aluminio es de 290 K. De acuerdo con la teoría de Einstein de la capacidad calorífica, ¿cuáles son (*a*) su energía molar interna (véase el problema 20) a 150 K y (*b*) su capacidad calorífica molar, en condiciones de volumen constante, a 150 K?

25. Un bloque de aluminio de 12.0 g se calienta de 80 K a 180 K, en condiciones de volumen constante. ¿Cuánto calor se requiere de acuerdo con (*a*) la teoría clásica de la capacidad calorífica y (*b*) la teoría cuántica de Einstein de la capacidad calorífica? Puede considerarse que la temperatura Einstein del aluminio es de 290 K.

26. Supóngase que se mezclan perfectamente 25.0 g de aluminio a 80.0 K con 12.0 g de aluminio a 200 K en un recipiente aislado. ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla? Supóngase que la teoría de Einstein de las capacidades caloríficas es válida y que, a estas temperaturas relativamente bajas, puede despreciarse la diferencia entre las capacidades caloríficas a volumen constante y a presión constante. Supóngase también que no existen intercambios de energía entre las dos muestras de aluminio y el recipiente. Puede considerarse que la temperatura Einstein del aluminio es de 290 K.

Sección 49-6 Teoría del fotón de Einstein

27. (*a*) Usando los "mejores" valores de las constantes fundamentales, como se encuentran en el apéndice B, demuestre que la energía E de un fotón se relaciona con su longitud de onda mediante

$$E = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{\lambda}.$$

Este resultado puede ser útil en la resolución de muchos problemas. (*b*) La luz de color naranja de una lámpara de sodio como las empleadas en la iluminación urbana tiene una longitud de onda de 589 nm. ¿Cuánta energía posee un fotón individual de tal lámpara?

28. Considérese luz monocromática que incide sobre una película fotográfica. Se registrarán fotones incidentes cuando tengan la energía suficiente para disociar a una molécula de AgBr de la película. La energía mínima requerida para hacerlo es de unos 0.60 eV. Halle la mayor longitud de la onda de corte a la que no se registrará la luz. ¿En qué región del espectro cae esta longitud de onda?

29. Un átomo absorbe un fotón que tiene una longitud de onda de 375 nm e inmediatamente emite otro fotón que tiene una longitud de onda de 580 nm. ¿Cuál fue la energía neta absorbida por el átomo en este proceso?

30. (*a*) Una línea de emisión espectral de hidrógeno, importante en la radioastronomía, tiene una longitud de onda de 21.11 cm. ¿Cuál es la energía correspondiente de su fotón? (*b*) En un tiempo se definió al metro como 1,650,763.73 longitudes de onda de la luz naranja emitida por una fuente luminosa que contiene átomos de criptón 86. ¿Cuál es la energía del fotón que corresponde a esta radiación?

31. La mayoría de los procesos gaseosos de ionización requieren cambios de energía de 1.0×10^{-18} a 1.0×10^{-16} J. ¿Qué región del espectro electromagnético del Sol es entonces principalmente responsable de la creación de la ionosfera en la atmósfera de la Tierra?

32. En condiciones ideales el ojo humano registrará una sensación visual a 540 nm si los fotones incidentes se absorben a una frecuencia menor de 100 s^{-1}. ¿A qué nivel de potencia corresponde esto?

33. Se desea escoger una sustancia para una fotocelda operable con luz visible. ¿Cuál de las siguientes lo hará (la función de trabajo aparece entre paréntesis): el tantalio (4.2 eV), el tungsteno (4.5 eV), el aluminio (4.2 eV), el bario (2.5 eV), el litio (2.3 eV), el cesio (1.9 eV)?

34. Los satélites y vehículos espaciales que orbitan alrededor de la Tierra pueden resultar cargados debido, en parte, a la pérdida de electrones causada por el efecto fotoeléctrico inducido por la luz solar en la superficie externa del vehículo en el espacio. Supóngase que se recubra con platino un satélite, metal con una de las funciones de trabajo más grandes: $\phi = 5.32$ eV. Halle el fotón de la frecuencia mínima que pueda expulsar un fotoelectrón del platino. (Los satélites deben diseñarse para que esa carga sea mínima.)

35. (*a*) La energía necesaria para desprender un electrón de sodio metálico es de 2.28 eV. ¿Muestra el sodio un efecto fotoeléctrico bajo luz roja, con $\lambda = 678$ nm? (*b*) ¿Cuál es la longitud de la onda de corte de la emisión fotoeléctrica del sodio y a qué color corresponde esta longitud de onda?

36. Halle la energía cinética máxima en eV de los fotoelectrones cuando la función de trabajo del material es de 2.33 eV y la frecuencia de la radiación es de 3.19×10^{15} Hz.

37. Un número de fotones incide sobre una superficie de sodio que tiene una función de trabajo de 2.28 eV, causando la emisión fotoeléctrica. Cuando se impone un potencial de frenado de 4.92 V, no existe una fotocorriente. Halle la longitud de onda de los fotones incidentes.

38. Luz de 200 nm de longitud de onda incide sobre una superficie de aluminio. En el aluminio son necesarios 4.2 eV para expulsar un electrón. ¿Cuál es la energía cinética de los electrones emitidos (*a*) más rápidos y (*b*) más lentos? (*c*) Halle el potencial de frenado. (*d*) Calcule la longitud de la onda de corte para el aluminio.

39. (*a*) Si la función de trabajo de un metal es de 1.85 eV, ¿cuál sería el potencial de frenado de la luz que tenga una longitud de onda de 410 nm? (*b*) ¿Cuál sería la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos en la superficie de metal?

40. El potencial de frenado de los fotoelectrones emitidos de una superficie iluminada con luz de 491 nm de longitud de onda es de 710 mV. Cuando la longitud de la onda incidente cambia a un nuevo valor, se encuentra que el potencial de frenado es de 1.43 V. (*a*) ¿Cuál es esta nueva longitud de onda? (*b*) ¿Cuál es la función de trabajo de la superficie?

41. Los datos fotoeléctricos de Millikan para el litio son:

Longitud de onda (nm)	433.9	404.7	365.0	312.5	253.5
Potencial de frenado (V)	0.55	0.73	1.09	1.67	2.57

Dibuje una gráfica como la de la figura 11, que es para el sodio, y halle (*a*) la constante de Planck y (*b*) la función de trabajo para el litio.

42. Una superficie de litio en la que la función de trabajo es de 2.49 eV se irradia con luz de 6.33×10^{14} Hz de frecuencia. La pérdida de electrones causa que el metal adquiera un potencial positivo. ¿Cuál será este potencial en el momento en que su valor impida más pérdida de electrones de la superficie?

43. Un satélite en órbita de la Tierra mantiene desplegado un panel de celdas solares en ángulo recto con la dirección de los rayos del Sol. Suponga que la radiación solar sea monocromática con una longitud de onda de 550 nm y que llegue a razón de 1.38 kW/m^2. ¿Cuál debe ser el área del panel para que cada minuto llegue "un mol de fotones"?

44. Si se considera la radiación como fotones, demuestre que cuando dos haces de luz paralelos de diferentes longitudes de onda tengan la misma intensidad, entonces la frecuencia por unidad de área con que los fotones pasan a través de cualquier sección de los haces tienen la misma razón que las longitudes de onda.

45. Una lámpara de radiación ultravioleta, que emite a 400 nm, y una lámpara de radiación infrarroja, que emite a 700 nm, están especificadas cada una a 130 W. (*a*) ¿Cuál lámpara irradia fotones con una frecuencia mayor? (*b*) ¿Cuántos fotones más genera por segundo esta lámpara que la otra?

46. Para expulsar un electrón interior, más fuertemente ligado, de un átomo de molibdeno se requiere una energía de 20 keV. Si esto ha de hacerse permitiendo que un fotón choque con el átomo, (*a*) ¿cuál debe ser la longitud de onda asociada del fotón? (*b*) ¿En qué región del espectro se encuentra el fotón? (*c*) ¿Podría llamarse a este proceso un efecto fotoeléctrico? Analice sus respuestas.

47. Unos rayos X con una longitud de onda de 71.0 pm desprenden fotoelectrones de una laminilla de oro, originándose los electrones desde lo profundo de los átomos de oro. Los electrones desprendidos se mueven en trayectorias circulares de radio r en una región de campo magnético uniforme **B**. El experimento demuestra que $rB = 188\ \mu\text{T} \cdot \text{m}$. Halle (*a*) la energía cinética máxima de los fotoelectrones y (*b*) el trabajo efectuado para desprender los electrones de los átomos de oro que forman la laminilla.

48. Cierta clase especial de foco luminoso emite luz monocromática con una longitud de onda de 630 nm. Está especificado a 70.0 W y tiene una eficiencia de 93.2% para convertir la energía eléctrica en luz. ¿Cuántos fotones emitirá la lámpara durante su tiempo de vida de 730 h?

49. Supóngase que una lámpara de vapor de sodio de 100 W irradie su energía uniformemente en todas direcciones en forma de fotones con una longitud de onda asociada de 589 nm. (*a*) ¿A qué frecuencia se emiten los fotones de la lámpara? (*b*) ¿A qué distancia de la lámpara será 1.00 fotón/(cm$^2 \cdot$ s) el flujo promedio de los fotones? (*c*) ¿A qué distancia de la lámpara será 1.00 fotón/cm^3 la densidad promedio de los fotones? (*d*) Calcule el flujo y la densidad de los fotones a 2.00 m de la lámpara.

50. Demuestre, al analizar una colisión entre un fotón y un electrón libre (usando la mecánica relativista), que es imposible que un fotón ceda toda su energía al electrón libre. En otras palabras, no puede ocurrir el efecto fotoeléctrico en electrones completamente libres; los electrones deben estar ligados en un sólido o en un átomo.

Sección 49-7 El efecto Compton

51. Un fotón de rayos X en particular tiene una longitud de onda de 41.6 pm. Calcule (*a*) la energía, (*b*) la frecuencia y (*c*) el ímpetu del fotón.

52. Halle (*a*) la frecuencia, (*b*) la longitud de onda y (*c*) el ímpetu de un fotón cuya energía sea igual a la energía en reposo del electrón.

53. ¿En cuánto pierde velocidad un átomo de sodio después de absorber un fotón de 589 nm de longitud de onda con el que chocó de frente?

54. La cantidad h/mc en la ecuación 25 se llama a menudo la longitud de onda de Compton, λ_C, de la partícula dispersada y tal ecuación se escribe

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\phi).$$

(*a*) Calcule la longitud de onda de Compton de un electrón y de un protón. (*b*) ¿Cuál es la energía de un fotón cuya longitud de onda sea igual a la longitud de onda de Compton del electrón y del protón? (*c*) Demuestre que, en general, la energía de un fotón cuya longitud de onda sea igual a la longitud de onda de Compton de una partícula es justo la energía en reposo de esa partícula.

55. Sobre electrones libres inciden fotones de 2.17 pm de longitud de onda. (*a*) Halle la longitud de onda de un fotón que se dispersa a 35.0° de la direccion incidente. (*b*) Haga lo mismo cuando el ángulo de dispersión es de 115°.

56. Un fotón de rayos gamma de 511 keV se dispersa siguiendo el efecto Compton de un electrón libre de un bloque de aluminio. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón incidente? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón dispersado? (*c*) ¿Cuál es la energía del fotón dispersado? Supóngase un ángulo de dispersión de 72.0°.

57. Demuestre que $\Delta E/E$, la pérdida fraccionaria de energía de un fotón durante una colisión de Compton, está dada por

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{hv'}{mc^2}(1 - \cos\phi).$$

58. ¿Qué aumento fraccionario en longitud de onda conduce a una pérdida del 75% de la energía de un fotón en una colisión de Compton con un electrón libre?

59. Halle el corrimiento máximo de la longitud de onda en una colisión Compton entre un fotón y un protón libre.

60. Un fotón de rayos X de 6.2 keV que cae sobre un trozo de carbono es dispersado por una colisión Compton y su frecuencia cambia en 0.010%. (*a*) ¿Cuál es el ángulo de dispersión del fotón? (*b*) ¿Cuánta energía cinética se imprime al electrón?

61. Un fotón de rayos X de longitud de onda λ = 9.77 pm es retrodispersado por un electrón (ϕ = 180°). Determine (*a*) el cambio en la longitud de onda del fotón, (*b*) el cambio en la energía del fotón, y (*c*) la energía cinética final del electrón.

62. Calcule el cambio fraccionario en la energía del fotón en una colisión Compton con ϕ en la figura 14 igual a 90° para radiación en (*a*) la región de las microondas, con λ = 3.00 cm, (*b*) la región visible, con λ = 500 nm, (*c*) la región de los rayos X, con λ = 0.10 nm, y (*d*) la región de los rayos gamma, con λ = 1.30 pm. ¿Cuáles son sus conclusiones acerca de la importancia del efecto Compton en estas diferentes regiones del espectro electromagnético, consideradas exclusivamente con el criterio de la pérdida de energía en un solo encuentro Compton?

63. ¿A través de qué ángulo debe ser dispersado un fotón de 215 keV por medio de un electrón libre de modo que pierda 10.0% de su energía?

64. Realice el álgebra necesaria para eliminar a v y θ de las ecuaciones 21, 23 y 24 para obtener la relación del corrimiento Compton (Ec. 25).

65. (*a*) Demuestre que cuando un fotón de energía E se dispersa de un electrón libre, la energía cinética máxima de retroceso del electrón está dada por

$$K_{max} = \frac{E^2}{E + mc^2/2}.$$

(*b*) Halle la energía cinética máxima de los electrones dispersados por el efecto Compton expulsados de una hoja de cobre delgada mediante un haz incidente de rayos X de 17.5 keV.

CAPÍTULO 50

NATURALEZA ONDULATORIA DE LA MATERIA

Los físicos raramente se han equivocado al depender de las simetrías subyacentes en la Naturaleza. Por ejemplo, después de saber que un campo magnético variable produce un campo eléctrico, es cosa fácil predecir (y sucede que es cierto) que un campo eléctrico variable produce un campo magnético. Se sabía que el electrón tenía una antipartícula (una partícula de la misma masa pero de carga opuesta), por lo que sería entonces lógico suponer que el protón tuviera también una antipartícula. Para confirmarlo, se construyó un acelerador de protones de la energía apropiada (véase el problema 9 del capítulo 21), y se descubrió el antiprotón.

En el capítulo anterior estudiamos las propiedades de partícula de la luz y de otras radiaciones, las que analizamos tradicionalmente como ondas. Con base en la simetría, nos preguntamos lo siguiente: ¿Tiene también la materia, que tradicionalmente la analizamos en forma de partícula, propiedades semejantes a las de ondas? En este capítulo demostramos que esta hipótesis es correcta, y estudiamos la mecánica de este comportamiento ondulatorio, que se conoce como mecánica cuántica. *Como lo veremos en los capítulos restantes, la mecánica cuántica proporciona los medios para entender el comportamiento fundamental de los sistemas físicos desde los sólidos hasta los quarks.*

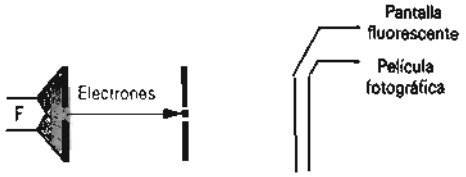
50-1 COMPORTAMIENTO ONDULATORIO DE LAS PARTÍCULAS

Antes de estudiar el análisis del comportamiento ondulatorio de las partículas, trataremos de persuadir al lector de que realmente muestran esta clase de comportamiento. Como hemos visto, la radiación electromagnética puede tratarse, en casi todas las circunstancias, como ondas; sus propiedades como partículas se revelan directamente sólo en unos cuantos experimentos especiales. También hemos tenido bastante éxito en el tratamiento de la materia como si ésta estuviera compuesta de entidades con propiedades de partículas solamente; por ejemplo, no hay necesidad de tomar en cuenta la naturaleza ondulatoria en un juego de billar o en la construcción de un edificio. Sin embargo, existen un número de experimentos que sólo pueden entenderse si las entidades que hemos analizado ordinariamente como partículas se comportan como ondas.

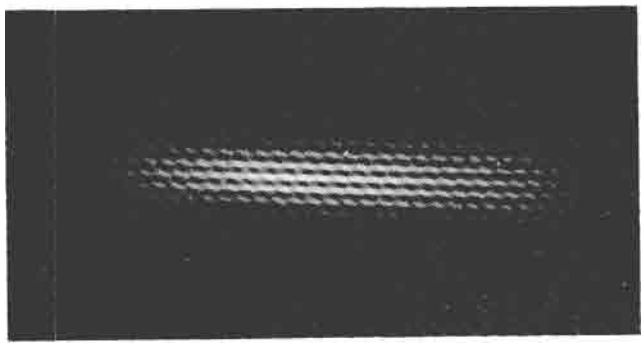
En los capítulos 45 y 46 vimos experimentos de interferencia y de difracción, y señalamos que la aparición de un patrón de interferencia o de difracción es una señal definida del comportamiento ondulatorio. Si vamos a buscar la evidencia directa del comportamiento ondulatorio de las partículas, los experimentos de interferencia y de difracción son un punto lógico para empezar.

La figura 1*a* muestra un haz de electrones que incide en una rendija doble. Los electrones se aceleran a una energía elegida en una diferencia de potencial V y, después de pasar a través de la rendija doble chocan con una pantalla fluorescente (como la pantalla de un aparato de TV). El patrón que resulta en la pantalla deja una imagen en la película fotográfica. El arreglo experimental de la figura 1*a* se parece mucho al de interferencia por una rendija doble con ondas luminosas.

Los resultados de este experimento se muestran en la figura 1*b*. No cabe duda de que estamos observando un patrón de interferencia. Si los electrones no tuvieran un comportamiento ondulatorio, esperaríamos ver regiones claras en la película sólo enfrente de las dos rendijas; claramente, hay más en este resultado, y el comportamiento ondulatorio de los electrones es el responsable de ello.



(*a*)



(*b*)

Figura 1 (*a*) Aparato para producir interferencia por una rendija doble con electrones. Un filamento F produce un rocío de electrones, que se aceleran a través de 50 kV, pasan por una sola rendija, y chocan con la rendija doble. Al chocar con una pantalla fluorescente producen un patrón visible, que puede fotografiarse. (*b*) El patrón de interferencia producido por la rendija doble, y que muestra las franjas de interferencia.

Podemos reemplazar la rendija doble con una abertura circular que produce el patrón de difracción que se muestra en la figura 2. Una vez más, hay claramente más en este resultado que el paso de las partículas a través de una abertura.

La figura 3 compara los resultados de la difracción en un borde rectilíneo de haces de electrones y de luz. La comparación es una evidencia convincente de que los electrones tienen un comportamiento ondulatorio.

¿Hay algo único en los electrones que cause este comportamiento? Realicemos ahora el experimento con neutrones en vez de electrones; aquéllos difieren de éstos en varios aspectos: los neutrones poseen una masa mayor (por un factor de unos 2000), no tienen carga y son partículas compuestas (al contrario de los electrones, que son partículas "puntuales" fundamentales). Si los neutrones también muestran un comportamiento ondulatorio, sospecharíamos que este comportamiento no tiene nada que ver con las propiedades especiales de los electrones, sino que debe ser característico de las partículas en general.

Para mostrar una interferencia con neutrones, se coloca un alambre hecho de un material (el boro, por ejemplo) que sea altamente absorbente de neutrones en un claro (de anchura ligeramente mayor que el alambre) de un material similarmente absorbente, creando en efecto una rendija

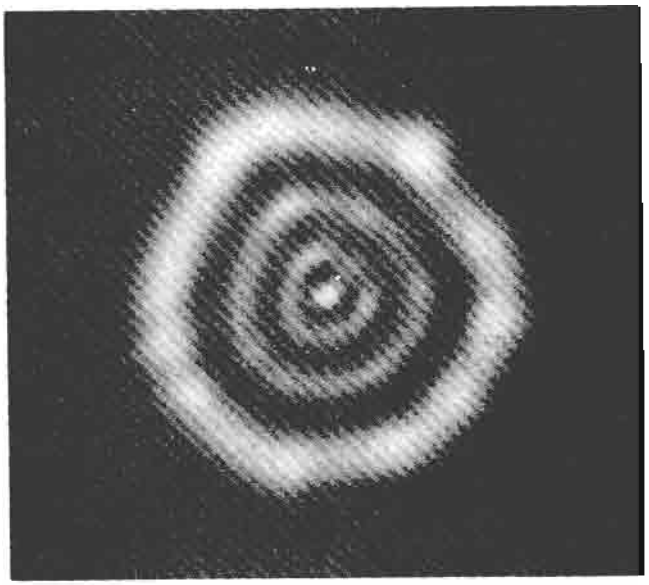
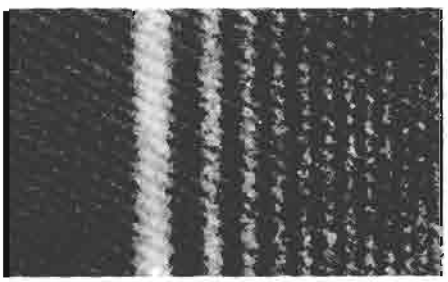
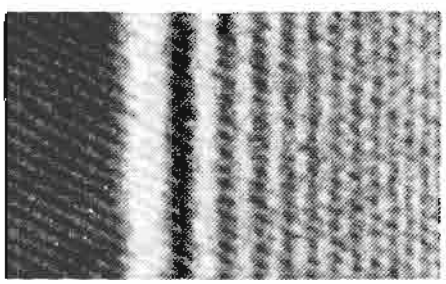


Figura 2 Patrón de difracción de electrones que utiliza una abertura circular de 30 μm de diámetro y electrones de 100 keV. Compárese con el patrón óptico (Fig. 2 del capítulo 46).

doble. Con un detector se analiza a través del haz de neutrones transmitido y se mide la intensidad como función de la posición. Los resultados se muestran en la figura 4. Una vez más, si los neutrones se comportaran como partículas tradicionales, esperaríamos hallar picos en la intensidad transmitida sólo directamente enfrente de las



(*a*)



(*b*)

Figura 3 La difracción de (*a*) la luz y (*b*) los electrones de un borde rectilíneo.

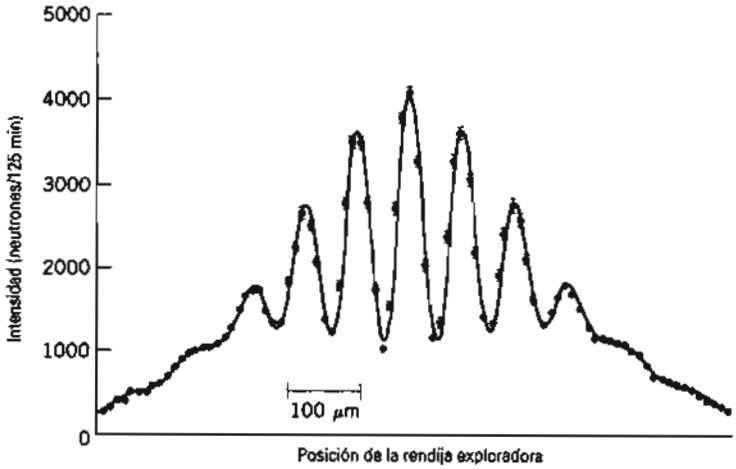


Figura 4 El patrón de intensidad de los neutrones al pasar por una rendija doble.

rendijas. Por el contrario, aquí vemos una prueba definida de los efectos de interferencia.

La figura 5 muestra los resultados de un experimento en el que se hizo pasar un haz de átomos de helio por una rendija doble. Si bien los resultados no son tan pronunciados como los de los electrones y los neutrones, de nuevo hay una evidencia de franjas de interferencia similares a las obtenidas con la luz.

Estos experimentos usan tipos de partículas muy diferentes y distintos tipos de sistemas de rendija y de sistemas detectores; sin embargo, todos ellos tienen una característica en común: las partículas parecen experimentar cierta clase de interferencia. Tales experimentos proporcionan una evidencia directa de la naturaleza ondulatoria de las partículas.

En este punto, uno probablemente se preguntará cómo una partícula puede producir un patrón de interferencia. Nuestro análisis del experimento de la rendija doble en términos ondulatorios en el capítulo 45 se basaba en partes de un solo frente de onda pasando por cada rendija y recombinándose luego en la pantalla. ¿Es posible que partes de un electrón o de un neutrón o de un átomo de helio pasen por cada rendija y luego se recombinen? Ésta es una pregunta difícil, pero que es esencial en el entendimiento del comportamiento cuántico. La respuesta es sí, y la estudiaremos más ampliamente en la sección final de este capítulo.

Problema muestra 1 En los datos que se muestran en la figura 5, la separación d de las rendijas era de 8 μm y el detector estaba a una distancia D = 64 cm de ellas. Halle la longitud de onda de los átomos de helio de la separación observada entre las franjas.

Solución En el problema muestra 2 del capítulo 45, hallamos que la separación entre franjas de interferencia contiguas era

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}.$$

De la figura 5, estimamos alrededor de 8 μm para la separación entre los mínimos (que es la misma que la separación entre los máximos), y así

$$\lambda = \frac{d\,\Delta y}{D} = \frac{(8 \times 10^{-6}\text{ m})(8 \times 10^{-6}\text{ m})}{0.64\text{ m}} = 1.0 \times 10^{-10}\text{ m}.$$

50-2 LONGITUD DE ONDA DE DE BROGLIE

Los experimentos considerados en la sección anterior se ralizaron en años recientes, cuando se disponía de los aparatos precisos necesarios para producir rendijas angostas o haces estables. Sin embargo, la suposición de que las partículas tienen una naturaleza ondulatoria se hizo mucho antes de que se obtuvieran estos resultados, con base en argumentos indirectos basados parcialmente en la simetría de la Naturaleza.

En 1924 Louis de Broglie, físico y miembro de una distinguida familia aristocrática francesa, trataba de buscarle solución al hecho de que la radiación parecía tener un doble aspecto onda-partícula, pero que la materia (en ese tiempo) parecía por completo estar formada por par-

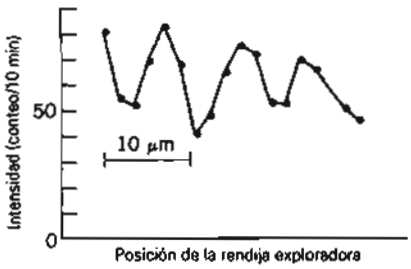


Figura 5 El patrón de intensidad de los átomos de helio al pasar por una rendija doble.

tículas. Por otro lado, la materia y la radiación tenían otros aspectos en común: ambas son formas de energía, cada una puede transformarse en la otra, y ambas se rigen por las simetrías de tiempo y espacio de la teoría de la relatividad. De Broglie comenzaba a creer que la materia debía tener también un carácter dual y que partículas como los electrones deberían poseer propiedades ondulatorias.

La ecuación 22 del capítulo 49 proporcionó una conexión entre una propiedad ondulatoria de la radiación, la longitud de onda, y una propiedad propia de las partículas, el ímpetu: $p = h/\lambda$, donde h es la constante de Planck. De Broglie sugirió que esta misma relación une a las propiedades de partícula y ondulatoria de la materia. Esto es, asociada con una partícula libre moviéndose con un ímpetu lineal p existe una onda senoidal que tiene una longitud de onda λ dada por

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (1)$$

La longitud de onda de una partícula calculada de acuerdo con la ecuación 1 se llama su *longitud de onda de de Broglie*. Nótese que la constante de Planck proporciona el eslabón de unión entre las naturalezas ondulatoria y de partícula tanto de la materia como de la radiación.

La ecuación 1 muestra inmediatamente por qué no se observa el comportamiento ondulatorio de los objetos ordinarios. La constante de Planck es tan pequeña ($\approx 10^{-33}$ J · s) que las longitudes de onda de los objetos ordinarios son ¡muchos órdenes de magnitud menores que el tamaño de un núcleo! No es posible construir una rendija doble a esta escala para revelar la naturaleza ondulatoria. Sin embargo, en los dominios atómicos o subatómicos, el ímpetu p puede ser lo suficientemente pequeño como para llevar a la longitud de onda de de Broglie a la región en que pueden observarse las propiedades ondulatorias, como se ilustró en la sección anterior.

La relación de de Broglie nos proporciona un medio para calcular la longitud de onda asociada con el comportamiento ondulatorio de la materia. No indica nada acerca de la amplitud de la onda, como tampoco sugiere la variable física que está oscilando conforme viaja la onda. Trataremos sobre estas cuestiones en la sección 50-6.

Problema muestra 2 Calcule la longitud de onda de de Broglie de (*a*) una partícula de virus de 1.0×10^{-15} kg de masa que se mueva con una velocidad de 2.0 mm/s, y (*b*) un electrón cuya energía cinética es de 120 eV.

Solución Usando la ecuación 1, hallamos

$$(a)\quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(1.0 \times 10^{-15}\ \text{kg})(2.0 \times 10^{-3}\ \text{m/s})}$$
$$= 3.3 \times 10^{-16}\ \text{m},$$

$$(b)\quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}$$
$$= \frac{6.6 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(120\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}}$$
$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \text{m}.$$

Incluso para un objeto tan pequeño como una partícula de virus moviéndose lentamente, la longitud de onda de de Broglie es demasiado pequeña para ser observada (más pequeña que un núcleo atómico). En objetos más grandes, el comportamiento ondulatorio es por completo inobservable. Sin embargo, para el electrón de la parte (*b*) la longitud de onda de de Broglie es alrededor del mismo tamaño que un átomo y (como lo veremos) usando átomos como objetos difractantes de electrones podemos verificar que la longitud de onda de de Broglie caracteriza realmente el comportamiento ondulatorio de los electrones.

50-3 PRUEBA DE LA HIPÓTESIS DE DE BROGLIE

Si se quiere probar que se trata de una onda, algo convincente es medir la longitud de onda. Por ejemplo, en 1801 Thomas Young demostró la naturaleza ondulatoria de la luz visible al medir su longitud de onda mediante la interferencia por una rendija doble.

Para medir una longitud de onda usando el método de la rendija doble (u otro similar), necesitamos dos o más centros difractantes (rendijas) separados por una distancia que sea del orden de magnitud de la propia longitud de onda. El problema muestra 2*a* muestra inmediatamente que es inútil tratar de medir la longitud de onda de una partícula incluso tan pequeña como la de un virus; necesitaríamos dos "rendijas" separadas por 10^{-16} m. Ésta es la razón por la cual nuestras experiencias diarias con objetos móviles grandes no proporciona ninguna clave sobre la naturaleza ondulatoria de la materia. Sin embargo, el problema muestra 2*b* sugiere que *deberíamos* ser capaces de medir la longitud de onda de un electrón en movimiento. Describimos ahora dos maneras de hacerlo.

1. *El experimento de Davisson-Germer.* El problema muestra 2*b* sugiere que deberíamos de poder usar un cristal como rejilla de difracción para medir las longitudes de onda de de Broglie de electrones con energías cinéticas de unos cuantos cientos de electrón-volts. La figura 6 muestra el aparato empleado con este propósito por C. J. Davisson y L. H. Germer, de lo que son ahora los laboratorios Bell de la AT&T. En 1937 Davisson compartió el premio Nobel por este trabajo.

En el aparato de Davisson-Germer de la figura 6, los electrones se aceleran desde un filamento calentado F por una diferencia de potencial ajustable V. Entonces se permite que el haz, formado de electrones cuya energía cinética es eV, caiga sobre un cristal C, el cual, en su

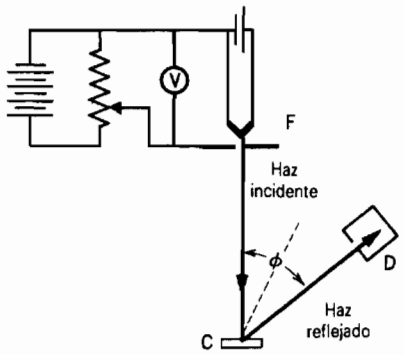


Figura 6 El aparato empleado en el experimento de Davisson-Germer. Del filamento F se emiten electrones que se aceleran mediante la diferencia de potencial ajustable V. Después de reflejarse del cristal C, se registran por medio del detector D, el cual puede moverse a diversas posiciones angulares ϕ.

experimento, era de níquel. Colocaron el detector D a un ángulo ϕ arbitrario y leyeron la corriente I de los electrones al entrar a D para varios valores de la diferencia de potencial V. La figura 7 muestra los resultados de cinco experimentos. Vemos que existe un haz fuertemente difractado para $\theta = 50°$ y $V = 54$ V. Si se cambia o el ángulo o el potencial de aceleración, la intensidad del haz difractado disminuye.

La figura 8 es una representación simplificada del cristal de níquel C de la figura 6. Puesto que este haz de electrones de baja energía no penetra mucho en el cristal, es suficiente considerar que la difracción ocurre en el plano de los átomos de la superficie. La situación es muy similar a la luz reflejada de una rejilla de difracción. En este caso las líneas de la rejilla son las filas paralelas de átomos que se encuentran en la superficie del cristal, y la separación de la rejilla es el intervalo D en la figura 8. Los máximos principales de tal rejilla deben satisfacer la ecuación 1 del capítulo 47,

$$m\lambda = D \operatorname{sen} \phi \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2)$$

Davisson y Germer sabían de su cristal que $D = 215$ pm. Para $m = 1$, que corresponde a un pico de difracción del primer orden, la ecuación 2 conduce a

$$\lambda = D \operatorname{sen} \phi = (215 \text{ pm})(\operatorname{sen} 50°) = 165 \text{ pm}.$$

La longitud de onda de de Broglie esperada de un electrón de 54 eV, calculada como en el problema muestra 2*b*, es 167 pm, en buen acuerdo con el valor medido. Se confirma la predicción de de Broglie.

2. *Experimento de G. P. Thomson.* En 1927 George P. Thomson, trabajando en la Universidad de Aberdeen, en Escocia, confirmó independientemente la ecuación de de Broglie, usando un método un tanto diferente. Como en la figura 9*a*, él dirigió un haz monoenergético de electrones de 15 keV a través de una delgada hoja metálica como blanco. El blanco *no* era específicamente un monocristal (como en el experimento de Davisson y Germer), sino que estaba hecho de un gran número de diminutos cristalitos, orientados al azar.

Al colocar una película fotográfica paralela al blanco, como se muestra en la figura 9*a*, el punto del haz central estará rodeado de anillos de difracción. La figura 9*b* muestra este patrón para un haz de rayos X que incide sobre un blanco de aluminio. La figura 9*c* muestra el patrón del aluminio cuando un haz de electrones de la misma longitud de onda sustituye al haz de rayos X. Una simple mirada a estos dos patrones de difracción no deja duda de que ambos se originan del mismo modo. El análisis numérico de los patrones confirma la hipótesis de de Broglie en todos sus detalles.

Thomson compartió el premio Nobel de 1937 con Davisson por sus experimentos de la difracción de electrones. George P. Thomson fue el hijo de J. J. Thomson, quien ganó el premio Nobel de 1906 por su descubrimiento del electrón y la medición de su razón carga/masa. Se ha dicho que "Thomson, padre, fue galardonado con el premio Nobel por haber demostrado que el electrón es una partícula, y que Thomson, hijo, obtuvo el galardón por haber demostrado que el electrón es una onda".

Hoy día se da por sentada la naturaleza ondulatoria de la materia, y se emplean rutinariamente los estudios de difracción por haces de electrones o de neutrones para estudiar las estructuras atómicas de los sólidos o de los líquidos. Las ondas de materia sirven como un valioso complemento de los rayos X como herramientas para el análisis de la estructura. Por ejemplo, los electrones son

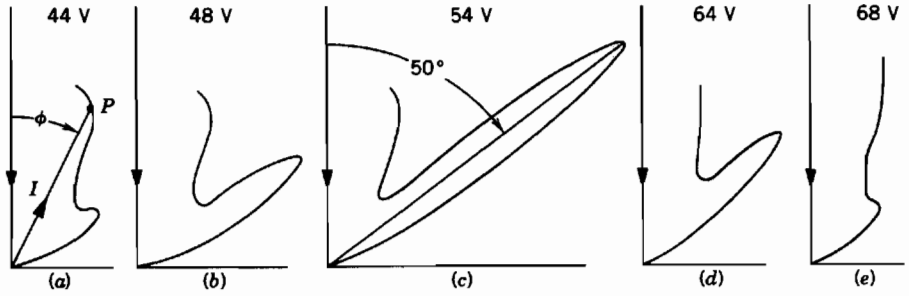


Figura 7 Los resultados obtenidos por Davisson y Germer para cinco diferentes voltajes de aceleración, mostrados como gráficas polares de la corriente I en función del ángulo ϕ. Se observa en (*c*) un fuerte pico de difracción a $\phi = 50°$ cuando $V = 54$ V.

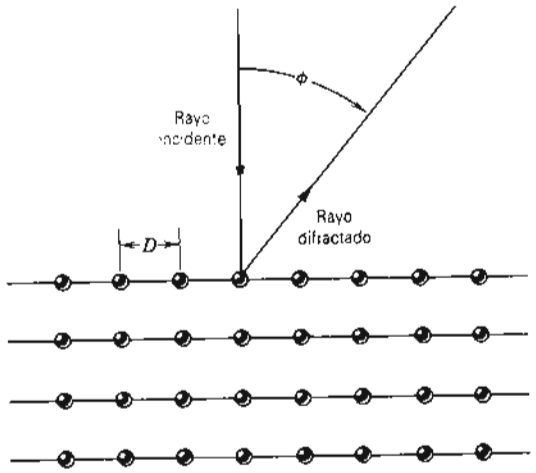


Figura 8 La superficie del cristal actúa como una rejilla de difracción con separación D.

menos penetrantes que los rayos X y por consiguiente son particularmente útiles para estudiar superficies. Los rayos X interactúan grandemente con los electrones en un blanco, y por esta razón no es fácil usarlos para localizar átomos ligeros —particularmente el hidrógeno— los cuales tienen unos cuantos electrones. Por el contrario, los neutrones interactúan fuertemente con el núcleo del átomo y pueden usarse para llenar este vacío. La figura 10, por ejemplo, muestra la estructura del benceno sólido deducida de los estudios de difracción con neutrones.

Problema muestra 3 Supóngase un haz de átomos que emerge de un horno a una temperatura T. El haz tiene una distribución maxwelliana de velocidades (véase la sección 24-3). Basados en esta distribución, puede demostrarse (véase el problema 20) que el valor más probable de la longitud de onda de de Broglie de los átomos del haz es

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{5mkT}}. \tag{3}$$

Los datos de la figura 5 se obtuvieron de átomos de helio (m = 4.0026 u) que emergían de un horno a una temperatura T = 83 K. Halle la longitud de onda de de Broglie más probable para estos átomos de helio y compárela con la longitud de onda calculada en el problema muestra 1.

Solución De la ecuación 3,

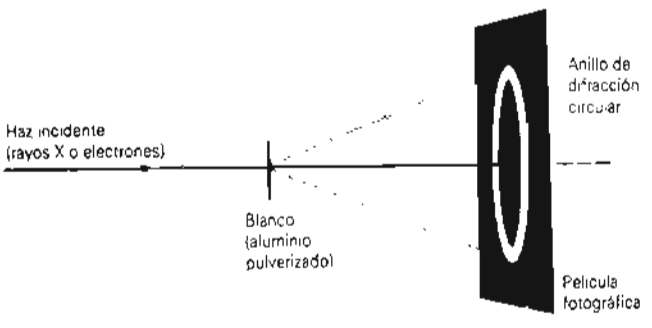
$$\lambda_p = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{5(4.0026\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(83\ \text{K})}}$$
$$= 1.07 \times 10^{-10}\ \text{m}.$$

Este valor concuerda muy bien con el valor calculado en el problema muestra 1, comprobando una vez más que la longitud de onda de de Broglie caracteriza el comportamiento ondulatorio de las partículas del material.

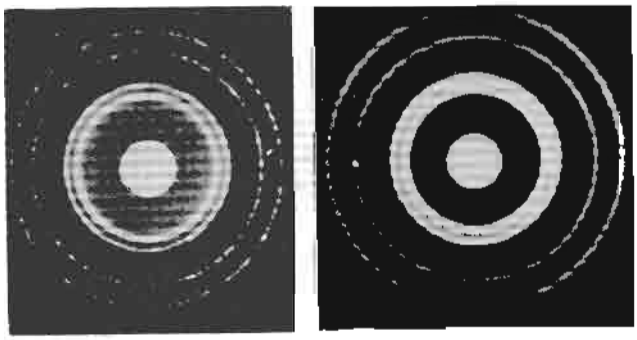
Problema muestra 4 Los reactores nucleares con frecuencia se diseñan de tal modo que un haz de neutrones de baja energía emerja después de pasar por un cilindro de grafito colocado en la pared protectora (véase la Fig. 11). Después de muchas colisiones con los átomos de carbono, los neutrones están en equilibrio térmico con ellos a la temperatura ambiente (293 K). Tales neutrones se llaman *neutrones térmicos*. (*a*) Halle la longitud de onda de de Broglie más probable en un haz de neutrones térmicos. (*b*) Hagamos que un haz de estos neutrones incida sobre un cristal C donde la separación entre los planos de Bragg es d = 0.304 nm. Se observa una intensa difracción de Bragg del primer orden para los neutrones de longitud de onda λ_p cuando el ángulo de dispersión de Bragg θ es como se muestra en la figura 11. Halle el ángulo θ.

Solución (*a*) Al emplear la ecuación 3, tenemos

$$\lambda_p = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{5(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})}}$$
$$= 1.14 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.114\ \text{nm}.$$



(*a*)



(*a*) (*b*)

Figura 9 (*a*) Arreglo para producir un patrón de difracción usando un blanco pulverizado o cristalino. (*b*) El patrón de difracción de los rayos X de un blanco de aluminio pulverizado. (*c*) El patrón de difracción de los electrones del mismo blanco. La energía de los electrones se eligió de modo que la longitud de onda de de Broglie fuera la misma que la longitud de onda de los rayos X usados en (*b*).

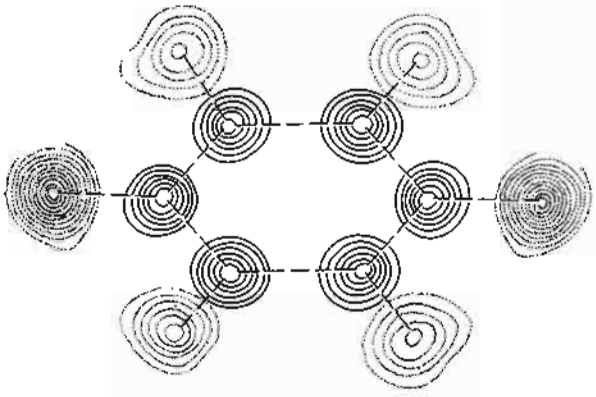


Figura 10 La estructura atómica del benceno sólido deducida de la difracción con neutrones. Los círculos de línea llena muestran la posición de los seis átomos de carbono que forman el familiar anillo del benceno. Los círculos de trazos muestran las posiciones de los átomos de hidrógeno.

(*b*) La fórmula de Bragg para la difracción de los rayos X fue dada como ecuación 12 en el capítulo 47,

$$2d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

La misma fórmula puede aplicarse para la difracción de las partículas, si usamos la longitud de onda λ de de Broglie. Al despejar para el ángulo θ, obtenemos

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda_p}{2d}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(0.114\text{ nm})}{(2)(0.304\text{ nm})}\right) = 10.8°.$$

La difracción de los neutrones de esta manera hace que se obtenga un haz monoenergético. El haz puede luego difractarse por otros materiales con el fin de estudiar su estructura, lo mismo que se hizo para obtener la figura 10.

50-4 ONDAS, PAQUETES DE ONDAS Y PARTÍCULAS

Como acabamos de ver, la evidencia de que la materia está formada de ondas es muy sólida. Sin embargo, no podemos olvidar que la evidencia de que la materia está formada de partículas es igualmente sólida. La diferencia básica entre estos dos puntos de vista es que la posición de una partícula puede localizarse en espacio y en el tiempo pero no la de una onda, estando diseminada en ambas de dichas dimensiones. Comencemos por reconciliar estos dos enfoques viendo si podemos reunir un grupo de ondas de modo tal que lleguemos a algo que nos recuerde una partícula. Lo que tendremos que decir será válido para todas las clases de ondas, ya sean ondas de agua, ondas de sonido, ondas electromagnéticas u ondas de de Broglie. Veremos, en secuencia, la localización de una onda en el espacio y en el tiempo.

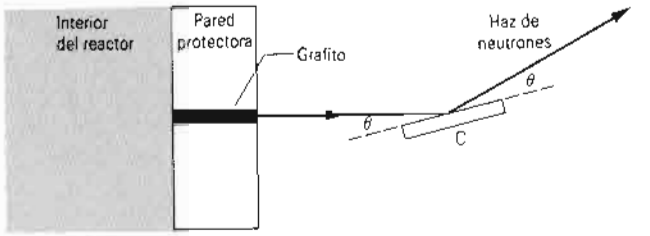


Figura 11 Problema muestra 4. Arreglo para observar la difracción de los neutrones. Los neutrones que emergen de la columna de calentamiento de grafito tienen una distribución de energías. Después de la reflexión de Bragg del cristal C, el haz a un ángulo θ es monoenergético.

1. *Localización de una onda en el espacio.* La figura 12*a* es una "instantánea" de una onda tomada en un tiempo arbitrario, digamos, $t = 0$. La onda se extiende desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$ y tiene una longitud de onda λ_0 bien definida y un número de onda k_0 ($= 2\pi/\lambda_0$) bien definido, como lo muestra la figura 12*b*. Sin embargo, no hay nada acerca de esta onda que indique la posición en el espacio que asociamos con la palabra "partícula". Dicho de otra manera, si la onda de la figura 12*a* va a representar una partícula, la incertidumbre Δx de su posición a lo largo del eje x es infinita: podría estar en cualquier parte a lo largo del eje.

Recordemos que es posible (véase la sección 19-7) crear casi cualquier forma de onda que deseemos al sumar ondas seno con números de onda, amplitudes y fases elegidos apropiadamente. La figura 13*a* muestra un *paquete de onda* que puede construirse de este modo. Este conjunto infinito de ondas se suma para formar una onda seno en cierta región de anchura Δx y, por interferencia destructiva, es cero en todas las demás partes. Tenemos ahora una localización en el espacio, medida por Δx, la longitud del paquete. El precio que hemos pagado es el sacrificio en la "pureza" de nuestra onda original, porque nuestro paquete ya no contiene un solo número de onda k_0, sino más bien una variedad de números de onda centrados en k_0; véase la figura 13*b*.

Hagamos que Δk en la figura 13*b* sea una medida burda de la distribución de los números de onda que forman el paquete de la figura 13*a*. Es razonable creer que cuanto más pronunciado (esto es, que más se asemeje a una partícula) deseamos que sea el paquete de ondas, mayor será el intervalo de números de onda que debemos usar para formarlo. Por ejemplo, en la figura 12*a* el "paquete" no era puntiagudo en lo más mínimo ($\Delta x \to \infty$) sino, por el contrario, necesitábamos únicamente un solo número de onda para "generarlo" ($\Delta k = 0$). En el otro extremo, podríamos formar un paquete de ondas muy puntiagudo ($\Delta x \to 0$), pero necesitaríamos combinar ondas con una variedad muy grande de números de onda ($\Delta k \to \infty$) para hacerlo. En general, cuando Δx disminuye, Δk aumenta,

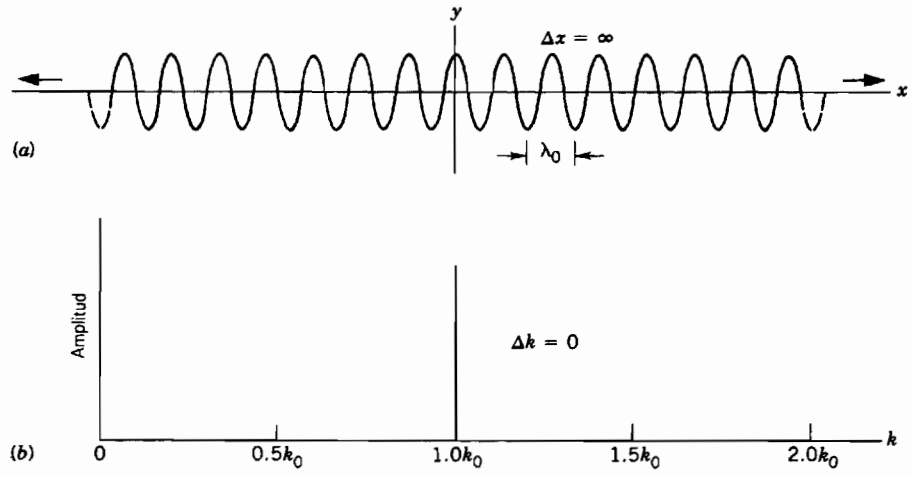


Figura 12 (*a*) Una onda armónica vista en $t = 0$. (*b*) La distribución de los números de onda, mostrada como una gráfica de la amplitud de la componente armónica en función de su número de onda. En esta gráfica, todas las ondas con $k \neq k_0$ tienen una amplitud de cero.

e inversamente. La relación entre ellos demuestra ser muy sencilla; es decir,

$$\Delta k \cdot \Delta x \sim 1. \qquad (4)$$

El símbolo ~ en la ecuación 4 significa "es del orden de", porque hasta ahora no hemos definido Δx o Δk con precisión.*

* La estimación dada por la ecuación 4 representa lo mejor que podemos hacer para construir un paquete de ondas. Es posible hacerlo mucho peor ($\Delta k \cdot \Delta x \gg 1$), pero *no* es posible hacerlo mucho mejor ($\Delta k \cdot \Delta x$ nunca puede ser $\ll 1$).

2. *Localización de una onda en el tiempo.* Una partícula se localiza en el tiempo al igual que en el espacio. Si sustituimos la variable espacial x en la figura 12*a* por la variable temporal t (y la longitud de onda λ_0 por el periodo T_0), esa figura mostraría ahora cómo variaría nuestra onda con el tiempo al pasar por un punto fijo en particular, digamos, $x = 0$. Como antes, no hay nada con respecto a esta onda que sugiera la localización en el tiempo que asociamos con la palabra "partícula", porque una partícula pasaría por nuestro punto de observación en un tiempo particular, en lugar de distribuirse en un intervalo de tiempo infinito.

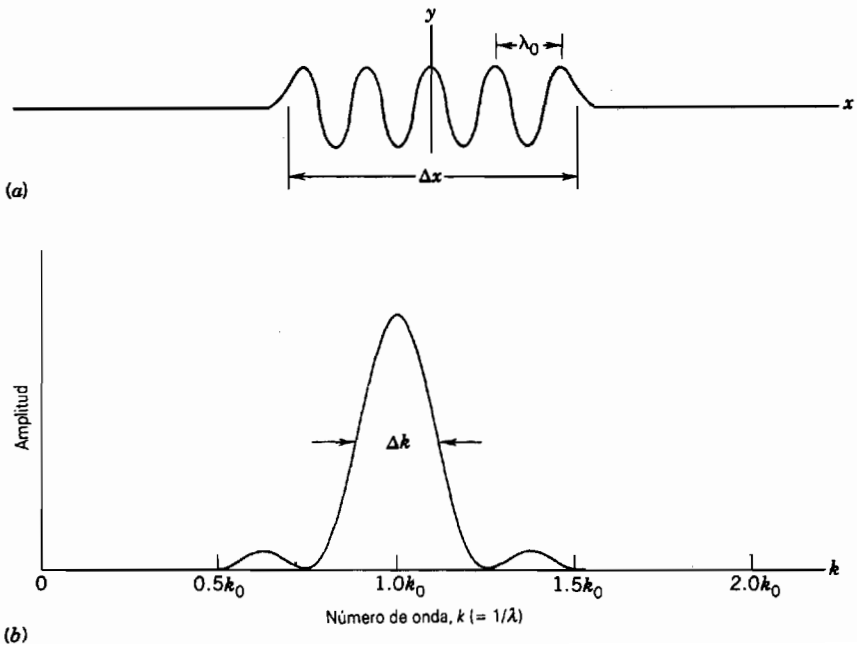


Figura 13 (*a*) Un paquete de ondas de longitud Δx, visto en $t = 0$. (*b*) Las amplitudes relativas de las diversas componentes armónicas que se combinan para formar el paquete. El pico central tiene una anchura Δk.

Podemos construir un paquete de ondas en el tiempo tan bien como en el espacio. La figura 13*a* puede ilustrarlo, siempre que sustituyamos las variables espaciales por las variables temporales correspondientes, como antes, y sustituyamos también al número de onda k_0 por la frecuencia angular ω_0. Por analogía con la ecuación 4, la duración Δt de nuestro nuevo paquete de ondas se relaciona con la distribución $\Delta\omega$ de las frecuencias angulares necesarias para formar el paquete de ondas mediante

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1. \tag{5}$$

Esta ecuación tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, la mayor parte de nuestra información en la sociedad de hoy día, incluyendo la comunicación telefónica, el radar y el almacenamiento de datos en una computadora, se envía de punto a punto en forma de pulsaciones o pulsos. Los amplificadores electrónicos por los cuales pasan estos pulsos deben ser sensibles dentro de toda la región de frecuencias incluyendo los pulsos para los cuales están diseñados. La ecuación 5 nos dice que cuanto más breve sea la duración de tiempo del pulso, mayor será la anchura de banda (como se le llama) de la frecuencia del amplificador, e inversamente.

Problema muestra 5 Un transmisor de radar emite pulsos de 0.15 μs de duración para una longitud de onda de 1.2 cm. (*a*) ¿A qué frecuencia central debería de sintonizarse el receptor del radar? (*b*) ¿Cuál es la longitud del paquete de ondas? (*c*) ¿Cuál sería el ancho de banda de las frecuencias del receptor? Esto es, ¿a qué intervalo de frecuencias sería capaz de responder?

Solución (*a*) La frecuencia central $\nu_0 (= \omega_0/2\pi)$ está dada por

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.012 \text{ m}} = 2.5 \times 10^{10} \text{ Hz} = 25 \text{ GHz}.$$

(*b*) La longitud del paquete de ondas es

$$\Delta x = c\,\Delta t = (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(0.15 \times 10^{-6} \text{ s}) = 45 \text{ m}.$$

(*c*) El ancho de banda del receptor está dado aproximadamente por la ecuación 5, o sea

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sim \frac{1}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi(0.15 \times 10^{-6} \text{ s})}$$
$$= 1.1 \times 10^6 \text{ Hz} = 1.1 \text{ MHz}.$$

Si el receptor no puede responder a las frecuencias en toda esta región, no será capaz de reproducir con fidelidad la forma del pulso de radar transmitido.

50-5 RELACIONES DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG

La ecuación 4 se aplica para todas las clases de ondas. Apliquémosla a las ondas de de Broglie. Escribimos, para la cantidad Δk que aparece en esa ecuación,

$$\Delta k = \Delta\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \Delta\left(\frac{2\pi p_x}{h}\right) = \frac{2\pi}{h}\,\Delta p_x.$$

Aquí hemos identificado a λ con la longitud de onda de de Broglie de la partícula y la hemos sustituido por h/p_x. El subíndice del ímpetu nos recuerda que estamos tratando con el movimiento a lo largo del eje x únicamente. Al sustituir este resultado en la ecuación 4 nos conduce a

$$\Delta k \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{h}\,\Delta p_x \cdot \Delta x \sim 1$$

o sea

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim h/2\pi.$$

Al tomar en cuenta el hecho de que el ímpetu es un vector, podemos generalizar esta relación como

$$\begin{aligned} \Delta p_x \cdot \Delta x &\sim h/2\pi, \\ \Delta p_y \cdot \Delta y &\sim h/2\pi, \\ \Delta p_z \cdot \Delta z &\sim h/2\pi. \end{aligned} \tag{6}$$

Las ecuaciones 6 son las *relaciones de incertidumbre de Heisenberg*, obtenidas por vez primera por Werner Heisenberg en 1927. Éstas pueden considerarse como la formulación matemática del *principio de incertidumbre de Heisenberg*:

> *No es posible determinar la posición y el ímpetu de una partícula con precisión ilimitada.*

En mecánica cuántica, nuestra meta es representar una partícula por un paquete de ondas que tenga una gran amplitud en donde sea probable que se encuentre la partícula y una pequeña amplitud en cualquier otra parte. La anchura Δx del paquete de ondas indica algo acerca de la localización probable de la partícula. Sin embargo, como lo veremos, la construcción de tal paquete de ondas requiere la superposición de ondas dentro de un intervalo Δk de números de ondas o, lo que es equivalente, un intervalo Δp_x de ímpetus. Por lo tanto, otra manera de enunciar el principio de incertidumbre es: *una partícula no puede describirse por medio de un paquete de ondas en que tanto la posición como el ímpetu tengan intervalos arbitrariamente pequeños.* Cuanto más pequeño hagamos el intervalo de una de éstas, mayor será el intervalo de la otra, de acuerdo con la ecuacion 6.

Si bien una medición individual del ímpetu de una partícula puede dar un valor arbitrariamente preciso, el valor puede estar en cualquier parte dentro de un intervalo Δp_x con respecto al valor "real" de p_x. (En efecto, la mecánica cuántica nos dice que no podemos determinar el valor "real" de p_x excepto dentro de un intervalo Δp_x.) Si repetimos la medición un gran número de veces en sistemas preparados idénticamente, nuestros resultados se agruparán alrededor de p_x con una distribución estadística caracterizada por la anchura Δp_x. De manera semejante,

las mediciones de la posición se agruparán alrededor de la posición x con una distribución estadística caracterizada por la anchura Δx.

Estas limitaciones no tienen nada que ver en absoluto con los problemas prácticos de la medición. De hecho, las ecuaciones 6 *suponen* instrumentos ideales. En la práctica, siempre será peor. Estas relaciones se escriben a veces con el símbolo " $\geq$ " en sustitución del símbolo " ~ ", para recordarnos este hecho.

Cuando usamos la palabra "partícula" para describir objetos como los electrones, el término evoca en nuestra mente la imagen de un diminuto punto moviéndose a lo largo de una trayectoria, estando bien definidas su posición y su velocidad en todo momento. Esta manera de pensar es una extensión natural de las experiencias cotidianas con objetos como las pelotas de beisbol o los guijarros, a los que podemos ver y tocar. Sin embargo, debemos aceptar el hecho de que este cuadro simplemente no es válido experimentalmente más allá de los límites establecidos por el principio de incertidumbre. El mundo cuántico es un mundo más allá de nuestra experiencia directa, y debemos estar preparados para nuevas maneras de pensar.

En el problema muestra 6 veremos que el principio de incertidumbre *no* limita nuestra precisión de la medición cuando tratamos con objetos grandes como pelotas de golf. Aquí los errores instrumentales ordinarios superan los límites fundamentales establecidos por este principio. Sin embargo, la situación es muy diferente cuando tratamos con electrones y con otras partículas elementales, como lo muestra el problema muestra 6.

Problema muestra 6 (*a*) Un electrón libre de 10 eV se mueve en la dirección x con una velocidad de 1.88×10^6 m/s. Supóngase que podemos medir esta velocidad con una precisión del 1%. ¿Con qué precisión puede medirse simultáneamente su posición? (*b*) Una pelota de golf tiene una masa de 45 g y una velocidad de 40 m/s, la cual puede medirse con una precisión del 1%. ¿Qué límites impone el principio de incertidumbre a nuestra posibilidad de medir su posición?

Solución (*a*) El ímpetu del electrón es

$$p_x = mv_x = (9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.88 \times 10^6\ \text{m/s})$$
$$= 1.71 \times 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

La incertidumbre Δp_x en el ímpetu es del 1% de esto, o sea 1.71×10^{-26} kg · m/s. La incertidumbre en la posición es entonces, de la ecuación 5,

$$\Delta x \sim \frac{h/2\pi}{\Delta p_x} = \frac{1.06 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{1.71 \times 10^{-26}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}} = 6.2\ \text{nm},$$

que es alrededor de 30 diámetros atómicos. Dada la medida del ímpetu del electrón, simplemente no hay manera de determinar simultáneamente su posición con una precisión mejor que ésta.

(*b*) Este ejemplo es exactamente igual a la parte (*a*), excepto que la pelota de golf es mucho más masiva y mucho más lenta que el electrón. El mismo cálculo da, en este caso, $\Delta x \sim 6 \times 10^{-31}$ m.

Ésta es una distancia muy pequeña, alrededor de 10^{16} veces menor que el diámetro de un núcleo atómico típico. Cuando se trata de objetos grandes el principio de incertidumbre no establece un límite significativo a la precisión de la medición. ¡Nunca se hubiera podido descubrir este principio mediante el estudio de pelotas de golf viajando por el aire!

Principio de incertidumbre y difracción por una sola rendija

Aquí aprendemos más acerca del principio de incertidumbre viendo cómo funciona en un caso particular. Considérese un haz de electrones de velocidad v_0, que se mueve hacia arriba como en la figura 14. Nos fijamos esta tarea: medir simultáneamente y con precisión ilimitada la posición horizontal x y la componente v_x de la velocidad de un electrón de este haz. Como veremos, esta tarea (que viola el principio de incertidumbre) no puede llevarse a cabo.

Para medir a x, bloqueemos el haz con una pantalla A en la que ponemos una rendija de anchura Δx. Cuando un electrón pasa por esta rendija, podemos decir que conocemos su posición horizontal con esta precisión. Al hacer más angosta la rendija podemos mejorar la precisión de esta medición tanto como queramos.

Todo va bien hasta ahora. Sin embargo, algo sucede con lo que quizás no contábamos. El haz de electrones —por

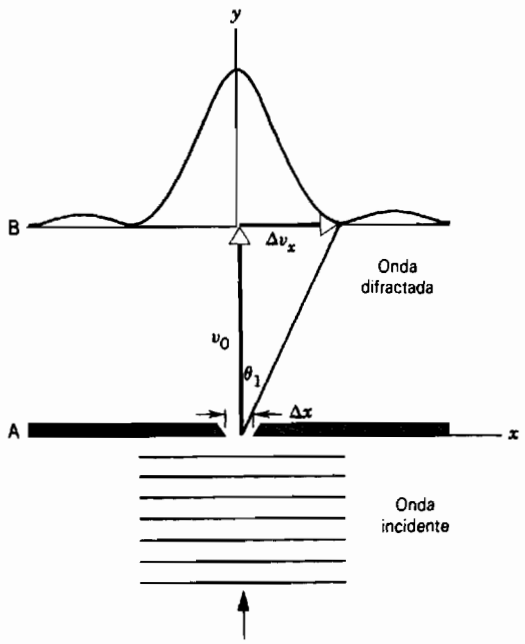


Figura 14 Un haz de electrones incidente se difracta en la rendija de la pantalla A. Si se hace la rendija más angosta, el patrón de difracción se hace más ancho.

comportarse como onda— se abocina por difracción conforme pasa por la rendija. Si ponemos una pantalla B apropiadamente sensible en la figura 14, se obtiene un patrón típico de difracción producido por una sola rendija. Los electrones que forman la mitad izquierda de este patrón deben haberse estado moviendo hacia la izquierda (algunos más aprisa, otros más despacio) al emerger de la rendija. Aquellos que forman la mitad derecha deben haberse estado moviendo hacia la derecha. Aun así —como lo requiere la simetría de la ordenación— el valor *promedio* de v_x de los electrones emergentes es cero, pudiendo tener valores distintos de cero los electrones individuales.

Existe un valor particular de v_x que causará que el electrón aterrice en el primer mínimo del patrón de la difracción, identificado por el ángulo θ_1 en la figura 14. Consideramos este valor de v_x —un tanto arbitrariamente— como una medida burda de la incertidumbre de nuestro conocimiento de v_x y le llamamos Δv_x.

La ubicación del primer mínimo del patrón de la difracción está dada por la ecuación 1 del capítulo 46 (sen $\theta_1 = \lambda/\Delta x$). Si suponemos que θ_1 es lo suficientemente pequeño, podemos sustituir sen θ_1 por θ_1, obteniendo

$$\theta_1 \approx \lambda/\Delta x.$$

Para alcanzar el primer mínimo debe ser cierto que

$$\theta_1 \approx \Delta v_x/v_0.$$

Al combinar estas dos relaciones llegamos a

$$\Delta v_x \cdot \Delta x \approx \lambda v_0.$$

Ahora λ, la longitud de onda de de Broglie del electrón, es igual a h/p o a h/mv_0; poniendo esto arriba y reordenando, hallamos

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h.$$

Esto es ciertamente consistente con la ecuación 6; las pequeñas diferencias (el factor 2π) son el resultado de la manera arbitraria en que hemos definido a Δx y a Δp_x.

Veamos cómo opera en este caso el principio de incertidumbre. Si queremos determinar la posición horizontal del electrón, debemos hacer más angosta la rendija. Sin embargo, esto amplía el patrón de difracción de modo que Δp_x aumenta. Por otra parte, si queremos determinar la componente horizontal del ímpetu del electrón, debemos reducir un tanto la anchura angular del patrón de difracción. La única manera de hacerlo es ensanchar la rendija, pero eso, a su vez, significa que ya no podemos conocer la posición horizontal del electrón tan precisamente como quisiéramos. Cuando tratamos de aumentar nuestro conocimiento acerca de una variable, simultáneamente reducimos nuestro conocimiento de la otra. El principio de incertidumbre no es un postulado acerca de los electrones (o de otras partículas); es un postulado acerca de nuestra posibilidad de determinar simultáneamente ciertas propiedades de esas partículas.

Relación de incertidumbre energía-tiempo

Hasta ahora hemos considerado únicamente las *longitudes de onda* de las ondas materiales y no hemos dicho nada acerca de sus *frecuencias*.

Por analogía con la ecuación del fotón de Einstein ($E = h\nu$), la incertidumbre en la frecuencia de una onda material se relaciona con la incertidumbre en la energía E de la partícula correspondiente por $\Delta\nu = \Delta E/h$. Al sustituir ésta en la ecuación 5 nos da, con $\Delta\omega = 2\pi\,\Delta\nu$,

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h/2\pi, \tag{7}$$

que es la relación matemática del principio de incertidumbre expresado en términos de parámetros diferentes. En palabras, dice:

No es posible determinar las coordenadas de energía y de tiempo de una partícula con precisión ilimitada.

Todas las mediciones de la energía conllevan una incertidumbre inherente, a no ser que tengamos un tiempo infinito disponible para la medición. En un átomo, por ejemplo, el estado de energía más bajo (el llamado estado base) tiene una energía bien definida, porque normalmente el átomo existe indefinidamente en ese estado. Las energías de todos los estados de mayor energía (los estados excitados) se definen con menos precisión porque el átomo, tarde o temprano, pasará espontáneamente a un estado de energía más baja. En promedio, sólo disponemos de un cierto tiempo Δt para que nuestra medición de la energía sea incierta en una cantidad ΔE dada por $(h/2\pi)/\Delta t$.

Problema muestra 7 En 1974 se descubrió una importante partícula nueva, con una masa más de tres veces mayor que la masa del protón. El descubrimiento fue simultáneo e independiente, y lo realizaron dos grupos de físicos, usando los aceleradores de alta energía del Laboratorio Nacional de Brookhaven y el de la Universidad de Stanford. Se midió que la energía en reposo de esta partícula era de 3097 MeV, siendo la incertidumbre de la medición de 0.063 MeV únicamente. Se esperaba que tal partícula masiva se desintegrara con extrema rapidez en partículas de masa menor. ¿Cuál es el intervalo medio de tiempo entre la producción y la desintegración de estas partículas de breve vida?

Solución La respuesta se deduce del principio de incertidumbre, en la forma de la ecuación 7. Resolviendo para obtener Δt tenemos

$$\Delta t \sim \frac{h/2\pi}{\Delta E} = \frac{1.06 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(0.063\ \text{MeV})(1.60 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}$$
$$= 1.1 \times 10^{-20}\ \text{s}.$$

Este intervalo de tiempo puede identificarse con el tiempo de vida de la partícula. Mediante los estándares ordinarios parece ser un tiempo de vida corto pero, de hecho, los experimentadores se asombraron de lo *largo* que era o —lo que es lo mismo— de cuán precisamente se definía la energía en reposo de la partícula. La teoría ha predicho que la desintegración de esta masiva partícula (llamada ψ) sería mucho más rápida. Un observador notó que la lentitud observada en la desintegración era como si Cleopatra, flotando en el Nilo en su Barca Real, hubiese dejado caer un guijarro por un costado y el guijarro al caer ¡no hubiese tocado el agua, ni siquiera todavía hoy! Esta nueva partícula demostró ser tan significativa que los líderes de los dos grupos, Burton Richter y Samuel Ting, fueron galardonados con el premio Nobel en 1976 por su descubrimiento.

El principio de incertidumbre se emplea de este modo para deducir los tiempos de vida de los estados excitados de las moléculas, los átomos y las partículas fundamentales inestables de todas clases.

50-6 FUNCIÓN DE ONDA

En este momento el lector debe haber admitido ya el hecho de que una partícula en movimiento puede considerarse como onda, y debería saber cómo medir su longitud de onda. Queda por preguntar: "¿Cuál es la cantidad cuya variación en el tiempo y en el espacio forma esta onda?". Para decirlo vagamente: "¿Qué quiere decir ondulante?".

En una onda de una cuerda podemos representar la perturbación ondulatoria por el desplazamiento transversal y. En las ondas de sonido usamos la presión diferencial Δp y en las ondas electromagnéticas el vector **E** del campo eléctrico. En ondas que representen a partículas, introducimos la *función de onda* Ψ. El problema a la mano puede ser el de un protón que viaja a lo largo del eje de un tubo el vacío en un acelerador de partículas, un electrón de conducción que se mueve por un alambre de cobre, o un electrón moviéndose alrededor del núcleo de un átomo de hidrógeno. Cualquiera que sea el caso, si conocemos la función de onda $\Psi\ (x, y, z, t)$ en cada punto del espacio y para cada instante de tiempo, sabemos todo lo que puede saberse acerca del comportamiento de la partícula.

Antes de adentrarnos en el significado físico de la función de onda, consideremos un problema en el que participa la radiación más bien que la materia: una onda electromagnética plana que viaja a través del vacío. Podemos concebir esta onda (evocando a Maxwell) como un arreglo de campos eléctricos y magnéticos que varía en espacio y tiempo o (evocando a Einstein) como un haz de fotones, moviéndose cada uno con la velocidad de la luz. En el primer caso, la rapidez por unidad de área con que la onda transporta energía (véase la Sec. 41-4) es proporcional a E^2, donde E es la amplitud del vector del campo eléctrico. En el segundo caso, esta rapidez es proporcional al número promedio de fotones por unidad de volumen del haz, teniendo cada fotón una energía $h\nu$. Vemos aquí una relación entre los dos casos de la radiación de la onda y de la partícula, es decir, la noción —presentada por vez primera por Einstein— de que el cuadrado de la intensidad del campo eléctrico es una medida directa de la densidad promedio de los fotones.

Max Born propuso que la función de onda Ψ de un haz de partículas se interpretase de este mismo modo, es decir, que su cuadrado es una medida directa de la densidad promedio de las partículas en el haz. Sin embargo, en muchos problemas, como en la estructura del átomo de hidrógeno, existe únicamente un solo electrón presente. ¿Qué podemos querer expresar entonces al hablar de "la densidad promedio de las partículas"? Born propuso que, en tales casos, interpretaríamos al cuadrado de la función de onda en cada punto como la probabilidad (por unidad de volumen) de que la partícula esté en ese punto.* Específicamente, si dV es un elemento de volumen ubicado en un punto cuyas coordenadas son x, y, z, entonces la probabilidad de que la partícula se encuentre en ese elemento de volumen en el tiempo t es proporcional a $\Psi^2\,dV$. Quizás por analogía con la densidad de masa ordinaria (masa por unidad de volumen), llamamos al cuadrado de la función de onda una *densidad de probabilidad*, esto es, una probabilidad por unidad de volumen.

Nótese que la relación entre la función de onda y su partícula asociada es *estadística*, implicando únicamente a la *probabilidad* de que la partícula se encuentre a sí misma dentro de un elemento de volumen especificado. En la física clásica tratamos también con partículas sobre una base estadística (véanse los capítulos 23 y 24), pero en aquellos casos los métodos estadísticos eran precisamente una manera útil de tratar con números grandes de partículas. Sin embargo, en la mecánica cuántica la naturaleza estadística es inherente y está dictada por el principio de incertidumbre, el cual, como lo hemos visto, establece límites al significado que podemos ligar a la palabra "partícula".

La probabilidad de que nuestra partícula esté *en alguna parte* debe ser igual a la unidad (correspondiendo a un 100% de probabilidad de hallarla) de modo que tenemos

$$\int \Psi^2\,dV = 1 \quad \text{(condición de normalización)}, \quad (8)$$

llevándose a cabo la integración para todo el espacio. *Normalizar* una función de onda significa multiplicarla por un factor constante, elegido de tal modo que se satisfaga la ecuación 8.

* La función de onda Ψ es generalmente una cantidad compleja; esto es, contiene a $\sqrt{-1}$, y se representa por el símbolo i. Mediante Ψ^2 (escrita más apropiadamente como $|\Psi|^2$) significamos el cuadrado del valor absoluto de la función de onda. Ésta es siempre una cantidad real. Únicamente damos una interpretación física al cuadrado de la función de onda, no a la función de onda en sí misma.

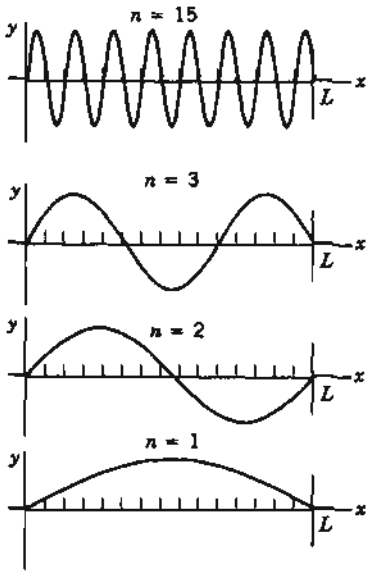


Figura 15 Cuatro patrones de una onda estacionaria de una cuerda estirada de longitud L, sujeta rígidamente en cada extremo. Estos patrones se determinan de la ecuación 11.

Dejaremos para el final una pregunta obvia: en cualquier problema dado, ¿cómo sabemos lo que es la función de onda? Las ondas en cuerdas y las ondas de sonido se rigen por las leyes de la mecánica de Newton. Las ondas electromagnéticas se predicen y describen mediante las ecuaciones de Maxwell. ¿De dónde viene la función de onda?

En 1926 Erwin Schrödinger, inspirado por el concepto de de Broglie, pensó en estos términos: la óptica geométrica trata de rayos y del movimiento de la luz en línea recta; sucede que se ha convertido en un caso especial de una óptica ondulatoria mucho más general. La mecánica newtoniana tiene también "rayos" (trayectorias) y un movimiento rectilíneo (de las partículas libres). ¿Podría ser que fuera un caso especial de una mecánica ondulatoria más general, aún no descubierta?

Schrödinger dedujo una teoría notable de mucho éxito basada en esta analogía. Su característica central es una ecuación diferencial, conocida ahora como *ecuación de Schrödinger*, que rige la variación en el espacio y en el tiempo de la función de onda Ψ en una gran variedad de problemas. Obtenemos soluciones a problemas de la mecánica clásica al utilizar las leyes del movimiento de Newton; obtenemos soluciones a problemas de electromagnetismo al utilizar las ecuaciones de Maxwell; con el mismo espíritu exactamente, obtenemos soluciones a problemas atómicos al utilizar la ecuación de Schrödinger.

En la siguiente sección estudiaremos un problema importante desde el punto de vista de la mecánica ondulatoria, el de una partícula atrapada en una región de la que jamás podrá escapar (¿o podrá?).

50-7 PARTÍCULAS ATRAPADAS Y DENSIDADES DE PROBABILIDAD

Antes de que consideremos la situación de las ondas materiales, revisemos dos ejemplos análogos en los que intervienen ondas mecánicas y electromagnéticas.

En las secciones 19-9 y 19-10, considerábamos ondas estacionarias que pueden presentarse en una cuerda de longitud L que está fija en ambos extremos. Los extremos fijos de la cuerda están obligados, por estar sujetos ahí, a ser *nodos vibratorios*, es decir, posiciones en donde la amplitud es siempre cero. Sólo pueden ocurrir un conjunto limitado de longitudes de onda para estas ondas estacionarias. Como se muestra en la sección 19-10, estas longitudes de onda permitidas pueden escribirse

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

o, en términos del número de onda,

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

En cualquier punto a lo largo de la cuerda, la amplitud de la vibración es

$$y_n(x) = y_{\text{máx}} \operatorname{sen} k_n x = y_{\text{máx}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

donde $y_{\text{máx}}$ es el desplazamiento máximo de la cuerda. La figura 15 muestra ejemplos de patrones vibratorios de estas ondas estacionarias, los cuales pueden caracterizar a alguno de los modos vibratorios inferiores de una cuerda de guitarra o de violín.

En electromagnetismo se obtiene una situación similar cuando una onda electromagnética plana oscila una y otra vez (en una dimensión) entre dos superficies perfectamente reflejantes (espejos, por ejemplo) separadas por una distancia L. Tal situación puede ocurrir para las ondas luminosas de un láser. Al igual que en el caso mecánico, se genera una onda estacionaria en la cavidad. Puede considerarse a esta onda electromagnética estacionaria como la superposición de dos ondas similares que viajan en direcciones opuestas. En los extremos de la cavidad, en donde ocurre el reflejo de un material conductor como el plateado de un espejo, el campo eléctrico debe caer a cero (lo cual es cierto para todos los conductores ideales en las condiciones de la electrostática). Al imponer estas condiciones de que $E = 0$ en $x = 0$ y que $x = L$, hallamos que sólo ciertas longitudes de onda son permitidas para la onda estacionaria; las longitudes de onda permitidas están dadas por la ecuación 9, y la amplitud de las oscilaciones del campo eléctrico pueden escribirse

$$E_n(x) = E_{\text{máx}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

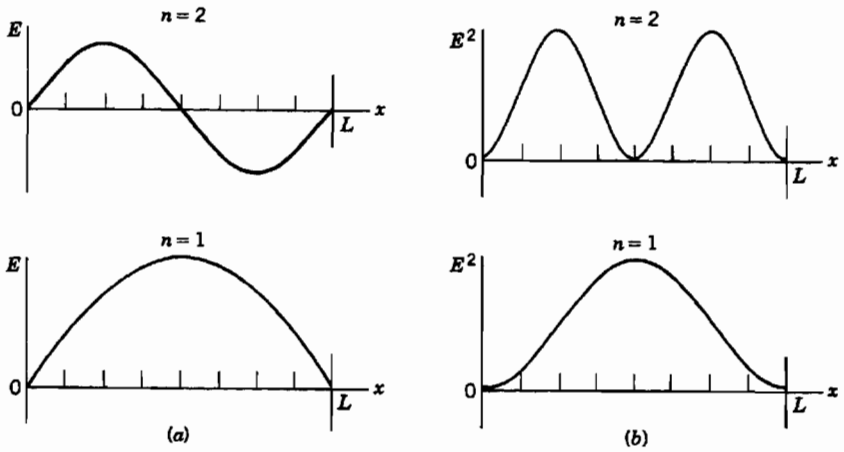


Figura 16 (*a*) El campo eléctrico de dos patrones de una onda estacionaria electromagnética en una cavidad de longitud L. Estos patrones se determinan por la ecuación 12. (*b*) La densidad de fotones en la cavidad puede hallarse del cuadrado de los campos.

La figura 16*a* muestra una gráfica de $E_n(x)$ en función de x para los modos de oscilación más bajos (n = 1 y 2). Nótese la semejanza entre esta figura y la figura 15, que mostraba la onda mecánica estacionaria en una cuerda.

La figura 16*b* muestra una gráfica de $E_n^2(x)$, que es proporcional a la densidad de la energía de la onda, como se vio en la sección 41-4. En términos del fotón, podemos considerar la onda estacionaria como un conjunto de fotones, y la figura 16*b* representa la densidad de fotones en función de x. Esto es, en el modo de oscilación con n = 1 encontraríamos la máxima densidad de fotones en $x = L/2$ y la mínima densidad cerca de las paredes. En el modo n = 2 hallaríamos un mínimo de densidad en $x = L/2$ y los máximos en $x = L/4$ y $3L/4$.

Supongamos que reducimos la intensidad de la luz en la cavidad hasta que contenga únicamente un solo fotón. Se aplicaría todavía la figura 16*b*, pero debemos cambiar ligeramente su interpretación, puesto que ya no es apropiado hablar de la densidad de fotones. En cambio, usamos un concepto estadístico relacionado: *el cuadrado de la amplitud del campo eléctrico en una coordenada en particular da la probabilidad de hallar al fotón en esa ubicación*. La figura 16*b* muestra las ubicaciones en donde la probabilidad de encontrar un fotón es mayor y en donde la probabilidad es cero. Nótese que no consideramos la ubicación real del fotón, sino la probabilidad de encontrarlo en una cierta ubicación.

Estas características de las ondas estacionarias mecánicas y electromagnéticas en una dimensión pueden extenderse directamente a las ondas materiales. Consideremos una partícula confinada a moverse entre dos paredes perfectamente reflejantes separadas por una distancia L. La figura 17 muestra un dispositivo que puede emplearse para atrapar un electrón. Si bien éste es un dispositivo a gran escala, es posible construir dispositivos microscópicos que logren el mismo resultado. Por ejemplo, se construyen estructuras de "pozo cuántico" partiendo de unas cuantas capas atómicas de material semiconductor rodeado por un material aislante; tales dispositivos se emplean en la comunicación óptica y en compuertas lógicas.

En el aparato que se muestra en la figura 17*a*, el electrón puede moverse libremente en la sección central, en donde no actúan fuerzas sobre él. Al llegar a cualquiera de los extremos, encuentra una región en la que el potencial cambia rápidamente de 0 (que consideramos ser el de la sección central) a $-V_0$, el potencial asociado con una u otra batería. De manera equivalente, la energía potencial del electrón es 0 en la sección central y U_0 ($= eV_0$) en las secciones de fuera (Fig. 17*b*). Si la energía cinética del electrón que está en la región central es menos de U_0, entonces clásicamente carece de la energía suficiente para escapar del pozo y oscila de un lado al otro entre las paredes.

Buscamos describir el movimiento del electrón en el pozo de potencial usando el lenguaje de la mecánica ondulatoria. Mientras que éste puede parecer un problema trivial muy alejado de, digamos, la estructura de los átomos, sucede que demuestra las importantes características del comportamiento mecánico de la onda de forma que evita la complejidad matemática de los sistemas más complicados.

Al describir las ondas estacionarias mecánicas y electromagnéticas usamos las funciones $y(x)$ y $E_n(x)$, que carecen de la dependencia del tiempo que debe presentarse para describir una onda. Sin embargo, como lo mostramos arriba, en nuestro análisis estábamos más interesados en las variaciones de la amplitud con la posición, y por tanto no era necesario considerar la dependencia del tiempo. Haremos lo mismo en el caso de las ondas materiales. En lugar de buscar la función de onda $\Psi(x, t)$ general, consideraremos únicamente la parte espacial, la cual escribimos como $\psi(x)$.

Comenzamos por suponer que las paredes son perfectamente reflejantes para todas las partículas; esto es, consideramos un pozo infinitamente profundo, tal que $U_0 \to \infty$. Sucede que, en este caso, la ecuación de Schrö-

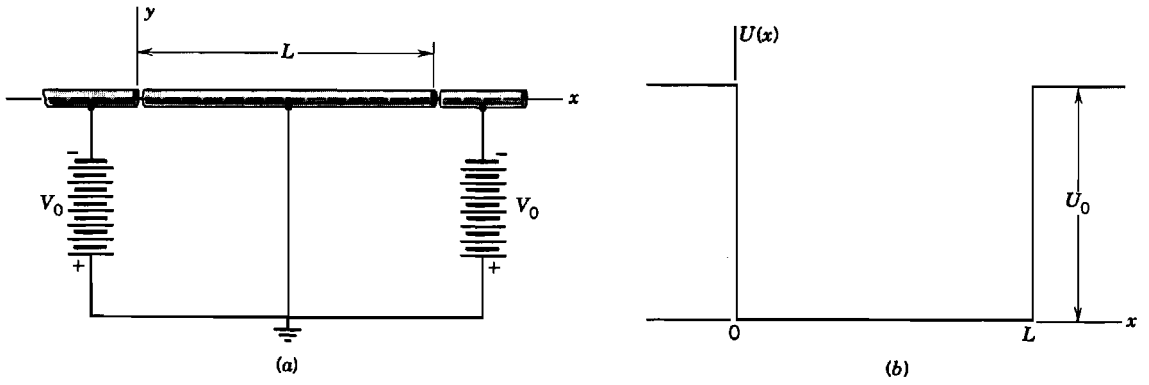


Figura 17 (*a*) Arreglo que puede emplearse para confinar un electrón en una región de longitud L a lo largo del eje x. (*b*) La energía potencial del electrón. En cualquier dispositivo real, la energía potencial no cambiaría inmediatamente de 0 a U_0; la gráfica de la energía potencial tendría esquinas redondeadas y lados no verticales.

dinger es idéntica a las ecuaciones de onda que describen a las ondas mecánicas o electromagnéticas. Su solución es

$$\psi_n(x) = A \operatorname{sen} k_n x = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad (13)$$

donde el grupo permitido de números de onda o de longitudes de onda está dado por las ecuaciones 9 y 10. La constante A debe determinarse mediante la condición de normalización (véase el problema muestra 10).

La función $\psi_n(x)$ no tiene una interpretación física. Sin embargo, el cuadrado de la función de onda tiene un significado físico —da la *densidad de la probabilidad* $P_n(x)$:

$$P_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (14)$$

Al igual que en el caso del cuadrado del campo eléctrico en la figura 16, el cuadrado de la función de onda en una ubicación particular indica la probabilidad de encontrar el electrón en esa ubicación. En la figura 18 se grafican algunas de las densidades de probabilidad.

La energía de la partícula (que es enteramente cinética dentro del pozo, puesto que $U = 0$) está restringida a un cierto conjunto de valores; decimos que la energía está *cuantizada*. Veamos cómo sucede esto. Las longitudes de onda de de Broglie permitidas para la partícula están dadas por la ecuación 9, y por consiguiente, la magnitud de su ímpetu se restringe a los valores

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (15)$$

La energía (cinética) es, entonces,

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad (16)$$

donde m es la masa de la partícula. Cuando escribimos la energía de esta manera, el índice n se llama *número cuántico*. En la figura 19 se dibujan las energías permitidas. Se permite que el electrón ocupe únicamente aquellos estados de movimiento que corresponden a este conjunto de energías; no se permite ninguna otra clase de energías en la partícula.

Una vez que se determinan las energías y las funciones de onda permitidas, habremos resuelto el problema de la partícula atrapada usando las técnicas de la mecánica cuántica. La solución cuántica muestra un número de

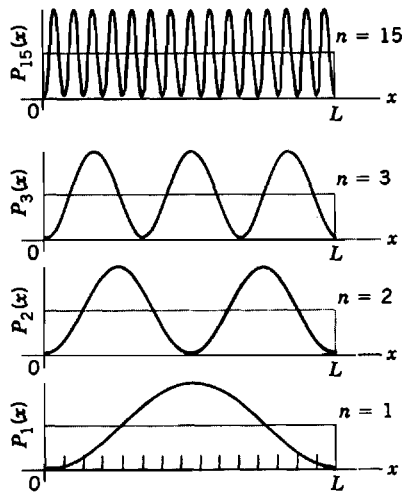


Figura 18 La densidad de probabilidad $P_n(x)$, calculada de acuerdo con la ecuación 14, para cuatro valores diferentes del número cuántico n. Las líneas horizontales muestran las previsiones clásicas de la densidad de probabilidad.

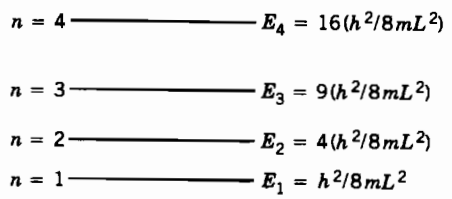


Figura 19 Los niveles de energía permitidos, calculados de la ecuación 16, de un electrón atrapado en una región unidimensional.

características inesperadas que no son parte de la solución clásica de una partícula atrapada. Consideremos algunas de ellas.

1. *El electrón no puede estar en reposo en el pozo.* El estado de mínima energía, llamado el *estado base*, corresponde a $n = 1$ en la ecuación 16 y la figura 18. Esta energía mínima no es cero. No podemos reducir la energía de la partícula (esto es, su energía cinética) a cero. El mínimo de energía, dado por

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}, \tag{17}$$

se llama *energía del punto cero* del pozo infinito. En otros sistemas cuánticos, la energía del punto cero puede tomar diferentes formas, pero el fenómeno existe en todos los sistemas cuánticos. Aun en el cero absoluto de temperatura, en donde una partícula está en el estado de mínima energía posible, la partícula tiene todavía movimiento y energía.

En efecto, el movimiento en el punto cero ocurre como un resultado de la confinación de la partícula a una región del espacio. Veamos cómo nos ayuda el principio de incertidumbre a entender este efecto. Si confinamos una partícula en el pozo, conocemos su posición hasta dentro de una incertidumbre de L aproximadamente. La incertidumbre correspondiente a su ímpetu es, de la ecuación 6,

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{2\pi L}.$$

Cuanto más pequeña sea la región en la que confinemos a la partícula, tanto mayor será la incertidumbre de su ímpetu.

Si conocemos la energía cinética de la partícula, conocemos la magnitud de su ímpetu con precisión, pero no conocemos la dirección. Una incertidumbre en el ímpetu de Δp_x sugiere que la partícula puede estar moviéndose a la derecha con un ímpetu $p_x = \frac{1}{2}\Delta p_x = h/4\pi L$ o a la izquierda con un ímpetu $p_x = -\frac{1}{2}\Delta p_x = -h/4\pi L$. Esto es comparable con el ímpetu de este estado dado por la ecuación 15; esto es, $p_1 = h/2L$, teniendo que ver la diferencia de un factor de 2π con el modo arbitrario en que hemos definido las incertidumbres. La estimación indica que el movimiento en el punto cero es consistente con la relación de incertidumbre, y que el movimiento es el resultado de haber confinado la partícula en una región del espacio.

2. *El electrón pasa más tiempo en ciertas partes de la trampa que en otras.* En este problema unidimensional un elemento de "volumen" se convierte en un elemento de línea de tal modo que el producto $P_n(x)\,dx$ es la probabilidad de que el electrón se encuentre en el intervalo entre x y $x + dx$. Una mirada a las curvas de densidad de probabilidad de la figura 18 muestra que en el estado fundamental ($n = 1$), es mucho más probable que el electrón se encuentre cerca del centro de la trampa que cerca de sus extremos. Una vez más tenemos una predicción en desacuerdo con la predicción de la mecánica clásica. De acuerdo con la teoría clásica todas las posiciones entre las paredes de la trampa son igualmente probables, como lo indican las líneas horizontales de la figura 18. Tanto para las curvas cuánticas como para las clásicas, el área bajo la curva es la unidad, como lo requiere la condición de normalización (Ec. 8).

En los estados del número cuántico más elevado —y por tanto de energía más elevada— la distribución de la densidad de probabilidad del electrón a través de la trampa se vuelve más uniforme y la predicción cuántica se funde con la predicción clásica. Esta concordancia entre la física cuántica y la clásica para números cuánticos grandes se llama *principio de correspondencia* y se estudia en la sección 50-9.

3. *El electrón puede escapar de su trampa.* Hasta ahora hemos tratado con un pozo de profundidad infinita. Nos espera una sorpresa cuántica más grande si dejamos a un lado este requisito y tratamos con un caso más real de un pozo de profundidad finita. En la figura 20 comparamos dos pozos de la misma anchura ($= 2 \times 10^{-10}$ m, aproximadamente el tamaño de un átomo grande), siendo uno de los pozos infinitamente profundo y teniendo el otro una profundidad de 20 eV únicamente. Para hallar las energías permitidas y las densidades de probabilidad correspondientes para un pozo *finito*, necesitamos toda la fuerza de la ecuación de Schrödinger. Aquí damos simplemente los resultados, sin demostración.* Consideramos sólo el estado base.

La figura 20 muestra que la energía del estado base del pozo finito ($= 4.45$ eV) es sustancialmente menor que la energía del estado base del pozo infinito ($= 9.41$ eV, calculada de la Ec. 16). Podemos decir que éste sería el caso con tal sólo observar las curvas de densidad de probabilidad de la figura 20. En el pozo infinito, la mitad de una longitud de onda de de Broglie encaja muy bien y exactamente entre las paredes rígidas

* Véase, por ejemplo Robert Eisberg y Robert Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2da. edición, Wiley, 1985, apéndices G y H.

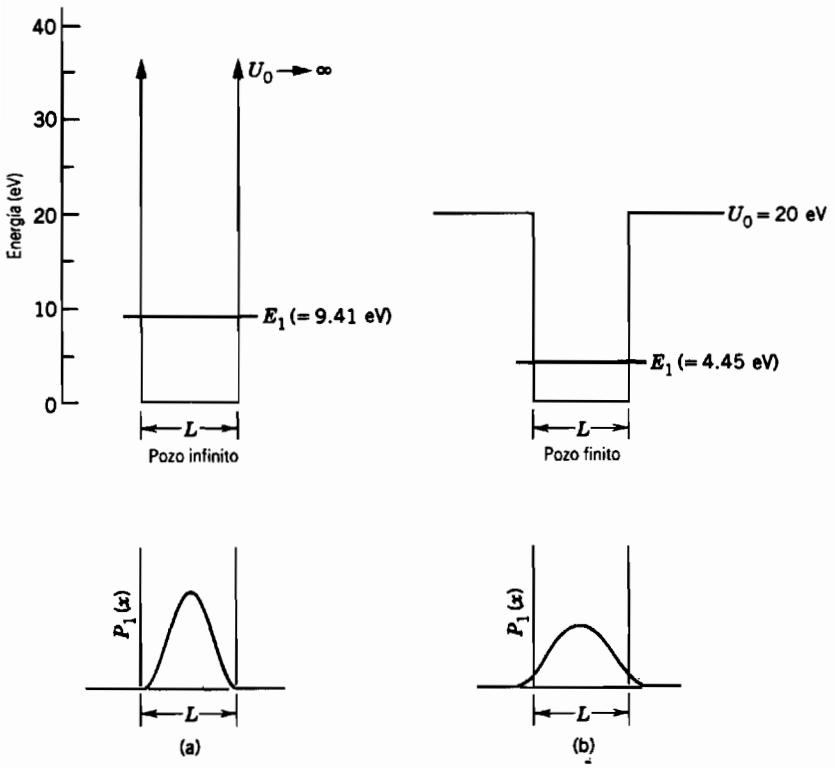


Figura 20 Se comparan un pozo de potencial de (*a*) profundidad infinita y (*b*) profundidad finita (20 eV). Los pozos tienen la misma anchura (0.2 nm). Se comparan las energías E_1 y las densidades de probabilidad $P_1(x)$.

del pozo. Sin embargo, en el pozo finito, la longitud de onda de de Broglie es demasiado grande para que encaje de esta manera; se derrama más allá de las paredes. Ahora bien, si la longitud de onda de de Broglie es *mayor* en el pozo finito, el ímpetu ($= h/\lambda$) debe ser *menor*, lo que significa que la energía debe ser también menor, justo como lo observamos. Así, la energía reducida del pozo finito es consistente con la forma de su curva de densidad de probabilidad.

El derramamiento de las colas exponenciales de la curva de la probabilidad (Fig. 20*b*) más allá de las paredes significa que existe una probabilidad finita de que el electrón se encuentre ¡*fuera* del pozo! Esta curva se ha normalizado (véase la Ec. 8) de modo que el área bajo la curva sea la unidad. El área bajo las dos colas exponenciales es de 0.074, lo que significa que, si midiésemos la posición del electrón atrapado, lo encontraríamos fuera del pozo el 7.4% del tiempo.

¿Cómo puede escapar un electrón cuya energía es tan sólo de 4.45 eV de un pozo que tiene 20 eV de profundidad? Claramente, es una imposibilidad clásica. Es como si pusiéramos un frijol saltarín dentro de una caja cerrada y a veces (pero no siempre) el frijol se apareciera afuera. Esto es algo tan poco probable en un frijol saltarín que podemos llamarlo con confianza "imposible". Sin embargo, los electrones no son frijoles saltarines. Están regidos por leyes cuánticas y en absoluto lo están por las leyes newtonianas clásicas. ¿Cómo hemos de entender este comportamiento del electrón?

Una vez más el principio de la incertidumbre nos proporciona la respuesta. Recordemos que, cuando se aplica el principio de incertidumbre a un electrón atrapado en un pozo infinito, suponemos que $\Delta x \approx L$, la anchura del pozo, y $\Delta p_x \approx 2p_x$. En el pozo finito el ímpetu del electrón, como lo acabamos de ver, es *menor* de lo que es en el pozo infinito. Por lo tanto, en nuestro pozo finito, la incertidumbre en la posición del estado base debe ser *mayor* de lo que es en el pozo infinito. Así, en el pozo finito, ¡*la incertidumbre en la posición es mayor que la anchura del pozo*! No nos sorprendería entonces hallar al electrón afuera del pozo de vez en cuando.

Problema muestra 8 Considere un electrón confinado por fuerzas eléctricas a un pozo de potencial infinitamente profundo, cuya longitud L es de 100 pm, que es, aproximadamente un diámetro atómico. ¿Cuáles son las energías de sus tres estados mínimos permitidos y del estado con $n = 15$?

Solución De la ecuación 16, con $n = 1$, tenemos

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(8)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(100 \times 10^{-12}\ \text{m})^2}$$
$$= 6.03 \times 10^{-18}\ \text{J} = 37.7\ \text{eV}.$$

Las energías de los estados restantes ($n = 2$, 3 y 15) son $2^2 \times 37.7$ eV, $3^2 \times 37.7$ eV y $15^2 \times 37.7$ eV o, 151 eV, 339 eV y 8480 eV, respectivamente.

Problema muestra 9 Consideremos una mota de polvo de 1 μg moviéndose de uno al otro lado entre dos paredes rígidas

separadas por 0.1 mm. Se mueve tan lentamente que a la partícula le toma 100 s atravesar el espacio. ¿Qué número cuántico describe al movimiento?

Solución La energía de la partícula es

$$E (= K) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1 \times 10^{-9}\ \text{kg})(1 \times 10^{-6}\ \text{m/s})^2 = 5 \times 10^{-22}\ \text{J}.$$

Resolviendo la ecuación 16 para n tenemos

$$n = \frac{L}{h}\sqrt{8mE} = \frac{1 \times 10^{-4}\ \text{m}}{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}\sqrt{(8)(10^{-9}\ \text{kg})(5 \times 10^{-22}\ \text{J})} \approx 3 \times 10^{14}.$$

Éste es un número muy grande. Es experimentalmente imposible distinguir entre $n = 3 \times 10^{14}$ y $n = 3 \times 10^{14} + 1$, de modo que la naturaleza cuantizada de este movimiento nunca se revelará por sí misma. Si se compara este ejemplo con el anterior, se ve que, si bien su masa y energía cinética son ambas extremadamente pequeñas, la mota de polvo es todavía un grueso objeto macroscópico comparado con un electrón. La mecánica cuántica da las respuestas correctas pero, puesto que estas respuestas coinciden, en este caso, con las respuestas dadas por la física clásica, no se necesitan las complicaciones de los cálculos cuánticos.

Problema muestra 10 Evalúe la constante de normalización A en la ecuación 13, que da la densidad de probabilidad para una partícula atrapada en un pozo infinitamente profundo de anchura L.

Solución En este problema unidimensional, el elemento de "volumen" es un elemento de longitud y la ecuación de normalización (Ec. 8) es

$$\int_0^L P_n(x)\,dx = 1,$$

donde L es la anchura del pozo. Al sustituir $P_n(x)$ de la ecuación 14 se obtiene

$$A^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}\,dx = 1.$$

Esta integral se resuelve más fácilmente si se introduce una nueva variable θ, definida por

$$\theta = \frac{n\pi x}{L}.$$

Con este cambio, la integral resulta

$$\frac{A^2L}{n\pi}\int_0^{n\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{A^2L}{n\pi}\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Big|_0^{n\pi} = 1.$$

Evaluando y resolviendo para A se llega finalmente a

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \tag{18}$$

Nótese que la constante de normalización A no contiene al número cuántico n y, por lo tanto, es la misma para todos los estados del sistema.

Problema muestra 11 Un electrón está atrapado en un pozo infinitamente profundo de anchura L. Si el electrón está en el estado base, ¿qué fracción de su tiempo pasa en el tercio central del pozo?

Solución En el ejemplo anterior demostramos que la constante de normalización A que aparece en la ecuación 13 es $\sqrt{2/L}$, de modo que la densidad de la probabilidad para el estado base, que corresponde a $n = 1$, está dada, según la ecuación 14, por

$$P_1(x) = \frac{2}{L}\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{L}.$$

La integral de esta cantidad para todo el pozo es la unidad, y la fracción que buscamos está dada por

$$f = \int_{L/3}^{2L/3} P_1(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{L/3}^{2L/3} \operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{L}\,dx.$$

Al evaluar esta integral, como en el problema muestra anterior, se llega a

$$f = 0.61.$$

Así, el electrón en su estado base pasa 61% de su tiempo en el tercio central de su trampa, y alrededor del 19.5% en cada uno de los dos tercios de afuera ($0.195 + 0.61 + 0.195 = 1$). Si el electrón obedeciera las leyes de la física clásica, habría gastado exactamente un tercio de su tiempo en cada una de estas regiones de su trampa. La curva de la densidad de probabilidad para el estado base, exhibida en la figura 18, apoya gráficamente el cálculo que hemos llevado a cabo en este ejemplo.

50-8 TUNELIZACIÓN POR UNA BARRERA

En la sección 50-7 vimos que un electrón atrapado en un pozo del cual —clásicamente— no podría escapar tiene sin embargo una probabilidad finita de aparecer fuera del pozo. Señalábamos que era como si pusiésemos un frijol saltarín en una caja cerrada y lo halláramos fuera de ésta al cabo de cierta fracción de los tiempos en que observamos. Cosas como ésta no les suceden a objetos masivos como los frijoles saltarines, pero sí les suceden, en cambio, a los electrones y a otras partículas ligeras.

Aquí veremos un fenómeno cuántico relacionado, la penetración de barreras clásicamente impenetrables. En este caso, es como si tirásemos un frijol a través de los vidrios de una ventana cerrada y —para nuestra sorpresa— se materializara en el otro lado sin haber roto el vidrio. Una vez más, no esperamos que esto suceda con frijoles. La *tunelización en la barrera*, como se le llama, *ocurre* ciertamente con los electrones y, como lo veremos, es un fenómeno de gran importancia práctica.

La figura 21*a* muestra tal barrera, de altura U y espesor L. Un electrón de energía total E se aproxima a la barrera desde la izquierda. Clásicamente, ya que $E < U$, el electrón se reflejaría en la barrera y retrocedería en la dirección de la que vino. Sin embargo, en la mecánica ondulatoria existe una probabilidad finita de que el electrón penetre la barrera y continúe su movimiento hacia la derecha.

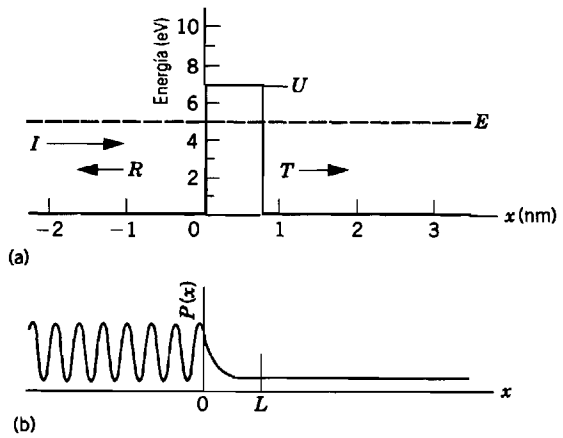


Figura 21 Una partícula de energía total E incide desde la izquierda sobre una barrera de altura U. I representa el haz de partículas incidente, R el haz reflejado y T el haz transmitido a través de la barrera. (*b*) La densidad de probabilidad para la onda que describe esta partícula. Los haces incidente y reflejado se combinan para producir ondas estacionarias a la izquierda de la barrera.

Esta situación la describimos asignando un coeficiente de reflexión R y un coeficiente de transmisión T, siendo la suma de estas dos cantidades igual a la unidad. Entonces, por ejemplo, si $T = 0.05$, 5 de cada 100 electrones disparados contra la barrera la atravesarán, en promedio, y 95 se reflejarán.

La figura 21*b* muestra la densidad de probabilidad para la situación. A la izquierda de la barrera la onda material reflejada tiene una amplitud menor que la onda incidente, de modo que, aunque existe interferencia, no hay puntos en los que la cancelación sea total. Dentro de la barrera la onda decae exponencialmente, como lo hizo fuera del pozo de potencial en la figura 20*b*. En el lado lejano de la barrera tenemos una onda material viajera de amplitud reducida, que da una densidad de probabilidad uniforme.

De la ecuación de Schrödinger podemos demostrar que el coeficiente de transmisión T está dado por*

$$T \approx e^{-2kL}, \tag{19}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U-E)}{h^2}}.$$

Esta fórmula es una aproximacion válida sólo para barreras que sean suficientemente altas o suficientemente gruesas para que el coeficiente de transmisión T sea pequeño ($T \ll 1$). Cualquiera que sea el caso, la ecuación 19 exhibe suficientemente bien las características principales del fenómeno de tunelización en una barrera.

El valor del coeficiente de transmisión es muy sensible al espesor de la barrera L y al factor k, el que, a su vez, depende de la masa m de la partícula y de la altura U de la barrera. La ecuación 19 nos muestra que el coeficiente de transmisión disminuye si aumentamos ya sea el espesor L o la altura U de la barrera. Esto es precisamente lo que se espera del principio de correspondencia. El coeficiente de transmisión también disminuye conforme la masa de la partícula aumenta, tendiendo en realidad a un valor muy pequeño con gran rapidez cuando pasamos de los electrones a los frijoles. Una vez más, esto es justamente lo que esperamos del principio de correspondencia. En el problema muestra 12 vemos algunas predicciones numéricas de la ecuación 19.

Barreras y ondas

La penetración de barreras por ondas de todas clases no es rara en la física clásica. Solamente cuando la onda es una onda material y cuando, además, elegimos enfocar nuestra atención en su partícula asociada, el comportamiento no clásico se presenta por sí mismo.

Consideremos la figura 22*a*, que representa una onda electromagnética (la luz visible) que incide sobre una interfaz vidrio-aire con un ángulo de incidencia tal que ocurre la reflexión interna total. Cuando tratábamos este tema en la sección 43-6, supusimos que no existía una penetración del rayo incidente en el espacio de aire más allá de la interfaz. Sin embargo, ese tratamiento se basó en la óptica geométrica, la que, como sabemos, es siempre una aproximación, siendo un caso límite de la óptica ondulatoria, más general. De manera muy parecida, la mecánica newtoniana (con sus trayectorias a modo de rayos) es un caso límite de la mecánica ondulatoria, más general.

Si analizamos la reflexión interna total desde el punto de vista de la óptica ondulatoria, aprendemos que *existe* una penetración de la onda, en una distancia del orden de unas cuantas longitudes de onda, más allá de la interfaz. Hablando muy vagamente, podemos decir que tal penetración es necesaria porque la onda incidente debe "sondear" la situación localmente antes de poder "asegurar" que hay una interfaz presente.

En la figura 22*b*, colocamos la cara de un segundo prisma de vidrio paralela a la interfaz, siendo la separación entre ellas no más de unas cuantas longitudes de onda. La onda incidente puede entonces "tunelizar" a través de esta angosta "barrera" y generar una onda transmitida T. La energía en la onda transmitida surge a expensas de la onda reflejada R, que ahora ha disminuido su intensidad. La comparación con la tunelización en una barrera de una onda material es directa. En un caso tratamos con una

* Véase, por ejemplo, Robert Eisberg y Robert Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2a. edición, Wiley, 1985, sección 6-5.

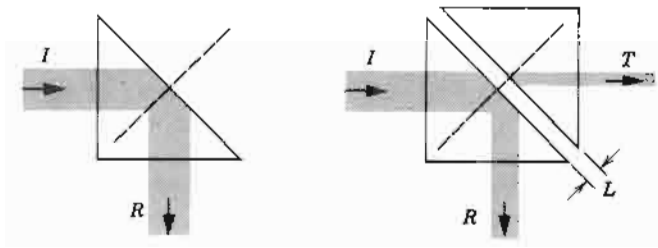


Figura 22 (*a*) Un haz de luz incidente *I* experimenta una reflexión interna total en la interfaz vidrio-aire. (*b*) El haz tuneliza a través de la separación estrecha de aire, y como resultado existe un haz transmitido *T* en el segundo vidrio. Esta condición se llama *reflexión interna total frustrada*. En estos dibujos, la anchura del haz representa su intensidad.

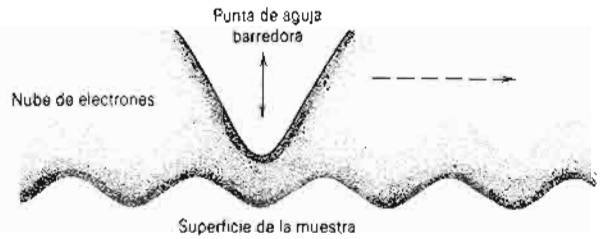


Figura 23 Una aguja está explorando la superficie de una muestra en un microscopio de barrido por tunelización.

onda electromagnética (regida por las ecuaciones de Maxwell) y en el otro con una onda material (regida por la ecuación de Schrödinger).

Se puede comprobar el fenómeno mostrado en la figura 22*b* usando un vaso de agua. Véase hacia adentro del vaso a través de la pared lateral, a un ángulo tal que la luz que entra a su ojo se haya reflejado totalmente de la pared. La pared se verá plateada cuando se obtiene esta condición. Luego oprima la punta (humedecida) de su dedo contra el exterior del vaso. Podrá ver los pliegues de su huella dactilar porque, en esos puntos, usted ha interferido con el proceso de reflexión total, como en la figura 22*b*. Los valles entre los pliegues de la punta de su dedo están todavía lo suficientemente alejados de la superficie del vaso como para que la reflexión resulte total allí, y usted ve simplemente una espiral plateada.

También es posible demostrar el fenómeno de la figura 22*b* a una escala mayor usando microondas incidentes y prismas de parafina grandes. En este caso, la longitud de onda puede ser de unos cuantos centímetros de modo que la separación entre los prismas debe ser también de este orden de magnitud.

Tunelización en una barrera: algunos ejemplos

La tunelización en una barrera de las ondas materiales es un fenómeno importante en el mundo natural y tiene muchos usos prácticos. A modo de ejemplo sencillo, consideremos un alambre de cobre desnudo que haya sido cortado y los dos extremos retorcidos entre sí. Todavía conduce electricidad fácilmente, a pesar de que los alambres estén recubiertos con una delgada capa de óxido de cobre, un material aislante. ¿Cómo atraviesan los electrones esta capa (extremadamente delgada) de óxido? Por tunelización en una barrera.

En un ejemplo más elaborado, consideremos el núcleo del Sol, en donde se genera la energía por procesos de fusión termonuclear. Tales procesos implican la fusión de núcleos ligeros para formar otros más pesados, con liberación de energía. Supóngase que dos protones estén precipitándose a alta velocidad. Deben aproximarse mucho entre sí antes de que sus intensas fuerzas de atracción nuclear puedan surtir efecto y causar que se fundan. Entre tanto, experimentan una desaceleración por la fuerza de repulsión de Coulomb que tiende a separarlos. Podemos decir que están separados por una barrera de Coulomb. La probabilidad de la fusión depende críticamente de la posibilidad de que los protones tunelicen a través de esta barrera mutua. Sin la tunelización en una barrera el horno solar se apagaría y el propio Sol se colapsaría.

La emisión de partículas alfa (cargadas positivamente) por núcleos radiactivos y la fisión espontánea de los núcleos pesados en dos grandes fragmentos se cuentan entre otros procesos naturales en los que la tunelización desempeña un papel.

Entre las aplicaciones prácticas debemos mencionar la del diodo de efecto túnel, en que el flujo de electrones (por tunelización) a través de un dispositivo puede ser activado o desactivado rápidamente al controlar la altura de la barrera (variando, por ejemplo, el voltaje aplicado externamente). Esto puede hacerse con un tiempo de respuesta muy corto (del orden de 10^{-11} s o sea 10 ps) de modo que el dispositivo resulte práctico en aplicaciones en donde la velocidad de respuesta es crítica. El premio Nobel de 1973 fue compartido por tres "tunelizadores", Leo Esaki (tunelización en semiconductores), Ivar Giaver (tunelización en superconductores) y Brian Josephson (la unión de Josephson, un dispositivo cuántico de conexión y desconexión basado en la tunelización).

En un *microscopio de barrido por tunelización*, una fina aguja explora mecánicamente (a la manera de un patrón de la trama de TV) la superficie de la muestra que se va a investigar, como en la figura 23. Los electrones de la muestra tunelizan a través de la separación entre la muestra y la aguja y se registran como una "corriente de túnel" (o de tunelización). Normalmente, esta corriente túnel variaría ampliamente cuando la separación entre la muestra y la aguja cambia durante el barrido.

No obstante, se dispone de un mecanismo que mueve la aguja hacia arriba o hacia abajo automáticamente du-

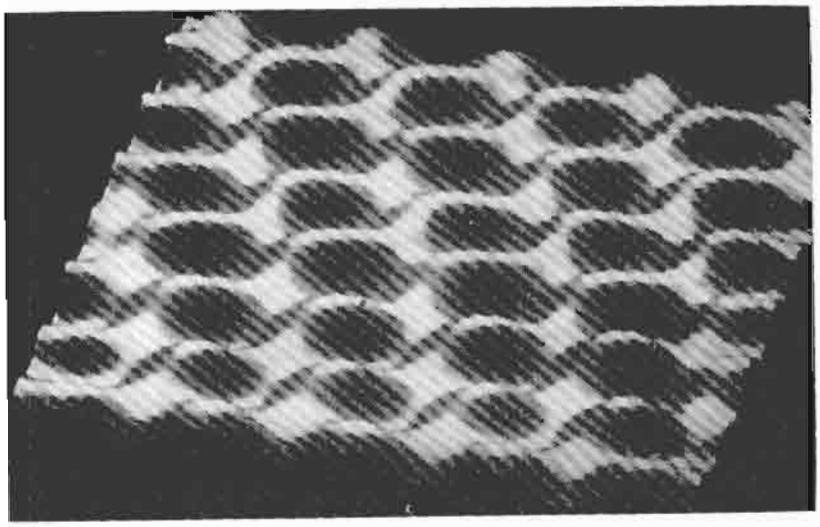


Figura 24 En esta imagen, hecha con un microscopio de barrido por tunelización se revela la disposición regular de los átomos de carbono en la superficie del grafito.

rante el barrido, con el fin de mantener constante la corriente túnel —y por lo tanto la separación. Entonces puede exhibirse en una pantalla la posición vertical de la aguja en función de su ubicación, produciendo la gráfica tridimensional de la superficie. Se concedió el premio Nobel de 1986 a Gerd Binnig y a Heinrich Rohrer por el desarrollo del microscopio de barrido por tunelización.*

La figura 24 muestra el resultado de un barrido sobre una superficie de grafito. Los "topes" sugieren átomos individuales de carbono. Con este notable instrumento pueden resolverse detalles tan pequeños como de 1/100 de un diámetro atómico.

Problema muestra 12 Considérese un electrón cuya energía total E sea de 5.0 eV aproximándose a una barrera cuya altura U es de 6.0 eV, como en la figura 21*a*. Sea L, el espesor de la barrera, de 0.70 nm. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de de Broglie del electrón incidente? (*b*) ¿Qué coeficiente de transmisión se infiere de la ecuación 19? (*c*) ¿Cuál sería el coeficiente de transmisión si el espesor de la barrera se redujese a 0.30 nm? ¿Y si la altura se aumentase a 7.0 eV? ¿Y si la partícula incidente fuese un protón?

Solución (*a*) Antes de que el electrón llegue a la barrera, su energía total E es enteramente cinética, siendo cero la energía potencial en esa región. Procediendo como en el problema muestra 2*b*, hallamos $\lambda = 0.55$ nm. Así, la barrera tiene alrededor de 0.70 nm/0.55 nm o sea que tiene un espesor de unas 1.3 longitudes de onda de de Broglie.

(*b*) Tenemos

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U-E)}{h^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2(9.11\times10^{-31}\text{ kg})(6.0\text{ eV}-5.0\text{ eV})(1.60\times10^{-19}\text{ J/eV})}{(6.63\times10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s})^2}}$$

$$= 5.12\times10^{9}\text{ m}^{-1}.$$

La cantidad kL es, entonces, de $(5.12\times10^{9}\text{ m}^{-1})(700\times10^{-12}\text{ m}) = 3.58$, y el coeficiente de transmisión es

$$T = e^{-2kL} = e^{-2(3.58)} \approx 7.7\times10^{-4}.$$

De cada 100,000 electrones que golpeen a la barrera, únicamente 77 tunelizan a través de ella.

(*c*) Haciendo los cambios apropiados en la solución a la parte (*b*), hallamos:

$$L = 0.30\text{ nm}: \quad T = 0.10$$
$$U = 7.0\text{ eV}: \quad T \approx 5.9\times10^{-5}$$
$$m = 1836m_e: \quad T \approx 10^{-130}.$$

Es más fácil que el electrón penetre la barrera más delgada, pero más difícil que penetre la más alta. El electrón más masivo difícilmente puede penetrar. (¡Imagínese cuán pequeño sería T para un frijol saltarín!).

50-9 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

En los varios casos de este capítulo y del anterior hemos tratado de hacer comparaciones entre los comportamientos clásico y cuántico. Por ejemplo, en el problema muestra 3 del capítulo 49 demostramos que el comportamiento cuantizado de un oscilador de tamaño ordinario es demasiado pequeño para ser observable; por lo tanto, procedemos correctamente al tratar a ese oscilador usando técnicas clásicas (no cuánticas) y viendo a la energía del oscilador como una variable continua (más bien que cuantizada). En este capítulo demostramos en el problema muestra 2 que la longitud de onda de de Broglie de una partícula de virus es inobservablemente pequeña; en el

* Véase "The Scanning Tunneling Microscope", por Gerd Binnig y Heinrich Rohrer, *Scientific American*, agosto de 1985, pág. 50.

problema muestra 6*b* demostramos que el principio de incertidumbre no afecta a nuestro juego de golf; y en el problema muestra 9, a su vez, que no puede observarse la cuantización de la energía de una partícula de polvo atrapada.

Parece que tenemos dos conjuntos de reglas para analizar el comportamiento mecánico: usamos la mecánica cuántica para partículas "pequeñas" y la mecánica clásica para partículas "grandes". Claramente una pelota de golf es una partícula grande, pero aun las partículas de polvo y los virus pueden considerarse como "grandes". Quizás el lector se pregunte dónde trazar la línea entre las partículas clásicas y las partículas cuánticas.

Niels Bohr se planteó este enigma en forma similar cuando intentó (antes de que de Broglie sustentase la hipótesis que condujo al desarrollo de la teoría cuántica) descubrir la estructura de los átomos basándose en el modelo nuclear de los electrones orbitando en torno a un núcleo central. El modelo de Bohr se basó en niveles discretos (y transiciones discretas cuando el electrón saltaba de un nivel a otro) de la energía del átomo, pero sabía que un átomo "clásico" estaría caracterizado por un espectro de radiación continuo conforme el electrón describiera una espiral hacia el núcleo. Como en el caso del sistema cuántico, Bohr encaró el dilema de un conjunto de reglas para sistemas en una escala y otro diferente en otra escala.

Bohr resolvió su problema al proponer el *principio de correspondencia*, que podemos enunciar en términos generales como:

> *La teoría cuántica debe concordar con la teoría clásica en el límite de los números cuánticos grandes.*

Esto evita el problema de tener que hallar una frontera entre los dos diferentes sistemas. Las predicciones de la mecánica cuántica deben ser idénticas a las de la mecánica clásica cuando el sistema cuántico crece a las dimensiones clásicas. Por ejemplo, consideremos las densidades de probabilidad de una partícula atrapada en un pozo (Fig. 18). El comportamiento para $n = 1$ y $n = 2$ difiere marcadamente del comportamiento clásico para una densidad de probabilidad uniforme en el pozo. Sin embargo, para $n = 15$, la densidad de probabilidad se vuelve mucho más uniforme. Al crecer n, las oscilaciones de P se empaquetan más y más entre sí, de modo que al examinar la probabilidad en un intervalo de longitud Δx mayor que L/n, no hallamos un cambio cuando el intervalo se mueve a lo largo del pozo. Aquí nos aproximamos a la situación clásica de una densidad de probabilidad uniforme para números cuánticos grandes.

El principio de correspondencia nos dice que no necesitamos trazar una línea entre los comportamientos clásico y cuántico. Si tenemos duda en aplicar las leyes clásicas o las leyes cuánticas a un virus o a una partícula de polvo, sabemos ahora que podemos aplicar con seguridad las leyes cuánticas, cuyos resultados reproducirán las leyes clásicas si estamos en una región en donde se espera el comportamiento clásico. Realmente, al usar las densidades de probabilidad calculadas de la ecuación de Schrödinger y promediando apropiadamente, podemos demostrar que, en el régimen cuántico, la fuerza promedio sobre una partícula es igual a la masa por la aceleración promedio: $\bar{F} = m\bar{a}$. En el límite de los números cuánticos grandes, las fluctuaciones del promedio resultan despreciables, y $F = ma$ resulta exacta. Aun cuando la ecuación de Schrödinger parezca muy diferente de la segunda ley de Newton, sus resultados se reducen a la segunda ley de Newton en el límite de los sistemas grandes. Esto justifica nuestro uso de la segunda ley de Newton, más sencilla de aplicar en el límite grande, a cuerpos compuestos de átomos que están regidos individualmente por la ecuación de Schrödinger.

50-10 ONDAS Y PARTÍCULAS

En varias ocasiones anteriores nos hemos comprometido a hacer frente a la pregunta de cómo un electrón (o un fotón) puede comportarse como onda en ciertas circunstancias, y como partícula en otras. Cumplamos ahora con nuestro compromiso. Primero le recordamos al lector, mediante la tabla 1, la clara evidencia experimental de que tanto la materia como la radiación tienen realmente este carácter dual.

Nuestras imágenes mentales de "onda" y de "partícula" se forman de nuestra familiaridad con objetos a gran escala como las olas del océano o las pelotas de tenis. En cierto modo es una fortuna que seamos capaces de extender estos conceptos al reino atómico y aplicarlos a entidades como el electrón, al que no podemos ver ni tocar. Sin embargo, decimos inmediatamente que ninguna imagen mental concreta aislada, que combine los detalles *tanto* de onda *como* de partícula, es posible en el mundo cuántico. Como ha escrito Paul Davies, físico y escritor científico: "Es imposible representarse vívidamente en la mente a una onda-partícula, así que no lo intente". ¿Qué haremos entonces?

Niels Bohr, quien no sólo tuvo un papel preponderante en el desarrollo de la mecánica cuántica, sino que también se desempeñó como su mejor filósofo e intérprete, ha demostrado la manera con su *principio de complementariedad*, el cual afirma:

> *Los aspectos de onda y partícula de una entidad cuántica son ambos necesarios para una descripción completa. Sin embargo, no pueden revelarse los dos aspectos simultáneamente en un solo experimento.*

El aspecto que se revele está determinado por la naturaleza del experimento que se lleva a cabo.

Consideremos un haz de luz, de quizás un láser, que atraviese una mesa de laboratorio. ¿Cuál es la naturaleza del haz luminoso? ¿Es una onda o una corriente de partículas?

No podemos responder a esta pregunta a no ser que interactuemos con el haz de algún modo. Si ponemos una rejilla de difracción en el trayecto del haz lo revelamos como una onda. Si interponemos un aparato fotoeléctrico (Sec. 49-5), necesitaremos considerar el haz como una corriente de partículas (fotones) si hemos de interpretar su medición en forma satisfactoria. No importa qué hagamos, no existe un solo experimento que pueda llevarse a cabo con el haz que requiera ser interpretado como una onda y también como una partícula *al mismo tiempo*.

Complementariedad: un caso de estudio

Veamos cómo funciona la complementariedad al tratar de llevar a cabo un experimento que obligue a la naturaleza a revelar ambos aspectos, como onda y como partícula, de los electrones al mismo tiempo. En la figura 25 un haz de electrones incide sobre un dispositivo de rendija doble en la pantalla *A* y forma un patrón de franjas de interferencia en la pantalla *B*. Ésta es una prueba convincente de la naturaleza ondulatoria del haz de electrones incidente.

Supóngase ahora que sustituimos la pantalla *B* con un pequeño detector de electrones, diseñado para generar y registrar un "clic" (un sonido seco) cada vez que un electrón lo golpee. Hallamos que realmente ocurren tales clics. Si movemos el detector hacia arriba y hacia abajo en la figura 25, podemos, graficando la frecuencia de los clics contra la posición del detector, trazar un patrón de franjas de interferencia. ¿No hemos, acaso, tenido éxito en demostrar tanto a la onda como a la partícula? Vemos las franjas (ondas) y oímos los clics (partículas).

No lo tuvimos. El "clic" demuestra que el electrón está localizado (al igual que una partícula) en el detector, pero no indica cómo llegó hasta allí. El concepto de "partícula" conlleva el concepto de "trayectoria" y la imagen mental de un punto que sigue una trayectoria. Como mínimo, queremos ser capaces de saber cuál de las dos rendijas de la pantalla *A* atravesó el electrón en su camino para generar un clic en el detector. ¿Podemos encontrarla?

Podemos, en principio, colocando un detector muy pequeño enfrente de cada rendija, diseñado para que, al pasar un electrón a través de ella, genere una señal electrónica. Entonces podemos tratar de relacionar a cada clic, o "señal de llegada a la pantalla", con una "señal de paso por la rendija", identificando así la trayectoria del electrón en cuestión.

Si tenemos éxito en modificar el aparato para hacer esto, hallamos algo sorprendente. ¡Las franjas de interferencia han desaparecido! Al pasar a través de los detectores de la rendija, los electrones se afectaron de modo tal que destruyeron el patrón de interferencia. Si bien hemos demostrado ahora la naturaleza de partícula del electrón, se ha desvanecido la evidencia de su naturaleza ondulatoria.

El inverso de nuestro experimento pensado también es válido. Si comenzamos con un experimento que demuestre que los electrones son partículas y lo "parchamos" para que nos presente su aspecto ondulatorio, siempre hallaremos que la evidencia de las partículas se ha desvanecido. También, nuestro experimento funcionaría precisamente de la misma manera si sustituimos el haz de electrones incidente de la figura 25 con un haz luminoso.

Un acertijo cuántico resuelto

En la sección 50-1, preguntamos cómo es posible que las partículas experimenten el fenómeno de interferencia por una doble rendija. Al fin y al cabo, una partícula debe viajar en una trayectoria definida. ¿Cuál es el origen de la interferencia?

Como principio de una respuesta, veamos de nuevo al experimento pensado de la figura 25, en donde el patrón de franjas de la pantalla *B* es claramente el causante de la interferencia alternativamente constructiva y destructiva de las ondas secundarias de materia que se irradian de cada una de las dos rendijas de la pantalla *A*. La conexión de estas ondas con la partícula es que el cuadrado de su función de onda asociada en cualquier punto da la

TABLA 1 EXPERIMENTOS SELECCIONADOS QUE MUESTRAN LA NATURALEZA DUAL ONDA-PARTÍCULA DE LA MATERIA Y DE LA RADIACIÓN

	Materia	*Radiación*
Naturaleza ondulatoria	Experimentos de difracción del electrón de Davisson y Germer (Sec. 50-3)	Experimento de la interferencia de la rendija doble de Young (Sec. 45-1).
Naturaleza de partícula	Medición de e/m del electrón por J. J. Thomson (Sec. 34-2)	El efecto Compton (Sec. 49-7)

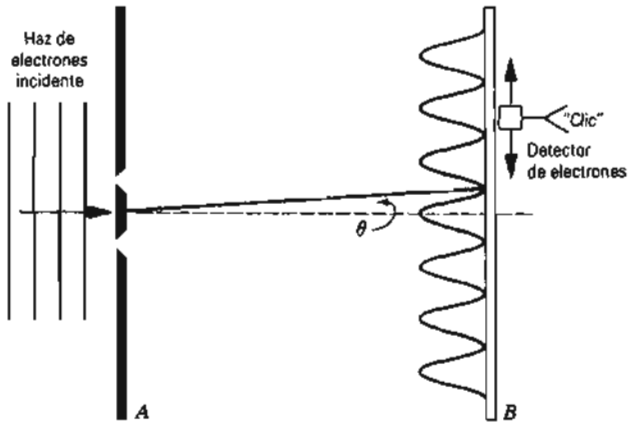


Figura 25 Un haz de electrones incide sobre una rendija doble en la pantalla A y produce franjas de interferencia en la pantalla B. La pantalla B puede sustituirse por un detector de electrones que pueda moverse a lo largo de la ubicación ocupada por la pantalla.

probabilidad (por unidad de volumen) de que la partícula se hallará en ese punto. Entonces, en la pantalla *B*, los electrones se apilarán en aquellos lugares en donde esta amplitud de la probabilidad sea grande, y se hallarán en menor abundancia en aquellos lugares en donde sea pequeña. La figura 26, una simulación en computadora, muestra cómo se forman las franjas con el tiempo para un haz incidente débil.

Estas consideraciones se aplican incluso si el haz incidente se hace en forma deliberada tan débil que, mediante cálculo, debe haber —en promedio— únicamente un solo electrón en el aparato en cualquier tiempo dado. Usted podría pensar que, puesto que el solo electrón que está en el aparato debe atravesar una rendija o la otra, las franjas deben desaparecer; después de todo, razonará usted, el electrón no puede interferir consigo mismo y no hay nada más que interfiera con él. Sin embargo, el experimento demuestra que las franjas *todavía* se formarán, apareciendo lentamente mientras caen electrón tras electrón sobre la pantalla *B*. Aun en estas condiciones la onda asociada pasa siempre a través de *ambas* rendijas, y *es ello* lo que determina si los electrones tienen probabilidad de caer sobre la pantalla *B*.

Para obtener una mejor idea del papel de la onda en el movimiento de una partícula, consideremos la figura 27, donde una partícula (digamos, un electrón) se genera en el punto *I* y se detecta en el punto *F*. ¿Cómo recorre la partícula esta trayectoria rectilínea?

La respuesta cuántica es que la onda explora todas las trayectorias posibles, como lo sugiere la figura, asignando una probabilidad igual a cada una. Sin embargo, sólo se suman las ondas constructivamente en la línea recta que une los dos puntos, dando una alta probabilidad de que la partícula se halle allí si la pudiéramos ver. En los puntos que no estén cerca de esta línea recta, las ondas se cancelan entre sí

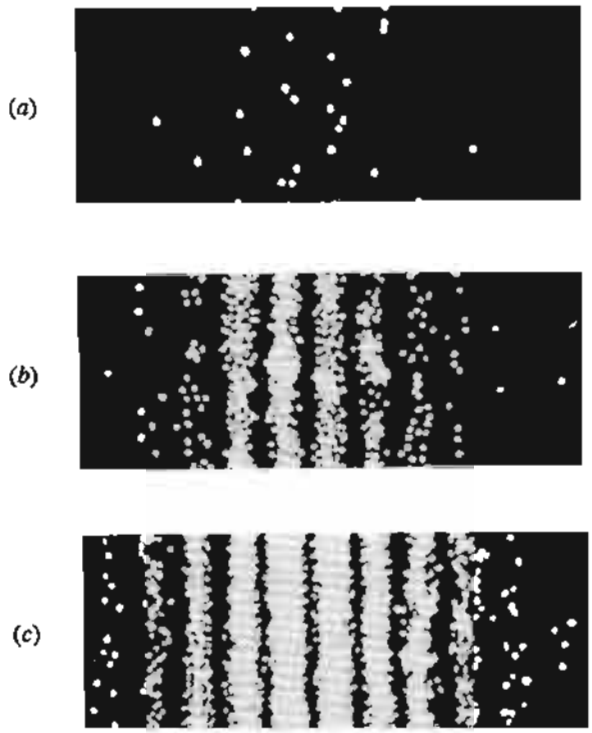


Figura 26 La creación de franjas de interferencia cuando los electrones inciden sobre la pantalla B de la figura 25. En (*a*), unos 30 electrones han aterrizado en la pantalla, en (*b*) unos 1000, y en (*c*) unos 10,000. La densidad de probabilidad de la onda que describe al electrón determina dónde aterrizarán los electrones en la pantalla.

por interferencia destructiva, siendo más severa la cancelación cuanto más masiva sea la partícula. De esta manera, es como se relacionan las trayectorias de las partículas con sus ondas asociadas en la mecánica newtoniana.

No es difícil imaginar el efecto de insertar una rendija doble en la figura 27 entre *I* y *F*. En el proceso de la exploración de las trayectorias posibles, únicamente sobreviven aquellas ondas que pasan por las rendijas. Es más probable que la partícula se halle en regiones de la pantalla de densidad de probabilidad alta, y de esta manera formarse el patrón de interferencia.

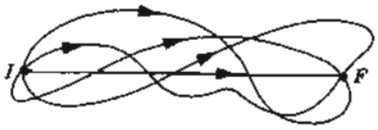


Figura 27 Un electón se mueve entre *I* y *F*. Las ondas que describe en su camino interfieren constructivamente a lo largo de la trayectoria rectilínea y destructivamente a lo largo de las demás trayectorias. La onda explora todas las trayectorias posibles entre *I* y *F*.

PREGUNTAS

1. ¿Cómo puede estar dada la longitud de onda de un electrón por $\lambda = h/p$? ¿No implica la presencia misma del ímpetu p en esta fórmula que el electrón es una partícula?
2. En una repetición del experimento de Thomson para medir e/m del electrón (véase la Sec. 34-2), un haz de electrones se colima al pasar por una rendija. ¿Por qué no se destruye el carácter de haz de los electrones emergentes por difracción de la onda del electrón en esta rendija?
3. ¿Por qué no es más evidente la naturaleza ondulatoria de la materia en nuestras observaciones cotidianas?
4. Al considerar el comportamiento ondulatorio de los electrones esperaríamos ser capaces de construir un "microscopio electrónico" usando electrones de longitud de onda corta para proveer una resolución alta. Esto se ha hecho así, en realidad. (*a*) ¿Cómo puede enfocarse un haz de electrones? (*b*) ¿Qué ventajas podría tener un microscopio electrónico sobre un microscopio luminoso? (*c*) ¿Por qué no construir un microscopio de protones? ¿O un microscopio de neutrones?
5. ¿Cuántos experimentos puede recordar que apoyen la teoría ondulatoria de la luz? ¿La teoría de partícula de la luz? ¿La teoría ondulatoria de la materia? ¿La teoría de partícula de la materia?
6. ¿Es el electrón una partícula? ¿Es una onda? Explique su respuesta, citando la correspondiente evidencia experimental.
7. Si las partículas listadas en seguida tienen todas la misma energía, ¿cuál tiene la longitud de onda más corta?: el electrón; una partícula α; el neutrón; el protón.
8. ¿Qué expresión común puede usarse para el ímpetu ya sea de un fotón o de una partícula?
9. Explique la analogía entre (*a*) la óptica ondulatoria y la óptica geométrica y (*b*) la mecánica ondulatoria y la mecánica clásica.
10. ¿Tiene un fotón una longitud de onda de de Broglie? Explique.
11. Explique las semejanzas y diferencias entre una onda material y una onda electromagnética.
12. ¿Puede la longitud de onda de de Broglie asociada con una partícula ser más pequeña que el tamaño de la partícula? ¿Puede ser mayor? ¿Existe necesariamente una relación entre tales cantidades?
13. Si, en la fórmula de de Broglie $\lambda = h/mv$, hacemos que $m \to \infty$, ¿obtenemos el resultado clásico para las partículas materiales?
14. Si se consideran los electrones y los fotones como partículas, ¿cómo difieren entre sí?
15. ¿Es válida la ecuación 1 de la longitud de onda de de Broglie, $\lambda = h/p$, para una partícula relativista? Justifique su respuesta.
16. ¿Cómo pudieron estar seguros Davisson y Germer de que el pico de "54 V" de la figura 7 era un pico de difracción de primer orden, esto es, que $m = 1$ en la ecuación 2?
17. ¿Dan los experimentos de difracción de electrones información acerca de los cristales diferente de la que puede obtenerse de experimentos de difracción de rayos X? ¿De experimentos de difracción de neutrones? Dé ejemplos.
18. ¿Por qué son claramente visibles los átomos de hidrógeno en la figura 10 pero no en la figura 17 del capítulo 47?
19. En la figura 9*b* (producida con rayos X) los círculos de difracción se ven moteados, pero en la figura 9*c* (producida con electrones) se ven continuos. ¿Puede explicar el porqué?
20. Las ondas electromagnéticas penetrarán el agua de mar hasta cierto punto si su frecuencia es suficientemente baja. Ésta es la base de una idea para comunicarse con submarinos sumergidos. Una dificultad con ésta es que cuanto más baja sea la frecuencia tanto mayor será el tiempo para transmitir un mensaje (digamos, en pulsaciones en clave Morse). ¿Puede explicar por qué?
21. ¿ Por qué el principio de incertidumbre de Heisenberg no es más evidente en nuestras observaciones cotidianas?
22. (*a*) Dé ejemplos de cómo el proceso de medición perturba al sistema que se va a medir. (*b*) ¿Pueden tomarse en cuenta las perturbaciones por anticipado mediante cálculos apropiados?
23. Se mide la presión de un neumático con un manómetro. Sin embargo, en el proceso, el manómetro deja salir un poco de aire del neumático, de modo que el acto de medir cambia la propiedad que está tratando de medirse. ¿Es éste un ejemplo del principio de incertidumbre de Heisenberg? Explique.
24. "La energía del estado base de un sistema atómico puede conocerse con precisión, pero las energías de sus estados excitados están siempre sujetas a cierta incertidumbre." ¿Puede explicar esta aseveración con base en el principio de incertidumbre?
25. "Si un electrón está ubicado en el espacio, su ímpetu resulta incierto. Si se le sitúa en el tiempo, su energía resulta incierta." Explique este enunciado.
26. La cantidad $\psi(x)$, amplitud de una onda material, se llama *función de onda*. ¿Cuál es la relación entre esta cantidad y las partículas que forman la onda material?
27. En la sección 50-7 resolvimos el problema mecánico ondulatorio de una partícula atrapada en un pozo infinitamente profundo sin usar en ningún momento (y ni siquiera escribirla) la ecuación de Schrödinger. ¿Cómo fuimos capaces de hacerlo?
28. Una onda estacionaria puede considerarse como la superposición de dos ondas viajeras. ¿Puede aplicar este concepto al problema de una partícula confinada entre paredes rígidas, ofreciendo una interpretación en términos del movimiento de la partícula?
29. Las energías permitidas de una partícula confinada entre paredes rígidas está dada por la ecuación 16. Primero, convénzase de que, conforme n aumenta, los niveles de energía se separan. ¿Cómo puede ser esto posible? El principio de correspondencia parecería requerir que se muevan más cerca una de otra conforme crece n, tendiendo a un continuo.

30. ¿Cómo pueden ser tan exactas las predicciones de la mecánica ondulatoria si la única información que tenemos acerca de las posiciones de los electrones en los átomos es estadística?
31. En el estado $n = 1$ de una partícula confinada entre paredes rígidas, ¿cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en un elemento de longitud pequeña en la superficie de cualquiera de las paredes?
32. ¿Cuáles son las dimensiones de $P_n(x)$ en la figura 18? ¿Cuál es el valor de la densidad de probabilidad esperada clásicamente, representada por las líneas horizontales? ¿Qué valor tienen las áreas bajo las curvas? ¿Se compara el área bajo cualquier curva con el área bajo la línea horizontal? Todas estas preguntas pueden contestarse observando la figura.
33. En la figura 18, ¿a qué se imagina usted que se parece la curva de $P_n(x)$ para $n = 100$? Convénzase de que estas curvas tienden a las expectaciones clásicas cuando $n \to \infty$.
34. Hemos visto que la tunelización en una barrera funciona para las ondas materiales y las ondas electromagnéticas. ¿Cree usted que funciona también para las ondas líquidas? ¿Y para las ondas de sonido?
35. Comente sobre el postulado: "La partícula no puede detectarse mientras tuneliza a través de una barrera, de modo que no tiene sentido decir que tal cosa suceda realmente".
36. Mencione algunos ejemplos de la tunelización en una barrera que ocurran en la Naturaleza y en instrumentos manufacturados.
37. Un protón y un deuterón, que tienen 3 MeV de energía cada uno, intentan penetrar una barrera de potencial rectangular de 10 MeV de altura. ¿Qué partícula tiene la probabilidad más alta de tener éxito? Explique en términos cualitativos.
38. Un láser proyecta un haz de luz a través de una mesa de laboratorio. Si coloca usted una rejilla de difracción en la trayectoria del haz y observa el espectro, declara que el haz es una onda. Si, en su lugar, coloca una superficie metálica limpia en la trayectoria del haz y observa los fotoelectrones desprendidos, usted declara que este mismo haz es una corriente de partículas (fotones). ¿Qué puede usted decir acerca del haz cuando no pone nada en su trayectoria?
39. Enuncie y analice (*a*) el principio de correspondencia, (*b*) el principio de incertidumbre y (*c*) el principio de complementariedad.
40. En la figura 25, ¿por qué esperaría usted que los electrones de cada rendija lleguen a la pantalla dentro de una región de posiciones? ¿No llegarían todos al mismo lugar? ¿Cómo se relaciona su respuesta con el principio de complementariedad?
41. Varios grupos de experimentadores están tratando de detectar las ondas de la gravedad, que llegan quizás de nuestro centro galáctico, mediante la medición de las pequeñas distorsiones en un objeto masivo atravesado por las ondas hipotéticas. Se busca medir desplazamientos tan pequeños como de 10^{-21} m. (El radio de un protón es de $\sim 10^{-15}$ m, ¡un millón de veces más grande!) ¿Impone alguna restricción el principio de incertidumbre en la precisión con la que pueda realizarse esta medición?
42. La figura 18 muestra que para $n = 3$ la función de la probabilidad $P_n(x)$ para una partícula confinada entre paredes rígidas es cero en dos puntos entre las paredes. ¿Cómo puede la partícula cruzar alguna vez estas posiciones? (*Sugerencia*: Considérense las implicaciones del principio de incertidumbre.)
43. En el problema muestra 8, la energía de los electrones se determinó *exactamente* por medio del tamaño de la caja. ¿Cómo reconcilia usted esto con el hecho de que la incertidumbre de la situación del electrón no puede exceder de 100 pm y que, si ha de obedecerse el principio de incertidumbre, el ímpetu del electrón debe ser correspondientemente incierto?

PROBLEMAS

Sección 50-2 Longitud de onda de de Broglie

1. Una bala de 41 g de masa viaja a razón de 960 m/s. (*a*) ¿Qué longitud de onda puede asociarse con ella? (*b*) ¿Por qué no se revela por sí misma la naturaleza ondulatoria de la bala a través de efectos de difracción?
2. Usando la relación clásica entre el ímpetu y la energía cinética, demuestre que la longitud de onda de de Broglie de un electrón puede escribirse (*a*) como

$$\lambda = \frac{1.226 \text{ nm}}{\sqrt{K}},$$

donde K es la energía cinética en electrón-volts, o (*b*) como

$$\lambda = \sqrt{\frac{1.50}{V}},$$

donde λ está en nm, y V es el potencial de aceleración en volts. (Use los mejores valores de las constantes necesarias que se encuentran en el apéndice B.)

3. Calcule la longitud de onda de (*a*) un electrón, (*b*) un fotón y (*c*) un neutrón, todos ellos de 1.00 keV.
4. La longitud de onda de la emisión de línea espectral amarilla del sodio es de 589 nm. ¿Con qué energía cinética tendría el electrón la misma longitud de onda de de Broglie?
5. Si la longitud de onda de de Broglie de un protón es de 0.113 pm, (*a*) ¿cuál es la velocidad del protón y (*b*) a través

de qué potencial eléctrico tendría que ser acelerado el protón desde el reposo para adquirir esta velocidad?

6. Unos iones de sodio con una sola carga son acelerados a través de una diferencia de potencial de 325 V. (*a*) ¿Cuál es el ímpetu que adquieren los iones? (*b*) Calcule su longitud de onda de de Broglie.
7. En 1911 Ernest Rutherford descubrió la existencia del núcleo atómico; Rutherford interpretó apropiadamente algunos experimentos en donde un haz de partículas alfa se dispersaba de una laminilla de átomos de oro. (*a*) Si las partículas alfa tenían una energía cinética de 7.5 MeV, ¿cuál era su longitud de onda de de Broglie? (*b*) ¿Tendría que haberse tomado en cuenta la naturaleza ondulatoria de las partículas alfa incidentes en la interpretación de estos experimentos? En estos experimentos la distancia de aproximación más cercana de la partícula alfa del núcleo era de unos 30 fm. (La naturaleza ondulatoria de la materia se conoció una década después de que se realizaron por vez primera estos cruciales experimentos.)
8. El poder de resolución más alto obtenible de un microscopio está limitado únicamente por la longitud de onda empleada; esto es, el detalle más pequeño que puede separarse es casi igual a la longitud de onda. Supóngase que deseamos "ver" dentro de un átomo. Suponiendo que el átomo tenga un diámetro de 100 pm, esto significa que deseamos resolver el detalle de la separación de unos 10 pm. (*a*) Si se emplea un microscopio electrónico, ¿qué energía mínima se necesita de los electrones? (*b*) Si se emplea un microscopio de luz, ¿qué energía mínima se necesita de los fotones? (*c*) ¿Cuál microscopio parece ser más práctico para este propósito? ¿Por qué?
9. El acelerador de electrones de 32 GeV de Stanford proporciona un haz de electrones de longitud de onda pequeña, propio para sondear los detalles finos de la estructura nuclear mediante experimentos de dispersión. ¿Cuál es esta longitud de onda y cómo se compara con el tamaño de un núcleo promedio? (A estas energías es suficiente emplear la relación relativista extrema entre el ímpetu y la energía; es decir, $p = E/c$. Ésta es la misma relación empleada para la luz y se justifica cuando la energía cinética de una partícula es mucho mayor que su energía en reposo, como en este caso. El radio de un núcleo de masa intermedia es de unos 5.0 fm.)
10. Considérese un globo lleno con gas helio (monoatómico) a 18°C y 1.0 atm de presión. Calcule (*a*) la longitud de onda de de Broglie promedio de los átomos de helio y (*b*) la distancia promedio entre los átomos. ¿Pueden los átomos considerarse como partículas en estas condiciones?
11. Una partícula no relativista se mueve tres veces más rápido que un electrón. La razón de sus longitudes de onda de de Broglie, partícula a electrón, es de 1.813×10^{-4}. Identifique la partícula mediante el cálculo de su masa. Véase el apéndice B.
12. (*a*) Un fotón en el vacío tiene una energía de 1.5 eV y un electrón, también en el vacío, tiene una energía cinética de esa misma cantidad. ¿Cuáles son sus longitudes de onda? (*b*) Repita para una energía de 1.5 GeV.
13. En un aparato ordinario de televisión en color, los electrones se aceleran a través de una diferencia de potencial de 25.0 kV. Halle la longitud de onda de de Broglie de tales electrones (*a*) usando la expresión clásica del ímpetu y (*b*) teniendo en cuenta la relatividad.
14. ¿Qué voltaje de aceleración se necesitaría para que los electrones en un microscopio electrónico obtengan el mismo poder de resolución final que el que se obtendría de un microscopio de rayos gamma que usa rayos de 136 keV? (*Sugerencia*: Véase el problema 8.)

Sección 50-3 Prueba de la hipótesis de de Broglie

15. Un espectrómetro de cristal de neutrones utiliza planos de cristal con separación $d = 73.2$ pm en un cristal de berilio. ¿Cuál debe ser el ángulo θ de Bragg para que se reflejen sólo los neutrones con energía $K = 4.2$ eV? Considérense las reflexiones de primer orden únicamente.
16. Un haz de neutrones térmicos de un reactor nuclear cae sobre un cristal de fluoruro de calcio, formando la dirección del haz un ángulo θ con la superficie del cristal. Los planos atómicos paralelos a la superficie del cristal tienen una separación interplanar de 54.64 pm. La longitud de onda de de Broglie de los neutrones del haz incidente es de 11.00 pm. ¿Para qué valores de θ ocurrirán los primeros tres órdenes de los haces de neutrones con reflexión de Bragg? (*Sugerencia*: Los neutrones, que no portan ninguna carga y, por tanto, no están sujetos a fuerzas eléctricas, no se refractan al pasar a través de la superficie de un cristal. Entonces, la difracción de los neutrones puede considerarse en estricta analogía con la difracción de rayos X.)
17. En el experimento de Davisson y Germer (*a*) ¿a qué ángulos ocurre la difracción de segundo y tercer orden de los haces correspondientes a un máximo intenso, en la figura 7, siempre y cuando estén presentes? (*b*) ¿A qué ángulo se presentaría difracción de primer orden del haz si el potencial de aceleración cambiara de 54 a 60 V?
18. Un cristal de cloruro de potasio (KCl) se corta de tal modo que las capas de los planos atómicos paralelos a su superficie tengan una separación de 314 pm entre líneas de átomos contiguos. Un haz de electrones de 380 eV incide normalmente sobre la superficie del cristal. Calcule los ángulos ϕ a que debe colocarse el detector para registrar los haces fuertemente difractados de todos los órdenes presentes.
19. Un haz de neutrones de baja energía emerge de un reactor y se difracta por medio de un cristal. Las energías cinéticas de los neutrones están contenidas en una banda de anchura ΔK centrada en la energía cinética K. Demuestre que los ángulos de un orden de difracción dado se dispersan en un intervalo $\Delta\theta$ dado en grados por

$$\Delta\theta = \left(\frac{90}{\pi}\right)(\tan\theta)\frac{\Delta K}{K},$$

donde θ es el ángulo de difracción de un neutrón con energía cinética K.

20. Un haz de átomos emerge de un horno que está a una temperatura T. La distribución de las velocidades de los átomos en el haz es proporcional a $v^3 e^{-mv^2/2kT}$ (véase la Sec. 24-3). (*a*) Demuestre que la distribución de las longitudes

de onda de de Broglie de los átomos es proporcional a $\lambda^{-5}e^{-h^2/2mkT\lambda^2}$ y (*b*) que la longitud de onda de de Broglie más probable es

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{5mkT}}.$$

Sección 50-4 Ondas, paquetes de ondas y partículas

21. Usando un dispositivo de obturador giratorio, usted escucha un diapasón normal de 540 Hz durante 0.23 s. ¿Qué dispersión de frecuencias aproximada está contenida en este pulso acústico?

22. La señal de una estación de televisión contiene pulsos de anchura total $\Delta t = 10$ ns. ¿Es posible transmitir televisión en la banda de radio de AM, que varía entre 500 y 1600 kHz?

Sección 50-5 Relaciones de incertidumbre de Heisenberg

23. Un núcleo en estado excitado regresará a su estado base emitiendo en el proceso un rayo gamma. Si su tiempo de vida medio es de 8.7 ps en un estado excitado particular de 1.32 MeV de energía, halle la incertidumbre en la energía del correspondiente fotón de rayos gamma emitido.

24. Un átomo en un estado excitado tiene un tiempo de vida de 12 ns; en un segundo estado excitado el tiempo de vida es de 23 ns. ¿Cuál es la incertidumbre de la energía para una fotón emitido cuando el electrón realiza una transición entre estos dos estados?

25. Un microscopio que usa fotones se emplea para localizar un electrón en un átomo dentro de una distancia de 12 pm. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en el ímpetu del electrón localizado de esta manera?

26. Imagínese jugando beisbol en un universo en donde la constante de Planck sea de 0.60 J · s. ¿Cuál sería la incertidumbre en la posición de una bola de beisbol de 0.50 kg que se mueva a razón de 20 m/s con una incertidumbre en la velocidad de 1.2 m/s? ¿Por qué sería difícil atrapar esta bola?

27. Halle la incertidumbre en la localización de una partícula, en términos de su longitud de onda de de Broglie λ, de modo que la incertidumbre en su velocidad sea igual a su velocidad.

Sección 50-7 Partículas atrapadas y densidades de probabilidad

28. ¿Cuál debe ser la anchura de un pozo infinito tal que un electrón atrapado en el estado $n = 3$ tenga una energía de 4.70 eV?

29. (*a*) Calcule la energía mínima permitida de un electrón confinado en un pozo infinitamente profundo con una anchura igual al diámetro de un núcleo atómico (alrededor de 1.4×10^{-14} m). (*b*) Repita para un neutrón. (*c*) Compare estos resultados con la energía de amarre (varios MeV) de los protones y neutrones que hay dentro del núcleo. Sobre esta base, ¿esperaríamos hallar electrones dentro de los núcleos?

30. La energía del estado base de un electrón dentro de un pozo infinito es de 2.6 eV. ¿Cuál será la energía del estado base cuando se duplica la anchura del pozo?

31. Un electrón, atrapado en un pozo infinito de 253 pm de anchura, está en el estado base ($n = 1$). ¿Cuánta energía debe absorber para saltar al tercer estado excitado ($n = 4$)?

32. (*a*) Calcule la diferencia fraccionaria entre dos niveles de energía contiguos de una partícula confinada en un pozo unidimensional de profundidad infinita. (*b*) Analice el resultado en términos del principio de correspondencia.

33. (*a*) Calcule la separación de energía entre los dos niveles de energía más bajos de un recipiente de 20 cm por lado que contiene átomos de argón. (*b*) Halle la razón con la energía térmica de los átomos de argón a 300 K. (*c*) ¿Para qué temperatura la energía térmica es igual a la separación entre estos dos niveles de energía? Supóngase, por sencillez, que los átomos de argón estén atrapados en un pozo unidimensional de 20 cm de anchura. La masa molar del argón es de 39.9 g/mol.

34. Considérese un electrón de conducción en un cristal cúbico de un material conductor. Tal electrón está en libertad de moverse a través del volumen del cristal pero no puede escapar al exterior. Está atrapado en un pozo infinito tridimensional. El electrón puede moverse en tres dimensiones, de modo que su energía total está dada por (compárese con la Ec. 16),

$$E = \frac{h^2}{8mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2),$$

donde n_1, n_2, n_3 adquieren cada uno los valores 1, 2,... Calcule las energías de los cinco estados distintos más bajos de un electrón de conducción que se mueva dentro de un cristal cúbico con aristas de longitud $L = 250$ nm.

35. Considérese un electrón atrapado en un pozo infinito cuya anchura es de 98.5 pm. Si está en un estado con $n = 15$, ¿cuáles son (*a*) su energía? (*b*) ¿La incertidumbre en su ímpetu? (*c*) ¿La incertidumbre en su posición?

36. Repita el problema muestra 11, pero ahora suponga que el electrón esté en el estado $n = 2$.

37. ¿En dónde están los puntos de (*a*) máxima y (*b*) mínima probabilidad para una partícula atrapada en un pozo infinitamente profundo de longitud L si la partícula está en el estado n?

38. Una partícula está confinada entre paredes rígidas separadas por una distancia L. (*a*) Demuestre que la probabilidad P de que se encuentre dentro de una distancia $L/3$ de una pared está dada por

$$P = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}(2\pi n/3)}{2\pi n/3}\right).$$

Evalúe la probabilidad para (*b*) $n = 1$, (*c*) $n = 2$, (*d*) $n = 3$ y (*e*) según la hipótesis de la física clásica.

39. Una partícula está confinada entre paredes rígidas ubicadas a $x = 0$ y $x = L$. Para el estado de energía $n = 4$, (*a*) trace la curva de densidad de probabilidad para la ubicación de la partícula. Calcule las probabilidades aproximadas de hallar la partícula dentro de una región $\Delta x = 0.0003L$ cuando (*b*) Δx está ubicada en $x = L/8$ y (*c*) en x

= $3L/16$. Refiérase a su figura para ver si sus resultados son razonables o no. (*Sugerencia*: No se requiere integrar.)

Sección 50-8 Tunelización por una barrera

40. En el problema muestra 12, suponga que el espesor L de la barrera pueda variarse. ¿A qué valor deberá ajustarse el espesor de tal manera que 1 electrón por cada 100 que chocan con la barrera tunelice a través de ella?

41. (*a*) Un protón y (*b*) un deuterón (que tiene la misma carga que un protón pero el doble de su masa) inciden sobre una barrera de 10 fm de espesor y 10 MeV de altura. Cada partícula tiene una energía cinética de 3.0 MeV. Halle las probabilidades de transmisión para ellas.

42. Considérese una barrera como la de la figura 21, pero cuya altura U es de 6.00 eV y cuyo espesor L es de 700 pm. Calcule la energía de un electrón incidente tal que su probabilidad de transmisión sea de 1 en 1000.

43. Supóngase que un haz incidente de protones de 5.0 eV caiga sobre una barrera de 6.0 eV de altura y 0.70 nm de espesor, y con una frecuencia equivalente a una corriente de 1.0 kA. ¿Cuánto tiempo tendría uno que esperar —en promedio— para que se transmita un protón?

44. Considérese la situación de la tunelización en una barrera definida por el problema muestra 12. ¿Qué cambio fraccionario en el coeficiente de transmisión ocurre para un aumento del 1% en (*a*) la altura de la barrera, (*b*) el espesor de la barrera, y (*c*) la energía incidente del electrón?

CAPÍTULO 51

ESTRUCTURA DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

Desde que se sabe que la materia está formada de átomos, la pregunta fundamental ha sido siempre: "¿Cómo es el átomo?". El propósito de este capítulo es contestar a esta pregunta desde el punto de vista de la mecánica ondulatoria. Comprender a fondo la estructura del átomo es esencial si queremos entender cómo se unen los átomos para formar moléculas y sólidos. Tanto la química como la física del estado sólido dependen del conocimiento de la estructura atómica adquirido de la mecánica ondulatoria.

Comenzamos en este capítulo con el hidrógeno, el átomo más sencillo y el más abundante en el Universo. El entendimiento de cómo los principios de la mecánica ondulatoria explican la estructura del hidrógeno nos lleva a aplicar consideraciones similares para explicar la estructura de átomos más complejos, lo cual haremos en el capítulo que sigue a éste.

Gracias a su sencillez, el hidrógeno tiene la ventaja de que sus propiedades pueden calcularse exactamente y sin aproximación, lo cual ha permitido la comparación entre la predicción y el experimento en numerosas teorías físicas desde la mecánica cuántica de la década de 1920 hasta la electrodinámica cuántica de las décadas de 1940 y 1950.

51-1 TEORÍA DE BOHR

La mayoría de nuestro conocimiento acerca de los átomos, las moléculas y los núcleos proviene del estudio de la radiación emitida o absorbida por ellos, como lo ilustramos mediante el espectro de líneas de la figura 15 del capítulo 49. Éste es también el caso del hidrógeno atómico. En la figura 1 se ilustra un espectro del hidrógeno atómico en la región del visible. Este espectro, el cual puede obtenerse con un prisma o una rejilla de difracción en un espectrógrafo como el de la figura 8 del capítulo 47, fue medido con gran precisión al final del siglo XIX, y su interpretación fue confusa para los científicos de aquellos tiempos. El enfoque inicial del análisis de este espectro consistía en hallar una fórmula empírica que fuera congruente con los datos. Tuvieron que transcurrir otros 30 años para que se desarrollara una teoría que pudiera explicar la fórmula.

El espectro de la figura 1 muestra varias regularidades. La separación de las líneas disminuye conforme nos movemos hacia longitudes de onda más cortas, mientras que las propias longitudes de onda tienden a un límite llamado *límite de la serie*. En 1885, Johannes Balmer, un maestro de bachillerato de origen suizo, desarrolló una fórmula empírica para las longitudes de onda de las líneas del hidrógeno atómico. La fórmula de Balmer para la longitud de onda λ es, en nanómetros,

$$\lambda = 364.6\,\frac{n^2}{n^2-4}, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots . \tag{1}$$

Esta serie de líneas del hidrógeno en la región del visible se llama *serie de Balmer*.

En 1890, J. J. Rydberg modificó la fórmula de Balmer y la escribió así:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 3, 4, 5, \ldots , \tag{2}$$

donde R, llamada la *constante de Rydberg*, tiene un valor de $1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Puesto que el 4 puede escribirse como 2^2, Rydberg reescribió la fórmula en una forma más general así:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{3}$$

$$n = m+1, m+2, m+3, \ldots ,$$

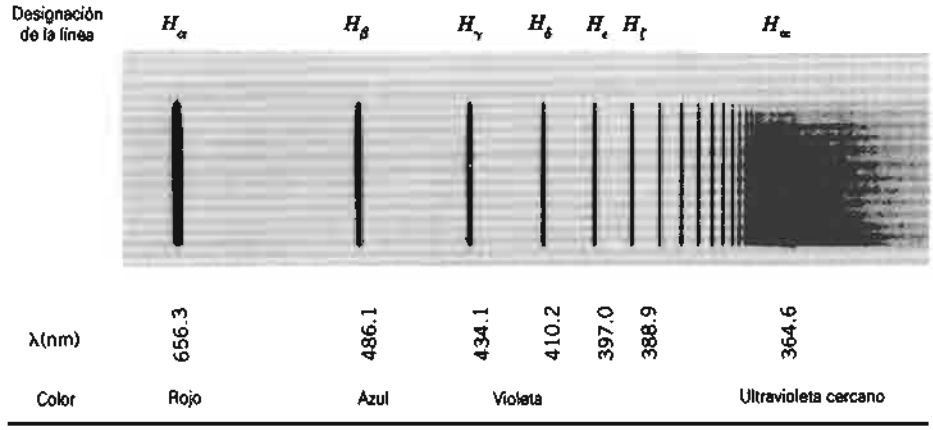


Figura 1 Una fotografía de las líneas espectrales de la serie de Balmer en el hidrógeno.

donde $m = 2$ para la serie de Balmer. La pregunta obvia que surgió fue si existían otras series de líneas, que correspondieran a otros valores fijos de m. Pronto aparecieron los investigadores con una serie en el infrarrojo correspondiente a $m = 3$ y otra en el ultravioleta con $m = 1$. Todas estas series podían ajustarse a la ecuación 3 (llamada la *fórmula de Balmer-Rydberg*) con un valor de m dado y una serie de valores de n que comienzan con $m + 1$ y terminan con el límite de la serie cuando $n \to \infty$. La figura 2 muestra la serie para $m = 1$ (llamada serie de Lyman), $m = 2$ (la serie de Balmer) y $m = 3$ (la serie de Paschen). En la tabla 1 se muestran las longitudes de onda de algunas de estas líneas.

La clave para comprender esta fórmula empírica fue presentada por el físico danés Niels Bohr en 1913. Después de concluir su doctorado en física, Bohr fue a Inglaterra, donde trabajó primero con J. J. Thomson y luego con Ernest Rutherford (véase lo relativo a los modelos del átomo de Thomson y Rutherford en la Sec. 29-7). Bohr se dio cuenta inmediatamente de la importancia del átomo nuclear de Rutherford para comprender la estructura de los átomos. Lo llevó a proponer un modelo en el que el electrón gira alrededor del núcleo como un planeta alrededor del Sol (Fig. 3). Sin embargo, reconoció que tal modelo violaría una de las predicciones de la física clásica, esto es, que un electrón acelerado (aun acelerado centrípetamente) emitiría un espectro de radiación continuo al perder energía y dirigirse en espiral hacia el núcleo. Claramente, esto no sucede así; si la estructura planetaria del átomo de Bohr es correcta, ¡la física clásica de Newton y de Maxwell deben descontinuarse! (No debe olvidarse que el trabajo de Bohr se realizó 10 años antes de la audaz hipótesis de de Broglie de las ondas materiales.)

Al darse cuenta de que la física clásica había llegado a un callejón sin salida acerca del problema del átomo de hidrógeno, Bohr presentó dos postulados audaces. Y ambos se convirtieron en las características básicas que condujeron con toda su fuerza al punto de vista moderno. Además, ambas llegaron a ser bastante generales, pudiéndose aplicar no sólo al átomo de hidrógeno sino a los sistemas atómicos, moleculares y nucleares de todas clases. Veremos cada postulado por orden.

1. *El postulado de los estados estacionarios.* Bohr supuso que el átomo de hidrógeno puede existir durante mucho tiempo *sin irradiar* en ninguno de los muchos *estados estacionarios* de energía bien definida. Esta hipótesis contradice la teoría clásica, pero la actitud de Bohr era: "De todos modos, vamos a suponer que es así y veamos qué sucede". Nótese que este postulado no dice nada en absoluto acerca de cómo son dichos estados. Por ejemplo, no menciona a las órbitas.

2. *El postulado de la frecuencia.* Bohr supuso que el átomo de hidrógeno puede emitir o absorber radiación *únicamente* cuando el átomo cambia de uno de sus estados

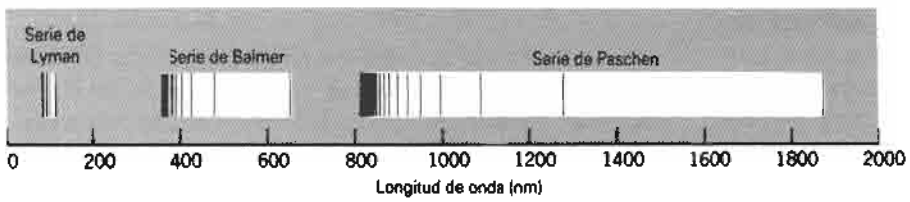


Figura 2 Las series de Lyman, de Balmer y de Paschen del hidrógeno atómico. El límite de la serie está en el extremo de longitud de onda más corta (el izquierdo) de cada serie.

TABLA 1 EL ESPECTRO DEL HIDRÓGENO (ALGUNAS LÍNEAS SELECCIONADAS)

Nombre de la serie	*Número cuántico*		*Longitud de onda (nm)*
	m (estado inferior)	*n (estado superior)*	
	1	2	121.6
	1	3	102.6
Lyman	1	4	97.0
	1	∞ (límite de la serie)	91.2
	2	3	656.3
	2	4	486.1
Balmer	2	5	434.1
	2	∞ (límite de la serie)	364.6
	3	4	1875.1
	3	5	1281.8
Paschen	3	6	1093.8
	3	∞ (límite de la serie)	822.0

estacionarios a otro. La energía del fotón emitido (o absorbido) es igual a la diferencia de energía entre estos dos estados. Así, si un átomo cambia de su estado de energía inicial E_n a un estado de energía final (menor) E_m, la energía del fotón emitido está dada por

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m \text{ (postulado de la frecuencia de Bohr).} \quad (4)$$

Este postulado enlaza dos ideas nuevas (las hipótesis del fotón y de la cuantización de la energía) con otra vieja idea común (la conservación de la energía).

Bohr buscó ahora interpretar la fórmula empírica de Balmer-Rydberg en términos de sus postulados. Comenzamos por replantear esta fórmula (Ec. 3) en el formato general del postulado de la frecuencia de Bohr (Ec. 4). Si multiplicamos cada lado de la ecuación 3 por hc y reemplazamos a c/λ por ν_{nm}, podemos escribir

$$h\nu_{nm} = \left(-\frac{hcR}{n^2}\right) - \left(-\frac{hcR}{m^2}\right).$$

Una comparación término por término con la ecuación 4 nos conduce a inferir que

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (5)$$

para las energías de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno. La energía es negativa porque el átomo está en un estado ligado; esto es, para desprenderlo debe efectuarse trabajo mediante algún agente externo. (La energía potencial, que es cero para una separación infinita del protón y el electrón, es negativa y de mayor magnitud que la energía cinética.) De igual modo, el sistema Tierra-Sol es un estado ligado; para separar a *este* sistema contra la fuerza gravitatoria que los mantiene unidos debe existir un agente externo que efectúe un trabajo.

La figura 4 muestra un diagrama del nivel de energía de un átomo de hidrógeno, calculándose las energías a partir de la ecuación 5. Cada nivel está marcado con su *número cuántico n*. Una flecha que apunta hacia abajo y que conecta a los dos niveles representa la emisión de un fotón, de acuerdo con el postulado de la frecuencia de Bohr (Ec. 4). La tabla 1 muestra las longitudes de onda de algunas de las líneas que se muestran en esta figura.

La ecuación 5 no es todavía el final del camino que siguió Bohr. El valor de la constante de Rydberg en esa fórmula —en esta etapa— puede hallarse únicamente del experimento. Lo que se necesita es una manera de expresar esta constante en términos de otras constantes físicas conocidas. Esto, como veremos, es precisamente lo que Bohr hizo a continuación.

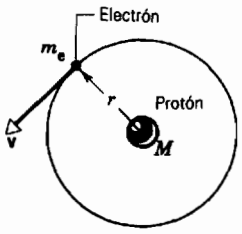


Figura 3 En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mueve en una órbita circular alrededor del protón central.

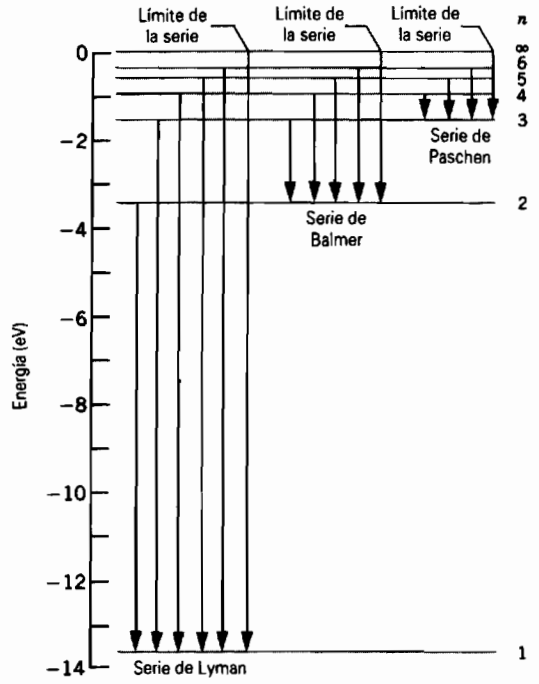


Figura 4 Los niveles de energía y las transiciones en el espectro del hidrógeno atómico. Compárese con las líneas espectrales representadas en la figura 2.

Problema muestra 1 Calcule la energía de amarre del átomo de hidrógeno, esto es, la energía que debe añadirse al átomo para sacar al electrón de su estado de energía más bajo.

Solución La energía del átomo cuando se ha retirado el electrón, hallada al hacer que $n \to \infty$ en la ecuación 5, es cero. La energía de amarre E_b es, por lo tanto, numéricamente igual a la energía del átomo en su estado de energía más bajo, hallado haciendo que $n = 1$ en la ecuación 5. Esto es,

$$E_b = -E_1 = -\left(-\frac{hcR}{1^2}\right)$$
$$= (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J·s})\,(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})\,(1.097 \times 10^{7}\ \text{m}^{-1})$$
$$= 2.18 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13.6\ \text{eV}.$$

Este valor calculado concuerda con la energía de amarre observada experimentalmente para el átomo de hidrógeno.

Problema muestra 2 (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón menos energético en el espectro de Balmer? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de límite de serie en la serie de Balmer?

Solución (*a*) Identificamos a la serie de Balmer (véase la Fig. 4) haciendo que $m = 2$ en la ecuación 3. De la relación $E = h\nu$, el fotón menos energético tiene la frecuencia menor y por consiguiente la longitud de onda mayor. Esto significa que debemos hacer que $n = 3$ (el valor menor posible) en la ecuación 3; cualquier valor de n más alto dará una longitud de onda menor. Con estas sustituciones tenemos

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$
$$= (1.097 \times 10^{7}\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1.524 \times 10^{6}\ \text{m}^{-1}$$

o sea

$$\lambda = 6.563 \times 10^{-7}\ \text{m} = 656.3\ \text{nm}.$$

(*b*) Una vez más hacemos que $m = 2$ en la ecuación 3. Para hallar el límite de la serie (véase la Fig. 4) hacemos que $n \to \infty$. Entonces la ecuación 3 se convierte en

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{7}\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{2^2} - 0\right) = 2.743 \times 10^{6}\ \text{m}^{-1}$$

o sea

$$\lambda = 3.646 \times 10^{-7}\ \text{m} = 364.6\ \text{nm}.$$

Nótese que ambos resultados numéricos aparecen en la tabla 1.

Deducción de la teoría de Bohr

Hasta ahora todo lo que hemos hecho ha sido empírico, esto es, basado en los valores medidos más bien que en los valores calculados teóricamente. Nuestra meta ahora es obtener una expresión que de la constante de Rydberg o, de modo equivalente, los niveles de energía (Ec. 5). Haremos este siguiente cálculo de Bohr invocando el principio de correspondencia (véase la Sec. 50-9); la teoría clásica (que es válida para órbitas macroscópicas) y la teoría cuántica deben concordar al traslaparse en la región de los números cuánticos grandes (valores de n grandes).

Comenzamos analizando las propiedades de un átomo, como el de la figura 3, usando los principios clásicos. A continuación, compararemos los resultados con aquéllos del cálculo cuántico en el límite de n grande.

Apliquemos la segunda ley de Newton ($F = m_e a$) al movimiento del electrón en la órbita clásica mostrada en la figura 3. Por generalidad, hacemos que la carga central sea Ze en lugar de e, donde Z es el número atómico, identificando $Z = 1$ al hidrógeno. Supondremos posteriormente que $M \gg m_e$, donde M es la masa nuclear y m_e es la masa del electrón en órbita.

Al combinar la ley de la fuerza de Coulomb con la segunda ley de Newton nos da

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(Ze)(e)}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}, \tag{6}$$

donde v es la velocidad del electrón en su órbita. Al despejar para v nos da

$$v(r) = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}, \tag{7}$$

que nos da la velocidad orbital si conocemos el radio de la órbita.

De este resultado podemos escribir una expresión para la frecuencia de revolución del electrón en su órbita:

$$\nu(r) = \frac{v}{2\pi r} = \sqrt{\frac{Ze^2}{16\pi^3\epsilon_0 m_e r^3}}. \tag{8}$$

La energía cinética se deduce de

$$K(r) = \tfrac{1}{2}m_e v^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \tag{9}$$

La energía potencial está dada por

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{10}$$

de modo que la energía mecánica total $E(r)$ se deduce de

$$E(r) = K(r) + U(r) = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \tag{11}$$

Finalmente, el ímpetu angular se deduce directamente de la ecuación 7:

$$L(r) = m_e v r = \sqrt{\frac{Ze^2 m_e r}{4\pi\epsilon_0}}. \tag{12}$$

Así, si se conoce el radio de la órbita, podemos encontrar la velocidad lineal orbital, la frecuencia de revolución, la energía cinética, la energía potencial, la energía mecánica total y el ímpetu angular. Vemos por sus conexiones mutuas que, si cualquiera de estas cantidades se convierte en cuantizada, todas las demás lo serán. Sin embargo, no existe una cuantización de nada en estos cálculos puramente clásicos.

Continuamos con la eliminación del radio r entre las ecuaciones 8 y 11 para hallar una relación entre la frecuencia y la energía:

$$\nu_{mc} = \left(-\frac{32\epsilon_0^2 E^3}{Z^2 m_e e^4}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

donde hemos añadido el subíndice mc para recordarnos que esta expresión se deduce con base en la mecánica clásica.

Si se sustituye E de la ecuación 5 nos da una expresión para la frecuencia calculada de la mecánica clásica en la región de los números cuánticos grandes:

$$\nu_{mc} = \left(\frac{32\epsilon_0^2 h^3 c^3 R^3}{Z^2 m_e e^4}\right)^{1/2} \frac{1}{n^3}. \tag{14}$$

En la física clásica, esta frecuencia de revolución es también la frecuencia de la radiación emitida.

Vayamos ahora al punto de vista cuántico. En términos cuánticos (es decir, usando ahora la ecuación 4, el segundo postulado cuántico), la frecuencia ν_{qm} que corresponde a la frecuencia clásica que acabamos de calcular es la menor frecuencia emitida, que se asocia con una transición desde un estado con número cuántico n al siguiente estado inferior, cuyo número cuántico es $n - 1$. Al poner $m = n - 1$ en la ecuación 3 nos da

$$\nu_{qm} = \frac{c}{\lambda} = cR\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) = cR\,\frac{(2n-1)}{(n-1)^2 n^2}. \tag{15}$$

Esta expresión concordaría con la expresión clásica en el límite de los números cuánticos grandes. Cuando $n \gg 1$, la ecuación 15 puede escribirse

$$\nu_{qm} \approx \frac{2cR}{n^3} \quad \text{cuando } n \gg 1, \tag{16}$$

que es la relación que buscamos.

Estamos listos finalmente para aplicar el principio de correspondencia. Este principio nos dice que, en el límite de los números cuánticos grandes, la frecuencia ν_{qm} calculada de la ecuación 16 (una expresión cuántica) debe ser igual a la frecuencia ν_{mc} calculada de la ecuación 14 (una expresión clásica). La tabla 2 muestra este principio en acción.

Al igualar las ecuaciones 14 y 16 y despejando para obtener la constante R de Rydberg, hallamos

$$R = \frac{m_e Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}, \tag{17}$$

un *valor predicho teóricamente* para la constante de Rydberg en términos de otras constantes fundamentales: la carga e y la masa m_e del electrón, la velocidad c de la luz, y la constante h de Planck. Bohr, usando los datos disponibles en su tiempo para estas constantes, obtuvo una buena concordancia con el valor de R determinado experimentalmente, quedando hoy día la concordancia dentro de límites de error experimental extremadamente estrechos.

Ahora podemos considerar la constante R como determinada teóricamente y, sustituyendo la ecuación 17 en la ecuación 5, obtenemos

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}, \tag{18}$$

una expresión puramente cuántica de las energías de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno. Esta expresión es el triunfo de Bohr. Todo lo hecho hasta ahora, incluyendo el postulado de los estados estacionarios, el postulado de la frecuencia, el principio de correspondencia, y la ecuación 18, la expresión de la energía de los estados del átomo de hidrógeno, permanece sin cambio dentro de la mecánica cuántica moderna.

Al eliminar la energía E entre las expresiones clásica (Ec. 11) y cuántica (Ec. 18), podemos hallar los radios de las órbitas de Bohr cuantizados. Están dados por

$$r_n = \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{Ze^2\pi m_e}\right) n^2 = a_0 n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{19}$$

La cantidad a_0, llamada el *radio de Bohr*, tiene el valor

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{Ze^2\pi m_e} = 5.292 \times 10^{-11}\ \text{m} = 52.92\ \text{pm}.$$

TABLA 2 EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA Y EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

Número cuántico n	*Frecuencia de revolución en órbita* ν_{rev} (Hz)	*Frecuencia de la transición al estado inferior siguiente* ν_{em} (Hz)	*Diferencia* (%)
2	8.22×10^{14}	24.7×10^{14}	67
5	5.26×10^{13}	7.40×10^{13}	29
10	6.58×10^{12}	7.72×10^{12}	15
50	5.26×10^{10}	5.43×10^{10}	3.1
100	6.580×10^{9}	6.680×10^{9}	1.5
1,000	6.5797×10^{6}	6.5896×10^{6}	0.15
10,000	6.5797×10^{5}	6.5807×10^{5}	0.015
25,000	4.2110×10^{2}	4.2113×10^{2}	0.007
100,000	6.5798	6.5799	0.0007

En un sentido formal, a_0 es el radio de la órbita de Bohr que corresponde a $n = 1$, que define el estado base del átomo de hidrógeno en el modelo planetario semiclásico de Bohr del átomo de un electrón, en donde imaginamos al electrón moviéndose en órbitas planetarias. Hoy día no creemos en tales órbitas pero, basados en el experimento, tenemos alguna noción del tamaño de los átomos. ¡Todos son más o menos del orden de magnitud del radio de Bohr! Es notable que, si bien Bohr no hizo ninguna hipótesis específica en su teoría concerniente al tamaño de los átomos, sin embargo generó un número que dio casi precisamente el tamaño correcto. Hoy día usamos el radio de Bohr como una unidad conveniente para medir longitudes en la escala de las dimensiones atómicas.

El hecho de que la energía (véase la Ec. 18) y el radio (véase la Ec. 19) del átomo semiclásico de Bohr estén cuantizados significa que las demás propiedades mecánicas están también cuantizadas en su modelo planetario. La cuantización del ímpetu angular del electrón que orbita resulta ser particularmente sencilla. Es (véase el problema 23)

$$L_n = n\left(\frac{h}{2\pi}\right) = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad (20)$$

donde hemos escrito $\hbar$ (que denominamos "h barra") como una abreviatura conveniente de $h/2\pi$.

En 1924, once años después de que Bohr presentara su teoría, de Broglie dio una interpretación física satisfactoria de la regla de Bohr para la cuantización del ímpetu angular. Si representamos el electrón circulante en términos de su onda de de Broglie, entonces los estados estacionarios son aquellos en los que la onda de de Broglie del electrón se une a sí misma con la misma fase después de cada revolución; de otra manera, la onda se destruiría a sí misma por interferencia destructiva. Dicho de otro modo, la longitud de onda de de Broglie debe ajustarse alrededor de la circunferencia de la órbita un número entero de veces, o sea

$$n\lambda = 2\pi r, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

como lo sugiere la figura 5. La sustitución de h/p para la longitud de onda de de Broglie en esta expresión conduce directamente a la ecuación 20.

Al igual que el propio modelo de Bohr, la figura 5 no es consistente con la teoría cuántica moderna. Si bien la cuantización del ímpetu angular desempeña un papel central, difiere un tanto de la ecuación 20. Por ejemplo, en el estado base del átomo de hidrógeno, esta ecuación predice que $L = \hbar$; por el contrario, la teoría cuántica moderna predice que $L = 0$, de acuerdo con el experimento. Debe acreditarse a Bohr que haya anticipado la importancia crucial de la cuantización del ímpetu angular y, ciertamente, propuso la ecuación 20 como una hipótesis básica alternativa a partir de la cual podría desarrollarse su teoría; véase el problema 27.

51-2 EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO Y LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

La teoría de Bohr fue sorprendentemente exitosa en el análisis de las radiaciones emitidas por el hidrógeno, pero es una teoría muy incompleta. Por ejemplo, no proporciona ninguna base para calcular cuál de entre las muchas radiaciones permitidas son más probables que se emitan, como tampoco nos proporciona la información que necesitamos para comprender cómo forma el hidrógeno enlaces moleculares con otros átomos. Para obtener un análisis

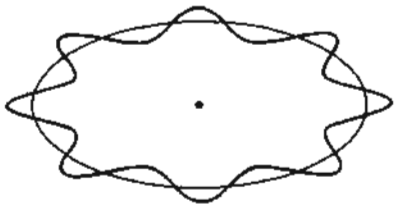


Figura 5 Una órbita de Bohr con el electrón representado como una onda de de Broglie.

completo, debemos usar los métodos de la mecánica ondulatoria.

Como lo estudiamos en el capítulo 50, el tratamiento particular del electrón en cualquier situación dinámica particular debe tomar en cuenta su naturaleza ondulatoria. En el caso de un electrón confinado en una región en la que no actúa sobre él ninguna fuerza (Sec. 50-7), vimos que el comportamiento ondulatorio era similar al de una onda estacionaria clásica en una cuerda. En el caso de un electrón sometido a una fuerza, especialmente una fuerza que varía con la posición, el comportamiento ondulatorio es más complicado, como lo sería la cuerda clásica si la tensión variara con la posición a lo largo de su longitud.

Para analizar el comportamiento ondulatorio del electrón, necesitamos un procedimiento matemático en el que podamos especificar la interacción del electrón con su entorno y luego resolver para describir su movimiento. Por supuesto, esto es precisamente lo que hicimos en la física clásica usando las leyes de Newton, donde la interacción se describió en términos de fuerzas.

El procedimiento mecánico-ondulatorio para estudiar el comportamiento de los electrones (y de otras partículas) se basa en una ecuación propuesta por el físico austriaco Erwin Schrödinger (1887-1961) en 1926, precisamente dos años después de la hipótesis de de Broglie relacionada con las ondas materiales. La ecuación de Schrödinger, la cual no presentaremos en detalle, es para la mecánica ondulatoria lo que la segunda ley de Newton es para la mecánica clásica. Comenzamos por especificar la interacción de la partícula con su entorno, lo cual hacemos en términos de la energía potencial en lugar de la fuerza. (Las dos descripciones son equivalentes, por supuesto, como lo sugiere la expresión unidimensional $F = -dU/dx$; podemos determinar la fuerza de la energía potencial o la energía potencial de la fuerza.) Podemos llevar a cabo el procedimiento matemático especificado por la ecuación de Schrödinger, y los resultados incluyen las funciones de onda que describen la partícula, los niveles cuantizados de energía que a la partícula se le permite ocupar, y el conjunto de *números cuánticos* que especifican los estados de movimiento permitidos de la partícula. La figura 6 representa simbólicamente este procedimiento. La caja de la figura 6 puede, de hecho, representar una computadora, ya que la mayoría de los problemas de la mecánica cuántica de interés práctico los resolvemos en computadoras usando métodos numéricos.

Las funciones de onda que corresponden a los estados de movimiento permitidos abarca toda la información que puede conocerse acerca del comportamiento de la partícula. Usando esas funciones de onda, podemos calcular todo lo que podemos saber con respecto a la partícula. En el caso del átomo de hidrógeno, podemos usar las funciones de onda que resultan de la ecuación de Schrödinger para hallar el radio medio del átomo, la probabilidad de encontrar al electrón en cualquier localización especificada, la probabilidad de que el electrón realice una transición desde cualquier estado inicial especificado hasta cualquier estado final especificado (emitiendo o absorbiendo un fotón en el proceso), el momento magnético del átomo, y así sucesivamente. Al combinar dos funciones de onda, podemos incluso estudiar los enlaces formados entre los dos átomos del hidrógeno *molecular*, H_2.

La energía potencial que sirve como nuestro punto de partida proviene de la fuerza de Coulomb entre el electrón y el protón:

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{21}$$

La figura 7 es una gráfica de esta familiar función de la energía potencial en una escala apropiada para un átomo de hidrógeno. Especificamos la distancia entre el electrón y el protón en términos del radio de Bohr a_0 definido en la ecuación 19. No consideraremos el procedimiento ma-

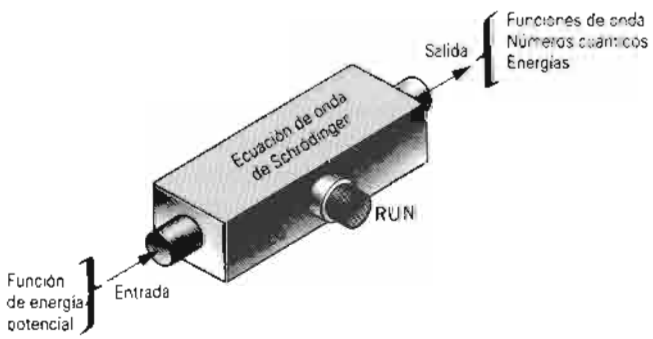


Figura 6 Representación esquemática de la ecuación de onda de Schrödinger como una "máquina" en la que la función de energía potencial debe de suministrarse como entrada, y la salida consiste en las funciones de onda, los números cuánticos y los niveles de energía que caracterizan el comportamiento cuántico del sistema.

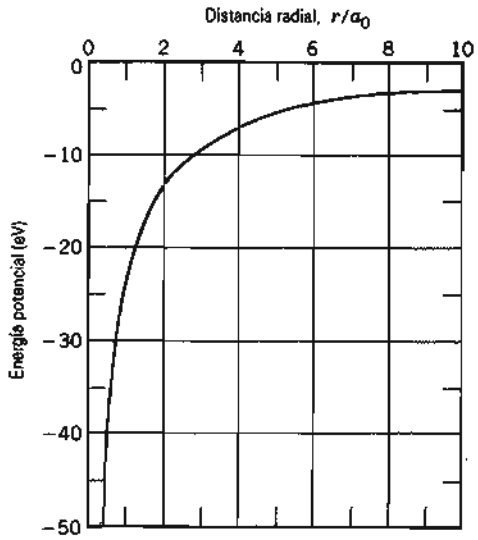


Figura 7 La función de la energía potencial $U(r)$ del átomo de hidrógeno. La distancia radial entre el electrón y el protón se mide en términos del radio de Bohr a_0.

temático para determinar las funciones de onda,* de lo cual se dieron ejemplos en las secciones 51-7 y 51-8. Los niveles de energía que resultan de este procedimiento son

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (22)$$

que son exactamente los obtenidos a partir del modelo de Bohr (Ec. 18). Esta concordancia no debe sorprendernos porque hemos visto que la teoría de Bohr proporcionaba una igualdad perfecta con las longitudes de onda de las líneas espectrales del hidrógeno observadas.

A partir de las funciones de onda de Schrödinger, podemos calcular la distancia más probable entre el electrón y el protón. El resultado que se obtiene es n^2a_0. Esto es, en el estado de energía más bajo, el lugar más probable para hallar al electrón es a la distancia de un radio de Bohr relativa al protón. Aquí el modelo de Bohr (que tiene al electrón moviéndose en una órbita fija a una distancia única del núcleo) da una interpretación incompleta. Como lo veremos en la seccion 51-7, el electrón puede hallarse en cualquier parte entre $r = 0$ y $r = \infty$, pero $r = a_0$ es su localización más probable.

El átomo de hidrógeno es un sistema tridimensional, y la ecuación de Schrödinger debe resolverse en tres dimensiones. Gracias a la forma de la energía potencial (Ec. 21), es más conveniente resolver este problema en coordenadas esféricas, usando como coordenadas el radio r y dos ángulos θ y ϕ para fijar la dirección. Cuando resolvemos la ecuación de Schrödinger para este sistema, hallamos que se necesitan los tres números cuánticos para describir los estados del electrón. Estos números cuánticos se definen y muestran en la tabla 3. Consideraremos estos números cuánticos, junto con un cuarto basado en el espín del electrón (un efecto relativista que no se predice por la ecuación de Schrödinger, que es no relativista), más adelante en este capítulo.

La teoría de Bohr es de utilidad limitada en el entendimiento de la estructura del hidrógeno atómico y de los iones con un solo electrón (He^+, Li^{++}, y así sucesivamente), y no nos ayuda en lo absoluto para entender detalles más allá de las longitudes de onda de las líneas espectrales. Proporciona sólo una base muy limitada para el entendimiento de átomos más complejos que el hidrógeno, lo cual podemos estudiar en detalle junto con la ecuación de Schrödinger y el principio de exclusión, que se explica en el capítulo siguiente. La teoría de Bohr no muestra cómo calcular las propiedades de sistemas más complejos que los de un solo átomo, tales como una molécula o un sólido. Hoy día vemos a la teoría de Bohr como un paso importante e ingenioso hacia el entendimiento del átomo, y debemos recordar que los dos principios desarrollados por Bohr para que su teoría funcione (el principio de correspondencia y la existencia de los estados estacionarios) son partes esenciales de la teoría cuántica completa.

51-3 ÍMPETU O MOMENTO ANGULAR

La energía de un estado es un escalar y, en el átomo de hidrógeno, está especificada por un solo número cuántico n. Sin embargo, el ímpetu angular de un estado es un vector y vemos de la tabla 3 que se requiere de dos números cuánticos, l y m_l, para describirlo. El ímpetu angular está *doblemente* cuantizado, tanto en magnitud como en dirección. Veremos cada uno por orden.

La magnitud de L

Al resolver la ecuación de Schrödinger, aprendimos que el ímpetu angular está cuantizado. Sus valores permitidos son

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \qquad (23)$$

donde l es el número cuántico orbital. Por conveniencia, una vez más hemos introducido el símbolo $\hbar$ (al que nombramos "h barra") como abreviatura de $h/2\pi$.

El valor que l puede tener en la ecuación 23 depende del valor del número cuántico principal n y está dado por

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (24)$$

* Para un tratamiento completo, véase Robert Eisberg y Robert Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2da. edición, Wiley, 1985, capítulo 7.

TABLA 3 LOS NÚMEROS CUÁNTICOS DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO[a]

Símbolo	*Nombre*	*Asociado con*	*Valores permitidos*
n	Número cuántico principal	Energía, radio medio	1, 2, 3, ...
l	Número cuántico orbital	Magnitud del ímpetu angular orbital	0, 1, 2, ..., $n-1$
m_l	Número cuántico magnético	Dirección del ímpetu angular orbital	0, ±1, ±2, ..., ±l

[a] Más adelante se presentará un cuarto número cuántico, asociado con el espín.

Por ejemplo, el estado base del átomo de hidrógeno, que tiene $n = 1$, debe ser $l = 0$ (y por lo tanto $L = 0$), no permitiendo ningún otro valor la ecuación 24. Otro ejemplo: un estado con $n = 2$ puede tener $l = 0$ o $l = 1$. Estos dos estados del átomo de hidrógeno comparten el mismo número cuántico principal n y tienen la misma energía, aunque representen estados de movimiento muy diferentes.

La dirección de L

Elijamos una dirección en el espacio, que arbitrariamente denotamos como el eje z, y determinemos la dirección de **L** con respecto a este eje.

Sucede que el vector **L** del ímpetu angular no puede adquirir *cualquier* posición con respecto al eje z, sino únicamente aquellas posiciones que tengan una componente a lo largo del eje z dadas por

$$L_z = m_l \hbar, \tag{25}$$

donde m_l, el *número cuántico magnético*, puede tener únicamente los valores

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l. \tag{26}$$

Esta restricción en la dirección de **L** se llama *cuantización espacial.*

Vemos de las ecuaciones 23 a 26 que, para un estado del átomo de hidrógeno con $l = 2$, la magnitud de **L** es $\sqrt{2(2+1)}\,\hbar$ o sea $2.45\hbar$. L_z, la componente de **L** a lo largo del eje z, puede tener los valores 0, $\pm 1\hbar$, y $\pm 2\hbar$, cinco componentes en total. *No se permite ninguna otra orientación del vector del ímpetu angular con respecto al eje* z. Nótese que el valor máximo de L_z ($= 2\hbar$ en este caso) es menor que la magnitud de **L** ($= 2.45\hbar$). Este será siempre el caso; el vector **L** del ímpetu angular nunca puede estar totalmente alineado con el eje z.

La figura 8 muestra los valores permitidos de L_z para $l = 1$, 2 y 10. El último caso empieza a aproximarse a la situación clásica en la cual la cuantización espacial se ha perdido y se permite *cualquier* orientación del vector del ímpetu angular. El problema muestra 3 da mayores detalles de cómo, en este caso, actúa el principio de correspondencia.

La cuantización de L_z significa que el ángulo θ entre **L** y el eje z (véase la Fig. 8) está cuantizado, estando restringidos sus valores a

$$\theta = \cos^{-1}\frac{L_z}{L} = \cos^{-1}\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}, \tag{27}$$

donde hemos empleado la ecuación 23 para L y la ecuación 25 para L_z. El valor mínimo de θ se presenta cuando m_l tiene su máximo valor, que es l. Por ejemplo, para $l = 2$ puede demostrarse fácilmente que este valor mínimo es

$$\theta_{\text{mín}} = \cos^{-1}[2/\sqrt{2(2+1)}] = \cos^{-1} 0.817 = 35.3°.$$

En los estados del átomo de hidrógeno con $l = 2$ simplemente no es posible que el vector **L** del ímpetu angular (orbital) tenga un ángulo menor con el eje z.

Una vez que hemos elegido un eje y determinado la componente de **L** a lo largo de ese eje, las componentes de **L** en los demás ejes son completamente inciertas. Esto es, podemos tener un conocimiento exacto de sólo una componente elegida de **L** (que arbitrariamente suponemos que es la componente z).

La figura 9 muestra un modelo vectorial clásico que ayuda a imaginarse mentalmente la cuantización espacial de **L**. Muestra el vector de precesión alrededor de la dirección z, movimiento semejante al de un trompo que gira o al de un giroscopio con movimiento de precesión alrededor de un eje vertical en el campo gravitatorio de la Tierra. La componente L_z permanece constante mientras continúa el movimiento, pero las componentes x y y de **L** no tienen valores definidos.

El principio de incertidumbre de Heisenberg nos ayuda a entender la cuantización espacial del vector del ímpetu angular. En su forma angular (compárese con la Ec. 6 del capítulo 50) este principio es

$$\Delta L_z \cdot \Delta\phi \sim h/2\pi \quad \text{(componente } z\text{)}, \tag{28}$$

donde ϕ es el ángulo de rotación alrededor del eje z en la figura 9. La ecuación 25 nos dice que L_z se conoce precisamente, una vez que hayamos especificado el nú-

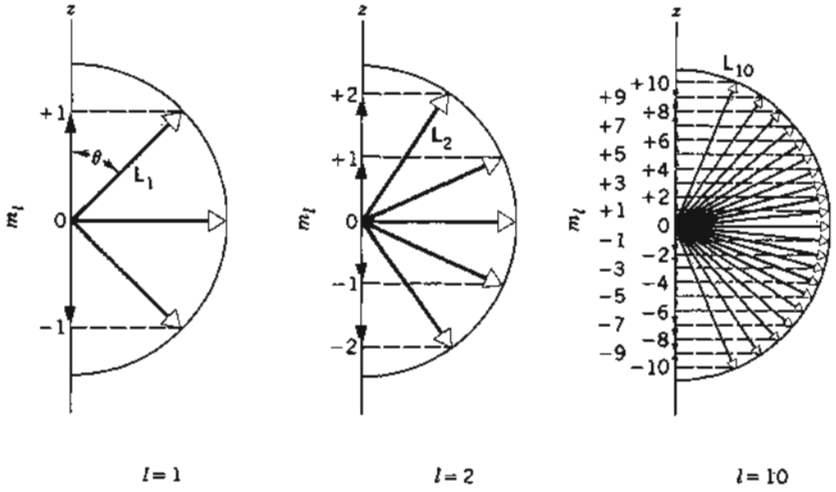


Figura 8 Los estados permitidos de L_z para $l = 1$, 2 y 10. Los números sobre el eje z muestran los valores de m_l. Las figuras están trazadas a escalas diferentes.

mero cuántico m_l. Se sigue que ΔL_z, la incertidumbre en L_z, debe ser cero. La ecuación 28 requiere entonces que $\Delta\phi \to \infty$, lo que significa que no tenemos ninguna información en absoluto acerca de la posición angular alrededor del eje z del vector **L** del ímpetu angular de precesión. Conocemos la magnitud de **L** y su proyección L_z sobre el eje z, y *nada más*.

Recordemos que nuestra elección original de la dirección del eje z fue completamente arbitraria. No existe ninguna característica especial para seleccionar esta dirección particular en el espacio, y podríamos haber denotado a nuestra elección con igual facilidad como el eje x o el eje y. Lo que *es* significativo es que podemos elegir *cualquier* dirección en el espacio, y observaremos la cuantización espacial alrededor de esa dirección. Por convención, generalmente nos referimos a nuestra elección del eje de cuantización como el eje z.

Problema muestra 3 Halle el valor mínimo de θ en la figura 9 para $l = 1$, 10^2, 10^3, 10^4 y 10^9.

Solución El valor mínimo de θ ocurre cuando hacemos que $m_l = l$ en la ecuación 27. Haciéndolo y reordenando nos conduce a

$$\theta_{\text{mín}} = \cos^{-1}\frac{l}{\sqrt{l(l+1)}} = \cos^{-1}\left[1+\frac{1}{l}\right]^{-1/2}$$

Por observación notamos que si hacemos que $l \to \infty$, entonces $\theta \to \cos^{-1} 1 = 0$. Esto es precisamente lo que esperamos del principio de correspondencia.

Al sustituir para obtener l en esta ecuación llegamos a estos resultados:

l	$\theta_{\text{mín}}$
1	45.0°
10^2	5.7°
10^3	1.8°
10^4	0.57°
10^9	0.0018°

Para un objeto macroscópico como un trompo o un disco de fonógrafo, l sería enormemente mayor que 10^9 y $\theta_{\text{mín}}$ estaría tan cerca de cero que la diferencia estaría fuera de nuestra posibilidad de medirlo. Así, conforme el ímpetu angular del objeto giratorio se vuelve más y más grande, la cuantización espacial de la mecánica ondulatoria se funde suavemente en la distribución continua de la mecánica clásica. Una vez más vemos cómo funciona el principio de correspondencia.

Nota de cálculo: Si empleamos la fórmula antes vista para calcular $\theta_{\text{mín}}$ para $l = 10^9$, probablemente su calculadora se sobrepasará de su capacidad. Tómese ventaja del hecho de que $(1/l) \ll 1$ y obtenga una fórmula aproximada. Necesitará usar tanto el desarrollo del binomio como el desarrollo en series para cos θ; véase el apéndice H.

Problema muestra 4 (*a*) Para $n = 4$, ¿cuál es el valor máximo permitido de l? (*b*) ¿Cuál es la magnitud del ímpetu angular correspondiente? (*c*) ¿Cuántas componentes diferentes puede tener sobre el eje z este vector del ímpetu angular? (*d*) ¿Cuál es la magnitud de la máxima componente proyectada? (*e*) ¿Cuál es el ángulo mínimo que puede formar con el eje z el vector del ímpetu angular?

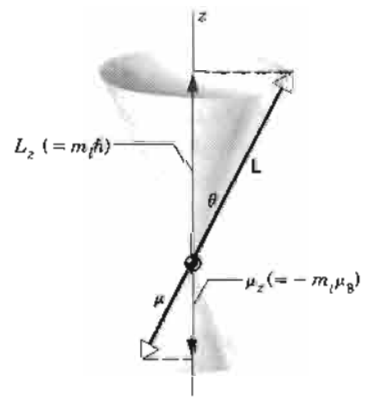


Figura 9 Representacion vectorial de la cuantización espacial del ímpetu angular **L** y el momento dipolar magnético μ.

Solución (*a*) De la ecuación 24, el máximo valor de l permitido es $n - 1$, de modo que $l = 3$.

(*b*) De la ecuación 23 tenemos

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{l(l+1)}\,(h/2\pi) \\ &= \sqrt{3(3+1)}\,(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})/(2\pi) \\ &= 3.66 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}. \end{aligned}$$

En la práctica, el ímpetu angular atómico raramente se expresa en unidades del SI. Es costumbre expresar la magnitud del ímpetu angular simplemente como $\sqrt{12}\,\hbar$ o como $3.46\hbar$. Véase la parte (*d*).

(*c*) El número de componentes que puede tener el vector del ímpetu angular sobre el eje z es igual al número de valores permitidos del número cuántico magnético m_l. De la ecuación 26 este número es $2l + 1$, o sea $2 \times 3 + 1 = 7$.

(*d*) La componente más grande proyectada se halla de la ecuación 25, en la que el número cuántico magnético m_l está dado en su máximo valor posible. De la ecuación 26 este valor máximo es precisamente l, de modo que tenemos

$$\begin{aligned} L_z &= l(h/2\pi) \\ &= (3)(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})/(2\pi) \\ &= 3.17 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}. \end{aligned}$$

Adviértase de la parte (*b*) que esto es menor que la magnitud del vector del ímpetu angular, como debe ser. Como lo hicimos notar en la parte (*b*), la componente de máxima proyección del ímpetu angular se expresaría simplemente como $3\hbar$. De hecho, cuando nos referimos al ímpetu angular, casi siempre queremos expresar su valor máximo proyectado. La magnitud del ímpetu angular pocas veces interviene en los cálculos cuánticos y rara vez se da.

(*e*) El ángulo menor que puede formar el vector del ímpetu angular con el eje z se deduce de la ecuación 27, cuando $m_l = l$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}\,[l/\sqrt{l(l+1)}] \\ &= \cos^{-1}\,[3/\sqrt{3(3+1)}] \\ &= \cos^{-1}\,0.866 = 30°. \end{aligned}$$

El vector del ímpetu angular no puede formar con el eje z un ángulo menor que éste.

El ímpetu angular orbital y el magnetismo

El modelo de Bohr indica también que el electrón que orbita —una diminuta espira de corriente— debe poseer un momento dipolar magnético (orbital) asociado con él. Tanto el ímpetu angular **L** como el momento dipolar magnético μ son vectores y comparten un eje común. Sin embargo, puesto que el electrón tiene una carga negativa, estos vectores apuntan en sentidos opuestos a lo largo de este eje. En la sección 37-2 demostramos que estos dos vectores se relacionan mediante

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}, \tag{29}$$

mostrando el signo menos los sentidos opuestos de **L** y μ. Aunque la ecuación 29 se dedujo sobre una base semiclásica, permanece válida en la mecánica ondulatoria.

Consideremos un estado en el que la componente z del ímpetu angular sea de $h/2\pi$. Al sustituir este valor de **L** en la ecuación 29 nos da

$$\mu_z = \frac{eh}{4\pi m_e}.$$

Esta cantidad se llama el *magnetón de Bohr* μ_B y tiene el valor de

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{eh}{4\pi m_e} \\ &= 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T} = 5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T}. \end{aligned} \tag{30}$$

El magnetón de Bohr es una unidad conveniente para medir los momentos magnéticos atómicos, tal y como hicimos cuando tomamos al radio de Bohr a_0 como una unidad conveniente para medir las distancias atómicas.

La teoría de Bohr predice que el momento dipolar magnético del átomo de hidrógeno en su estado base será un magnetón de Bohr. Simplemente, la teoría no es correcta en este punto. El experimento demuestra que, de acuerdo con las predicciones de la mecánica ondulatoria, tanto el ímpetu angular (orbital) como el momento dipolar magnético (orbital) del átomo de hidrógeno en su estado base son nulos. Sin embargo, esta falla de la teoría de Bohr no nos detiene para usar el magnetón de Bohr como una unidad de medida conveniente.

Si el ímpetu angular se cuantiza, del mismo modo el momento dipolar magnético debe también cuantizarse. La combinación de la ecuación 29 (componentes z únicamente) y la ecuación 25 nos permite escribir

$$\mu_z = \frac{e}{-2m_e}L_z = -\frac{e}{2m_e}(m_l\hbar) = -m_l\frac{eh}{4\pi m_e}.$$

De la ecuación 30, vemos que la componente z del momento dipolar magnético está dada por

$$\mu_z = -m_l\mu_B, \tag{31}$$

en donde μ_B es el magnetón de Bohr. Como se muestra en la figura 9, el modelo del vector clásico explica la cuantización espacial tanto de μ como de **L**. Ambos vectores realizan un movimiento de precesión alrededor de la dirección z, y ambos se caracterizan por sus componentes z.

El momento dipolar magnético del átomo —al igual que la aguja de una brújula— responde a un campo magnético externo. Esto da al átomo un "asidero" conveniente por medio del cual podemos explorar su funcionamiento interno sondeándolo desde el exterior. Puesto que el momento dipolar magnético está rígidamente acoplado al ímpetu angular, seguirle la pista al primero automáticamente nos da también la pista del segundo.

No tenemos que buscar mucho para hallar evidencia de que los átomos pueden ser portadores de magnetismo. Una barra de hierro ordinaria no muestra propiedades magnéticas externas porque sus imanes atómicos elementales están orientados al azar, cancelándose sus efectos en

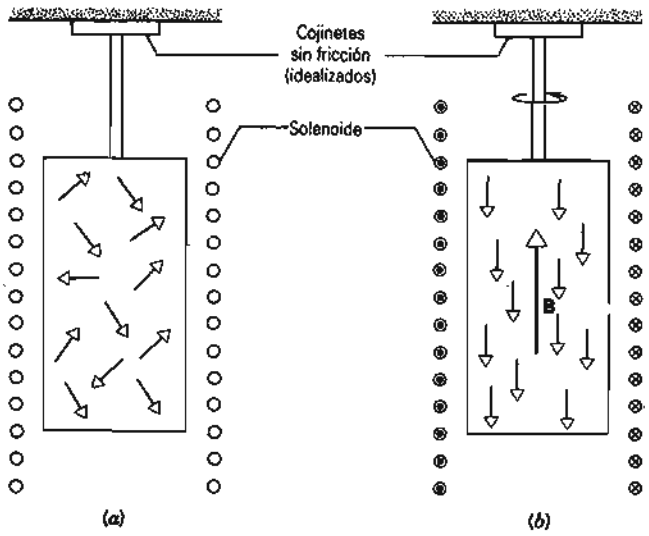


Figura 10 El efecto de Einstein y de de Haas. (*a*) En un cilindro de hierro, los vectores del ímpetu angular atómico se orientan al azar. (*b*) Cuando se aplica un campo magnético axial, los ímpetus angulares atómicos se alinean como se muestra y el cilindro comienza a girar como un todo en sentido opuesto.

todos los puntos externos. Sin embargo, cuando estos imanes atómicos elementales se alinean, como lo están en un imán, sus intensidades magnéticas combinadas están allí para sentir sus efectos.

Cuando los momentos dipolares magnéticos de un conjunto de átomos se alinean, sus ímpetus angulares —a los que están rígidamente acoplados— deben alinearse también. En 1915 Einstein, trabajando con W. J. de Hass (el yerno del gran físico holandés H. A. Lorentz), llevó a cabo un experimento para explorar este fenómeno. Cuando se magnetiza súbitamente una barra de hierro, quizás haciendo pasar una corriente por un solenoide como en la figura 10, los ímpetus angulares de sus átomos se alinean súbitamente. Puesto que el ímpetu angular debe conservarse, la barra debe comenzar a girar como un todo en sentido opuesto. Este *efecto Einstein-de Hass*, como se le llama, es pequeño, y las mediciones son difíciles. Téngase en cuenta que en 1915, cuando este experimento se realizó, la mecánica ondulatoria todavía no se había descubierto, la teoría de Bohr tenía apenas dos años, y todavía no se descubría el espín intrínseco del electrón.

Fue más tarde cuando se descubrió que el efecto Einstein-de Haas (y también, por cierto, el ferromagnetismo de un imán) se debe en gran parte al ímpetu angular intrínseco (el espín) de los electrones más bien que a su ímpetu angular orbital. Sin embargo, esto no altera el hecho de que este experimento demuestre, en forma macroscópica, que los átomos pueden ser portadores tanto de magnetismo como de ímpetu angular.

Problema muestra 5 Un cilindro de hierro sin magnetizar, cuyo radio R es de 5 mm, pende de un cojinete sin fricción de modo que pueda girar libremente alrededor de su eje; véase la figura 10. Súbitamente se aplica un campo magnético paralelo a este eje, provocando que los momentos dipolares magnéticos de los átomos se alineen paralelamente al campo. Los vectores del ímpetu angular atómico, los cuales están acoplados de modo opuesto con los vectores del momento dipolar magnético, también llegan a alinearse y el cilindro comienza a girar en sentido opuesto. Determine el periodo T de rotación del cilindro. Supóngase que cada átomo de hierro tiene un ímpetu angular de $h/2\pi$. La masa molar M del hierro es de

$$55.8 \text{ g/mol} (= 0.0558 \text{ kg/mol}).$$

Solución El ímpetu angular del cilindro al girar ($= \mathbf{L}_{\text{cil}}$) debe ser igual en magnitud (aunque opuesto en dirección) al ímpetu angular asociado con los átomos alineados ($= \mathbf{L}_{\text{átomos}}$). Si N es el número de átomos en el cilindro, N_A es la constante de Avogadro, y m es la masa del cilindro, podemos escribir

$$L_{\text{átomos}} = N(h/2\pi) = (N_A m/M)(h/2\pi).$$

Para el cilindro giratorio tenemos

$$L_{\text{cil}} = I\omega = (\tfrac{1}{2}mR^2)(2\pi/T),$$

donde I es la inercia rotacional del cilindro alrededor de su eje de rotación y ω es su velocidad angular.

Al igualar estas dos expresiones y si se despeja para T se obtiene

$$T = \frac{2\pi^2 R^2 M}{N_A h}$$
$$= \frac{(2\pi^2)(5 \times 10^{-3} \text{ m})^2(0.0558 \text{ kg/mol})}{(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})}$$
$$= 6.90 \times 10^4 \text{ s} = 19.2 \text{ h}.$$

¡Esto es en realidad un giro muy lento del cilindro! De hecho, Einstein y de Hass suspendieron el cilindro de una fibra de torsión y usaron técnicas más refinadas en su experimento al tratar con este efecto.

51-4 EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH

La cuantización espacial, esto es, la noción de que el vector $\mathbf{L}$ del ímpetu angular atómico o el vector μ del momento dipolar magnético atómico sólo pueden tener cierto conjunto discreto de proyecciones sobre un eje seleccionado no es un concepto fácil para que lo acepte una mente orientada clásicamente. Sin embargo, fue predicho teóricamente (por Wolfgang Pauli) y verificado experimentalmente (en 1922, por Otto Stern y Walther Gerlach) varios años antes del desarrollo de la mecánica ondulatoria.

La figura 11 muestra el aparato de Stern y Gerlach. En un "horno" calentado eléctricamente se vaporiza plata, y los átomos de plata se esparcen en el vacío externo del aparato a través de un pequeño orificio en la pared del hor-

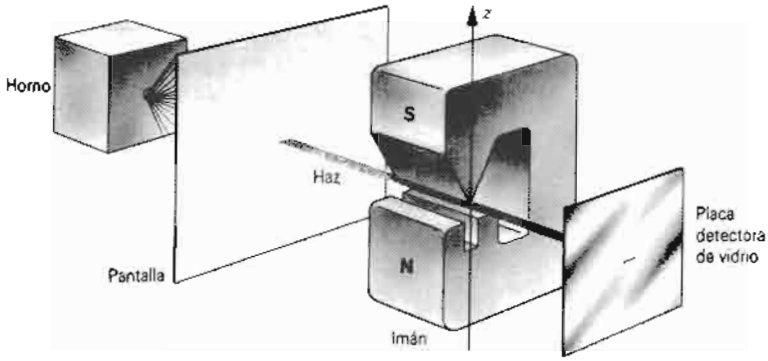


Figura 11 El aparato de Stern y Gerlach.

no. Los átomos (que son eléctricamente neutros pero que poseen un momento dipolar magnético) forman un haz angosto conforme pasan por una rendija en una pantalla interpuesta. El haz colimado pasa luego entre los polos de un electroimán y, finalmente, se deposita por sí mismo en una placa detectora de vidrio.

Con frecuencia, en los experimentos de laboratorio queremos que el campo magnético sea uniforme, pero en este caso las caras polares están conformadas para hacer que el campo sea lo *menos uniforme* posible. El haz atómico pasa muy cerca de la cresta en forma de V de la pieza polar superior, donde la no uniformidad del campo magnético es máxima.

Dipolo en un campo no uniforme

La figura 12*a* muestra un dipolo de momento magnético μ, formando un ángulo θ con un campo magnético uniforme. Podemos imaginar que el dipolo es un imán diminuto, con el vector μ del momento dipolar magnético apuntando (por convención) desde su polo sur hacia su polo norte. Podemos imaginar que las fuerzas se concentran en los polos como se muestra en la figura. Vemos que, cuando el campo es uniforme, no existe una fuerza neta sobre el dipolo. Las fuerzas hacia arriba y hacia abajo en los polos son de la misma magnitud y se cancelan, no importa cuál sea la orientación del dipolo.

Las figuras 12*b* y 12*c* muestran la situación en un campo no uniforme. Aquí las fuerzas hacia arriba y hacia abajo *no* tienen la misma magnitud porque los dos polos están inmersos en campos de intensidades diferentes. En este caso *existe* una fuerza neta, dependiendo tanto de su magnitud como de su dirección de la orientación del dipolo, esto es, del valor de θ. En la figura 12*b* esta fuerza neta es hacia arriba y en la figura 12*c* es hacia abajo. Así, los átomos de plata del haz de la figura 11, al pasar a través del electroimán, se desvían hacia arriba o hacia abajo, y en cantidades mayores o menores, dependiendo de la orientación de los vectores de su momento dipolar magnético con respecto al campo magnético.

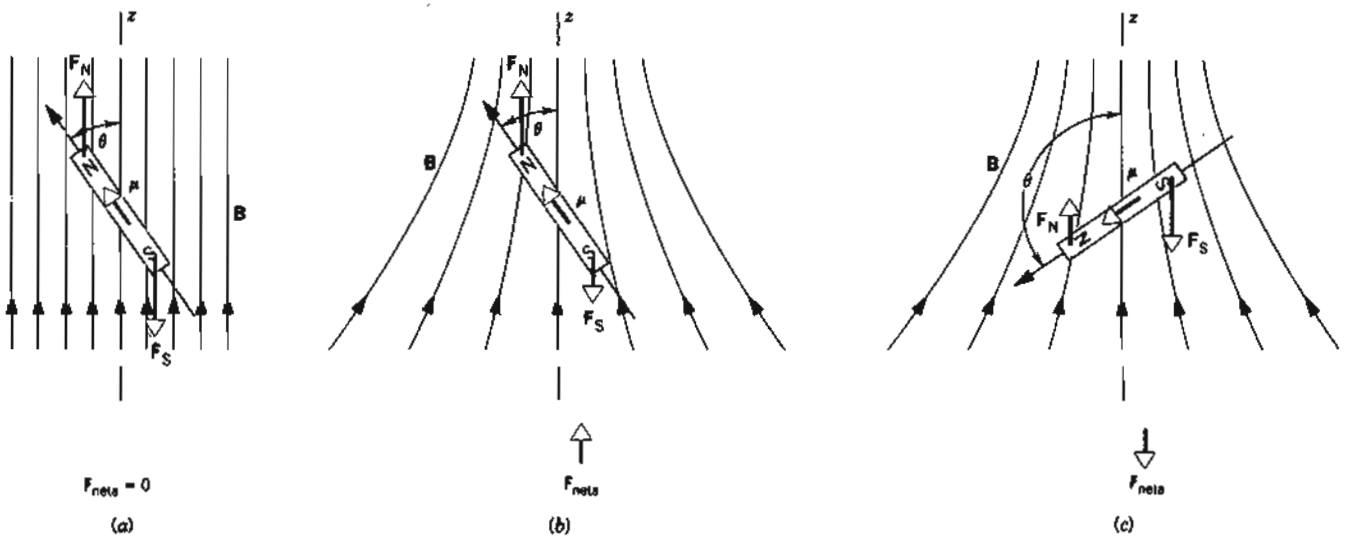


Figura 12 Un dipolo magnético, representado como un pequeño imán con dos polos, en (*a*) un campo uniforme y (*b*, *c*) un campo no uniforme. La fuerza neta que actúa sobre el imán es cero en (*a*), apunta hacia arriba en (*b*) y apunta hacia abajo en (*c*).

Calculemos ahora cuantitativamente la fuerza de desviación. La energía potencial magnética de un dipolo en un campo magnético **B** está dada por la ecuación 38 del capítulo 34,

$$U(\theta) = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = -(\mu\cos\theta)B.$$

Sigamos mentalmente a los átomos de plata del haz cuando se mueven a través del electroimán de la figura 11 paralelamente al extremo agudo. Según la simetría (véase también la figura 12*b*, *c*), el campo magnético no tiene componentes x o y en su posición central. Entonces $B = B_z$. Ya que $\mu\cos\theta = \mu_z$, podemos escribir la energía potencial así:

$$U(\theta) = -\mu_z B_z. \tag{32}$$

La fuerza neta F_z sobre el átomo es $-(dU/dz)$ o, de la ecuación 32,

$$F_z = \mu_z \frac{dB_z}{dz}. \tag{33}$$

Nótese que la fuerza deflectora se determina mediante la *derivada* del campo magnético y no depende de la magnitud del campo propiamente dicha. En la figura 12*b*, *c*, B_z aumenta conforme z aumenta, de modo que la derivada es positiva. Entonces el signo de la fuerza deflectora F_z en la ecuación 33 depende del signo de μ_z. Si μ_z es positiva (como en la Fig. 12*b*) el átomo se desvía hacia arriba, si es negativa (como en la Fig. 12*c*) la desviación es hacia abajo.

Queda un punto problemático. Si cada uno de los átomos del haz se comporta como un imán diminuto, ¿por qué no simplemente se alinean con el campo magnético? ¿Por qué deben apuntar cualquiera de ellos, aun parcialmente, en la dirección opuesta? La respuesta es que los átomos no sólo tienen momento dipolar magnético; también tienen ímpetu angular. El resultado es que tienen un movimiento de precesión alrededor de la dirección del campo (véase la Fig. 9) en lugar de alinearse con él. De la misma manera un trompo que no esté girando, simplemente caerá si lo colocamos formando un ángulo con el campo gravitatorio de la Tierra. Sin embargo, en la sección 13-5 vimos que cuando el trompo está girando, hará un movimiento de precesión alrededor de esta dirección. ¡Es el ímpetu angular el que lo hace!

Resultados experimentales

Cuando el electroimán de la figura 11 se desactiva (o se opera con una energía muy baja), no existirán desviaciones de los átomos y el haz formará una línea angosta en la placa detectora.

Sin embargo, cuando el electroimán se activa, entran en juego fuerzas deflectoras intensas. Entonces, existen dos posibilidades, dependiendo de que exista o no la cuantización espacial. (¡No olvide que el único objetivo de este experimento es el de descubrir!) Si la cuantización espacial no existe, los vectores del momento dipolar magnético atómico tienen una distribución continua de valores, algunos positivos y otros negativos, y el haz simplemente se ensanchará.

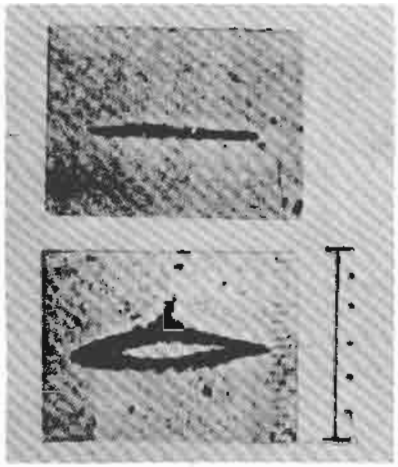


Figura 13 Los resultados del experimento de Stern-Gerlach, mostrando el depósito de plata sobre la placa detectora de vidrio de la figura 11, con el campo magnético (*a*) desactivado y (*b*) activado. El haz se ha dividido en dos subhaces a causa del campo magnético. La barra vertical de la derecha que aparece en (*b*) representa 1 mm.

Por otra parte, si la cuantización espacial *existe*, hay sólo un conjunto discreto de valores de μ_z. Esto significa que solamente existe un conjunto discreto de valores de la fuerza deflectora F_z en la ecuación 33, y el haz se divide en un número de componentes discretas.

La figura 13 muestra lo que sucede. El haz no se ensancha sino que se divide limpiamente en dos subhaces. ¡Existe la cuantización espacial! Stern y Gerlach terminaron el informe publicado de su trabajo con estas palabras: "Vemos estos resultados como la demostración experimental directa de la cuantización espacial en un campo magnético". Todos los físicos están de acuerdo.

Problema muestra 6 En un experimento del tipo de Stern y Gerlach, el gradiente dB_z/dz del campo magnético en la posición del haz era de 1.4 T/mm y la longitud h de la trayectoria del haz dentro del campo del imán era de 3.5 cm. La temperatura del "horno" donde se evaporó la plata se ajustó para que la velocidad v más probable de los átomos del haz fuera de 750 m/s. Halle la separación d entre los dos subhaces desviados cuando emergen del imán; véase la figura 13*b*. La masa m de un átomo de plata es de 1.8×10^{-25} kg, y su momento magnético μ_z es 1 magnetón de Bohr ($= 9.28 \times 10^{-24}$ J/T).

Solución La aceleración de un átomo de plata al pasar por el campo del electroimán está dada (véase la ecuación 33) por

$$a = \frac{F_z}{m} = \frac{\mu_z(dB_z/dz)}{m}.$$

La desviación vertical Δz de cada uno de los subhaces al dejar el imán es

$$\Delta z = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}\frac{\mu_z(dB_z/dz)}{m}\left(\frac{h}{v}\right)^2.$$

La separación d de los dos haces es $2\Delta z$, o sea

$$d = \frac{\mu_z(dB_z/dz)h^2}{mv^2}$$
$$= \frac{(9.28 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1.4 \times 10^{3}\ \text{T/m})(3.5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{(1.8 \times 10^{-25}\ \text{kg})(750\ \text{m/s})^2}$$
$$= 1.6 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0.16\ \text{mm}.$$

Éste es el orden de magnitud de la separación en la figura 13*b*; nótese la escala de la figura.

51-5 ESPÍN DEL ELECTRÓN

El experimento de Stern-Gerlach demuestra claramente que el vector del momento magnético de un átomo puede tener sólo un número finito de direcciones discretas en el espacio, en oposición al número infinito permitido por la física clásica. Sin embargo, existe una curiosa singularidad del experimento. La figura 13 muestra el haz de átomos de plata dividiéndose en dos componentes, correspondiendo cada una a dos orientaciones diferentes del vector del momento magnético del átomo (o, lo que es igual, de su vector del ímpetu angular, puesto que los dos vectores se relacionan por la Ec. 29). Sin embargo, una mirada a la tabla 3 o a la figura 8 muestra que existe siempre un número *impar* de orientaciones posibles del vector L. Dicho de otro modo, el número de orientaciones posibles de L es $2l + 1$, y para que esto sea igual a 2 tiene que haber $l = \frac{1}{2}$; sin embargo, esto contradice la restricción de que l adquiere sólo valores enteros.

La solución a este dilema la propuso en 1924 el físico Wolfgang Pauli (véase la Fig. 14), nacido en Austria. Pauli propuso que existe aún otro número cuántico que describe el estado de un electrón en un átomo, y que este número cuántico puede adquirir los valores de $+\frac{1}{2}$ o de $-\frac{1}{2}$. Al año siguiente dos estudiantes holandeses de posgrado, Samuel Goudsmit y George Uhlenbeck, propusieron la noción del *espín del electrón* como interpretación física del nuevo número cuántico propuesto por Pauli.

El espín puede llamarse *ímpetu o momento angular intrínseco* y, por lo regular, es útil (si bien no estrictamente correcto) imaginarse al espín como el ímpetu angular de una partícula que gire sobre su eje. Existen muchos paralelos entre el espín y el ímpetu angular orbital. El número cuántico s del espín es análogo al número cuántico orbital l; sin embargo, a diferencia de l, el valor de s no cambia con el estado de movimiento del electrón. Todos los electrones, independientemente de cuál sea su estado de movimiento, tienen $s = \frac{1}{2}$. De hecho, solemos considerar que s es una propiedad fundamental de una partícula junto con su masa y carga eléctrica.

El espín del electrón puede representarse por un vector S de magnitud (compárese con la Ec. 23)

$$S = \sqrt{s(s+1)}\ \hbar. \tag{34}$$

La componente de este vector en la dirección z puede escribirse (compárese con la Ec. 25)

$$S_z = m_s \hbar. \tag{35}$$

Al igual que las componentes de L, las componentes permitidas de S difieren de $\hbar$ en una unidad. Por lo tanto, vemos que los valores permitidos de m_s son

$$m_s = \pm\tfrac{1}{2}. \tag{36}$$

Asociado con el ímpetu angular del espín existe un momento magnético, que está dado por (compárese con la Ec. 29)

$$\mu_s = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S}. \tag{37}$$

Nótese la diferencia entre las ecuaciones 37 y 29 en un factor de 2. Esto indica que el ímpetu angular del espín es el doble de efectivo en la producción de efectos magnéticos que el ímpetu angular orbital. Para mayores detalles sobre los momentos magnéticos orbital y del espín, véase la sección 37-2.

Los números cuánticos del ímpetu angular orbital l y su proyección magnética m_l surgen de un modo natural de la resolución de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. El ímpetu angular del espín y su proyección magnética parecen introducirse arbitrariamente sin justificación teórica. El físico matemático inglés Paul A. M. Dirac desarrolló una ecuación relativista de onda similar a la ecuación no relativista de Schrödinger, y Dirac demostró que las soluciones de su ecuación para el átomo de hidrógeno daban el espín del electrón como un cuarto número cuántico. Para obtener la solución completa para el átomo de hidrógeno, debemos sustituir la máquina de Schrödinger de la figura 6 por ¡una máquina de Dirac! Éste es otro gran triunfo de la teoría de la relatividad, sin el cual no tendríamos una base teórica para entender esta parte fundamental de la estructura de los átomos.

Ahora podemos explicar la aparición de dos haces en el experimento Stern-Gerlach. Sucede que el electrón de un átomo de plata ocupa un estado en el que $l = 0$, de tal modo que el ímpetu angular total del electrón sólo se debe a su espín. Este vector del espín tiene únicamente dos orientaciones posibles en relación con el campo magnético y, por lo tanto, las dos componentes del haz.

Toda partícula fundamental tiene su espín y su momento magnético característicos. El protón y el neutrón, al

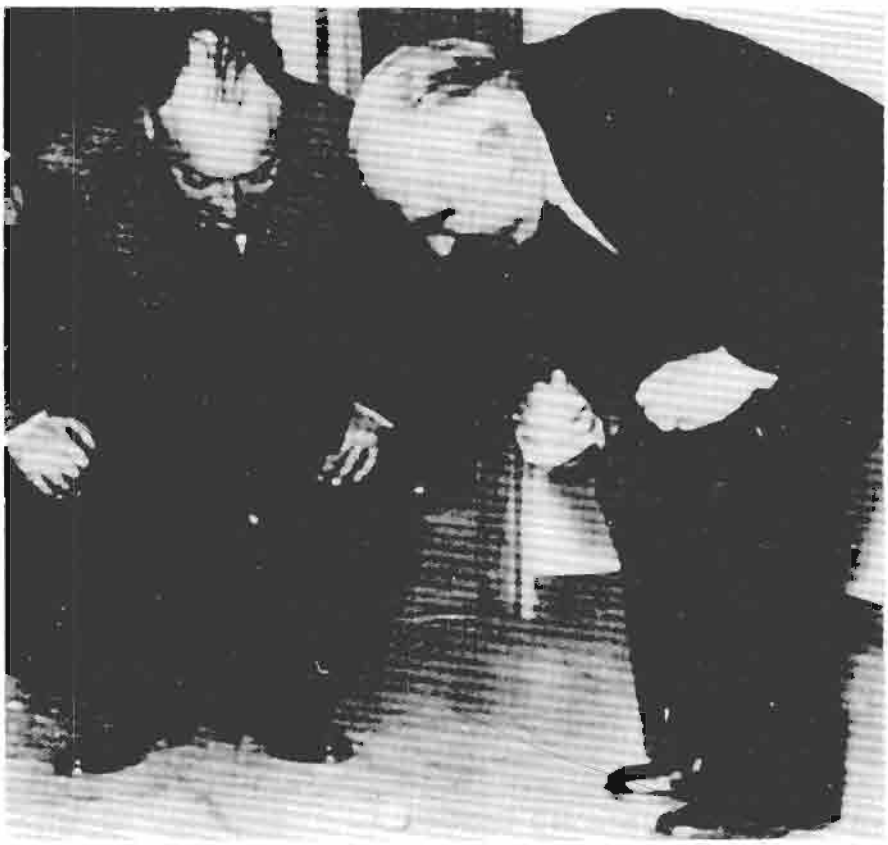


Figura 14 Wolfgang Pauli (izquierda) y Niels Bohr observan un "trompo de cabeza", un trompo que gira por un rato sobre un extremo y luego se voltea. Están esperando que el trompo dé la vuelta.

igual que el electrón, tienen un espín de $\frac{1}{2}$. Sus momentos magnéticos se estudian en la sección 37-2. En la sección 51-8 consideremos otras consecuencias observables de la existencia del espín del electrón.

Las consecuencias del espín del protón y del neutrón han probado ser de gran valor práctico gracias al fenómeno de *resonancia magnética nuclear* (véase la Sec. 13-6 y el problema muestra 1 del capítulo 37). Cuando un protón se coloca en un campo magnético B, ocurre un ambio de energía de $2\mu_s B$ cuando el espín cambia de dirección o "da la vuelta". Este cambio de dirección del espín puede ser causado al someter a los protones a una onda electromagnética cuya frecuencia se elija de modo que $h\nu = 2\mu_s B$. El campo B consta de un campo externo B_{ext} (debido quizás a un electroimán) y un campo interno B_{int} (debido al entorno químico en que se encuentre el protón). Por ejemplo, en una molécula de etanol, cuya fórmula podemos escribir como $CH_3—CH_2—OH$, cada núcleo de hidrógeno experimenta un campo interno diferente en virtud de su diferente posición en la molécula. Al mantener B_{ext} fijo y variando la frecuencia ν, podemos hallar varias frecuencias para las que ocurre el cambio de sentido del espín, correspondiendo cada uno a un entorno particular de un núcleo de hidrógeno en una molécula de etanol. De igual forma, como en la figura 15, podemos mantener fija ν y variar B_{ext}. De cualquier modo, obtenemos una firma única que identifica al etanol. De esta manera la resonancia magnética nuclear muestra que es una herramienta analítica importante en la química orgánica. Otras aplicaciones incluyen la medición de B_{int} en varios entornos moleculares o sólidos y la medición de los momentos dipolares magnéticos nucleares.

51-6 CONTEO DE LOS ESTADOS DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

Ya hemos descrito los cuatro números cuánticos que definen los estados estacionarios del átomo de hidrógeno, y hemos mostrado cómo puede interpretarse físicamente cada uno de ellos. Si bien no lo hemos probado, es a pesar de todo cierto que son consecuencia de la ecuación de onda de Schrödinger, con una asistencia importante por parte de la ecuación de Dirac en el caso del espín del electrón. Al resolver la ecuación de onda de Schrödinger, surgen de manera natural los números cuánticos y la demás información.

Nuestra siguiente tarea es ver si podemos disponer los estados del átomo de hidrógeno de alguna manera ordenada. Consideremos primero el número cuántico principal n. Todos los estados con el mismo valor de n tienen la

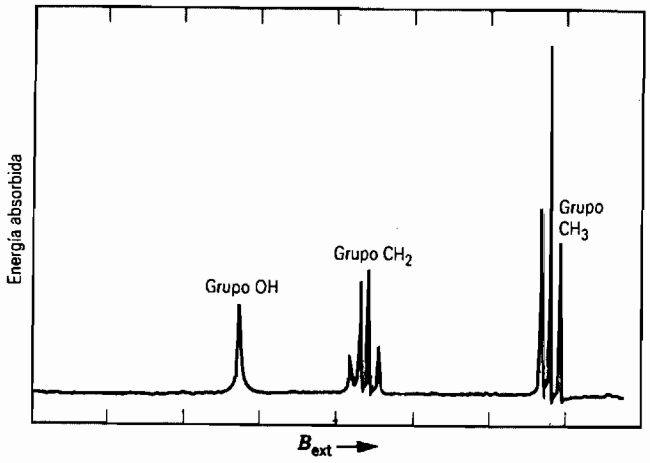


Figura 15 Espectro de resonancia magnética nuclear del etanol. Todas las líneas provienen de la absorción de la radiación incidente cuando el espín del protón "da la vuelta". Los grupos de líneas corresponden a diferentes agrupamientos del hidrógeno en la molécula. La escala horizontal completa es mucho menor que 10^{-4} T.

misma energía, y decimos que el conjunto de tales estados forma una *capa*. La ecuación 24 nos dice que el número de valores de l diferentes que son posibles para un valor dado de n es precisamente igual a n. Así, para $n = 3$ podemos tener tres valores de l (= 0, 1 y 2).

Las capas pueden subdividirse. Dentro de una capa determinada, todos los estados con el mismo valor de l tienen el mismo ímpetu angular y se dice que forman una *subcapa*. Por ejemplo, la capa definida por $n = 3$ contiene tres subcapas, cada una con la misma energía pero con un ímpetu angular diferente.

Dentro de las subcapas, los electrones pueden tener estados de movimiento diferentes en virtud de las diferentes maneras en que puede estar orientado el vector del ímpetu angular. Para una l dada, la ecuación 26 nos dice que existen $2l + 1$ valores de m_l. En nuestro ejemplo, entonces, la subcapa con $l = 2$ contiene 5 ($= 2 \times 2 + 1$) estados, y aquéllas con $l = 1$ y 0 contienen 3 estados y 1 estado, respectivamente. Esto suma un total de 9 ($= 5 + 3 + 1$) estados en la capa con $n = 3$.

El efecto del número cuántico del espín m_s es simplemente duplicar el número de estados. Cada combinación de n, l, y m_l que hemos identificado puede asociarse ahora ya sea con $m_s = +\frac{1}{2}$ o con $m_s = -\frac{1}{2}$, produciendo así dos estados en donde antes existía uno. Para continuar con nuestro ejemplo, en la capa con $n = 3$ no hay 9 estados sino 18.

La tabla 4 resume esta clasificación de las capas y subcapas de los estados del átomo de hidrógeno.

¿Parecen familiares los números de los estados en las capas (esto es, 2, 8 y 18) en el renglón inferior de la tabla 4? ¡Son las longitudes de las filas horizontales (los periodos) de la tabla periódica de los elementos! Como lo muestra el apéndice E, el periodo 1 contiene 2 elementos, los periodos 2 y 3 contienen 8 elementos cada uno, y los periodos 4 y 5 contienen 18. En el capítulo 52 veremos con detalle cómo surge precisamente de los principios de la mecánica ondulatoria el orden de los elementos en la tabla periódica.

Problema muestra 7 Cierta capa tiene un número cuántico principal n de 4. (*a*) ¿Cuántas subcapas contiene esta capa? (*b*) ¿Cuál es el número de estados en cada una de estas subcapas? (*c*) ¿Cuál es el número de estados en la capa?

Solución (*a*) Si $n = 4$, sabemos de la ecuación 24 que los valores permitidos de l son 0, 1, 2 y 3. Esto es un total de cuatro valores, de acuerdo con el hecho de que el número de valores de l permitidos para un n dado es precisamente igual a n. Cada valor de n define una capa y cada valor de l define una subcapa dentro de esa capa. Así, existen cuatro subcapas en la capa con $n = 4$.

(*b*) El número de estados en una subcapa está dado por $2(2l + 1)$, viniendo el factor 2 de los dos valores permitidos del número cuántico del espín magnético. Para los números de los

TABLA 4 LOS ESTADOS DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO[a]

n	1	2		3		
l	0	0	1	0	1	2
m_l	0	0	0, ±1	0	0, ±1	0, ±1, ±2
m_s	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$
Número de estados en las subcapas	2	2	6	2	6	10
Número de estados en las capas	2	8		18		

[a] Completa hasta $n = 3$ únicamente.

estados en las varias subcapas en la capa $n = 4$ tenemos, entonces,

l	$2(2l + 1)$
0	2
1	6
2	10
3	14

(*c*) El número de estados en la capa $n = 4$ se halla al sumar los números en las subcapas que contiene. De la tabla de arriba tenemos 2 + 6 + 10 + 14, o sea 32. Nótese que 32 es el número de elementos en el renglón horizontal 6 de la tabla periódica de los elementos. Véase el apéndice E.

¿Puede usted demostrar que, en general, el número de estados de una capa definida por el número cuántico principal n está dado por $2n^2$? Esto funciona en este caso porque $2 \times 4^2 = 32$, como lo hallamos al contarlo explícitamente.

51-7 ESTADO BASE DEL HIDRÓGENO

En esta sección, sin considerar los detalles matemáticos, presentamos los resultados de la ecuación de Schrödinger para estudiar el estado base del hidrógeno. El procedimiento implica resolver la ecuación de Schrödinger en coordenadas polares esféricas cuando el electrón y el protón interactúan por medio de la fuerza de Coulomb, dada por la energía potencial

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{38}$$

Si insertamos esta función de la energía potencial en la ecuación de Schrödinger y llevamos a cabo las manipulaciones matemáticas necesarias, seremos capaces de deducir una expresión para las energías de los estados estacionarios permitidos del átomo y también para las funciones de onda que describen a dichos estados.

La expresión para las energías de los estados estacionarios resulta que es, exactamente, la ecuación 18, expresión que se deduce de la teoría de Bohr. Centramos aquí nuestra atención en el estado base del átomo de hidrógeno, esto es, en el estado de mínima energía.

La función de onda del estado base surge también de la ecuación de Schrödinger y resulta que sólo depende de la variable r. Está dada por

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \tag{39}$$

donde a_0 es el radio de Bohr.

Esta función de onda tiene una simetría esférica, con lo que queremos decir que depende únicamente de la magnitud del vector **r** (que define el punto en el que se evalúa la función de onda), pero no de su dirección. Quizás esto no sea sorprendente. La función de la energía potencial (Ec. 38) es también esféricamente simétrica, de modo que el átomo no tiene interconstruida una dirección preferida. Al igual que una bola de billar, el átomo en su estado base se ve igual en todas las direcciones.

El cuadrado de la función de onda, al que hemos llamado la *densidad de probabilidad*, tiene la propiedad de que $\psi^2(r)\,dV$ da la probabilidad de hallar al electrón en un elemento de volumen dV localizado en una posición definida mediante el vector de posición **r**. De la ecuación 39 tenemos

$$\psi^2(r) = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}. \tag{40}$$

La figura 16*a* es una representación en "gráfica de puntos" de la ecuación 40, donde la densidad de los puntos representa la naturaleza probabilística de la localización del electrón. Se ha trazado un círculo de un radio de Bohr para mostrar la escala.

Otra cantidad útil para representar la posición del electrón es la *densidad de probabilidad radial* $P_r(r)$. Ésta se define de modo que $P_r(r)\,dr$ dé la probabilidad de que, cualquiera que sea la dirección, el electrón se encontrará que está entre dos capas esféricas cuyos radios son r y $r + dr$. El volumen entre esas capas es $(4\pi r^2)(dr)$ de modo que podemos escribir

$$P_r(r)\,dr = \psi^2(r)\,dV = \psi^2(r)(4\pi r^2)(dr),$$

ecuación que, combinada con la ecuación 40, nos conduce a

$$P_r(r) = \psi^2(r)(4\pi r^2) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}. \tag{41}$$

La figura 16*b* muestra una gráfica de la ecuación 41. Observamos (véase el problema muestra 8) que el valor máximo de $P_r(r)$ se presenta para $r = a_0$. En la mecánica ondulatoria no decimos que el electrón, en el estado base, del átomo de hidrógeno se mueve en una órbita de un radio de Bohr. En lugar de ello decimos que es más probable que el electrón se encuentre en una capa delgada a esta distancia del núcleo central que en una capa de igual espesor para otra distancia cualquiera, ya sea mayor o menor. También se indica en la figura el así llamado radio del 90%. Define una esfera tal que la probabilidad de que el electrón se encuentre adentro es del 90%. Por supuesto, la probabilidad de hallarlo fuera es del 10%.

Vemos que la respuesta a la pregunta "¿cuán grande es el átomo de hidrógeno?" no es tan sencilla. Se puede decir que es un radio de Bohr, pero (véase el problema 56) el 68% de las veces que lo midamos hallaremos que el electrón está muy lejos de ello. Una respuesta más razonable es dar el radio de la esfera con el 90% de probabilidad, que resulta que es de 2.7 radios de Bohr. La poca claridad cuántica inherente del átomo simplemente no nos permite contestar esta pregunta con mayor precisión.

Hasta el momento no hemos dicho nada acerca del papel del espín del electrón en el estado base del átomo

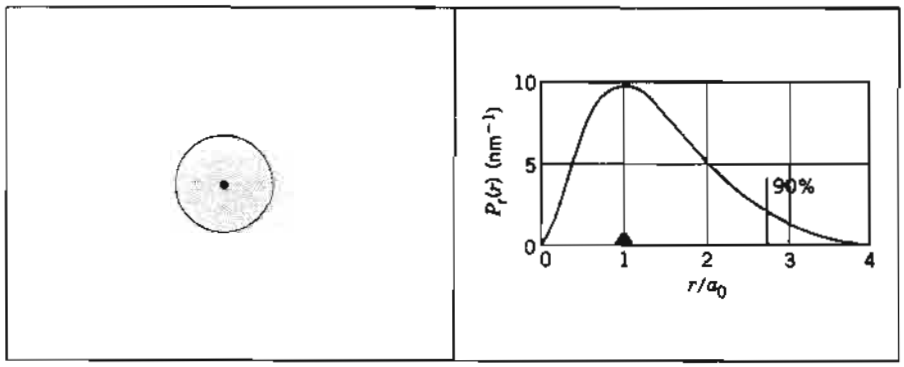


Figura 16 (*a*) Representación en "gráfica de puntos" de la densidad de probabilidad del estado base del átomo de hidrógeno, expresada por la ecuación 40. Se ha trazado un círculo con radio $r = a_0$. (*b*) La densidad de probabilidad radial, dada por la ecuación 41. El triángulo oscuro marca la probabilidad máxima en $r = a_0$. La línea marcada "90%" muestra el radio de una esfera que contiene el 90% de la densidad de probabilidad.

de hidrógeno. Como nos lo recuerda la tabla 4, la capa que corresponde a $n = 1$ en el átomo de hidrógeno contiene dos estados, correspondientes a los dos valores permitidos ($= \pm\frac{1}{2}$) del número cuántico del espín m_s. Empero, estos dos estados tienen exactamente la misma energía y, para un átomo aislado, no existe una manera de separarlos experimentalmente. El átomo en su estado base puede estar ya sea en el estado con $m_s = +\frac{1}{2}$ o en el estado con $m_s = -\frac{1}{2}$. La energía del átomo y la curva de densidad de probabilidad de la figura 16*b* son las mismas para cada uno de estos estados.

Si *realmente* queremos distinguir entre estos dos estados de orientación del espín podemos hacerlo colocando el átomo en un campo magnético externo. Esto no sólo proporciona un eje de referencia natural con respecto a cuál vector del ímpetu angular del espín del electrón (y su vector del momento dipolar magnético) puede orientarse por sí mismo, pero también separa los dos estados en cuanto a su energía. Esto, de hecho, es exactamente lo que se hizo en el experimento Stern-Gerlach.

Problema muestra 8 Verifique que el máximo de la curva de densidad de probabilidad radial de la figura 16*b* cae a $r = a_0$, donde a_0 es el radio de Bohr.

Solución Al derivar $P_r(r)$ en la ecuación 41 con respecto a r, obtenemos

$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{4}{a_0^3}(2r)e^{-2r/a_0} + \frac{4}{a_0^3}r^2\left(-\frac{2}{a_0}\right)e^{-2r/a_0}$$
$$= \frac{8r}{a_0^3}e^{-2r/a_0}\left(1 - \frac{r}{a_0}\right).$$

En el máximo de la curva debemos tener $dP_r/dr = 0$ y, como lo muestra la inspección de esta ecuación, no ocurre realmente en $r = a_0$. Nótese que también tenemos $dP_r/dr = 0$ en $r = 0$ y conforme $r \to \infty$. Estas condiciones son muy consistentes con la figura 16*b* y corresponden a mínimos más bien que a máximos.

51-8 ESTADOS EXCITADOS DEL HIDRÓGENO

El siguiente estado más alto en energía por arriba del estado base se llama primer estado excitado. Su energía ($= -3.40$ eV) se halla haciendo que $n = 2$ en la ecuación de la energía (Ec. 18). Como nos lo recuerda la tabla 4, la capa con $n = 2$ contiene dos subcapas, que corresponden a $l = 0$ y a $l = 1$. Trataremos cada uno de ellos por orden.

La subcapa $n = 2$, $l = 0$

La función de onda para este estado es

$$\psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}(2 - r/a_0)e^{-r/2a_0}, \qquad (42)$$

donde el subíndice 200 representa la secuencia $n = 2$, $l = 0$ y $m_l = 0$ del número cuántico. Este estado, al igual que el estado base, tiene simetría esférica en cuanto a que es una función de r únicamente y no contiene ningún ángulo como variable.

La densidad de probabilidad $\psi^2(r)$ y la densidad de probabilidad radial $P_r(r)$ están dadas por

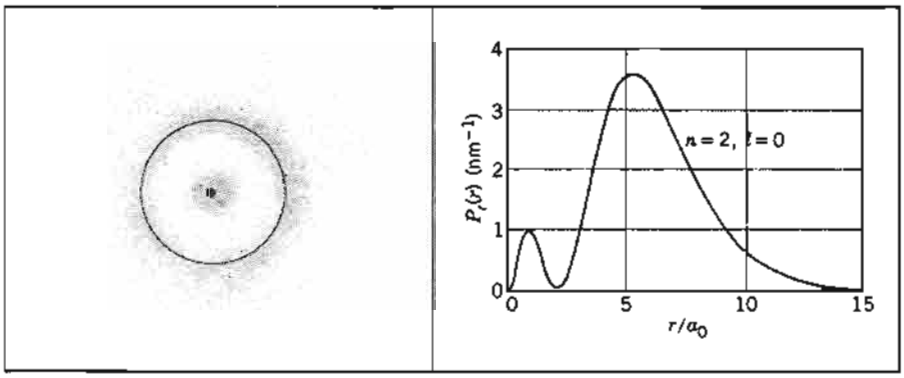


Figura 17 (*a*) "Gráfica de puntos" que representa la densidad de probabilidad del hidrógeno atómico para el estado excitado con $n = 2$ y $l = 0$. Se ha trazado un círculo con radio $r = 4a_0$. (*b*) La densidad de probabilidad radial.

$$\psi^2(r) = \frac{1}{32\pi a_0^3}(2 - r/a_0)^2 e^{-r/a_0} \tag{43}$$

y

$$P_r(r) = \psi^2(r)(4\pi r^2) = \frac{1}{8a_0}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}. \tag{44}$$

La figura 17*a* es una "gráfica de puntos" de la ecuación 43, la densidad de la probabilidad $\psi^2(r)$. La figura 17*b* es una gráfica de la ecuación 44, la densidad de probabilidad radial. Nótese que la última curva tiene dos máximos y que tiende a cero en $r = 2a_0$, como lo aclara la simple inspección de la ecuación 44.

Las notas acerca del espín al final de la sección 51-7 se aplican aquí con igual fuerza. Este estado tiene también una simetría esférica completa. Su ímpetu angular es $\frac{1}{2}$, en unidades de $\hbar$, debido (como antes) enteramente al espín del electrón.

La subcapa $n = 2, l = 1$

Los estados que comprenden esta subcapa *tienen* un ímpetu angular orbital, siendo sus proyecciones sobre el eje z dadas por $m_l\hbar$, donde m_l puede tomar los valores de 0 o de ± 1. Las funciones de onda de estos tres estados *no* son simétricas esféricamente, por ser funciones no sólo de r sino también del ángulo polar θ, definido en la figura 18*a*.

La figura 18*a* muestra "gráficas de puntos" de las tres densidades de probabilidad, $\psi^2_{21-1}(r,\theta)$, $\psi^2_{210}(r,\theta)$ y $\psi^2_{21+1}(r,\theta)$. Los subíndices representan la secuencia n, l y m_l del número cuántico. Las tres gráficas tienen una simetría rotatoria alrededor del eje z, siendo idénticas las gráficas para $m_l = -1$ y para $m_l = +1$.

Usted tiene derecho a estar un poco desconcertado acerca de la falta de simetría esférica que se muestra en la figura 18*a*. Después de todo, la función de energía potencial que introdujimos en la ecuación de Schrödinger dependía sólo de r. ¿Se parece *realmente* el electrón en un estado con $n = 2$, $l = 1$ y $m_l = 0$ a un racimo alrededor del eje z, que evita el plano ecuatorial? ¿Cómo se elige la dirección de este eje?

La respuesta a este problema se obtiene cuando pensamos que los tres estados en cuestión tienen la misma energía y que, en ausencia de un campo magnético externo, no hay manera de aislarlos experimentalmente. Si suponemos que —en promedio— el átomo pasa un tercio de su tiempo en cada uno de los tres estados que se muestran en la figura 18*a*, podemos calcular una *densidad de probabilidad promedio ponderada* de la subcapa como un todo. El resultado es

$$\psi^2_{21}(r) = \tfrac{1}{3}\psi^2_{21-1}(r,\theta) + \tfrac{1}{3}\psi^2_{210}(r,\theta) + \tfrac{1}{3}\psi^2_{21+1}(r,\theta) = \frac{1}{96\pi a_0^5} r^2 e^{-r/a_0}. \tag{45}$$

El subíndice de la densidad de probabilidad da los valores de n (= 2) y l (= 1). ¡Nótese que la variable angular θ ha desaparecido del resultado final! La densidad de probabilidad de la capa en conjunto depende sólo de r y tiene la simetría esférica que esperábamos tuviera. Esto significa que si superponemos las tres gráficas de puntos cilíndricamente simétricas de la figura 18*a*, la gráfica de puntos resultante (imaginada en tres dimensiones) será esféricamente simétrica.

Ahora hallaremos la densidad de probabilidad radial de esta subcapa, procediendo como lo hicimos en la sección 51-7 para el estado base; es decir,

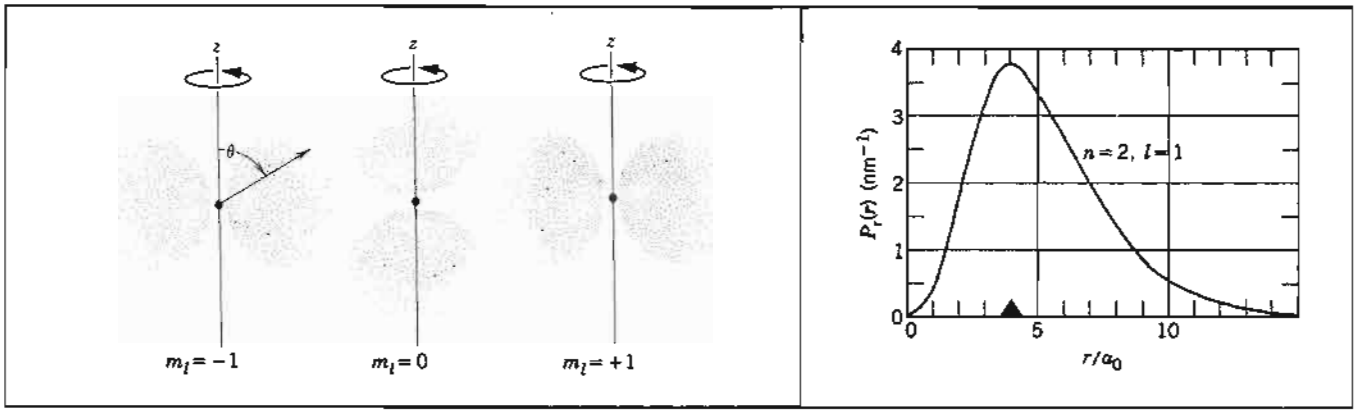


Figura 18 (*a*) Representaciones en "gráficas de puntos" de la densidad de probabilidad del hidrógeno atómico en el estado excitado con $n = 2$ y $l = 1$. Para obtener el cuadro tridimensional completo, imaginemos cada gráfica girada alrededor del eje z. (*b*) La densidad de probabilidad radial. El triángulo oscuro muestra la localización del máximo en $r = 4a_0$.

$$P_r(r) = \psi_{21}^2(r)(4\pi r^2) = \frac{1}{24a_0^5} r^4 e^{-r/a_0} . \qquad (46)$$

La figura 18*b* muestra una gráfica de esta densidad de probabilidad radial. Nótese que el máximo de la distribución se presenta en $r = 4a_0$, que es (véase la Ec. 19) precisamente el radio de la segunda órbita de Bohr.

51-9 DETALLES DE LA ESTRUCTURA ATÓMICA *(Opcional)*

En este capítulo hemos delineado hasta ahora los aspectos básicos de la teoría cuántica aplicados a la estructura del hidrógeno atómico, lo que nos permite entender detalles de sus propiedades como la serie de Balmer (y otras series de las radiaciones emitidas). Aquí mencionamos brevemente algunos detalles más acerca de la estructura atómica que podemos entender de manera semejante.

La estructura fina

Cuando estudiamos las líneas espectrales en alta resolución, hallamos que lo que parece ser una sola línea es a menudo un par de líneas muy próximas entre sí (un doblete). A esto se le llama *estructura fina* del espectro. El efecto es por lo general muy pequeño. En el caso de la transición del hidrógeno entre el primer estado excitado y el estado base ($E = 10.2$ eV), la diferencia de energía entre las dos componentes debida a la estructura fina es de 4.5×10^{-5} eV. Sin embargo, la división de la estructura fina aumenta rápidamente con el número atómico; en el sodio, esto es responsable de la división de las líneas D amarillas, que difieren en longitud de onda en unos 0.6 nm con respecto a 590 nm, o alrededor de 1 parte en 10^3.

La división de la estructura fina se analiza generalmente en términos del ímpetu angular total del electrón, obtenido de la suma de las contribuciones orbital y del espín. En el estado excitado $l = 1$, los valores posibles del número cuántico del ímpetu angular total son, de acuerdo con las reglas para sumar al ímpetu angular en mecánica cuántica,

$$j = l \pm s = 1 \pm \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \text{ o } \tfrac{1}{2} .$$

Hablando a la ligera, estas dos posibilidades corresponden a que los vectores L y S sean paralelos o antiparalelos, respectivamente. Estas dos orientaciones diferentes tienen energías ligeramente distintas, lo que da una división de la energía del átomo entre los estados correspondientes a esas combinaciones. (Puede usted considerar a la combinación paralela como equivalente a dos diminutos imanes alineados uno al lado del otro y paralelos entre sí, con sus polos iguales repeliéndose entre sí;

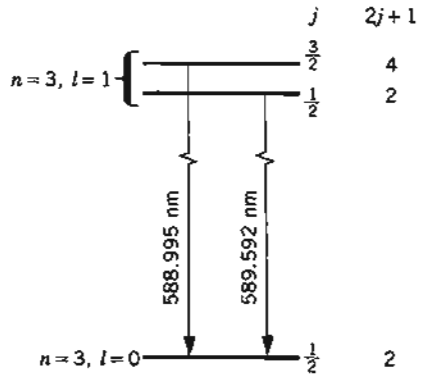


Figura 19 La división de la estructura fina de los niveles de energía que emite la luz del familiar doblete del sodio. El dibujo no está a escala; la división real de los niveles superiores es de alrededor de 1/1000 de la diferencia de energía entre los niveles superior e inferior. A la derecha se muestra el número de orientaciones diferentes del vector J (esto es, el número de valores diferentes de m_j para cada nivel).

Figura 20 El efecto Zeeman en el rodio. El espectro de abajo muestra el desdoblamiento de las líneas espectrales al activar el imán.

en la configuración antiparalela, los imanes se alinean en la dirección opuesta, y los polos N y S vecinos se atraen entre sí. Este último arreglo disminuye la energía del átomo, es decir, lo hace más fuertemente ligado.)

El ímpetu angular total tiene propiedades similares a los ímpetus angulares orbital y del espín. Específicamente, existen $2j + 1$ orientaciones diferentes del vector J, que corresponden a los diferentes valores posibles de su componente z, $J_z = m_j\hbar$, donde m_j varía entre $+j$ y $-j$ en pasos enteros. Esto es, cuando $j = \frac{3}{2}$, tenemos $m_j = +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, o $-\frac{3}{2}$, mientras que para $j = \frac{1}{2}$ tenemos $m_j = +\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

La figura 19 muestra una representación de la división de la estructura fina para el sodio. Nótese que, sin considerar la división de la estructura fina, el estado excitado $l = 1$ incluye seis subestados (correspondiendo tres a $m_l = +1$, 0 y -1, cada uno de los cuales puede tener $m_s = +\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$). Al considerar la estructura fina, existen todavía seis subestados, cuatro asociados con $j = \frac{3}{2}$ y dos con $j = \frac{1}{2}$. El estado base, con $l = 0$, sólo puede tener $j = \frac{1}{2}$.

El efecto Zeeman

Michael Faraday tuvo la intuitiva idea de que la luz que procede de una fuente cambiaría si uno colocara la fuente dentro de un campo magnético intenso. Faraday no tuvo éxito cuando intentó llevar a cabo este experimento, porque el equipo de que disponía no tenía la resolución suficiente para observar este pequeño efecto. En 1896, unos 30 años más tarde, el físico holandés Pieter Zeeman repitió el experimento con aparatos más sensibles y observó que las líneas espectrales se ensanchaban, de manera que podían medirse, en un campo magnético intenso. Con campos más intensos y una mejor resolución, es posible observar que las líneas se desdoblan en componentes cuyo desdoblamiento aumenta proporcionalmente al campo. Por su trabajo, Zeeman compartió el premio Nobel de física en 1902. La figura 20 muestra un ejemplo del efecto Zeeman. En un campo magnético intenso, el desdoblamiento de las líneas en el efecto Zeeman debe ser alrededor de 1 parte en 10^4 de la energía o de la longitud de onda de las líneas.

Para entender el origen del efecto Zeeman, consideremos el diagrama del nivel de energía del sodio que se muestra en la figura 21, en el cual sólo se muestra el estado excitado $j = \frac{3}{2}$ y el estado base $j = \frac{1}{2}$. Cuando el campo magnético se activa, las cuatro orientaciones posibles del vector J del estado excitado (correspondientes a los cuatro diferentes valores de m_j) dan energías diferentes, que pueden calcularse del momento magnético del estado. De manera semejante, el estado $j = \frac{1}{2}$ se desdobla en dos subestados. Al activar el campo, existe únicamente una transición posible entre el estado excitado y el estado base; con el campo activado, pueden ocurrir transiciones desde cualquier subestado del estado excitado a cualquier subestado del estado base, dando ocho transiciones posibles. Dos de estas transiciones no pueden ocurrir porque las reglas de la mecánica cuántica lo prohíben, quedando seis componentes individuales.

Puede calcularse el número de componentes y sus separaciones que se observan en el efecto Zeeman usando la mecánica ondulatoria. Como lo ilustra la figura 20, en un espectro dado, las diferentes líneas pueden mostrar patrones de desdoblamiento diferentes. Es un triunfo de la mecánica ondulatoria que puedan calcularse estos detalles del efecto Zeeman, junto con las intensidades relativas de las componentes e incluso sus polarizaciones, y concordar precisamente con el experimento.

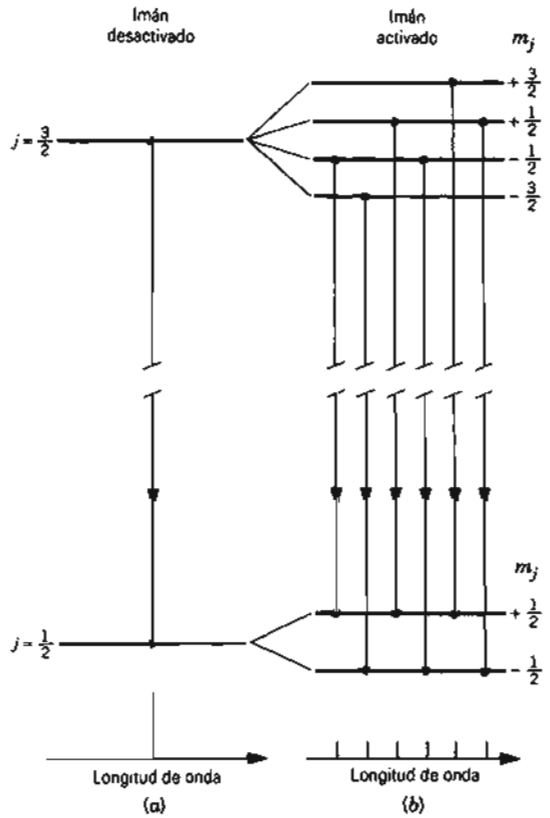


Figura 21 Un diagrama del nivel de energía que ilustra la división Zeeman de un miembro del doblete de estructura fina en el sodio. Cuando se aplica el campo magnético, la línea espectral única de (*a*) se divide en las seis componentes estrechamente espaciadas que se muestran en (*b*).

Masa reducida

Nuestra deducción de los niveles de energía del hidrógeno supuso que el electrón gira alrededor de un núcleo estacionario. En realidad, el electrón y el protón orbitan cada uno alrededor del centro de masa del sistema. Una manera conveniente de tomarlo en cuenta es asignarle al electrón una masa efectivamente menor que se llama *masa reducida* (véase la Sec. 15-10), definida de acuerdo con

$$m = \frac{m_e M}{M + m_e} = \frac{m_e}{1 + m_e/M}, \tag{47}$$

donde M es la masa del núcleo. Esto es, en todas las expresiones en las que se encuentre la masa del electrón, debemos sustituirla por su masa reducida.

En el caso del hidrógeno, la ecuación 47 da

$$m = \frac{m_e}{1 + \dfrac{1}{1836.15}} = \frac{m_e}{1.000545},$$

y el valor correspondiente de la energía del estado base cambia de -13.6057 eV (que equivale a un núcleo infinitamente masivo) a -13.5983 eV. En forma correspondiente, toda la escala de las líneas espectrales. Por ejemplo, la primera línea en la serie de Lyman tendría una energía de 10.2043 eV para un núcleo infinitamente masivo, mientras que para el hidrógeno la energía observada es de 10.1972 eV. Estas diferencias, que alcanzan a ser de 1 parte en 10^3, se observan fácilmente con los espectroscopios.

Alrededor de un atómo de hidrógeno en 6000 es de deuterio, o "hidrógeno pesado", cuyo núcleo contiene un protón y un neutrón, lo que lo hace alrededor del doble de masivo que el hidrógeno ordinario. La mayoría de las propiedades químicas y físicas del hidrógeno pesado son idénticas a las del hidrógeno ordinario, excepto aquellas propiedades que dependen específicamente de la masa. Como hemos visto, la energía de las líneas espectrales depende muy poco de la masa del núcleo. En un átomo de hidrógeno pesado, la masa reducida del electrón es

$$m = \frac{m_e}{1 + \dfrac{1}{3670.48}} = \frac{m_e}{1.000272},$$

y la energía que corresponde al estado base es -13.6020 eV. La primera línea de la serie de Lyman tendría una energía de 10.2015 eV. Si examináramos las líneas espectrales de una muestra de hidrógeno, hallaríamos que cada línea consta de un doblete, separado por un intervalo de 0.027% de la energía (o de longitud de onda) y con intensidades relativas de unos 6000 a 1. Al aumentar la concentración de hidrógeno pesado (mediante la destilación, por ejemplo) puede variar la razón de la intensidad. El deuterio fue descubierto por H. C. Urey en 1932 usando este procedimiento; por su descubrimiento, Urey fue galardonado con el premio Nobel de química en 1934. ■

PREGUNTAS

1. Analice la analogía de la relación entre Kepler y Newton en el desarrollo de la ley de la gravitación de Newton y la relación entre Balmer y Bohr en el desarrollo de la teoría de Bohr sobre la estructura atómica.
2. ¿Por qué fue la serie de Balmer, y no la de Lyman o la de Paschen, la primera en ser detectada y analizada en el espectro del hidrógeno?
3. ¿En qué región del espectro probablemente se encontrará cualquier serie del hidrógeno atómico todavía por ser observada?
4. En la teoría de Bohr de las órbitas del átomo de hidrógeno, ¿cuál es la implicación del hecho de que la energía potencial sea negativa y de mayor magnitud que la energía cinética?
5. ¿Puede un átomo de hidrógeno absorber un fotón cuya energía exceda de su energía de amarre (13.6 eV)?
6. Al emitir un fotón, un átomo de hidrógeno aislado retrocede para conservar el ímpetu. Explique el hecho de que la energía del fotón emitido sea ligeramente menor que la diferencia de energía entre los niveles de energía que participan en el proceso de emisión.
7. ¿Por qué son más claras algunas líneas del espectro del hidrógeno que otras?
8. Los radioastrónomos observan líneas en el espectro de hidrógeno que tienen su origen en átomos de hidrógeno que se hallan en estados con $n = 350$ más o menos. ¿Por qué no pueden producirse y estudiarse en el laboratorio átomos de hidrógeno en estados con números cuánticos tan elevados como éstos?
9. Sólo puede observarse un número relativamente pequeño de líneas de Balmer en tubos de descarga de laboratorio, mientras que se observa un gran número en los espectros estelares. Explique esto en términos de la pequeña densidad, la alta temperatura y el gran volumen de los gases en las atmósferas estelares.
10. De acuerdo con la mecánica clásica, un electrón que se mueve en una órbita debe ser capaz de hacerlo con cualquier ímpetu angular. Sin embargo, de acuerdo con la teoría de Bohr sobre el átomo de hidrógeno, el ímpetu angular se cuantiza según $L = nh/2\pi$. Concilie estas dos afirmaciones, usando el principio de correspondencia.
11. ¿Por qué el concepto de las órbitas de Bohr viola el principio de incertidumbre?
12. Considérese un átomo similar al de hidrógeno donde un positrón (un electrón cargado positivamente) circula alrededor de un antiprotón (cargado negativamente). ¿De qué modo el espectro de emisión de este "átomo de antimateria" difiere del espectro de un átomo de hidrógeno normal?
13. Si la teoría de Bohr y la mecánica ondulatoria de Schrödinger predicen el mismo resultado para las energías de los estados del átomo de hidrógeno, ¿entonces por qué necesitamos de la mecánica ondulatoria, con su mayor complejidad?

14. Compárese la teoría de Bohr y la mecánica ondulatoria. ¿En qué expresiones concuerdan? ¿En cuáles difieren?

15. ¿Cómo demostraría en el laboratorio que un átomo tiene un ímpetu angular? ¿y que tiene un momento dipolar magnético?

16. ¿Por qué no notamos la cuantización espacial en un trompo?

17. El ímpetu angular del electrón de un átomo de hidrógeno se cuantiza. ¿Por qué no se cuantiza también el ímpetu o cantidad de movimiento lineal? (*Sugerencia*: Considérense las implicaciones del principio de incertidumbre.)

18. El ímpetu angular es un vector y cabría esperar que se requieran tres números cuánticos para describirlo, correspondientes a las tres componentes espaciales de un vector. En cambio, en el átomo, dos números cuánticos caracterizan al ímpetu. Explique por qué.

19. Justifique la información de que, en el efecto Einstein-de Haas, el ímpetu angular de la barra de hierro como un todo debe conservarse cuando la barra se magnetiza súbitamente.

20. En el experimento de Einstein-de Haas (véase el problema muestra 5), ¿puede usted justificar el hecho de que el periodo predicho de rotación del cilindro depende sólo del radio del cilindro y no, por ejemplo, de su altura? ¿Qué suposiciones se hicieron al deducir la expresión del periodo de rotación?

21. Convénzase por sí mismo de que las direcciones de las flechas de la figura 10*b*, que representan la corriente del solenoide, el campo magnético, los ímpetus angulares atómicos y la dirección de rotación del cilindro, son consistentes entre sí.

22. ¿Proporciona el efecto Einstein-de Haas una evidencia de que el ímpetu angular se cuantiza?

23. Un haz de luz polarizada circularmente, visto como un haz de fotones cuyos espines están alineados, puede ejercer una torca o momento de torsión sobre una pantalla absorbente. Haga una analogía con el experimento de Einstein-de Haas.

24. En un experimento de Stern-Gerlach se emplea un haz de átomos de plata neutros. ¿Cuál es el origen tanto de la fuerza como de la torca o momento de torsión que actúan sobre el átomo? ¿Cómo resulta afectado el átomo por cada uno de estos factores?

25. ¿Qué determina el número de subhaces en que se divide un haz de átomos neutrales en un experimento de Stern-Gerlach?

26. Si en un experimento de Stern-Gerlach un haz de iones se resuelve en cinco haces componentes, ¿qué número cuántico del ímpetu angular tiene entonces cada uno de los iones?

27. ¿Es posible tener, en un aparato de Stern-Gerlach, una configuración del campo magnético donde el propio campo magnético sea cero a lo largo de la trayectoria del haz pero que el gradiente del campo no? Si su respuesta es afirmativa, ¿puede diseñar un electroimán que produzca tal configuración del campo?

28. Los átomos de plata en el experimento de Stern-Gerlach del problema muestra 6 no tienen carga. Suponga que un átomo de plata del aparato perdiera súbitamente un electrón, convirtiéndose en un ion de plata. ¿Cuáles serían la naturaleza y la magnitud relativa de las fuerzas que actúan sobre él (*a*) antes y (*b*) después de este evento?

29. ¿Cómo llegamos a la conclusión de que el número cuántico del espín magnético m_s puede tener sólo los valores de $\pm\frac{1}{2}$? ¿Qué clases de experimentos apoyan esta conclusión?

30. ¿Por qué cuando el electrón gira el momento magnético está en dirección opuesta al ímpetu angular del espín?

31. Analice lo acertado de la analogía entre la Tierra que gira alrededor del Sol y el electrón que gira alrededor de un protón en el átomo de hidrógeno.

32. Un átomo en estado con ímpetu angular cero tiene simetría esférica en lo que se refiere a su interacción con otros átomos. A veces se dice de él que es un "átomo en bola de billar". Explique.

33. "Si el ímpetu angular de los electrones de los átomos no se cuantizara, la tabla periódica de los elementos no sería lo que es." Analice esta afirmación.

34. ¿En qué difieren las propiedades del helio si el electrón no tiene espín, esto es, si los únicos números cuánticos operativos fueran n, l y m_l?

35. Afirmamos que el número de números cuánticos necesarios para una descripción completa del movimiento del electrón del átomo de hidrógeno es igual al número de grados de libertad que posee el electrón. ¿Cuál es este número? ¿Cómo puede justificarlo?

36. Defina y distinga entre los términos función de onda, densidad de probabilidad y densidad de probabilidad radial.

37. ¿Cuáles son las dimensiones y las unidades en el SI de una función de onda, de una densidad de probabilidad, y de una densidad de probabilidad radial? ¿Son las dimensiones las que usted espera?

38. En el estado del átomo de hidrógeno con $l = 1$, los vectores del ímpetu angular orbital y del espín pueden alinearse paralelos o antiparalelos. ¿Qué arreglo tiene la mayor energía y por qué?

39. ¿Cómo puede usted explicar el hecho de que en el estado del átomo de hidrógeno con $n = 2$ y $l = 0$, la densidad de probabilidad es máxima en $r = 0$ pero la densidad de probabilidad radial es cero? Véase la figura 17.

40. La figura 18*a* muestra las tres densidades de probabilidad de los estados del átomo de hidrógeno con $n = 2$ y $l = 1$. ¿Qué determina la dirección en el espacio que elegimos para el eje z?

41. Considérense las "gráficas de puntos" de las tres densidades de probabilidad de la figura 18*a*, cada una de las cuales es una figura de revolución alrededor del eje z. ¿Encuentra alguna relación entre estas figuras y el modelo vectorial semiclásico del átomo (Fig. 9) para el caso de $l = 1$?

42. Use el principio de incertidumbre de Heisenberg para demostrar que las densidades de probabilidad en un estado con $l = 2$ guardan simetría cilíndrica alrededor del eje z.

43. Explique cómo la interacción entre los movimientos orbital y del espín del electrón de valencia en el sodio, conduce a la división de las líneas espectrales del sodio, produciendo el conocido doblete de sodio. Véase la figura 19.

PROBLEMAS

Sección 51-1 Teoría de Bohr

1. (*a*) Verifique, por sustitución directa de los valores numéricos de las constantes fundamentales, que la energía del estado base del átomo de hidrógeno es de −13.6 eV; véase la ecuación 18. (*b*) Similarmente, demuestre de la ecuación 17 que el valor de la constante R de Rydberg es de 0.01097 nm^{-1}. (*c*) Verifique también el valor numérico de a_0 mediante el cálculo directo de su expresión dada en la ecuación 19.
2. Conteste las preguntas del problema muestra 2, pero para la serie de Lyman.
3. Usando la fórmula de Balmer y Rydberg (Ec. 3), calcule las cinco longitudes de onda más largas de la serie de Balmer.
4. ¿Cuáles son (*a*) la longitud de onda, (*b*) el ímpetu y (*c*) la energía del fotón que se emite cuando el átomo de hidrógeno experimenta una transición desde el estado $n = 3$ hasta $n = 1$?
5. Muestre, en un diagrama de niveles de energía del hidrógeno, los números cuánticos que corresponden a una transición tal que la longitud de onda del fotón emitido sea de 121.6 nm.
6. (*a*) Si el ímpetu angular de la Tierra debido a su movimiento alrededor del Sol se cuantizara de acuerdo con la relación de Bohr $L = nh/2\pi$, ¿cuál sería el número cuántico? (*b*) ¿Podría detectarse tal cuantización si existiera?
7. Calcule la energía de amarre del átomo de hidrógeno en el primer estado excitado.
8. Halle el valor del número cuántico de un átomo de hidrógeno que tenga un radio orbital de 847 pm.
9. Un átomo de hidrógeno emite luz con una longitud de onda de 1281.8 nm. (*a*) ¿Qué transición del átomo de hidrógeno es la responsable de esta radiación? (*b*) ¿A qué serie pertenece esta radiación? (*Sugerencia*: Véase la Fig. 2.)
10. Un átomo de hidrógeno es excitado desde un estado con $n = 1$ hasta otro con $n = 4$. (*a*) Calcule la energía que debe ser absorbida por el átomo. (*b*) Calcule y muestre en un diagrama de niveles de energía las diferentes energías del fotón que pueden ser emitidas cuando el átomo regresa al estado $n = 1$.
11. El tiempo de vida de un electrón en el estado $n = 2$ del hidrógeno es de unos 10 ns. ¿Cuál es la incertidumbre de la energía del estado $n = 2$? Compárese esto con la energía de este estado.
12. Una molécula de un gas diatómico consta de dos átomos de masa m separados por una distancia d girando alrededor de un eje como se indica en la figura 22. Si se supone que su ímpetu angular se cuantiza como en el átomo de Bohr, determine (*a*) las velocidades angulares posibles y (*b*) las energías rotatorias posibles. (*c*) Calcule, de acuerdo con este modelo, la energía del estado base, en eV, de una molécula de O_2 en la que $d = 121$ pm y $m = 16.0$ u.
13. El electromagnetismo clásico predice que, cuando un electrón está girando en una órbita con la frecuencia ν_0, irradiaría energía no sólo a esta frecuencia sino también a $2\nu_0$, $3\nu_0$, $4\nu_0$, y así sucesivamente. Demuestre que esto se predice también mediante la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno en el caso límite de los números cuánticos grandes.

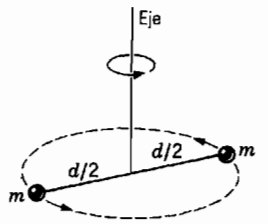


Figura 22 Problema 12.

14. En la tabla 2, demuestre que la cantidad de la última columna está dada por

$$\frac{100(\nu - \nu_0)}{\nu} \approx \frac{150}{n}$$

para números cuánticos grandes.

15. Un neutrón, con una energía cinética de 6.0 eV, choca con un átomo de hidrógeno en reposo en su estado base. Demuestre que este choque debe ser elástico (es decir, debe conservarse la energía). (*Sugerencia*: Demuestre que el átomo no puede ser elevado a un estado de excitación más alto como resultado del choque.)
16. (*a*) Calcule, de acuerdo con el modelo de Bohr, la velocidad del electrón en el estado base para el átomo de hidrógeno. (*b*) Calcule la longitud de onda de de Broglie correspondiente. (*c*) Comparando las respuestas a (*a*) y (*b*), encuentre una relación entre la longitud de onda de de Broglie λ y el radio a_0 de la órbita de Bohr del estado base.
17. De acuerdo con el principio de correspondencia, puesto que $n \to \infty$, esperamos resultados clásicos en el átomo de Bohr. Por lo tanto, la longitud de onda de de Broglie asociada con el electrón (un resultado cuántico) debe volverse más pequeña en comparación con el radio de la órbita de Bohr conforme n aumenta. En realidad, esperamos que $\lambda/r \to 0$ conforme $n \to \infty$. Demuestre que éste es el caso.
18. Un átomo de hidrógeno en un estado que tiene una *energía de amarre* (la energía requerida para desprender un electrón) de 0.85 eV hace una transición a un estado con una *energía de excitación* (la diferencia de energía entre el estado de excitación y el estado base) de 10.2 eV. (*a*) Halle la energía del fotón emitido. (*b*) Muestre esta transición en un diagrama de niveles de energía para el hidrógeno, marcándolos con los múmeros cuánticos apropiados.
19. Del diagrama de niveles de energía del hidrógeno, explique la observación de que la frecuencia de la segunda línea en la serie de Lyman es la suma de las frecuencias de la primera línea de la serie de Lyman y de la primera línea en la serie de Balmer. Éste es un ejemplo del *principio de combinación de Ritz* descubierto empíricamente. Use el diagrama para hallar algunas otras combinaciones válidas.

20. Calcule la velocidad de retroceso de un átomo de hidrógeno, supuesto inicialmente en reposo, cuando el electrón hace una transición desde el estado $n = 4$ directamente al estado base. (*Sugerencia:* Aplique el principio de la conservación del ímpetu lineal.)

21. (*a*) ¿Cuánta energía se requiere para desprender el electrón de un ion de He^+ de su estado base? (*b*) ¿De un ion de Li^{2+} en un estado con $n = 3$? (*Sugerencia*: Véase la Ec. 18.)

22. En las estrellas se encuentra la serie de Pickering en el espectro del He^+. Se emite cuando el electrón del He^+ salta de niveles superiores al nivel con $n = 4$. (*a*) Demuestre que en esta serie las longitudes de onda de las líneas están dadas por

$$\lambda = \frac{1}{R}\frac{4n^2}{n^2 - 16},$$

en donde $n = 5, 6, 7, \ldots$ (*b*) Calcule la longitud de onda de la primera línea en esta serie y del límite de la serie. (*c*) ¿En qué región(es) del espectro se presenta esta serie?

23. Demuestre que, en el modelo semiclásico del átomo de un solo electrón de Bohr, (*a*) las velocidades orbitales se cuantizan según $v_n = (Ze^2/2\epsilon_0 h)(1/n)$ y (*b*) los ímpetus angulares orbitales se cuantizan según $L_n = (h/2\pi)n$.

24. En el estado base del átomo de hidrógeno, de acuerdo con la teoría de Bohr, ¿cuáles son (*a*) el número cuántico, (*b*) el radio de la órbita, (*c*) el ímpetu angular, (*d*) el ímpetu lineal, (*e*) la velocidad angular, (*f*) la velocidad lineal, (*g*) la fuerza sobre el electrón, (*h*) la aceleración del electrón, (*i*) la energía cinética, (*j*) la energía potencial y (*k*) la energía total?

25. ¿Cómo varían las cantidades (*b*) a (*k*) del problema 24 con el número cuántico n?

26. Supongamos que deseamos probar la posibilidad de que los electrones de los átomos se mueven en órbitas, y para ello los "vemos" con fotones con longitud de onda suficientemente corta, digamos de 10.0 pm. (*a*) ¿Cuál sería la energía de tales fotones? (*b*) ¿Cuánta energía transferiría tal fotón a un electrón libre en una colisión Compton de frente? (*c*) ¿Qué le dice esto acerca de la posibilidad de confirmar el movimiento orbital "viendo" un electrón atómico en dos o más puntos a lo largo de su trayectoria? Supóngase que la velocidad del electrón es de $0.10c$.

27. Bohr propuso que, como una alternativa al principio de correspondencia, la expresión de la cuantización del ímpetu angular (Ec. 20) podría tomarse como un postulado básico. A partir de este punto, y usando sólo resultados clásicos, deduzca la expresión de Bohr para las energías cuantizadas de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno (Ec. 18).

28. (*a*) Calcule los intervalos de longitud de onda en que se extienden las series de Lyman, de Balmer y de Paschen. (El intervalo se extiende desde la longitud de onda más larga hasta el límite de la serie.) (*b*) Halle los intervalos de frecuencia correspondientes.

Sección 51-3 Ímpetu o momento angular

29. Verifique que $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}$ J/T $= 5.788 \times 10^{-5}$ eV/T, como se encontró en la ecuación 30.

30. Si el electrón de un átomo de hidrógeno está en un estado con $l = 5$, ¿cuál es el mínimo ángulo posible entre $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}_z$?

31. En un átomo de hidrógeno en un estado con $l = 3$, calcule los valores permitidos de (*a*) L_z, (*b*) μ_z y (*c*) θ. Determine también las magnitudes de (*d*) $\mathbf{L}$ y (*e*) μ. Donde sea apropiado, exprese sus respuestas en unidades de $\hbar$ y μ_B.

32. (*a*) Demuestre que los momentos magnéticos de los electrones en las diversas órbitas de Bohr están dados, de acuerdo con la teoría de Bohr, por

$$\mu = n\mu_B$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr y $n = 1, 2, 3, \ldots$ (*b*) ¿Cómo se compara esta expresión con los valores reales?

33. (*a*) Demuestre, analizando de nuevo el problema 12 para una molécula diatómica con el ímpetu angular cuantizado por las ecuaciones 23 y 24, que los niveles de energía pueden escribirse así:

$$E_l = \frac{h^2 l(l+1)}{4\pi^2 m d^2}, \qquad l = 1, 2, 3, \ldots.$$

(*b*) Calcule las energías de los tres niveles más bajos de la molécula de O_2, en la que los dos átomos están separados por 121 pm. La masa del átomo de oxígeno es de 16.0 u. Compare su resultado con el problema 12.

34. Demuestre que la ecuación 28 es una versión plausible del principio de incertidumbre $\Delta p \cdot \Delta x = h/2\pi$. (*Sugerencia*: Multiplique por r/r; asocie a p con mv, y a L con mvr.)

Sección 51-4 Experimento de Stern-Gerlach

35. De las tres componentes escalares de $\mathbf{L}$, una, L_z, se cuantiza de acuerdo con la ecuación 25. En vista de las restricciones impuestas por las ecuaciones 23 y 24, consideradas juntas, demuestre que lo más que puede decirse acerca de las otras dos componentes de $\mathbf{L}$ es

$$\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{l(l+1) - m_l^2}\,\hbar .$$

Nótese que estas dos componentes no se cuantizan por separado. Demuestre también que

$$\sqrt{l}\,\hbar \le \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \le \sqrt{l(l+1)}\,\hbar .$$

Correlacione estos resultados con la figura 9.

36. Suponga que un átomo de hidrógeno (en su estado base) se desplaza 82 cm en una dirección perpendicular a un campo magnético que tiene un gradiente, en la dirección vertical, de 16 mT/m. (*a*) ¿Cuál es la fuerza sobre el átomo debida al momento magnético del electrón, el cual consideramos que es 1 magnetón de Bohr? (*b*) Halle el desplazamiento vertical cuando su velocidad es de 970 m/s.

37. Calcule la aceleración del átomo de plata cuando pasa a través del imán deflector en el experimento de Stern-Gerlach del problema muestra 6.

38. Suponga que, en el experimento de Stern-Gerlach descrito para los átomos de plata neutros, el campo magnético $\mathbf{B}$ tiene una magnitud de 520 mT. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre las orientaciones de los átomos de plata en los dos subhaces? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de la radiación que induciría una transición entre estos dos

estados? (*c*) ¿Cuál es su longitud de onda, y a qué parte del espectro electromagnético pertenece? El momento magnético de un átomo de plata neutro es de 1 magnetón de Bohr.

Sección 51-6 Conteo de los estados del átomo de hidrógeno

39. Escriba los números cuánticos de todos los estados del átomo de hidrógeno que pertenecen a la subcapa en que $n = 4$ y $l = 3$.

40. Se sabe que el estado de un átomo de hidrógeno tiene un número cuántico de $l = 3$. ¿Cuáles son los números cuánticos n, m_l y m_s posibles?

41. El estado de un átomo de hidrógeno tiene un valor máximo m_l de +4. ¿Qué puede decir acerca del resto de sus números cuánticos?

42. ¿Cuántos estados del átomo de hidrógeno existen con $n = 5$? ¿Cómo se distribuyen entre las subcapas?

43. ¿Cuáles son los números cuánticos n, l, m_l, m_s de los dos electrones del átomo de helio en su estado base?

44. Calcule los dos ángulos posibles entre el vector del ímpetu angular del espín del electrón y el campo magnético en el problema muestra 6. Téngase en cuenta que el ímpetu angular *orbital* del electrón de valencia es cero.

45. Identifique como verdadera o falsa cada una de estas declaraciones en las que intervienen los números cuánticos n, l, m_l. (*a*) Una de estas subcapas no puede existir: $n = 2$, $l = 1$; $n = 4$, $l = 3$; $n = 3$, $l = 2$; $n = 1$, $l = 1$. (*b*) El número de valores de m_l que se permiten depende sólo de l y no de n. (*c*) La capa $n = 4$ contiene cuatro subcapas. (*d*) El menor valor de n que puede funcionar con un l dado es $l + 1$. (*e*) Todos los estados con $l = 0$ tienen también $m_l = 0$, no importa cuál sea el valor de n. (*f*) Toda capa contiene n subcapas.

46. ¿Cuál es la longitud de onda de un fotón que inducirá una transición de un espín del electrón de una orientación paralela a una antiparalela en un campo magnético de 190 mT de magnitud? Supóngase que $l = 0$.

47. El protón, al igual que el electrón, tiene un espín de $\frac{1}{2}$. En el átomo de hidrógeno en su estado base, con $n = 1$ y $l = 0$, existen dos niveles de energía, dependiendo de si los espines del electrón y del protón ocurren en la misma dirección o en direcciones opuestas. El estado con los espines en la dirección opuesta tiene la mayor energía. Si un átomo está en este estado y uno de los espines se da la vuelta, la pequeña diferencia de energía se libera en forma de un fotón de 21 cm de longitud de onda. Este proceso espontáneo del cambio de sentido del espín es muy lento, siendo la vida media del proceso de unos 10^7 años. Sin embargo, los radioastrónomos observan esta radiación de 21 cm en el espacio interestelar, donde la densidad del hidrógeno es tan pequeña que un átomo puede dar la vuelta antes de que lo perturben las colisiones con otros átomos. Calcule el campo magnético efectivo (debido al momento dipolar magnético del protón) experimentado por el electrón en la emisión de esta radiación de 21 cm.

48. Demuestre que el número de estados en cualquier capa está dado por $2n^2$.

Sección 51-7 Estado base del hidrógeno

49. En el estado base del átomo de hidrógeno, evalúe el cuadrado de la función de onda, $\psi^2(r)$ y la densidad de probabilidad radial $P_r(r)$ para las posiciones (*a*) $r = 0$ y (*b*) $r = a_0$. Explique qué significan estas cantidades.

50. En la figura 16*b*, verifique los valores graficados de $P_r(r)$ en (*a*) $r = 0$, (*b*) $r = a_0$ y (*c*) $r = 2a_0$.

51. Halle la razón matemática de las probabilidades de que el electrón del átomo de hidrógeno se encuentre en una capa delgada con el radio de Bohr y de que se encuentre en una capa del mismo espesor al doble de esa distancia.

52. Una región esférica de $0.05a_0$ de radio está localizada a una distancia a_0 del núcleo de un átomo de hidrógeno en su estado base. Calcule la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de esta esfera. (Suponga que ψ es constante dentro de la esfera.)

53. En un átomo de hidrógeno en su estado base, calcule la probabilidad de hallar el electrón entre dos esferas de radios $r = 1.00a_0$ y $r = 1.01a_0$.

54. En los átomos existe una probabilidad finita, aunque muy pequeña, de que, en algún instante, un electrón orbital se encuentre realmente dentro del núcleo. De hecho, ciertos núcleos inestables usan esta aparición ocasional del electrón para desintegrarse mediante la *captura del electrón*. Si se supone que el propio protón es una esfera de radio 1.1×10^{-15} m y que la función de onda del electrón del átomo de hidrógeno se cumple todo el tiempo hasta el centro del protón, use la función de onda del estado base para calcular la probabilidad de que el electrón del átomo de hidrógeno esté dentro de su núcleo. (*Sugerencia*: Cuando $x \ll 1$, $e^{-x} = 1$.)

55. Repita el problema 54 para un electrón en el estado $n = 2$, $l = 0$; esto es, calcule la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro del protón, de radio = 1.1 fm, que constituye el núcleo del átomo de hidrógeno.

56. (*a*) En el estado base del átomo de hidrógeno, demuestre que la probabilidad P de que el electrón se encuentre dentro de una esfera de radio r está dada por

$$P = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2),$$

donde $x = r/a_0$. (*b*) Evalúe la probabilidad de que, en el estado base, el electrón se encuentre dentro de una esfera de radio a_0.

57. Use el resultado del problema 56 para calcular la probabilidad de que el electrón de un átomo de hidrógeno en el estado base se encuentre entre las esferas $r = a_0$ y $r = 2a_0$.

58. En un electrón en el estado base del átomo de hidrógeno, calcule el radio de una esfera para la que la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de ella es igual a la probabilidad de que el electrón se encuentre fuera de la misma. (*Sugerencia*: Véase el problema 56.)

Sección 51-8 Estados excitados del hidrógeno

59. Para el estado $n = 2$, $l = 0$, (*a*) localice los dos máximos de la curva de densidad de probabilidad radial de la figura 17*b*, y (*b*) calcule los valores de la densidad de probabi-

lidad radial en los dos máximos; compárese con la figura 17*b*.

60. Usando la ecuación 46, demuestre que, en el estado del átomo de hidrógeno con $n = 2$ y $l = 1$,

$$\int_0^\infty P_r(r)\, dr = 1.$$

¿Cuál es la interpretación física de este resultado?

61. Calcule la probabilidad de hallar el electrón entre dos esferas de radios $r = 5.00a_0$ y $r = 5.01a_0$ en un átomo de hidrógeno en un estado con $n = 2$ y $l = 0$.

62. Para un átomo de hidrógeno en un estado con $n = 2$ y $l = 0$, ¿cuál es la probabilidad de hallar el electrón en alguna parte dentro del menor de los dos máximos de su función de densidad de probabilidad radial? Véase la figura 17*b*.

Sección 51-9 Detalles de la estructura atómica

63. El potasio ($Z = 19$), al igual que el sodio ($Z = 11$), es un metal alcalino, cuyo único electrón de valencia gira alrededor de una coraza de 18 electrones parecida al argón. Como en el sodio, existe un doblete del potasio, siendo sus longitudes de onda de 764.5 nm y 769.9 nm. Los números cuánticos de los niveles que dan origen a estas líneas son precisamente los mismos que para el sodio (véase la Fig. 19) excepto que $n = 4$. Calcule (*a*) la división de la energía entre los dos estados superiores y (*b*) la diferencia de energía entre el estado más alto y el estado base.

64. Las longitudes de onda de las líneas del doblete del sodio (véase la Fig. 19) son de 588.995 nm y 589.592 nm. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre los dos estados superiores en esa figura? (*b*) Esta diferencia de energía surge porque el momento dipolar magnético del espín del electrón puede orientarse paralelo o antiparalelo al campo magnético interno asociado con el movimiento orbital del electrón. Use el resultado que acaba de calcular para determinar la intensidad de este campo magnético interno. El momento dipolar magnético del espín del electrón tiene una magnitud de 1 magnetón de Bohr.

65. Aplique el modelo de Bohr a un átomo muónico, el cual consta de un núcleo de carga Ze con un muón (partícula elemental con una carga $q = -e$ y una masa $m = 207m_e$, donde m_e es la masa del electrón) negativo que gira alrededor de él. Calcule (*a*) la separación entre el muón y el núcleo en la primera órbita de Bohr, (*b*) la energía de ionización y (*c*) la longitud de onda del fotón más energético que puede emitirse. Suponga que el muón esté girando alrededor de un núcleo de hidrógeno ($Z = 1$). Véase "The Muonium Atom", por Vernon W. Hughes, *Scientific American*, abril de 1966, pág. 93.

66. Aplique el modelo de Bohr al átomo de positronio. Éste consta de un electrón positivo y otro negativo girando alrededor de su centro de masa, que se encuentra a medio camino entre ellos. (*a*) ¿Qué relación existe entre este espectro y el espectro del hidrógeno? (*b*) ¿Cuál es el radio de la órbita del estado base? (*Sugerencia*: Calcule la masa reducida del átomo.) Véase "Exotic Atoms", por E. H. S. Burhop, *Contemporary Physics*, julio de 1970, pág. 335.

CAPÍTULO 52

FÍSICA ATÓMICA

En los tres capítulos anteriores hemos desarrollado los fundamentos de la mecánica ondulatoria y usado sus principios para entender la estructura del átomo de hidrógeno. En este capítulo ampliaremos el desarrollo y consideraremos la estructura de los demás átomos, distintos del hidrógeno.

Comenzamos estudiando la emisión de rayos X por átomos, lo cual proporcionó históricamente el primer medio definitivo para determinar el número de electrones en un átomo. A continuación consideramos las reglas para determinar cómo construir átomos con más de un electrón, y cómo esas reglas y la estructura resultante determinan el arreglo de los elementos en la conocida tabla periódica. Utilizamos información de la estructura atómica para analizar la operación del láser helio-neón, terminando con una breve mirada a cómo podemos ampliar nuestro conocimiento de la estructura atómica y de las funciones de onda para conocer la estructura de las moléculas.

52-1 EL ESPECTRO DE RAYOS X

Hasta ahora hemos tratado del comportamiento de electrones aislados en los átomos, como el electrón individual del hidrógeno o el electrón de valencia del sodio. Ahora dirigimos nuestra atención al comportamiento de los electrones en el interior del átomo. Pasamos de una región de energía de amarre relativamente baja (5 eV para el trabajo necesario para desprender el electrón de valencia del sodio, por ejemplo) a una región de energía más elevada (70 keV para el trabajo necesario para desprender el electrón más interno del tungsteno, por ejemplo). Las radiaciones con las que tratamos, si bien son, por supuesto, todavía parte del espectro electromagnético, difieren en longitud de onda, por ejemplo, desde 6×10^{-7} m para las líneas del doblete del sodio hasta 2×10^{-11} m para una de las radiaciones características del tungsteno, una razón de unos 30,000. Ahora hablaremos de los rayos X.

Son de todos conocidas las características de la utilidad de estas penetrantes radiaciones en los diagnósticos médicos y dentales y en la terapia, al igual que sus muchas aplicaciones industriales, como el examen de uniones soldadas en las tuberías. En la sección 47-4 describimos cómo pueden emplearse los rayos X para deducir las estructuras atómicas de los materiales cristalinos. Las estructuras de sustancias complejas como la insulina y el ADN se descubrieron mediante estos modelos. En la astronomía, los satélites de rayos X nos han mostrado una visión completamente nueva de nuestro Universo a través de imágenes de rayos X emitidas por las estrellas y las galaxias.

En la sección 47-4 vimos que los rayos X se producen cuando electrones energéticos chocan con un blanco sólido, siendo llevados al reposo allí. La figura 1 muestra el espectro de la longitud de onda de los rayos X que se produce cuando electrones de 35 keV chocan con un blanco de molibdeno.

El espectro continuo de rayos X

Examinaremos en primer lugar el espectro continuo de la figura 1, haciendo a un lado —por ahora— los dos picos prominentes que surgen de él. Consideremos un electrón de energía cinética K que se dispersa del núcleo de uno de los átomos de molibdeno en el blanco, como en la figura 2. En tal colisión, se transfiere un ímpetu al átomo, y el electrón pierde energía cinética. (Puesto que el átomo es tan masivo, el ímpetu que el electrón le imprime al átomo

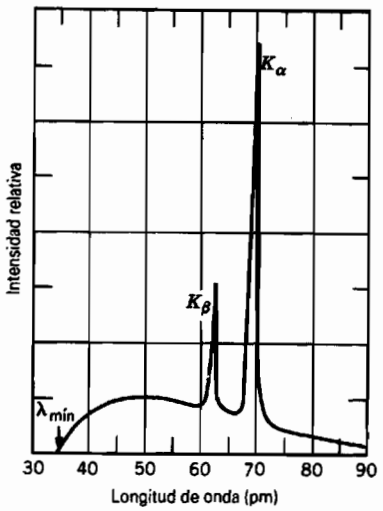


Figura 1 El espectro de la longitud de onda de los rayos X que se produce cuando electrones de 35 keV chocan con un blanco de molibdeno (1 pm = 10^{-12} m.)

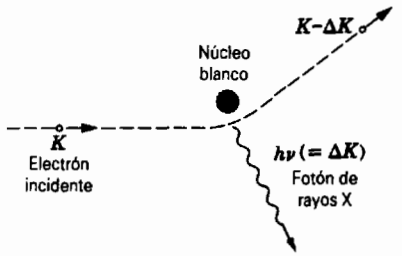


Figura 2 Un electrón que pasa cerca del núcleo de un átomo blanco se acelera e irradia un fotón, perdiendo parte de su energía cinética en el proceso.

da por resultado una energía cinética despreciable.) La pérdida de energía del electrón aparece como energía $h\nu$ de un fotón de rayos X que irradia hacia afuera del lugar del encuentro. Este proceso se llama *bremsstrahlung* (en alemán, "radiación por frenado") y es la responsable del espectro continuo de rayos X.

Supongamos que los electrones se aceleran por una diferencia de potencial V e inciden sobre un blanco grueso. Debido al proceso bremsstrahlung en el blanco, los electrones pueden perder cualquier cantidad de energía entre 0 y su energía de eV máxima. Los fotones de bremsstrahlung tienen un espectro continuo correspondiente entre 0 y eV.

Una característica prominente del espectro continuo de la figura 1 es la longitud de onda de corte $\lambda_{mín}$ muy precisamente definida por debajo de la cual no existe el espectro continuo. Este mínimo de longitud de onda corresponde a un suceso de desaceleración en el que uno de los electrones incidentes (con energía cinética inicial eV) pierde *toda* su energía en un solo encuentro, irradiándola hacia afuera en forma de fotón aislado. Así,

$$eV = h\nu_{máx} = \frac{hc}{\lambda_{mín}},$$

o sea

$$\lambda_{mín} = \frac{hc}{eV}. \qquad (1)$$

La ecuación 1 muestra que si $h \to 0$, entonces $\lambda_{mín} \to 0$, que es la predicción de la teoría clásica. La existencia de una longitud de onda mínima es un fenómeno cuántico.

Nótese que al cambiar la materia blanco, por ejemplo, de molibdeno a cobre, la forma general y la intensidad del espectro continuo pueden cambiar, pero la longitud de onda de corte no cambiará. Esta longitud de onda depende sólo de la energía cinética de los electrones que bombardean el blanco y no de la materia blanco.

El espectro característico de rayos X

Fijemos ahora nuestra atención en los dos picos de la figura 1, denotados por K_α y K_β. Estos picos son característicos de la materia blanco y, junto con otros picos que aparecen en longitudes de onda más largas, conforman el *espectro característico de rayos X* del elemento en cuestión.

He aquí cómo surgen estos fotones de rayos X. (1) Un electrón energético entrante choca con un átomo del blanco y desprende uno de los electrones de sus capas más profundas. Si el electrón está en la capa con $n = 1$ (llamada, por razones históricas, la capa K) se produce una vacante, o un "hueco" como lo llamaremos, en esta capa. (2) Uno de los electrones exteriores se mueve hacia adentro para llenar este hueco y, en el proceso, el átomo emite un fotón característico de rayos X. Si el electrón cae de la capa con $n = 2$ (llamada capa L), tenemos la línea K_α de la figura 1; si cae de la siguiente capa de fuera (llamada capa M) tenemos la línea K_β, y así sucesivamente. Por supuesto, tal transición dejará un hueco ya sea en la capa L o en la M, pero este hueco se llenará con un electrón de todavía más afuera en el átomo; en este proceso, se emite todavía otra línea del espectro característico de rayos X.

La figura 3 muestra un diagrama de los niveles atómicos de energía del molibdeno, el elemento al que se refiere la figura 1. La línea base ($E = 0$) representa la energía de un átomo neutro de molibdeno en su estado base. El nivel marcado K ($E = 20$ keV) representa la energía de un átomo neutro de molibdeno con un hueco en su capa K. Similarmente, el nivel marcado L ($E = 2.7$ keV) representa la energía de un átomo con un hueco en su capa L, y así sucesivamente. Nótese que al representar los niveles de energía del átomo de hidrógeno (véase la Fig. 4 del capítulo 51), elegimos una línea base diferente. En lugar

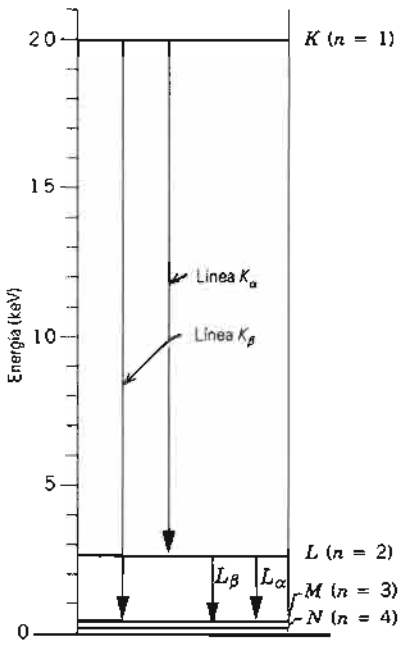


Figura 3 Diagrama de los niveles atómicos de energía del molibdeno, que muestra las transiciones de las que surgen los rayos X característicos de ese elemento. (Todos los niveles, excepto el nivel K, contienen un número de componentes muy próximas entre sí, que no se muestran en la figura.)

del átomo en su estado base, elegimos allí el átomo con su electrón desprendido al infinito como nuestra configuración $E = 0$. En realidad, la configuración atómica para la que elegimos poner $E = 0$ no importa. Sólo son físicamente significativas las diferencias de energía, y éstas son las mismas independientemente de cuál haya sido nuestra elección de la línea base $E = 0$.

Las transiciones K_α y K_β en la figura 3 muestran el origen de los dos picos de la figura 1. La línea K_α, por ejemplo, se origina cuando un electrón de la capa L del molibdeno —que se mueve *hacia arriba* en el diagrama del nivel de energía— ocupa el hueco en la capa K. Esto equivale a decir que un hueco —que se mueve *hacia abajo* en el diagrama— pasa de la capa K a la L. Es más fácil seguirle la pista a un solo hueco que a los 41 electrones del molibdeno ionizado que están potencialmente disponibles para ocuparlo. Hemos trazado las flechas en la figura 3 desde el punto de vista de las transiciones de los huecos.

Problema muestra 1 Calcule la longitud de onda $\lambda_{mín}$ del espectro continuo de rayos X que se emiten cuando electrones de 35 keV inciden sobre un blanco de molibdeno, como en la figura 1.

Solución De la ecuación 1, tenemos

$$\lambda_{mín} = \frac{hc}{eV} = \frac{(4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{35.0 \times 10^{3}\ \text{eV}}$$

$$= 3.54 \times 10^{-11}\ \text{m} = 35.4\ \text{pm}.$$

Esto está de acuerdo con el resultado experimental mostrado por la flecha vertical de la figura 1. Nótese que la ecuación 1 no contiene una referencia al material del blanco. Para un potencial de aceleración dado, todos los blancos, no importa de qué estén hechos, exhiben la misma longitud de onda de corte.

52-2 LOS RAYOS X Y LA NUMERACIÓN DE LOS ELEMENTOS

En esta sección consideramos lo que los rayos X nos pueden enseñar acerca de la estructura de los átomos que los emiten o los absorben. Nos enfocamos en el trabajo del físico inglés H. G. J. Moseley,* quien, por medio de estudios de rayos X, desarrolló el concepto de número atómico y le dio un significado físico en términos de la estructura atómica a la disposición de los elementos en la tabla periódica.

En su investigación del concepto del número atómico, Moseley generó rayos X característicos mediante el uso de tantos elementos como pudo hallar —encontró 38— como blancos del bombardeo de electrones en un tubo evacuado de rayos X especial de su propio diseño. Él midió las longitudes de onda de un número de las líneas del espectro característico de los rayos X por el método de difracción del cristal, descrito en la sección 47-4. Él buscaba, y pronto lo encontró, regularidades en los espectros al pasar de un elemento a otro en la tabla periódica. En particular, notó que si, para una línea de espectro dada como K_α, graficaba la raíz cuadrada de su frecuencia ($= \sqrt{\nu} = \sqrt{c/\lambda}$) contra la posición del elemento asociado en la tabla periódica, el resultado era una línea recta. La figura 4 muestra una parte de sus datos. Veremos después por qué es lógico graficar los datos de esta manera y por qué cabe esperar una línea recta. La conclusión de Moseley, a partir de todos sus datos, fue:

> Tenemos aquí una prueba de que existe en el átomo una cantidad fundamental, que aumenta en fases regulares al pasar de un elemento al siguiente. Esta

* Henry G. J. Moseley (1887-1915) se unió al laboratorio de Ernest Rutherford en la Universidad de Manchester en 1910. Mediante una brillante serie de experimentos, Moseley demostró que las frecuencias características de rayos X aumentaban regularmente de acuerdo con el número atómico del elemento, y fue capaz de localizar espacios en las secuencias que corresponden a elementos no descubiertos aún en su tiempo. La promisoria carrera de investigación de Moseley se vio truncada cuando murió a la edad de 27 años en la batalla de Gallipoli, en la Primera Guerra Mundial.

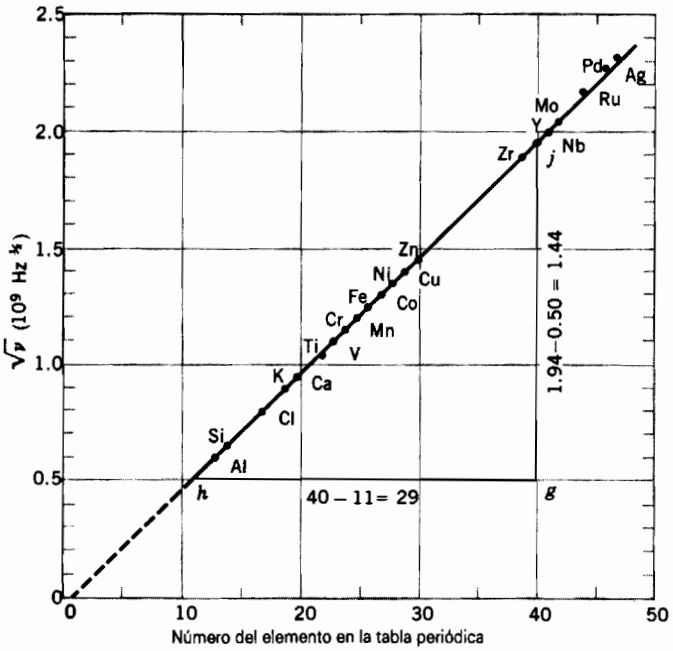


Figura 4 Gráfica de Moseley de la línea K_α de los espectros característicos de rayos X de 21 elementos. La frecuencia se determina de la longitud de onda medida.

cantidad sólo puede ser la carga del núcleo atómico central.

El logro de Moseley puede apreciarse al máximo cuando pensamos en el grado de comprensión de la estructura atómica en su época (1913). El modelo nuclear del átomo había sido propuesto por Rutherford tan sólo 2 años antes. Poco se sabía acerca de la magnitud de la carga nuclear o del arreglo de los electrones atómicos; Bohr publicó su primer trabajo sobre la estructura atómica apenas en ese mismo año. En aquel tiempo se asignaba un lugar en la tabla periódica a un elemento mediante su *masa* atómica, si bien existían varios casos en los que era necesario invertir este orden para cumplir con las exigencias de la evidencia química. La tabla tenía varios cuadros vacíos, y había habido un número sorprendentemente grande de casos en que se reclamaba el descubrimiento de un nuevo elemento; todavía no se habían clasificado los elementos de tierras raras, a causa de los problemas originados por sus propiedades químicas similares.

Debido al trabajo de Moseley, el espectro característico de rayos X se convirtió en la signatura universalmente aceptada de un elemento. A través de tales estudios fue posible colocar los elementos en una línea, por decirlo así, y asignarles números consecutivos, todo ello sin la más ligera necesidad de conocer algo acerca de sus propiedades químicas.

No es difícil ver por qué el espectro característico de rayos X muestra tan impresionantes regularidades de un elemento a otro y el espectro óptico no. La clave de la identidad de un elemento es la carga de su núcleo. Ésta determina el número de sus electrones atómicos y, por lo tanto, de sus propiedades químicas y físicas. El oro, por ejemplo, es lo que es porque sus átomos tienen una carga nuclear de $+79e$. Si tuviera sólo una unidad de carga más, no sería oro sino mercurio; si tuviera una menos, sería platino. Los electrones K, que desempeñan un papel tan importante en la generación del espectro característico de rayos X, se encuentran muy cerca del núcleo y constituyen sondas sensibles de su carga. El espectro óptico, por el contrario, se asocia con las transiciones de los electrones más exteriores o de valencia, que están fuertemente apantallados en el núcleo por los restantes electrones $Z - 1$ del átomo; no son sondas sensibles de la carga nuclear.

La teoría de Bohr y la gráfica de Moseley

La teoría de Bohr funciona bien para el hidrógeno pero falla para los átomos con más de un electrón (en parte porque no incluye a la interacción de repulsión entre los electrones). Sin embargo, proporciona una excelente primera aproximación en la explicación de la gráfica de Moseley de la figura 4.

Consideremos un electrón en la capa L de un átomo que está próximo a moverse a un hueco en la capa K, emitiendo un fotón K_α de rayos X en el proceso. Si empleamos la ley de Gauss (véase la Ec. 17 del capítulo 29), encontramos que el campo eléctrico en la posición del electrón L está determinado por la carga encerrada en una esfera imaginaria de radio igual a la coordenada radial del electrón L. Esta esfera encierra una carga $+Ze$ del núcleo y una carga $-e$ del electrón individual K remanente. Decimos que el electrón K "apantalla" la carga del núcleo. En parte por este apantallamiento y en parte por los reajustes que ocurren en la nube de electrones como un todo, el número

atómico efectivo de la transición se convierte en $Z - b$, donde $b \approx 1$.

La fórmula de Bohr para la frecuencia de la radiación que corresponde a una transición en un átomo semejante al hidrógeno entre dos niveles atómicos cualesquiera que difieran en energía por ΔE es

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (2)$$

usando la ecuación 18 del capítulo 51 para los niveles de energía. De la transición K_α de la figura 3, podemos sustituir Z por $Z - b$ y sustituir m por 1 y n por 2. Al hacerlo tenemos

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)(Z - b)^2.$$

Al extraer la raíz cuadrada de cada lado tenemos que

$$\sqrt{\nu} = \left(\frac{3m_e e^4}{32\epsilon_0^2 h^3}\right)^{1/2}(Z - b), \qquad (3)$$

que podemos escribir en la forma

$$\sqrt{\nu} = aZ - ab, \qquad (4)$$

donde a es la constante indicada y $b = 1$.

La ecuación 4 representa una línea recta, en total acuerdo con los datos experimentales de la figura 4. Sin embargo, si esta gráfica se ampliara a los números atómicos mayores, el resultado es que no sería realmente recta sino un tanto cóncava hacia arriba. Sin embargo, la concordancia cuantitativa con la teoría de Bohr es sorprendentemente buena, como lo muestra el problema muestra 2.

Problema muestra 2 Calcule el valor de la cantidad a en la ecuación 4 y compárelo con la pendiente medida de la línea recta de la figura 4.

Solución Al comparar las ecuaciones 3 y 4 nos permite escribir

$$a = \left(\frac{3m_e e^4}{32\epsilon_0^2 h^3}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\,(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})^{1/2}(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{4\sqrt{2}\,(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^{3/2}}$$
$$= 4.95 \times 10^7\ \text{Hz}^{1/2}.$$

La medición cuidadosa de la figura 4, usando el triángulo hgj, da

$$a = \frac{gj}{hg} = \frac{(1.94 - 0.50) \times 10^9\ \text{Hz}^{1/2}}{(40 - 11)} = 4.96 \times 10^7\ \text{Hz}^{1/2},$$

que concuerda con el valor predicho por la teoría de Bohr dentro de la incertidumbre de la medición gráfica. Nótese también que la intersección de la figura 4 está, de hecho, cerca de 1, como se espera de nuestro argumento del apantallamiento.

La concordancia con la teoría de Bohr no es tan buena para las otras líneas del espectro de rayos X, correspondientes a las transiciones de los electrones que están más alejados del núcleo; aquí debemos confiar en los cálculos basados en la mecánica ondulatoria.

Problema muestra 3 Un blanco de cobalto se bombardea con electrones, y se miden las longitudes de onda de su espectro característico. Se halla también un segundo espectro característico más débil, a causa de una impureza en el blanco. Las longitudes de onda de las líneas K_α son 178.9 pm (el cobalto) y 143.5 pm (la impureza). ¿Cuál es la impureza?

Solución Apliquemos la ecuación 4 tanto al cobalto como a la impureza. Al introducir c/λ en lugar de ν (y si suponemos que $b = 1$), obtenemos

$$\sqrt{\frac{c}{\lambda_{Co}}} = aZ_{Co} - a \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{c}{\lambda_X}} = aZ_X - a.$$

La división

$$\sqrt{\frac{\lambda_{Co}}{\lambda_X}} = \frac{Z_X - 1}{Z_{Co} - 1}.$$

Al sustituir nos da

$$\sqrt{\frac{178.9\ \text{pm}}{143.5\ \text{pm}}} = \frac{Z_X - 1}{27 - 1}.$$

Al despejar la incógnita, hallamos que $Z_X = 30.0$; al consultar la tabla periódica podemos identificar que la impureza es el zinc.

52-3 CONSTRUIR ÁTOMOS

En la sección precedente vimos cómo, al medir las longitudes de onda del espectro característico de rayos X de un elemento, podíamos asignar un *número atómico* Z a cada elemento y así alinearlos de acuerdo con un principio lógico.

Aquí vamos un paso más allá. Tratamos de ver cuán lejos nos pueden llevar los principios de la mecánica ondulatoria en la descomposición de esta línea en una serie de segmentos, correspondientes a los periodos horizontales de la tabla periódica de los elementos.

El intento se convierte esencialmente en un éxito total. Puede explicarse cada detalle de la tabla (véase el apéndice E), incluyendo (1) los números de los elementos en los siete periodos horizontales en los que se divide la tabla, (2) la semejanza de las propiedades químicas de los elementos en las diversas columnas verticales —por ejemplo, los metales alcalinos y los gases inertes— y (3) la existencia de la serie de los elementos de tierras raras, o lantánidos, incorporados todos dentro de un cuadro de la tabla. En suma, la mecánica ondulatoria, complementada con ciertos principios de guía que estudiaremos en esta sección, explican cada una de las características de esta tabla y por lo tanto, esencialmente, de toda la química.

Imaginemos —a la manera de un *Tinkertoy*— que vamos a construir un átomo típico de cada uno de los más de 100 elementos de que se compone la tabla periódica. Nuestra materia de arranque será una dotación de núcleos, caracterizados cada uno de ellos por una carga + Ze, donde Z varía en enteros de 1 a más de 100. Necesitamos también una amplia dotación de electrones. Nuestro plan es agregar Z electrones a cada núcleo de modo tal que produzcan un átomo neutro en su estado base.

El éxito se logra únicamente si observamos estos tres principios en la construcción del átomo:

1. *El principio del número cuántico.* El electrón de un átomo de hidrógeno puede estar —por mencionar una posibilidad— en un estado descrito por los números cuánticos $n = 2$, $l = 1$, $m_l = +1$, y $m_s = -\frac{1}{2}$. Sucede que un electrón en particular de *cualquier* átomo puede también identificarse por completo por este mismo conjunto de números cuánticos. Esto no quiere decir que los electrones se moverán de la misma manera en estos tres casos diferentes, porque no lo harán. Dicho de otro modo, si bien estos electrones pueden compartir el mismo conjunto de números cuánticos, los potenciales en que se mueven —y por lo tanto, sus funciones de onda— serán muy diferentes. Específicamente, el principio del número cuántico afirma:

> *En cualquier átomo, e independientemente del número de electrones que contenga, pueden emplearse los números cuánticos del átomo de hidrógeno para describir los estados del electrón y asignar electrones a las capas y subcapas. Además, las restricciones entre los números cuánticos que se estudiaron en la sección 51-6 siguen vigentes.*

2. *El principio de exclusión de Pauli.* Este poderoso principio fue propuesto en 1925 por el físico Wolfgang Pauli, nacido en Austria. En términos generales, nos dice que dos electrones no pueden poseer el mismo estado de movimiento al mismo tiempo. Más específicamente, afirma que:

> *En un átomo con varios electrones no puede haber nunca más de un solo electrón en un estado cuántico dado. Es decir, dos electrones de un átomo no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos.*

Si este principio no fuera válido, todos los electrones de un átomo se apilarían en su capa K, y la química no existiría como la conocemos. Usted, lector no estaría aquí leyendo esto ni tampoco nosotros estaríamos para escribirlo. ¡El principio de exclusión de Pauli no es una afirmación trivial!

3. *El principio de la mínima energía.* Mientras llenamos subcapas con electrones en el curso de la construcción de un átomo, surge la pregunta: ¿En qué orden las llenaremos? La respuesta es: cuando se llena una subcapa, colocamos el siguiente electrón en cualquier subcapa vacante, y ello nos llevará a un átomo de mínima energía. Hacerlo de otro modo sería apartarse del propósito que nos habíamos fijado de construir los átomos en sus estados base.

La subcapa de mínima energía puede identificarse con la ayuda de la regla siguiente, que primero enunciamos y luego trataremos de hacerla razonable:

> *Para un número n cuántico principal dado en un átomo de varios electrones, el orden de energía creciente de las subcapas es el orden en el que aumente l.*

La tabla 1 ayuda a aclarar estar regla. Consideremos primero un átomo de hidrógeno cuyo único electrón está en un estado con $n = 4$. Existen cuatro valores de l permitidos, a saber, 0, 1, 2 y 3. En los electrones de átomos con verdaderamente un solo electrón —como el hidrógeno— la energía no depende de l en absoluto, sino sólo de n, estando dada por la ecuación 18 del capítulo 51,

$$E = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0 h^2}\frac{Z^2}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5}$$

Recuérdese que esta relación se predice no sólo por la teoría de Bohr sino también por la mecánica ondulatoria. Si $Z = 1$ y $n = 4$ en esta relación nos da, para el hidrógeno, $E = -0.85$ eV, como lo muestra la tabla 1.

Consideremos ahora un núcleo de plomo ($Z = 82$) alrededor del cual únicamente circula un solo electrón, nuevamente en un estado con $n = 4$. La ecuación 5 se aplica también a este átomo (debemos admitir que ello es más bien improbable) de un electrón. Para $Z = 82$ y $n = 4$, la tabla muestra que tenemos $E = -5720$ eV, una vez más independientemente de l. El electrón se mueve en el campo de un núcleo con una carga de $+82e$; además, es atraído muy cerca de este núcleo, siendo el radio de la órbita de Bohr equivalente (véase la ecuación 19 del capítulo 51) 82 veces menor que para el hidrógeno.

Finalmente, construyamos un átomo de plomo normal, neutro "espolvoreando" los 81 electrones que faltan. Los electrones más exteriores o electrones de valencia del plomo tienen $n = 6$, así que un electrón con $n = 4$ se encontraría en cualquier parte en el centro de la nube de electrones difusa que rodea al núcleo de plomo.

La ecuación 5 ya no es válida para este átomo multielectrónico, pero podemos hallar experimentalmente las energías de las cuatro subcapas con $n = 4$ a partir de estudios de rayos X. En la última columna de la tabla 1 se muestran sus valores aproximados. Vemos en seguida que se encuentran más altos en energía (esto es, las energías de amarre son menores) que en nuestro hipotético "átomo" de plomo de un solo electrón y que

TABLA 1 LOS NIVELES DE ENERGÍA DE LOS ELECTRONES CON $n = 4$ EN TRES ÁTOMOS DIFERENTES

Número cuántico orbital l	*Energía* (eV)		
	Hidrógeno[a] $Z = 1$	*"Plomo"*[b] $Z = 82$	*Plomo*[c] $Z = 82$
0	-0.85	-5720	-890
1	-0.85	-5720	-710
2	-0.85	-5720	-420
3	-0.85	-5720	-140

[a]Un átomo neutro de hidrógeno ; véase la ecuación 5.
[b]Un átomo hipotético de un solo electrón con $Z = 82$; véase la ecuación 5.
[c]Un átomo neutro real de plomo ($Z = 82$); datos del experimento.

varían con l justo como lo predice la regla de la mínima energía.

Se deduce que los electrones del plomo se vuelven más débilmente ligados cuando está presente toda la nube de electrones porque cierta fracción sustancial de esta nube apantalla el núcleo eléctricamente. Un electrón típico con $n = 4$ ya no "ve" toda la carga nuclear positiva, sino más bien ve esta carga reducida por la carga negativa de aquella parte de la nube de electrones que se encuentra entre el núcleo y el radio efectivo del electrón en cuestión.

En cuanto a la variación de la energía con l, preguntémonos cómo se vería una órbita con $l = 0$ con las restricciones mecánicas del modelo de Bohr. Verdaderamente, para no tener un ímpetu angular, el electrón tendría que oscilar de un lado al otro en un segmento de línea recta que pase directamente por el núcleo. Esto no sucede, por supuesto. El postulado equivalente de la mecánica ondulatoria es que un electrón con $l = 0$ debe pasar una mayor parte de su tiempo cerca del núcleo de lo que lo hacen los electrones con valores mayores de l. Tales electrones "verían" entonces, en promedio, una carga nuclear efectiva mayor y el enlace sería mayor; se encontrarían más bajos en energía, justo como lo predicen el principio de la mínima energía y la tabla 1. Es interesante comparar las figuras 17 y 18 del capítulo 51, que muestran los estados del hidrógeno con $n = 2$, $l = 0$ y $n = 2$, $l = 1$. En el estado $l = 0$ existe realmente una marcada tendencia a que el electrón se agrupe cerca del núcleo —nótese el máximo secundario cercano— justo como nuestro argumento cualitativo indica que estaría.

52-4 LA TABLA PERIÓDICA

La figura 5 muestra cómo se ensambla la tabla periódica, usando las tres reglas de construcción del átomo que hemos descrito en la sección anterior. En esta figura la energía aumenta hacia arriba. Los estados con el mismo valor de l han sido desplazados hacia la izquierda por claridad y agrupados en columnas de acuerdo con su valor l.

Antes de que veamos más de cerca esta tabla, introduciremos una nueva notación para el número cuántico l del ímpetu angular. Por razones históricas* se le han dado a los valores de l letras equivalentes, de acuerdo con este esquema:

l	0	1	2	3	4	5 . . .
Símbolo	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	*h* . . .

En esta notación, el estado con $n = 1$ y $l = 0$ se llama estado "1*s*". De manera semejante, el estado con $n = 4$ y $l = 3$ se llama estado "4*f*", y así sucesivamente. Estos estados se conocen también como *subcapas*.

La dependencia de l de la energía es una característica dominante de la figura 5. Véase, por ejemplo, la secuencia de estados 4*s*, 4*p*, 4*d* y 4*f*. Se encuentran en la figura en el orden de energía creciente, justo como lo requiere la regla de la mínima energía. De hecho, los estados 4*f* se encuentran tan altos que están arriba de los estados 5*s* y 5*p*, que tienen un valor de n más alto.

Se emplea el término *capa* para designar un grupo de estados, muy cercanos en cuanto a energía, que tiene una estabilidad particular cuando esos estados están totalmente ocupados. Al tratar con el átomo de hidrógeno (para el que la energía depende únicamente del número cuántico principal n), identificamos las capas dándoles el valor de ese número cuántico. Vemos ahora que, en los átomos con muchos electrones, el número cuántico principal ya no es un buen indicador por sí solo. Como lo muestra la

* Las letras *s*, *p*, *d*, *f* son las iniciales en inglés de, *sharp*, *principal*, *diffuse* y *fundamental*, es decir, *agudo*, *principal*, *difuso* y *fundamental* que fueron las primeras designaciones espectroscópicas de las líneas espectrales. Más allá de *f*, los estados se denotan en orden alfabético.

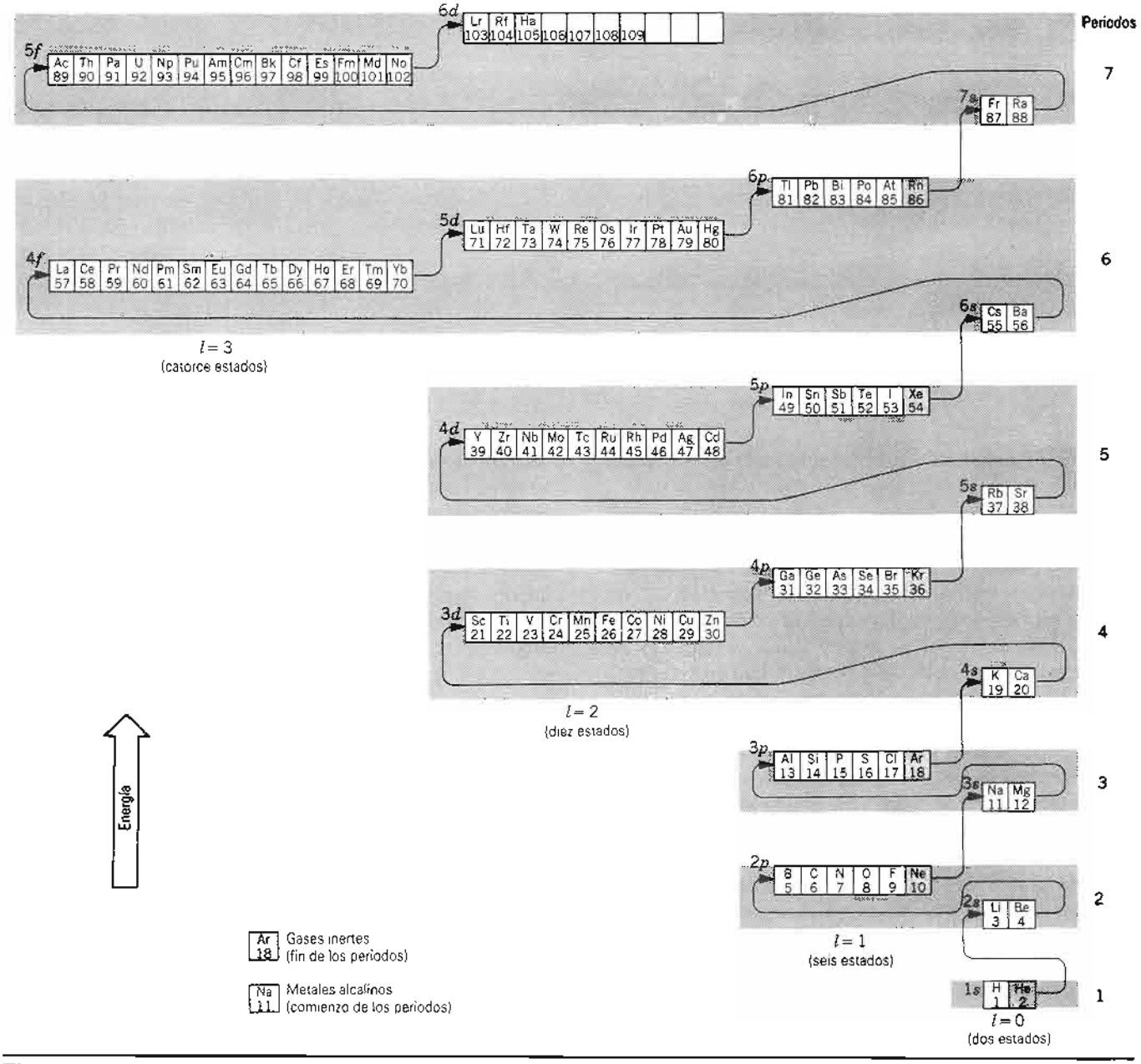


Figura 5 Comenzando en el fondo con el hidrógeno, la línea curva muestra la secuencia de los siete periodos horizontales de la tabla periódica. Cada periodo comienza con un metal alcalino y termina con un gas inerte.

figura 5, la capa a la que hemos designado "6", que corresponde al sexto periodo horizontal de la tabla periódica, contiene realmente los seis estados 6*s* y 6*p*, que corresponden a $n = 6$. Sin embargo, contiene también a todos los estados 4*f* y 5*d*. Además, los estados 6*d* no se encuentran en esta capa en absoluto, sino en la capa de arriba.

Comenzando con el hidrógeno en la figura 5 y siguiendo la línea curva, vemos cómo se construyen los siete periodos horizontales de la tabla periódica, comenzando cada uno con un metal alcalino y terminando con un gas inerte. Consideremos nuevamente el largo periodo sexto, que comienza con el metal alcalino cesio ($Z = 55$) y termina con el gas inerte radón ($Z = 86$). El orden en que se llenan las subcapas, como lo indica la línea curva, es 6*s*, 4*f*, 5*d* y 6*p*.

El sexto periodo contiene una fila de 15 elementos ($Z = 57$ a $Z = 71$), listados por separado en el fondo de la tabla periódica en el apéndice E. Estos elementos se

llaman *tierras raras* o *lantánidos* (por el elemento lantano, el que comienza la serie). Sus propiedades químicas son tan semejantes que todos ellos se agrupan en una sola casilla de la tabla. Esta similitud surge porque, mientras el estado $4f$ se llena en lo profundo dentro de la nube de electrones, la pantalla exterior de uno o dos electrones $6s$ permanece en su lugar. Son estos electrones más exteriores los que determinan las propiedades químicas del átomo. En el séptimo periodo se presenta una serie similar (los *actínidos*).

El número máximo de electrones que se permite en cualquier subcapa es de $2(2l + 1)$. Esto es consecuencia del principio de Pauli; para cualquier valor de l, existen $2l + 1$ valores diferentes de m_l, y por cada uno de aquéllos existen 2 valores de m_s. Existen entonces $2(2l + 1)$ etiquetas diferentes posibles para los electrones en cualquier subcapa, y por el principio de Pauli cada electrón de un átomo debe tener una etiqueta diferente. Si se cuentan el número de elementos en cada una de las subcapas etiquetadas de la figura 5, se encontrará que allí hay $2(2l + 1)$; esto es, 2 para las subcapas s ($l = 0$), 6 para las subcapas p ($l = 1$), 10 para las subcapas d ($l = 2$) y 14 para las subcapas f ($l = 3$).

Las configuraciones electrónicas

Podemos describir el estado de mínima energía de un átomo dándole su *configuración electrónica*, es decir, especificando el número de electrones en cada estado ocupado. Por ejemplo, para el litio ($Z = 3$) tenemos, de la figura 5, $1s^2 2s^1$, donde el superíndice indica el número de electrones en ese estado. Consideremos estas tres configuraciones:

$$\begin{aligned} &\text{F } (Z = 9): && 1s^2 2s^2 2p^5 \\ &\text{Ne } (Z = 10): && 1s^2 2s^2 2p^6 \\ &\text{Na } (Z = 11): && 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1 \end{aligned}$$

El neón tiene un estado $2p$ lleno, una configuración particularmente estable. Hace falta una energía considerable para romper esta configuración y, por lo tanto, el neón no cede fácilmente electrones. Existe un espacio particularmente grande entre el neón y el siguiente elemento (el sodio), lo que indica que el neón se resiste también a aceptar otro electrón. El neón es por consiguiente un *gas inerte*; en la mayoría de las circunstancias, no forma compuestos con otros elementos. Los elementos de la columna por arriba del Ne en la figura 5 (o por debajo del Ne en el apéndice E) son también gases inertes. (Esta propiedad depende del llenado de una capa entera, no solamente de una subcapa en particular. Los elementos Zn, Cd y Hg, por ejemplo, tienen todos estados d llenos, pero todos forman compuestos sin dificultad.)

Por el contrario, al flúor le falta un electrón para formar un estado $2p$ lleno. Puesto que el estado lleno es una configuración estable, el flúor acepta sin dificultad un electrón de otro átomo para formar compuestos. Los elementos de la columna por arriba del flúor en la figura 5 (o por abajo de F en el apéndice E) se comportan de manera similar; se conocen colectivamente como *halógenos*. Otro ejemplo, el sodio tiene un solo electrón en el estado $3s$. Este electrón no está fuertemente ligado particularmente, y el sodio puede ceder un electrón para formar compuestos químicos con otros átomos, como en el NaCl, por ejemplo). Los elementos con un solo electrón s, llamados elementos *alcalinos*, tienen propiedades similares.

Energía de ionización

La energía necesaria para desprender al electrón más exterior de un átomo se llama *energía de ionización*. La figura 6 muestra las energías de ionización de los elementos. Nótese el comportamiento regular que es consistente con las configuraciones electrónicas. En cada capa, la energía de ionización aumenta gradualmente y llega a un máximo en un gas inerte, y existe una fuerte caída en el elemento alcalino que le sigue. Por ejemplo, el elemento Na tiene una energía de ionización de 5.14 eV. Sin embargo, para desprender un *segundo* electrón del Na, se necesita energía casi de un orden de magnitud más (47.3 eV); con un electrón desprendido, un ion Na tiene una configuración electrónica similar al Ne inerte, que consta de una capa llena, donde los electrones están ligados más fuertemente.

Ocasionalmente se encuentran pequeñas irregularidades en el orden en que se llenan los estados. Por ejemplo, de la figura 5 esperaríamos que el cobre ($Z = 29$) tenga la configuración exterior $4s^2 3d^9$. Sin embargo, es energéticamente favorable que uno de los electrones $4s$ complete el llenado del estado $3d$; como resultado, la configuración exterior del Cu es $4s^1 3d^{10}$. El electrón $4s$ individual es el responsable de la gran conductividad eléctrica del cobre. Una situación similar ocurre con la plata ($Z = 47$) y el oro ($Z = 79$).

Estados excitados y transiciones ópticas

Hasta ahora sólo hemos considerado la configuración de mínima energía o el estado base de los átomos. Cuando a un átomo se le agrega energía, como cuando lo colocamos en un tubo de descarga eléctrica o lo iluminamos con radiación, podemos provocar que los electrones se muevan a estados superiores. Si proporcionamos la energía suficiente, es posible desprender completamente un electrón, ionizando, por consiguiente, el átomo. Si se desprende un electrón interior, el llenado resultante de los niveles, da los rayos X característicos, como lo vimos en la sección 52-1.

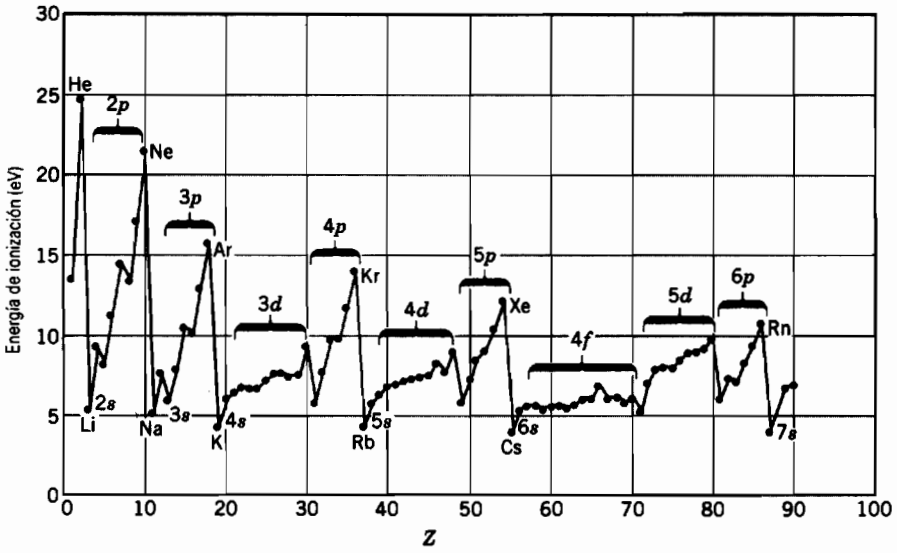


Figura 6 Las energías de ionización de los elementos graficadas contra su número atómico. Se indican las etiquetas de las subcapas.

Las diferencias de energía son típicamente del orden de eV entre el estado de mínima energía del electrón exterior y el próximo estado más elevado al que puede ser excitado. Cuando el electrón retorna a su mínima energía, el átomo emite radiación de energía del orden de los eV, esto es, de la luz visible. Por esta razón, tales cambios en el estado del electrón se llaman *transiciones ópticas*. Usando las funciones de onda que corresponden a los diversos estados, es posible calcular la probabilidad relativa para que ocurran las diferentes transiciones. Cuando lo hacemos, hallamos que las transiciones que cambian a l en una unidad son fuertemente favorecidas respecto de las transiciones que cambian a l en cualquier otra cantidad. Tal conclusión se llama *regla de selección*. En todas las transiciones electromagnéticas en los átomos (ópticas, de rayos X, etc.), la regla de selección es

$$\Delta l = \pm 1. \tag{6}$$

Las reglas de selección no suelen ser absolutas. En los átomos es posible observar transiciones que corresponden a otros cambios en l; es mucho menos probable que ocurran.

La figura 7 muestra algunos estados excitados en el sodio y algunas transiciones que pueden ocurrir (no todas ellas están en la región óptica). Realmente, la mayoría de los estados son dobletes que se encuentran muy próximos, lo cual da dos líneas espectrales de energías casi iguales, como el familiar doblete del sodio, que, como puede verse de la figura 7, corresponde al electrón que hace una

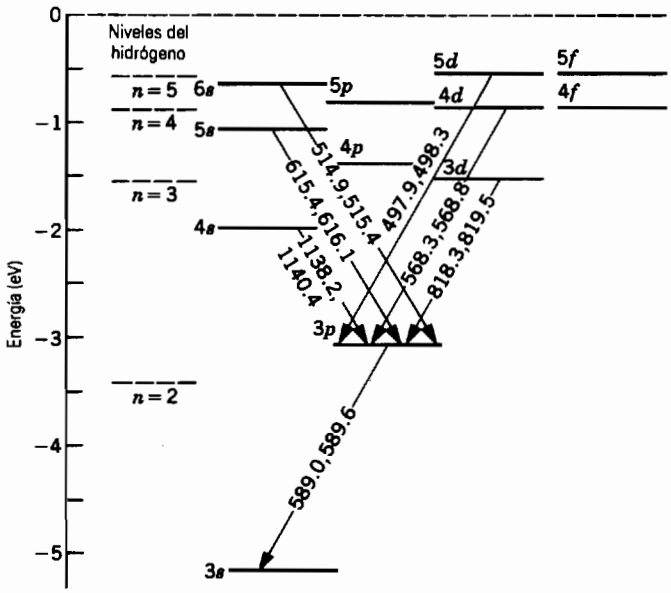


Figura 7 Los estados excitados del sodio. Se indican algunas radiaciones emitidas. Nótese la operación de la regla de selección $\Delta l = \pm 1$.

transición del primer estado excitado ($3p$) de regreso al estado fundamental.

52-5 LOS LÁSERES Y LA LUZ LÁSER

Al final de la década de 1940 y otra vez en los primeros años de la década de 1960 la física cuántica hizo dos enormes contribuciones a la tecnología, el transistor y el láser. La primera estimuló el crecimiento de la *electrónica*, que trata de la interacción (a nivel cuántico) entre los electrones y la materia a nivel macroscópico. El láser ha dado origen a un nuevo campo —llamado a veces *fotónica*— que trata con la interacción (nuevamente a nivel cuántico) entre los fotones y la materia a nivel macroscópico.

Para apreciar la importancia de los láseres, veamos algunas de las características de la luz láser (véase la Fig. 8). La compararemos conforme avancemos con la luz emitida por fuentes como una lámpara con filamento de tungsteno (espectro continuo) o un tubo de descarga de gas neón (espectro de líneas). Veremos que referirse a la luz láser como "la luz fantástica" no constituye, precisamente, un capricho.

1. *La luz láser es altamente monocromática.* La luz del tungsteno, que produce un espectro continuo, no nos da una base de comparación. Sin embargo, la luz de líneas seleccionadas de un tubo de descarga de gas puede tener longitudes de onda en la región visible que son precisas hasta 1 parte en 10^6. La finura de definición de la luz de láser puede ser fácilmente mil veces mayor, o sea, 1 parte en 10^9.

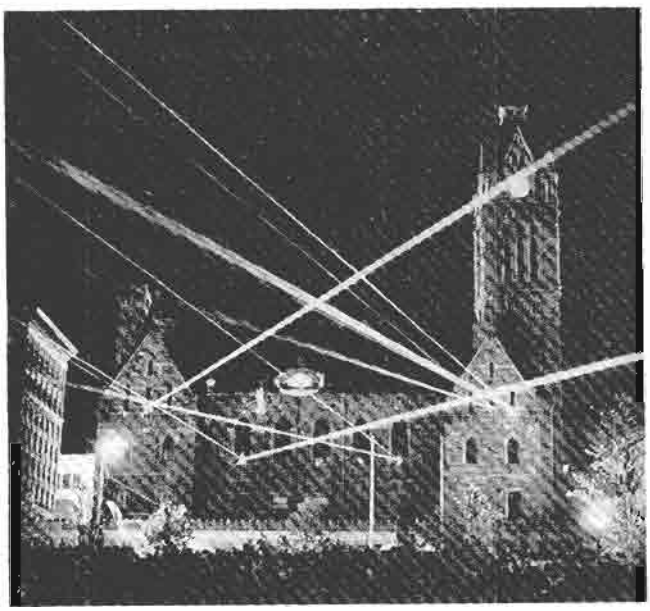


Figura 8 Haces de láser iluminan el cielo.

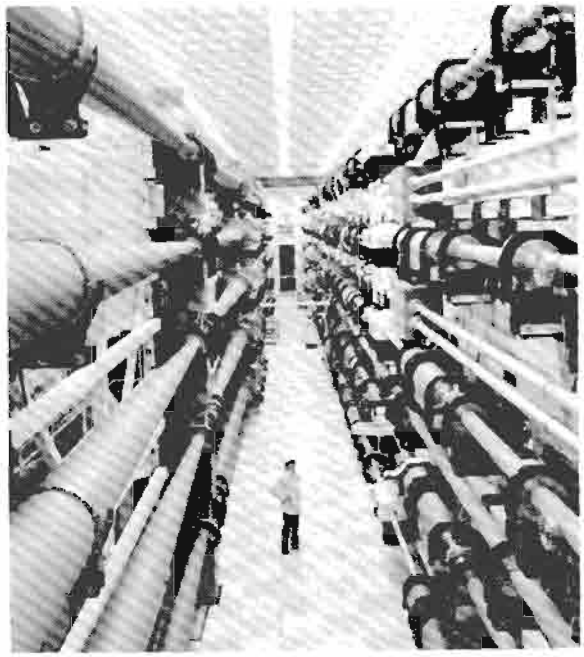


Figura 9 La sala del láser NOVA en el Lawrence Livermore National Laboratory. Estos láseres, con una potencia de unos 10^{14} W, se emplean para la investigación de la fusión termonuclear controlada (véase la Sec. 55-10).

2. *La luz láser es altamente coherente.* Los trenes de onda de la luz láser pueden tener varios cientos de kilómetros de longitud. Pueden crearse franjas de interferencia al combinar dos haces que han seguido trayectorias separadas cuyas longitudes difieren en tanto como esta cantidad. La longitud correspondiente de la coherencia de la luz de una lámpara con filamento de tungsteno o de un tubo de descarga de gas es típicamente mucho menor de 1 m.

3. *La luz láser es altamente direccional.* Una luz láser se desvía de un paralelismo perfecto sólo por efectos de difracción, determinados (véase la Sec. 46-4) por la longitud de onda y el diámetro de la abertura de salida. La luz de otras fuentes puede formar un haz aproximadamente paralelo por medio de una lente o de un espejo, pero la divergencia del haz es mucho mayor que para la luz láser. Por ejemplo, la luz enfocada de una fuente de un filamento de tungsteno forma un haz cuya divergencia angular se determina por la dimensión espacial del filamento.

4. *La luz de láser puede enfocarse con precisión.* Esta propiedad se relaciona con el paralelismo del haz del láser. Como en la luz de las estrellas, el tamaño del punto enfocado en un haz de láser está limitado sólo por efectos de difracción y no por el tamaño de la fuente. En la luz

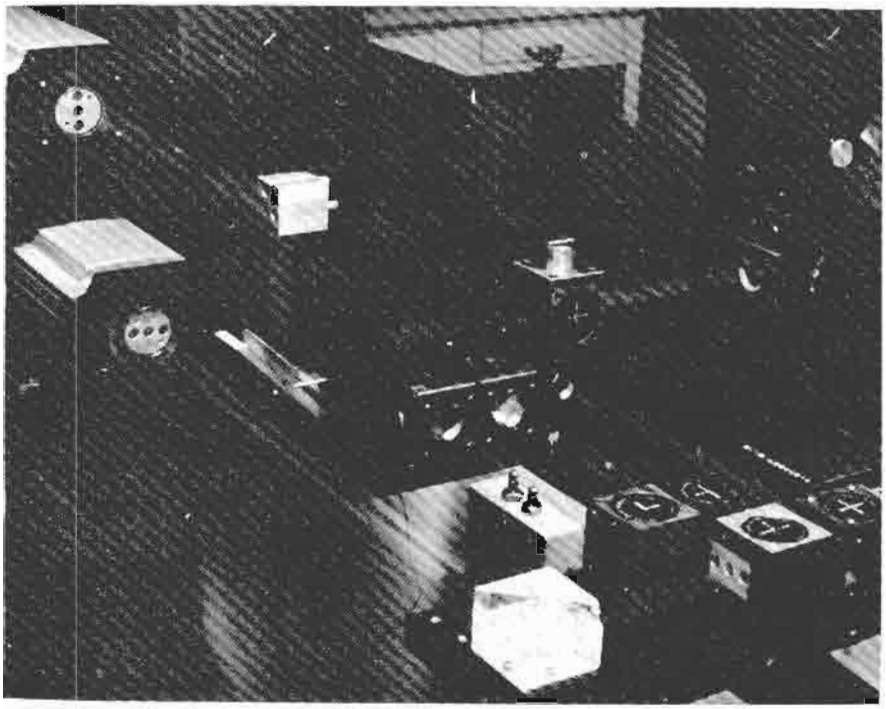


Figura 10 Un interferómetro de Michelson que usa láseres en el National Institute of Standards and Technology, usado para medir con precisión extrema las coordenadas x, y, z de un punto en el espacio.

láser enfocada se alcanzan fácilmente densidades de flujo de 10^{15} W/cm^2. En contraste, una llama de oxiacetileno tiene una densidad de flujo de 10^3 W/cm^2 únicamente.

Los láseres más pequeños, usados para la comunicación telefónica en fibras ópticas, tienen como medio activo un cristal conductor de arseniuro de galio del tamaño de la cabeza de un alfiler aproximadamente. Los láseres más grandes, usados para la investigación de la fusión por láser (véase la Fig. 9), llenan un edificio grande. Pueden generar pulsos de luz láser de 10^{-10} s de duración, que tienen un nivel de potencia de 10^{14} W durante el pulso. Esto significa unas 100 veces la capacidad total de generación de energía de todas las centrales eléctricas de la Tierra.

Otros usos del láser incluyen la soldadura por puntos de retinas desprendidas, la horadación de orificios diminutos en los diamantes para estirar alambres finos, el corte de telas (50 capas a un tiempo, sin bordes raídos) en la industria del vestido, el levantamiento topográfico de precisión, las mediciones precisas de longitud mediante la interferometría, mediciones precisas de la velocidad de flujo de fluidos usando el efecto Doppler y la generación de hologramas (véase la Sec. 47-5).

La figura 10 muestra otro ejemplo de la tecnología del láser, a saber, una instalación en el Instituto Nacional de Normas y Tecnología de Estados Unidos que se emplea para medir las coordenadas x, y, z de un punto, por medio de técnicas de interferencia con láser, con una precisión de $\pm 2 \times 10^{-8}$ m (= ±20 nm). Se emplea para medir las dimensiones de indicadores tridimensionales especiales, los que, a su vez, se emplean en la industria para comprobar la precisión dimensional de partes de máquina complicadas. En la figura aparece un número de haces de láser, visibles mediante luz dispersa.

52-6 EINSTEIN Y EL LÁSER

En 1917 Einstein introdujo en la física un nuevo concepto, el de la *emisión estimulada*, al que definiremos y estudiaremos a continuación. Si bien el primer láser que operó no apareció hasta 1960, el trabajo fundamental para su invención se llevó a cabo gracias a Einstein. La importancia de la emisión estimulada se indica con el nombre de "láser", que es un acrónimo de la denominación inglesa de "amplificación de luz por emisión estimulada de radiación" (Light amplification by the stimulated emission of radiation).

¿En qué trabajaba Einstein cuando se le ocurrió el concepto de la emisión estimulada? Nada menos que en el problema de radiación de cavidad, que en manos de Planck y de otros estableció la nueva ciencia de la mecánica cuántica. En 1917, Einstein tuvo éxito en la obtención de la ley de la radiación de Planck en términos de hipótesis bellamente sencillas y de un modo que aclaró mucho el papel de la cuantización de la energía y del concepto del fotón.*

* Véase Robert Resnick y David Halliday, *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2a. edición, Wiley, 1985, Supplementary Topic E.

Es interesante que Einstein haya también pensado profundamente acerca de este problema fundamental de la radiación de cavidad cuando, en 1905, propuso por vez primera el concepto del fotón y creyó que era posible explicar el efecto fotoeléctrico con su uso. Aprendemos de esos dos ejemplos que dispositivos prácticos de la mayor importancia pueden derivar del interés por problemas que parecen no tener relevancia en la tecnología. Cuando vea usted el sistema fotoeléctrico de la puerta de un ascensor o un sistema estereofónico de discos compactos, piense en Einstein.

Ahora veamos los tres procesos que participan en la interacción entre la materia y la radiación. Dos de ellos, la absorción y la emisión espontánea, ya nos resultan familiares; el tercero es la emisión estimulada.

1. *Absorción.* La figura 11*a* muestra un sistema atómico en los dos estados más bajos posibles, de energías E_1 y E_2. Se presenta un espectro de radiación continuo. Consideremos un fotón de este campo de radiación aproximándose al átomo de dos niveles e interactúe con él, y sea la frecuencia ν asociada del fotón tal que

$$h\nu = E_2 - E_1. \tag{7}$$

El resultado es que el fotón desaparece y que el sistema atómico se mueve a su estado de energía más alto. A este proceso le llamamos *absorción.*

2. *Emisión espontánea.* En la figura 11*b* el sistema atómico está en el estado más alto y no existe una radiación cercana. Después de un tiempo medio τ, este sistema atómico (aislado) se mueve por sí mismo al estado de energía más bajo, emitiendo un fotón de energía $h\nu$ ($= E_2 - E_1$) en el proceso. A este proceso lo llamamos *emisión espontánea*, en cuanto que ninguna influencia externa desencadenó la emisión.

Normalmente la vida media τ de la emisión espontánea por medio de átomos excitados es del orden de 10^{-8} s. Sin embargo, existen algunos estados en los que es mucho más largo, quizá de 10^{-3} s. A tales estados los llamamos *metaestables*; desempeñan un papel esencial en la operación del láser. (Tienen tales tiempos de vida largos porque pueden emitir radiación únicamente a través de procesos que violan la regla de selección de la Ec. 6.)

La luz de una lámpara de filamento se genera por emisión espontánea. Los fotones producidos de esta manera son totalmente independientes uno del otro. En particular, tienen direcciones y fases diferentes. Dicho de otra manera, la luz que producen tiene un grado de coherencia bajo.

3. *Emisión estimulada.* En la figura 11*c* el sistema atómico está nuevamente en su estado más alto, pero esta vez está presente la frecuencia de radiación dada por la ecuación 7. Como en la absorción, un fotón de energía $h\nu$ interactúa con el sistema. El resultado es que el sistema es impulsado a su estado más bajo, y ahora existen *dos* fotones donde antes sólo existía uno. A este proceso lo llamamos *emisión estimulada.*

Este fotón emitido en la figura 11*c* es en todas sus formas idéntico al fotón "desencadenante" o "estimulante". Tiene la misma energía, dirección, fase y estado de polarización. Además, cada uno de estos dos fotones puede causar que suceda otra emisión estimulada, dando un total de cuatro fotones, que pueden causar emisiones estimuladas adicionales, y así sucesivamente. Podemos ver cómo puede provocarse una reacción en cadena de procesos similares mediante tal suceso. Ésta es la

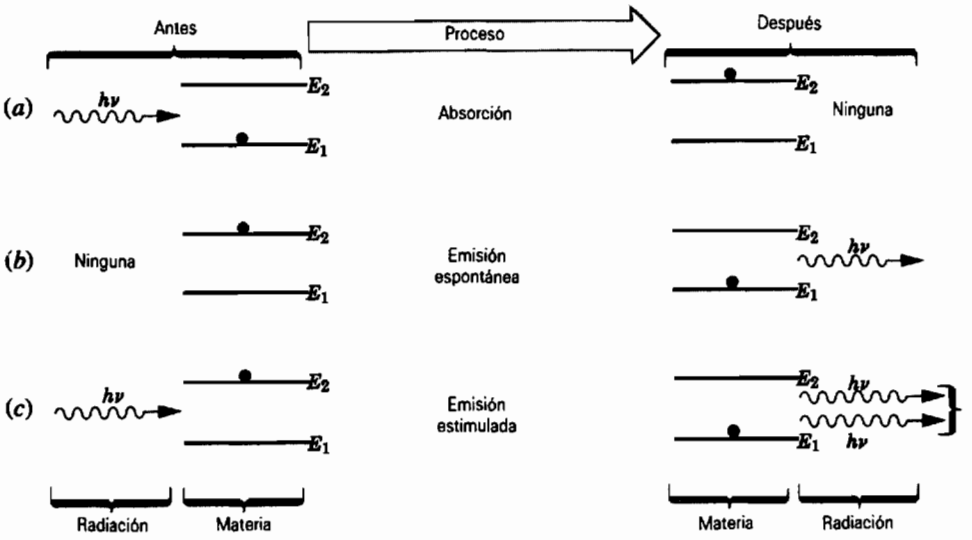


Figura 11 La interacción de la materia y la radiación en los procesos de (*a*) absorción, (*b*) emisión espontánea y (*c*) emisión estimulada.

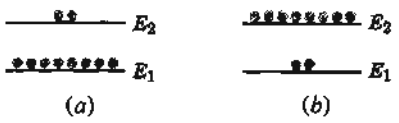


Figura 12 (*a*) La distribución normal en equilibrio térmico de los sistemas atómicos que ocupan uno de dos estados posibles. (*b*) Una distribución invertida de la población, que puede obtenerse mediante técnicas especiales.

"amplificación" del acrónimo del láser. Los fotones tienen energías, direcciones, fases y estados de polarización idénticos. Así es como adquiere sus características la luz de láser.

La figura 11 se refiere a la interacción de un solo átomo con la radiación. Sin embargo, en el caso usual, nos hallamos tratando con un gran número de átomos. En el sistema de dos niveles de la figura 11, ¿cuántos de estos átomos estarán en el nivel E_1 y cuántos en el nivel E_2? En cualquier sistema en equilibrio térmico, el número que ocupa un estado de energía E se determina por medio del factor exponencial $e^{-E/kT}$ en la distrubición de Maxwell y Boltzmann (véanse las Ecs. 27 y 32 del capítulo 24). La razón del número de átomos en el nivel superior al número en el nivel inferior es

$$n(E_2)/n(E_1) = e^{-(E_2-E_1)/kT}. \qquad (8)$$

La figura 12*a* ilustra esta situación. La cantidad kT es la energía media de agitación de un átomo a la temperatura T, y vemos que cuanto mayor sea la temperatura, mayor será el número de átomos —en promedio a largo plazo— que pasa, por agitación térmica, hacia el nivel E_2. Puesto que $E_2 > E_1$, la razón $n(E_2)/n(E_1)$ será siempre menor que la unidad, lo que significa que siempre habrá menos átomos en el nivel de energía superior que en el inferior. Esto es lo que esperaríamos si las poblaciones del nivel se determinaran sólo por la acción de la agitación térmica.

Si exponemos un sistema como el de la figura 12*a* a la radiación, el proceso dominante —por el puro peso de los números— será la absorción. Sin embargo, si el nivel de las poblaciones se invirtiese, como en la figura 12*b*, el proceso dominante en presencia de la radiación sería la emisión estimulada, y con ello la generación de la luz láser. Una *inversión de la población* como la de la figura 12*b* no es una situación que se obtenga por procesos térmicos; debemos usar técnicas más inteligentes para provocarla.

52-7 CÓMO FUNCIONA EL LÁSER

La figura 13 muestra esquemáticamente cómo puede alcanzarse una inversión de la población de modo que pueda

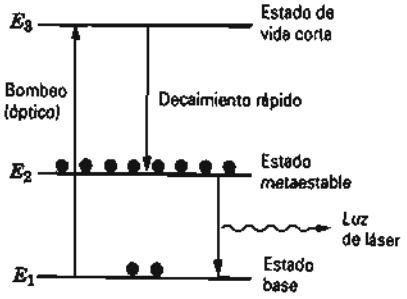


Figura 13 El esquema básico de tres niveles de la operación del láser. El estado metaestable E_2 tiene una población mayor que el estado base E_1.

lograrse la acción láser. Los átomos del estado base E_1 se "bombean" a un estado excitado E_3, por ejemplo por absorción de energía luminosa de una fuente intensa de espectro continuo que rodee al material del láser.

A partir de E_3 los átomos decaen rápidamente a un estado de energía E_2. Este estado debe ser metaestable para que ocurra la acción láser; es decir, debe tener una vida media relativamente larga contra el decaimiento por emisión espontánea. Si las condiciones son las adecuadas, el estado E_2 puede volverse entonces más poblado que el estado E_1, proporcionando así la inversión de población necesaria. Un fotón de la energía correcta puede entonces activar o desencadenar una avalancha de sucesos de emisión estimulada, la cual da por resultado la producción de la luz láser. En esta modalidad de tres niveles operan un número de láseres que usan sólidos cristalinos (como el rubí) como material del láser.

La figura 14 muestra los elementos de un tipo de láser que se encuentra a menudo en laboratorios de estudiantes. Un tubo de descarga de vidrio está lleno con una mezcla 80%-20% de los gases inertes helio y neón, siendo el helio el medio "de bombeo" y el neón el medio donde se produce la acción láser. La figura 15 es una versión simplificada de las estructuras de nivel de estos dos átomos. Nótese que intervienen cuatro niveles, denotados por E_0, E_1, E_2 y E_3 en este esquema de la acción láser, en lugar de tres niveles, como en la figura 13.

El "bombeo" se realiza al crear una descarga de gas inducida eléctricamente en la mezcla helio-neón. En esta descarga los electrones y los iones chocan ocasionalmente con los átomos de helio, elevándolos al nivel E_3 en la figura 15. Este nivel es metaestable, siendo muy poco frecuente la emisión espontánea al estado base (nivel E_0). Por probabilidad, el nivel E_3 del helio (= 20.61 eV) está muy cerca del nivel E_2 del neón (= 20.66 eV), de modo que, durante los choques entre los átomos de helio y de neón, la energía de excitación del helio puede transferirse sin dificultad al neón. De esta manera el nivel E_2 en la figura 15 puede volverse más altamente poblado que el nivel E_1 en dicha figura. Esta inversión de población se

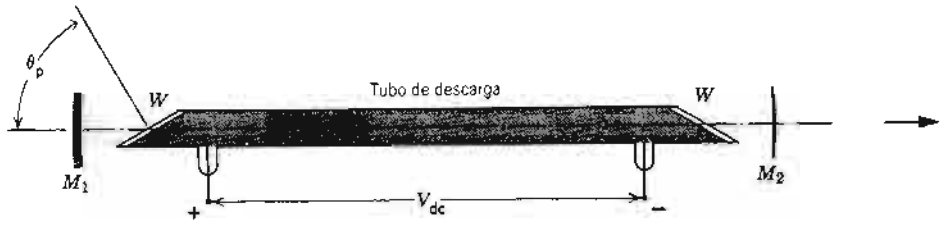


Figura 14 Los elementos básicos de un láser de gas helio-neón.

mantiene porque (1) la metaestabilidad del nivel E_3 asegura un abastecimiento de átomos de neón en el nivel E_2 y (2) el nivel E_1 decae rápidamente (por medio de etapas intermedias que no se muestran) al estado base del neón, E_0. Predomina la emisión estimulada del nivel E_2 al nivel E_1, y se genera luz láser roja de 632.8 nm de longitud de onda.

Resulta que la mayor parte de los fotones por emisión estimulada producidos inicialmente en el tubo de descarga de la figura 14 no serán paralelos al eje del tubo y se detendrán rápidamente en las paredes. Sin embargo, los fotones de emisión estimulada que *son* paralelos al eje pueden moverse muchas veces de un lado a otro a lo largo del tubo de descarga por reflejos sucesivos de los espejos M_1 y M_2. Estos fotones a su vez pueden provocar que ocurran otras emisiones estimuladas. Así se construye rápidamente una reacción en cadena en esta dirección, y da por resultado el paralelismo inherente de la luz de láser.

En lugar de pensar en términos de los fotones reflejándose de un lado al otro entre los espejos, es quizá más útil pensar en todo el arreglo de la figura 14 como si se tratara de una cavidad óptica resonante que, al igual que las ondas de sonido de un tubo de órgano, puede sintonizarse para que resulte resonante en una (o más) longitudes de onda bien definidas.

Los espejos M_1 y M_2 son cóncavos, con sus puntos focales coincidiendo casi en el centro del tubo. El espejo M_1 se recubre con una película dieléctrica cuyo espesor se ajusta cuidadosamente para hacer que el espejo sea tanto como se pueda totalmente reflejante para la longitud de onda de la luz láser; véase la sección 45-4. Por el contrario, el espejo M_2 se recubre para que sea ligeramente "permeable", de modo que en cada reflejo pueda escapar una pequeña fracción de la luz láser para formar el haz útil.

Las ventanas W de la figura 14, que cierran los extremos del tubo de descarga, están sesgadas de tal modo que sus normales formen un ángulo θ_p, el ángulo de Brewster, con el eje del tubo, donde

$$\tan \theta_p = n, \tag{9}$$

siendo n el índice de refracción del vidrio para la longitud de onda de la luz láser. En la sección 48-3 demostramos que tales ventanas transmiten luz sin pérdida por reflexión, siempre y cuando la luz se polarice con su plano de polarización en el plano de la figura 14. Si las ventanas formaran un ángulo recto con los extremos del tubo, la pérdida por reflexión del haz (alrededor del 4% en cada superficie de cada ventana) haría imposible la operación del láser.

Problema muestra 4 Un láser de tres niveles del tipo mostrado en la figura 13 emite luz láser en una longitud de onda de 550 nm, cerca del centro de la banda del visible. (*a*) Si el mecanismo de bombeo óptico se interrumpe, ¿cuál será la razón de las poblaciones del nivel superior (energía E_2) al nivel inferior (energía E_1)? Supóngase que $T = 300$ K. (*b*) ¿A qué temperatura para las condiciones de (*a*) sería de $\frac{1}{2}$ la razón de poblaciones?

Solución (*a*) De la condición de la frecuencia de Bohr, la diferencia de energía entre los dos niveles está dada por

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J·s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(550 \times 10^{-9}\ \text{m})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$
$$= 2.26\ \text{eV}.$$

La energía media de la agitación térmica es igual a

$$kT = (8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 0.0259\ \text{eV}.$$

De la ecuación 8 tenemos entonces, para la razón deseada,

$$n(E_2)/n(E_1) = e^{-(E_2 - E_1)/kT}$$
$$= e^{-(2.26\ \text{eV})/(0.0259\ \text{eV})} \approx e^{-87.3} = 1.3 \times 10^{-38}.$$

Éste es un número increíblemente pequeño. Sin embargo, no es irrazonable. Un átomo cuya energía de agitación térmica media sea de tan sólo 0.0259 eV no imprimirá frecuentemente una energía de 2.26 eV (87 veces más grande) a otro átomo en un choque.

(*b*) Si la razón de la ecuación 8 se hace igual a $\frac{1}{2}$, considerando el logaritmo natural de cada lado, y resolviendo para T se obtiene

$$T = \frac{E_2 - E_1}{k(\ln 2)} = \frac{2.26\ \text{eV}}{(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(0.693)}$$
$$= 37{,}800\ \text{K}.$$

Esto es mucho más caliente que la superficie del Sol. Es evidente que, si fuésemos a invertir las poblaciones de estos dos niveles, se necesitaría un mecanismo especial. Sin la inversión de la población, la acción láser no es posible.

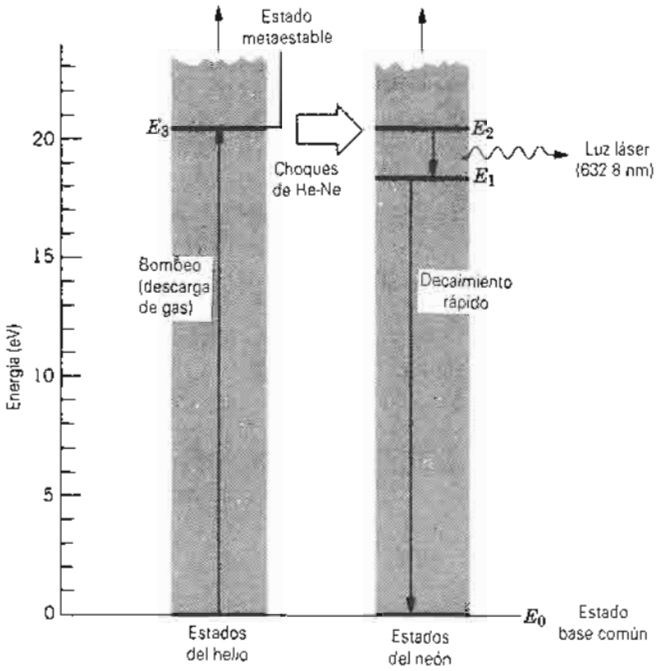


Figura 15 Los niveles atómicos que intervienen en la operación de un láser de gas He-Ne.

Problema muestra 5 Un láser de rubí pulsado tiene como elemento activo un cristal de rubí sintético en forma de cilindro de 6 cm de largo y 1 cm de diámetro. El rubí consta de Al_2O_3 donde —en este caso— un ion aluminio en cada 3500 se ha sustituido por un ion cromo, Cr^{3+}. De hecho, el color característico del rubí se explica de las propiedades de absorción óptica de esta pequeña "impureza" de cromo. Estos mismos iones explican la capacidad de la acción láser del rubí, que tiene lugar —según el mecanismo de tres niveles de la figura 13— para una longitud de onda de 694.4 nm.

Supóngase que *todos* los iones Cr^{3+} están en un estado metaestable correspondiente al estado E_2 de la figura 13 y que *ninguno* está en el estado base E_1. ¿De cuánta energía se dispone para liberar un solo pulso de luz de láser si *todos* estos iones retroceden al estado base en un solo episodio de reacción en cadena de una emisión estimulada? Nuestra respuesta será sólo un límite superior, porque las condiciones postuladas no pueden realizarse en la práctica. La densidad ρ del Al_2O_3 es de 3700 kg/m^3, y su masa molar M es de 0.102 kg/mol.

Solución El número de iones Al^{3+} es

$$N_{Al} = \frac{2N_A m}{M} = \frac{2N_A \rho V}{M},$$

donde m es la masa del cilindro de rubí y el factor 2 proviene del hecho de que hay dos iones aluminio en cada "molécula" de Al_2O_3. El volumen V es

$$V = (\pi/4)(1.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2(6.0 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 4.7 \times 10^{-6}\ \text{m}^3.$$

Así,

$$N_{Al} = \frac{(2)(6.0 \times 10^{23}/\text{mol})(3.7 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(4.7 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{0.102\ \text{kg/mol}} = 2.1 \times 10^{23}.$$

El número de iones Cr^{3+} es, entonces,

$$N_{Cr} = \frac{N_{Al}}{3500} = 6.0 \times 10^{19}.$$

La energía del fotón de emisión estimulada es

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.1 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.0 \times 10^8\ \text{m/s})}{694 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 1.8\ \text{eV},$$

y la energía total disponible por pulso de láser es

$$U = N_{Cr}E = (6.0 \times 10^{19})(1.8\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}) = 17\ \text{J}.$$

Realmente se han logrado estas energías por pulsos tan grandes, pero sólo para casos de dispositivos láser mucho más elaborados que el que aquí se describe.

En este ejemplo hemos postulado una circunstancia ideal, a saber, una inversión total de la población, donde el estado base permanece virtualmente despoblado. La inversión real de la población en un láser de rubí operando será mucho menos que el total. Por ésta y otras razones la energía del pulso será en la práctica mucho menor que el límite superior calculado anteriormente.

52-8 ESTRUCTURA MOLECULAR

El entendimiento de la estructura de los átomos es el primer paso en el proceso que conduce finalmente al entendimiento de la estructura de los objetos macroscópicos. El siguiente paso es entender cómo los átomos se unen entre sí para formar moléculas.

La fuerza responsable del enlace entre los átomos en las moléculas es la misma fuerza electrostática que enlaza a los electrones en los átomos. Sin embargo, los átomos son de ordinario eléctricamente neutros y, por lo tanto, no ejercerían una fuerza electrostática entre ellos. Así, para

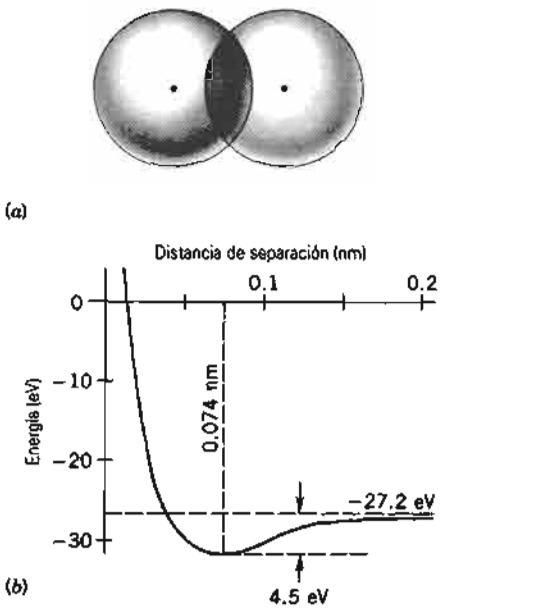


Figura 16 (*a*) El traslape de los electrones *s* del H es responsable de la formación de la molécula de H_2. (*b*) La energía total de los dos electrones en el estado ligado de la molécula de H_2, como función de la distancia de separación atómica. Cuando la separación es grande, la energía es de -27.2 eV (el doble de la energía de un solo electrón del hidrógeno atómico, -13.6 eV). La energía mínima de la molécula ligada es de -31.7 eV cuando la separación es de 0.074 nm.

que existan enlaces moleculares entre los átomos debe ocurrir cierto reajuste de la estructura electrónica de los átomos.

Consideremos, por ejemplo, una molécula de hidrógeno, H_2 (Fig. 16*a*). Se mide que la separación entre los dos protones de una molécula de H_2 es de 0.074 nm, comparable al radio de la órbita electrónica más baja del hidrógeno *atómico*, 0.0529 nm. Al electrón individual del hidrógeno atómico le gustaría adquirir un socio que llenase la capa 1*s* y, por consiguiente, el electrón de un átomo de H puede considerarse como si formase una pareja con el otro electrón de la misma capa. (Por supuesto, los electrones son idénticos, y de acuerdo con las reglas cuánticas para partículas indistinguibles, ya no podemos decir que los electrones de los dos átomos originales tuviesen identidades separadas. En cambio, en el campo electrostático combinado de los dos protones se mueve un par de electrones, representados por una función de onda de dos electrones.)

Podemos ver este enlace como si se originara de una acción compartida de electrones. Los electrones no "pertenecen" a ningún protón. En efecto, cada protón atrae al par de electrones, y esta atracción es suficiente para vencer la repulsión de Coulomb de los protones. (Un efecto similar, en el que participa un tipo muy diferente de partícula compartida, es el responsable del enlace de dos protones en el núcleo de un átomo.)

Este tipo de enlace molecular, basado en electrones compartidos, se llama enlace (o amarre) *covalente*. Las moléculas que contienen dos átomos del mismo elemento son ejemplos comunes de moléculas que tienen enlaces covalentes. Una medición de la intensidad del enlace es la *energía de disociación*, la energía necesaria para separar la molécula en dos átomos neutros. En el H_2, la energía de disociación es de 4.5 eV, como se indica en la figura 16*b*. También es posible tener una enlace covalente en los átomos en que los electrones exteriores están en la capa *p*, como en el caso del N_2 o del O_2. En el caso del N_2, el compartimiento de los tres electrones 2*p* de cada átomo da un total de seis electrones 2*p*, una configuración que correspondería (en un solo átomo) a una capa llena; por lo tanto, la molécula de N_2 es muy estable (la energía necesaria para disociar a la molécula es de 9.8 eV). En el O_2, por el contrario, hay ocho electrones 2*p*, que es una configuración menos estable; la energía de disociación del O_2 es de 5.1 eV únicamente. En términos prácticos, esta diferencia hace al O_2 más reactivo que el N_2. Las moléculas de O_2 pueden separarse por medio de reacciones químicas relativamente modestas, como, por ejemplo, la oxidación de los metales expuestos al aire. La molécula de F_2 (diez electrones 2*p*) es aún menos estable que el O_2; su energía de disociación es de 1.6 eV únicamente, menos que la energía de los fotones de la luz visible, y como resultado, el F_2 puede disociarse exponiéndolo a la luz.

Los enlaces moleculares covalentes pueden formarse también entre átomos distintos, aun en los casos en que los electrones compartidos se originen de dos capas atómicas diferentes. Los enlaces entre electrones *s* y *p* son comunes, como en el H_2O (electrones *s* del H y electrones *p* del O, como se ilustra en la figura 17*a*) y en los compuestos de hidrocarburos (electrones *s* del *H* y electrones *p* del C). Podemos considerar a los electrones *p* como si sus funciones de onda tuvieran lóbulos de alta probabilidad a lo largo de los ejes de coordenadas (véase la Fig. 18 del capítulo 51, por ejemplo). A cada uno de estos lóbulos puede unírsele un electrón *s*. Por ejemplo, en el H_2O un electrón *s* de cada átomo de H se une a dos de los electrones *p* diferentes. Por lo tanto, esperaríamos que el ángulo entre los enlaces del H_2O fuera de 90°; el ángulo medido es de 104°, indicando que existe cierta repulsión de Coulomb de los átomos de H que abre el ángulo de enlace. El amoniaco (NH_3) es otro ejemplo de este tipo de estructura, ilustrada en la figura 17*b*.

En el carbono, los electrones 2*s* y 2*p* están mezclados, dando al C una valencia efectiva de 4. Estos cuatro electrones pueden formar una variedad de enlaces covalentes con otros átomos, lo que es responsable de la diversidad de compuestos orgánicos, desde moléculas sencillas como el metano (CH_4) hasta las moléculas complejas que forman la base de los seres vivos.

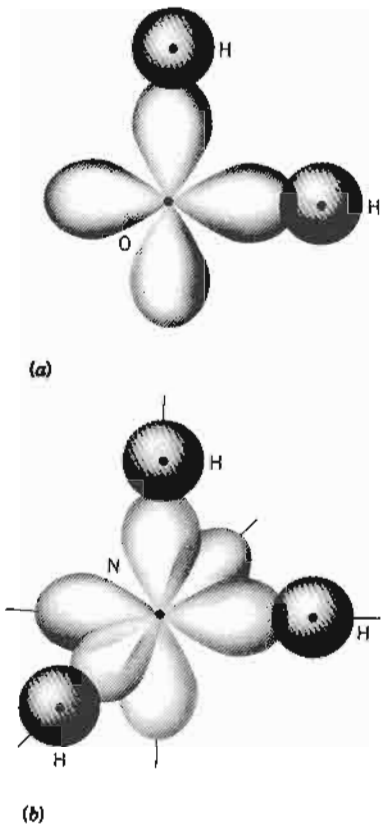


Figura 17 (*a*) El traslape de los electrones *s* del H y los electrones *p* del O en una molécula de H_2O. (*b*) El traslape de los electrones *s* del H y los electrones *p* del N en una molécula de NH_3.

En el otro extremo de los enlaces covalentes están aquéllos donde los electrones no son compartidos sino que pertenecen a un átomo o al otro. En una molécula (*no* en un cristal de sólido) de NaCl, el Cl carece de un electrón en una capa *p* completa, mientras que el Na tiene un solo electrón de valencia en la capa *s*. Cuando los átomos neutros de Na y Cl se juntan, resulta energéticamente favorable que el electrón de valencia del Na se transfiera al Cl, llenando, por lo tanto, su capa *p*. Como resultado, tenemos iones Na^+ y Cl^-, que ejercen entonces fuerzas electrostáticas entre sí y se forma una molécula de NaCl (Fig. 18*a*). Los átomos no pueden acercarse demasiado unos a otros, porque el

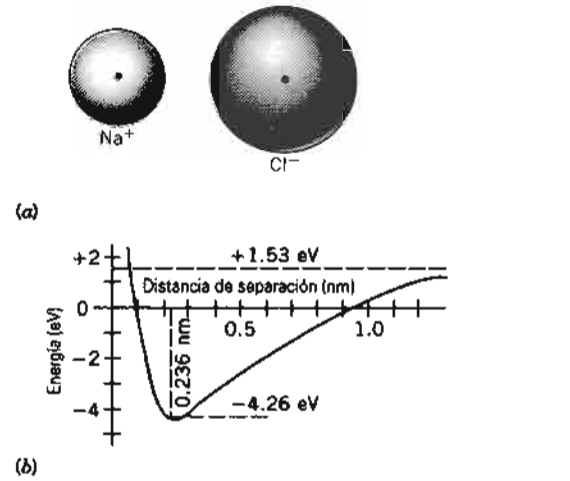


Figura 18 (*a*) Enlace iónico del NaCl. Nótese que no existe un traslape apreciable de las distribuciones electrónicas. (*b*) La energía de enlace en el NaCl. El cero de energía corresponde a los *átomos* de Na y Cl separados por una gran distancia. La línea de trazos representa la energía de los *iones* de Na^+ y Cl^- separados por una gran distancia.

principio de Pauli no permite que se traslapen las capas *p* llenas. La separación de equilibrio estable es de 0.236 nm, y la energía de enlace (la energía necesaria para dividir a la molécula en sus átomos neutrales) es de 4.26 eV, como se muestra en la figura 18*b*. Las moléculas de este tipo, que se basan en el enlace de los iones, se llaman moléculas *iónicas*.

El enlace molecular es análogo a los enlaces en los átomos de los sólidos. Existen sólidos iónicos (como el NaCl), a los que podemos considerar como si estuviesen constituidos de conjuntos de iones positivos y negativos. Existen también sólidos covalentes, como el diamante, cuya estructura depende del traslape de las funciones de onda electrónicas. Otros tipos incluyen a los sólidos moleculares (como el hielo), donde las moléculas conservan su estructura electrónica y se unen mediante fuerzas mucho más débiles que se basan en las interacciones dipolares eléctricas, y los sólidos metálicos, donde cada átomo contribuye con uno o más electrones a un "mar" de electrones que son compartidos en todo el sólido. En el siguiente capítulo consideraremos algunos sólidos cuyas propiedades pueden entenderse sobre la base de esta estructura.

PREGUNTAS

1. ¿Cuál es el origen de la longitud de onda de corte $\lambda_{mín}$ de la figura 1? ¿Por qué es un indicio importante sobre la naturaleza fotónica de los rayos X?

2. En la figura 2, ¿por qué el fotón emitido se muestra alejándose de la dirección en que está? ¿Podría mostrarse alejándose en cualquier otra dirección? Explique.

3. ¿Cuáles son los rayos X característicos de un elemento? ¿Cómo pueden emplearse para determinar el número atómico de un elemento?
4. Compare las figuras 1 y 3. ¿Cómo puede estar seguro de que realmente los dos picos prominentes de la figura 1 corresponden numéricamente con las dos transiciones denotadas igual en la figura 3?
5. ¿Puede lograrse que el hidrógeno atómico emita rayos X? De ser así, describa cómo. Si no, ¿por qué no?
6. ¿En qué difiere el diagrama de niveles de energías de rayos X de la figura 3 del diagrama de niveles de energías del hidrógeno, mostrado en la figura 4 del capítulo 51? ¿En qué son semejantes los dos diagramas?
7. Cuando se extiende a números atómicos mayores, la gráfica de Moseley de la figura 4 no es una línea recta, sino que es cóncava hacia arriba. ¿Afecta esto a la capacidad de asignarle números atómicos a los elementos?
8. ¿Por qué la teoría de Bohr, que no funciona muy bien aun para el helio ($Z = 2$), da tan buena cuenta de los espectros característicos de rayos X de los elementos, o por la menos de aquella parte que se origina dentro de lo profundo del átomo?
9. ¿Por qué el espectro característico de rayos X varía de modo sistemático de un elemento a otro pero el espectro en la región del visible no?
10. ¿Por qué espera que las longitudes de onda de las radiaciones generadas por las transiciones dentro de lo profundo del átomo sean más cortas que aquellas generadas por transiciones que ocurren en los bordes exteriores del átomo?
11. Dado el espectro característico de rayos X de cierto elemento, que contiene un número de líneas, ¿qué podría hacer para identificarlas y denotarlas?
12. ¿De qué números cuánticos depende la energía de un electrón en (*a*) un átomo de hidrógeno y (*b*) un átomo de vanadio?
13. La tabla periódica de los elementos se basaba originalmente en la masa atómica, más bien que en el número atómico, sin haberse desarrollado todavía este último concepto. ¿Por qué tuvieron tanto éxito como el que demostraron tener estas primeras tablas? En otras palabras, ¿por qué es proporcional (más o menos) la masa atómica de un elemento a su número atómico?
14. ¿Cómo la estructura de la tabla periódica apoya la necesidad de un cuarto número cuántico, correspondiente al espín del electrón?
15. Si sólo existieran tres números cuánticos (esto es, si el electrón no tuviera espín), ¿en qué se diferirían las propiedades químicas del helio?
16. Explique por qué el radio efectivo de un átomo de helio es menor que el de un átomo de hidrógeno.
17. ¿Por qué se necesita más energía para desprender un electrón del neón ($Z = 10$) que uno del sodio ($Z = 11$)?
18. ¿Qué le puede decir la figura 5 acerca de por qué los gases inertes son tan estables químicamente?
19. ¿Tiene algún sentido asignar números cuánticos a una vacante en una subcapa de otro modo llena?
20. ¿Por qué tiene la serie de elementos lantánidos (véase el apéndice E) tales propiedades químicas similares? ¿Cómo podemos justificar el ponerlos a todos en una sola casilla de la tabla periódica? ¿Por qué, a pesar de sus propiedades químicas similares, puede ser tan sencillo clasificarlos mediante la medición de sus espectros característicos de rayos X?
21. Enuncie, según su opinión, el principio de mínima energía de la construcción de un átomo y dé un argumento físico que lo sustente.
22. La figura 5 muestra que el estado $2s$ tiene una energía menor que el estado $2p$. ¿Puede usted explicar por qué sería esto así, basando su argumento en las densidades de probabilidad radial de los dos estados (véanse las Figs. 17 y 18 del capítulo 51)?
23. Si usted comienza con un núcleo y llena con electrones para formar un átomo en su estado base, las energías de los niveles no llenos cambian conforme lo hace. ¿Por qué cambian? ¿Aumenta o disminuye su energía conforme se le agregan electrones?
24. ¿Por qué la luz de un láser enfocada es mejor inherentemente para realizar operaciones quirúrgicas delicadas como la soldadura por puntos de una retina desprendida que la luz enfocada del diminuto filamento de una lámpara incandescente?
25. La luz de láser forma un haz casi paralelo. ¿La intensidad de tal luz disminuye según el inverso del cuadrado de la distancia de la fuente?
26. ¿En qué se asemejan la luz láser y la luz de las estrellas? ¿En qué modos difieren?
27. Arthur Schawlow, uno de los pioneros del láser, inventó un borrador de escritura para máquina de escribir basado en el enfoque de luz láser sobre el carácter no deseado. ¿Puede imaginarse cuál es su principio de operación?
28. ¿De qué manera difieren la emisión espontánea y la emisión estimulada?
29. Tenemos la emisión espontánea y la emisión estimulada. De la simetría, ¿por qué no tenemos también absorción espontánea y estimulada? Analícelo en términos de la figura 11.
30. ¿Por qué se necesita una inversión de población entre dos niveles atómicos para que ocurra la acción de láser?
31. ¿Qué es un estado metaestable? ¿Qué papeles desempeñan tales estados en la operación de un láser?
32. Comente esta afirmación: "A igualdad de otras cosas, un esquema del láser de cuatro niveles como el de la figura 15 es preferible a un esquema de tres niveles como el de la figura 13 porque, en el esquema de tres niveles, la mitad de la población de átomos en el nivel E_1 debe de moverse al estado E_2 antes de que pueda comenzar a presentarse una inversión de la población".
33. Comente esta afirmación: "En el láser de la figura 14, únicamente se transmite la luz cuyo plano de polarización se encuentra en el plano de esa figura a través de la ventana de la derecha. Por lo tanto, la mitad de la energía potencialmente disponible se pierde". (*Sugerencia*: ¿Es realmente cierta esta segunda afirmación? Considérese lo que le sucede a los fotones cuyo plano de polarización efectivo

forma un ángulo recto con el plano de la figura 14. ¿Participan plenamente tales fotones en el proceso de amplificación de la emisión estimulada?)

34. Un haz de luz sale por una abertura de una "caja negra" y se mueve a lo largo de la mesa de su laboratorio. ¿Cómo podría averiguar hasta qué punto este haz es coherente en su sección transversal? ¿Cómo podría decir (sin abrir la caja) si la fuente de luz oculta es un láser o no?
35. ¿Por qué es difícil construir un láser de rayos X?

PROBLEMAS

Sección 52-1 El espectro de rayos X

1. Demuestre que el corte de la longitud de onda corta del espectro continuo de rayos X está dado por

$$\lambda_{\text{mín}} = 1240 \text{ pm}/V,$$

donde V es la diferencia de potencial aplicada en kilovolts.

2. Determine la constante de Planck partiendo del hecho de que la mínima longitud de onda de los rayos X producidos por electrones de 40.0 keV es de 31.1 pm.
3. ¿Cuál es la diferencia de potencial mínima entre los extremos de un tubo de rayos X que producirá rayos X con una longitud de onda de 0.126 nm?
4. En la figura 1, los rayos X que se muestran se producen cuando caen electrones de 35.0 keV sobre un blanco de molibdeno. Si el potencial de aceleración se mantiene a 35.0 kV pero se sustituye al blanco de molibdeno por un blanco de plata ($Z = 47$), ¿qué valores de (*a*) $\lambda_{\text{mín}}$, (*b*) $\lambda_{K\beta}$, y (*c*) $\lambda_{K\alpha}$ resultan? Los niveles atómicos K, L y M de los rayos X de la plata (compare con la Fig. 3) son 25.51, 3.56 y 0.53 keV.
5. Con electrones se bombardea un blanco de molibdeno, produciendo rayos X tanto continuos como característicos como se muestra en la figura 1. En esa figura la energía de los electrones incidentes es de 35.0 keV. Si el potencial de aceleración aplicado al tubo de rayos X se aumenta a 50.0 kV, ¿qué valores de (*a*) $\lambda_{\text{mín}}$, (*b*) $\lambda_{K\alpha}$ y (*c*) $\lambda_{K\beta}$ resultan?
6. La longitud de onda de la línea K_α del hierro es de 19.3 pm. (*a*) Halle la diferencia de energía entre los dos estados del átomo de hierro (véase la Fig. 3) que originan esta transición. (*b*) Halle la diferencia de energía que corresponde al átomo de hidrógeno. ¿Por qué es mucho mayor la diferencia en el hierro que en el hidrógeno? (*Sugerencia*: En el átomo de hidrógeno la capa K corresponde a $n = 1$ y la L a $n = 2$.)
7. De la figura 1, calcule aproximadamente la diferencia de energías $E_L - E_M$ de los niveles atómicos de energía de los rayos X del molibdeno. Compare con los resultados que pueden determinarse de la figura 3.
8. Encuentre la mínima diferencia de potencial que debe aplicarse a un tubo de rayos X para producir rayos X con una longitud de onda igual a la longitud de onda del electrón Compton. (Véase el problema 54 del capítulo 49.)
9. Se producen rayos X en un tubo de rayos X mediante un potencial del blanco de 50.0 kV. Si un electrón efectúa tres colisiones en el blanco antes de llegar al reposo y pierde la mitad de su energía cinética remanente en cada una de las dos primeras colisiones, determine las longitudes de onda de los fotones resultantes. Desprecie el retroceso de los átomos pesados del blanco.
10. Un blanco de tungsteno ($Z = 74$) es bombardeado con electrones en un tubo de rayos X. (*a*) ¿Cuál será el valor mínimo del potencial de aceleración que permitirá la producción de las líneas K_β y K_α características del tungsteno? (*b*) Para este mismo potencial de aceleración, ¿cuál es el valor de $\lambda_{\text{mín}}$? (*c*) Calcule $\lambda_{K\beta}$ y $\lambda_{K\alpha}$. Los niveles de los rayos X atómicos K, L y M del tungsteno (véase la Fig. 3) son 69.5, 11.3 y 2.3 keV, respectivamente.
11. Un blanco de molibdeno ($Z = 42$) es bombardeado con electrones de 35.0 keV y da por resultado el espectro de rayos X de la figura 1. Aquí $\lambda_{K\beta} = 63$ pm y $\lambda_{K\alpha} = 71$ pm. (*a*) ¿Cuáles son las energías correspondientes de los fotones? (*b*) Estas radiaciones se desean filtrar por un material que absorberá la línea K_β mucho más fuertemente de lo que absorberá la línea K_α. ¿Qué sustancia(s) usaría usted? Las energías de ionización K del molibdeno y de los cuatro elementos vecinos son las siguientes:

Z	40	41	42	43	44
Elemento	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru
E_K (keV)	18.00	18.99	20.00	21.04	22.12

(*Sugerencia*: Una sustancia absorberá selectivamente una de las dos radiaciones X más fuertemente cuando los fotones de una tengan la energía suficiente para expulsar un electrón K de los átomos de la sustancia, pero los fotones de la otra no.)

12. Las energías de enlace de los electrones de la capa K y de la capa L del cobre son 8.979 keV y 0.951 keV, respectivamente. Si los rayos X K_α del cobre inciden sobre un cristal de cloruro de sodio y dan una reflexión de Bragg del primer orden a 15.9° cuando se reflejan de los planos alternos de los átomos de sodio, ¿cuál es el espaciamiento entre estos planos?
13. Un electrón de 20.0 keV llega al reposo luego de experimentar dos eventos bremsstrahlung (radiación por frenado) sucesivos, transfiriendo de esta manera su energía cinética a la energía de dos fotones. La longitud de onda del segundo fotón es de 130 pm mayor que la longitud de onda del primer fotón que va a ser emitido. (*a*) Halle la energía del electrón después de su primera desaceleración.

(*b*) Calcule las longitudes de onda y las energías de los dos fotones.

14. En un tubo de rayos X, un electrón que se mueve inicialmente con una velocidad de 2.73×10^8 m/s pierde velocidad al pasar cerca de un núcleo. Se emite un solo fotón de 43.8 keV de energía. Determine la velocidad final del electrón. (Debe tenerse en cuenta la relatividad; haga caso omiso de la energía que se le imprime al núcleo.)

15. Demuestre que un electrón en movimiento no puede emitir espontáneamente un fotón de rayos X en el vacío. Debe de estar presente un tercer cuerpo (un átomo o un núcleo). ¿Por qué es éste necesario? (*Sugerencia*: Examine la conservación de la energía total y del ímpetu.)

Sección 52-2 Los rayos X y la numeración de los elementos

16. Usando la teoría de Bohr, calcule la razón entre las longitudes de onda de la línea K_α del niobio (Nb) y del galio (Ga). Obtenga de la tabla periódica los datos necesarios.

17. He aquí las longitudes de onda K_α de unos cuantos elementos:

Ti	27.5 pm	Co	17.9 pm
V	25.0	Ni	16.6
Cr	22.9	Cu	15.4
Mn	21.0	Zn	14.3
Fe	19.3	Ga	13.4

Dibuje una gráfica de Moseley (véase la Fig. 4) y verifique que su pendiente concuerda con el valor calculado en el problema muestra 2.

Sección 52-4 La tabla periódica

18. Si un núcleo de uranio ($Z = 92$) tuviera sólo un electrón, ¿cuál sería el radio de la órbita de su estado base, de acuerdo con la teoría de Bohr?

19. Dos electrones de litio ($Z = 3$) tienen como sus números cuánticos n, l, m_l, m_s, los valores 1, 0, 0, $\pm\frac{1}{2}$. (*a*) ¿Qué números cuánticos puede tener el tercer electrón si el átomo ha de estar en su estado base? (*b*) ¿Si el átomo ha de estar en su primer estado excitado?

20. Por observación de la figura 5, ¿cuál cree que pudiera ser el número atómico del gas inerte inmediatamente arriba del radón ($Z = 86$)?

21. Si el electrón no tuviera espín y aun así se cumpliera el principio de exclusión de Pauli, ¿cómo resultaría afectada la tabla periódica? En particular, ¿cuáles de los elementos presentes serían gases inertes?

22. Supóngase que haya dos electrones en el mismo sistema, teniendo ambos $n = 2$ y $l = 1$. (*a*) Si no se aplica el principio de exclusión, ¿cuántas combinaciones de estados son concebiblemente posibles? (*b*) ¿Cuántos estados prohíbe el principio de exclusión? ¿Cuáles son?

23. En los metales alcalinos existe un electrón fuera de una capa cerrada. (*a*) Usando la teoría de Bohr, calcule el número de la carga efectiva del núcleo visto según el electrón de valencia del sodio (energía de ionización = 5.14 eV) y del potasio (energía de ionización = 4.34 eV). (*b*) En cada elemento, ¿qué fracción es ésta de la carga nuclear real Z? Los números cuánticos necesarios pueden encontrarse en la figura 5.

Sección 52-7 Cómo funciona el láser

24. Un láser de rubí emite luz de una longitud de onda de 694.4 nm. Si se emite un pulso de láser durante 12.0 ps y la energía liberada por pulso es de 150 mJ, (*a*) ¿cuál es la duración del pulso y (*b*) cúantos fotones hay en cada pulso?

25. Los láseres se han vuelto muy pequeños así como muy grandes. El volumen activo de un láser construido del semiconductor GaAlAs tiene un volumen de 200 $(\mu m)^3$ únicamente (más pequeño que un grano de arena) y, sin embargo, puede entregar continuamente una potencia de 5.0 mW a una longitud de onda de 0.80 μm. Calcule la frecuencia de producción de fotones.

26. Un láser He-Ne emite luz a una longitud de onda de 632.8 nm y tiene una potencia útil de 2.3 mW. ¿Cuántos fotones emite cada minuto este láser cuando está operando?

27. Es completamente posible que las técnicas de modulación en frecuencia o en amplitud de un haz de láser se desarrollen de modo que tal haz pueda servir como portador de señales de televisión, en forma parecida a como lo hacen ahora los haces de microondas. Supóngase también que se dispondrá de sistemas de láser cuyas longitudes de onda puedan ser "sintonizadas" con precisión en cualquier parte de la región del visible, esto es, en el intervalo de 400 nm $< \lambda <$ 700 nm. Si un canal de televisión ocupa un ancho de banda de 10 MHz, ¿cuántos canales podrían acomodarse con esta tecnología del láser? Comente sobre la superioridad intrínseca de la luz visible sobre las microondas como portadoras de información.

28. Un átomo hipotético tiene niveles de energía espaciados uniformemente en 1.2 eV de energía. Para una temperatura de 2000 K, calcule la razón del número de átomos en el decimotercer estado excitado al número de átomos en el undécimo estado excitado.

29. Un átomo (hipotético) en particular tiene únicamente dos niveles atómicos, con energías que difieren en 3.2 eV. En la atmósfera de una estrella existen 6.1×10^{13} de estos átomos por cm^3 en el estado excitado (superior) y 2.5×10^{15} por cm^3 en el estado base (inferior). Calcule la temperatura de la atmósfera de la estrella.

30. Una inversión de población de dos niveles se describe a menudo al asignarle al sistema una temperatura Kelvin negativa. Demuestre que tal temperatura negativa correspondería realmente a una inversión. ¿Qué temperatura negativa describiría el sistema del problema muestra 4 cuando la población del nivel superior excede en 10.0% a la del nivel superior?

31. Un átomo tiene dos niveles de energía con una longitud de onda de transición de 582 nm. A 300 K están en el estado inferior 4.0×10^{20} átomos. (*a*) ¿Cuántos ocupan el estado superior, en condiciones de equilibrio térmico? (*b*) Supóngase que, a su vez, se bombeen 7.0×10^{20} átomos

al estado superior, con 4.0×10^{20} en el estado inferior. ¿Cuánta energía se liberaría en un solo pulso de láser?

32. Los espejos del láser de la figura 14 constituyen una cavidad en la que se forman ondas estacionarias de luz láser. En la vecindad de 533 nm, ¿cuán separados en longitud de onda están los modos contiguos de operación permitidos? Los espejos están separados 8.3 cm.

33. Un haz de láser de alta potencia (λ = 600 nm) con un diámetro de haz de 11.8 cm está apuntado hacia la Luna, a 3.82×10^5 km de distancia. La dispersión del haz proviene sólo de los efectos de difracción. La localización angular del borde del disco central de difracción (véase la Ec. 11 del capítulo 46) está dada por

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1.22\,\lambda}{d},$$

donde d es el diámetro de la abertura del haz. Halle el diámetro del disco central de difracción en la superficie de la Luna.

34. El haz de un láser de argón (λ = 515 nm) tiene un diámetro d de 3.00 mm y una potencia útil de 5.21 W. El haz se enfoca sobre una superficie difusa por una lente de distancia focal f = 3.50 cm. Se forma un patrón de difracción como el de la figura 13 del capítulo 46. (*a*) Demuestre que el radio del disco central está dado por

$$R = \frac{1.22\,f\lambda}{d}.$$

Puede demostrarse que el disco central contiene 84% de la potencia incidente. Calcule (*b*) el radio R del disco central y la densidad de flujo promedio de la potencia (*c*) en el haz incidente y (*d*) en el disco central.

35. Se está estudiando el uso de los láseres para defenderse contra proyectiles balísticos. Un haz de láser de 120 MW/m^2 de intensidad probablemente causaría la explosión y destruiría un proyectil endurecido (que no gira) en 1 s más o menos. (*a*) Si el láser tuviera una potencia útil de 5.30 MW, una longitud de onda de 2.95 μm, y un diámetro de haz de 3.72 m (verdaderamente un láser muy potente), ¿destruiría un proyectil a una distancia de 3000 km? (*b*) Si pudiera cambiarse la longitud de onda, ¿qué valor mínimo funcionaría? (*c*) Si no pudiera cambiarse la longitud de onda del láser, ¿cuál sería el alcance destructor del láser en (*a*)? Úsese la ecuación del disco central dada en el problema 34 y considérese que la distancia focal es la distancia al blanco.

36. El medio activo de un láser en particular de rubí (λ = 694 nm) es un cristal de rubí sintético de 6.00 cm de largo y 1.0 cm de diámetro. El cristal está plateado en un extremo y —para permitir la formación de un haz externo— únicamente parcialmente plateado en el otro. (*a*) Considere al cristal como una cavidad óptica resonante análoga a un tubo de órgano cerrado y calcule el número de nodos de la onda estacionaria que existen a lo largo del eje del cristal. (*b*) ¿En qué cantidad $\Delta\nu$ tendría que desplazarse la frecuencia del haz para aumentar este número en una unidad? Demuestre que $\Delta\nu$ es precisamente el inverso del tiempo de viaje de la luz en un viaje redondo a lo largo del eje del cristal. (*c*) ¿Cuál es el corrimiento fraccionario de la frecuencia $\Delta\nu/\nu$? El índice de refracción apropiado es de 1.75.

CAPÍTULO 53

CONDUCCIÓN ELÉCTRICA EN LOS SÓLIDOS

En los dos capítulos anteriores hemos visto lo bien que funciona la teoría cuántica al aplicarla a los átomos individuales. En este capítulo demostraremos que esta poderosa teoría funciona igualmente bien al aplicarla a grupos de átomos en forma de sólidos.

Todo sólido posee una enorme gama de propiedades que podemos elegir para su estudio. ¿Es blando o duro? ¿Puede ser sometido a martilleo hasta formar una lámina delgada o estirarse hasta convertirse en un alambre fino? ¿Es transparente? ¿Qué clase de ondas viajan por él y a qué velocidades? ¿Conduce el calor? ¿Cuáles son sus propiedades magnéticas? ¿Cuál es su estructura cristalina? Y así sucesivamente. En cada caso, debemos querer utilizar la teoría cuántica para entender las propiedades medidas.

En este capítulo nos centramos en una propiedad de los sólidos en particular: la conducción de la electricidad. Analizaremos la clasificación de los sólidos en conductores, aislantes, semiconductores y superconductores, y demostraremos cómo la teoría cuántica proporciona el marco de referencia para entender por qué ciertos materiales se comportan de una manera y otros de otra.

53-1 ELECTRONES DE CONDUCCIÓN EN UN METAL

Un átomo aislado de cobre tiene 29 electrones. En el cobre sólido, 28 de ellos se mantienen cerca de sus sitios en la red por medio de fuerzas electromagnéticas y no tienen la libertad de moverse dentro de todo el volumen del sólido. El electrón restante *tiene* la libertad de moverse y, si aplicamos una fem entre los extremos de un alambre de cobre, son estos *electrones de conducción* (uno por átomo) los que constituyen la corriente que se crea en el alambre.

En la sección 32-5 vimos este problema desde el punto de vista de la física clásica, comparando los electrones de conducción dentro de un cubo de metal con los átomos de un gas confinado dentro de una caja cúbica. Usando este modelo (clásico) del *gas del electrón libre*, dedujimos una expresión para la resistividad del metal. Ésta es (véase la Ec. 20 del capítulo 32)

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}, \qquad (1)$$

donde m es la masa y e la carga del electrón, n es el número de electrones de conducción por unidad de volumen, y τ es el tiempo promedio entre las colisiones de los electrones con la red.

En la sección 32-5 demostramos que τ es esencialmente constante, independiente de si el campo eléctrico se ha establecido o no dentro del cubo mediante una fem aplicada externamente. Así, la resistividad ρ es independiente del campo eléctrico aplicado, que es otra manera de decir que los metales obedecen la ley de Ohm.

Si bien esta deducción de la forma de la ley de Ohm es un buen logro de la física clásica, no es un asunto sencillo ir mucho más allá. También, existe un problema —las capacidades caloríficas de los metales— acerca de lo cual esta teoría clásica *tiene* algo que decir, pero desafortunadamente sus producciones no concuerdan con el experimento. Viendo más allá de este nivel de preocupación, es difícil imaginarse cómo podríamos explicar algo tan complicado como un transistor sobre la base del modelo clásico del gas del electrón libre. Veamos mejor qué puede ofrecernos la mecánica ondulatoria.

El primer paso para resolver cualquier problema de mecánica ondulatoria es especificar la energía potencial

de la partícula —que tomamos que es un solo electrón de conducción— como función de su posición. Como nos lo recuerda la figura 6 del capítulo 51, necesitamos esta información para poder sustituir en la ecuación de Schrödinger. Comenzamos con la suposición razonable más sencilla, a saber, que la energía potencial es cero en todos los puntos dentro de la muestra cúbica de metal y que tiende a un valor infinitamente grande en todos los puntos de fuera. Seguimos tratando con un gas de electrón libre, pero ahora se rige por las reglas cuánticas —en lugar de las clásicas.

Esta energía potencial nos trae a la memoria el problema del electrón atrapado dentro de un pozo infinito que resolvimos en la sección 50-7. Sin embargo, nótense dos diferencias: el problema actual es tridimensional, e implica un pozo de dimensiones macroscópicas, y no atómicas.

Representamos un solo electrón de conducción atrapado en su cubo de metal por medio de una onda (estacionaria) material $\psi(\mathbf{r})$, donde $\mathbf{r}$ es un vector de posición, e imponemos la condición de que la densidad de probabilidad $\psi^2(\mathbf{r})$ sea cero tanto en la superficie del cubo como en todos los puntos exteriores. Éste es nuestro modo de reconocer que el electrón está realmente atrapado dentro del cubo de metal. La figura 18 del capítulo 50 nos recuerda que hemos procedido justamente de la misma manera en el caso unidimensional.

Si imponemos estas condiciones de frontera en la función de onda, la ecuación de Schrödinger nos dice que la energía total E del electrón estará cuantizada, como lo estaba para el electrón atrapado dentro de un pozo unidimensional. Existe, sin embargo, una gran diferencia. Puesto que nuestro cubo de metal es tan grande en la escala de las dimensiones atómicas, el número de ondas estacionarias materiales que podemos ajustar en el volumen del cubo y aún satisfacer los requerimientos de frontera es enorme, y las energías permitidas del electrón están extremadamente próximas entre sí. El problema muestra 1 demuestra que, en un cubo de 1 cm de arista, existen ¡unos 10^{20} estados cuantizados que se encuentran entre $E = 5$ eV y $E = 5.01$ eV! Compárese esto con el arreglo limitado de niveles bien espaciados que se muestra, por ejemplo, para el átomo de hidrógeno en la figura 4 del capítulo 51.

No podemos de ningún modo tratar con este vasto número de estados, uno a uno; debemos usar métodos estadísticos. En lugar de preguntar, "¿cuál es la energía de este estado?" debemos preguntar, "¿cuántos estados tienen las energías que se encuentran en el intervalo de E a $E + dE$?".

Nos hemos topado con situaciones como ésta antes. Por ejemplo, al describir las velocidades de las moléculas de un gas ideal en la sección 24-3, vimos que la única manera de continuar era plantear la pregunta: "¿cuántas moléculas tienen velocidades que se encuentren en el intervalo de v a $v + dv$?".

En los electrones de conducción, el número de estados (por unidad de volumen del sólido) cuyas energías se encuentran en el intervalo de E a $E + dE$ puede escribirse como $n(E)dE$, donde $n(E)$ es una función que se llama la *densidad de estados*. Para nuestro gas del electrón (cuántico) libre puede demostrarse que es*

$$n(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}. \qquad (2)$$

En esta etapa estamos contando simplemente los estados disponibles para un solo electrón de conducción. Nótese que no hay nada en la ecuación 2 que dependa del material de que está hecha nuestra muestra. El ajuste de patrones de ondas estacionarias dentro de una caja cúbica es un problema puramente geométrico. En la sección siguiente veremos cómo hacer para llenar esos estados.

Es probable que usted se pregunte: "si las energías de los estados permitidos están tan cerca entre sí, ¿por qué no simplemente nos olvidamos de la cuantización y suponemos una distribución continua de la energía?". La respuesta, como lo veremos en la sección siguiente, se basa en el hecho de que el principio de exclusión de Pauli se aplica a los electrones en donde los encontramos, ya sea como electrones orbitales en los átomos o como electrones de conducción en los metales. Aun cuando existen muchos estados en nuestro problema, existen también muchos electrones de conducción disponibles para ocuparlos, y el principio de Pauli nos permite poner sólo un electrón en cada uno de estos estados. Así, aunque no podamos detectar directamente con facilidad la naturaleza cuantizada de las energías de los electrones de conducción, el hecho de la cuantización permanece absolutamente como una característica central y tiene consecuencias importantes.

Problema muestra 1 Un cubo de cobre tiene 1 cm de arista. ¿De cuántos estados disponemos para que sus electrones de conducción en el intervalo de energía entre $E = 5.00$ eV y 5.01 eV? Supóngase que los electrones de conducción se comportan como un gas de electrones (cuántico) libres.

Solución Estos límites de la energía están tan próximos entre sí que no podemos decir con seguridad que la respuesta, sobre la base del volumen unitario, sea $n(E)\Delta E$, donde $E = 5$ eV y $\Delta E = 0.01$ eV. De la ecuación 2 tenemos

$$n(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

$$= \frac{(8\sqrt{2}\pi)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})^{3/2}}{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^3} [(5\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})]^{1/2}$$

$$= 9.48 \times 10^{46}\ \text{m}^{-3}\text{J}^{-1} = 1.52 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\text{eV}^{-1}.$$

---

* Véase *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, por Robert Eisberg y Robert Resnick, Wiley, 1985, 2da. edición, sección 11-11

Nótese que debemos expresar la energía E en joules antes de sustituirla en la ecuación 2, aun cuando deseemos que nuestro resultado final esté dado en términos de electronvolts.

El número real de estados N que se encuentran en el intervalo de $E = 5.00$ eV a $E = 5.01$ eV en nuestro cubo es, cuando a es la longitud de la arista del cubo,

$$\begin{aligned} N &= n(E)\Delta E\, a^3 \\ &= (1.52 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}eV^{-1}})(0.01\ \mathrm{eV})(1 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^3 \\ &= 1.52 \times 10^{20}. \end{aligned}$$

Esto es, existen 1.52×10^{20} estados de energía individuales entre 5.00 eV y 5.01 eV. El intervalo promedio de la energía ΔE_{cont} entre niveles contiguos dentro de este intervalo se deduce rápidamente de

$$\Delta E_{\text{cont}} = \frac{\Delta E}{N} = \frac{0.01\ \mathrm{eV}}{1.52 \times 10^{20}} \approx 7 \times 10^{-23}\ \mathrm{eV}.$$

Concluimos que, aun en esta banda estrecha de energía, existen en realidad muchos estados y que se encuentran excesivamente próximos entre sí en energía.

Nuestras conclusiones son completamente independientes del material de la muestra. Tampoco es importante que la muestra sea cúbica; cualquier otra forma que encierre el mismo volumen daría el mismo resultado final. Lo que *hemos* supuesto como cierto es que los electrones de conducción se comportan como un gas de electrón (cuántico) libre. Es decir, hemos supuesto que su energía potencial es constante (y que hemos considerado es cero) en todos los puntos dentro de la muestra. Esta suposición nunca es estrictamente cierta en los metales reales. No obstante, nuestra conclusión central se cumple; un electrón de conducción en un metal tiene disponibles muchos estados, y éstos se encuentran muy cercanos entre sí en cuanto a energía.

53-2 OCUPACIÓN DE LOS ESTADOS PERMITIDOS

Ahora que hemos visto cuántos estados existen, estamos listos para comenzar a ocuparlos con electrones. En la sección 52-3 llevamos a cabo este proceso en relación con la construcción de la tabla periódica de los elementos. Allí vimos la importancia central del principio de exclusión de Pauli, que nos dice que sólo podemos localizar un electrón en un estado dado. Este poderoso principio es igualmente importante en el problema que nos ocupa.

La figura 1*a* muestra la densidad de estados dada por la ecuación 2. Esta función da el número de estados posibles en cualquier intervalo de energía. Sin embargo, no todos ellos están ocupados. Llenamos los estados disponibles en un metal de la misma manera que llenamos los estados disponibles en un átomo: agregamos electrones, uno por cada estado cuántico, comenzando con el de mínima energía y terminando cuando hemos agregado al metal todos los electrones necesarios.

Consideremos primero las condiciones en el cero absoluto de temperatura. Esto representa el estado de mínima energía de nuestra muestra, y llegamos a él al colocar los electrones de conducción dentro de los estados sin llenar que se encuentran en la mínima energía. Este proceso se indica en la figura 1*b*, que muestra la *función de probabilidad* $p(E)$. Esta función da la probabilidad de que el estado con energía E esté ocupado. En $T = 0$, todos los estados por debajo de cierta energía están llenos ($p = 1$) y todos los estados por arriba de esa energía están vacantes ($p = 0$). El estado ocupado más alto en estas condiciones se llama el *nivel de Fermi*, y su energía, denotada por E_F en la figura 1*b*, se llama *energía de Fermi*. Por ejemplo, la energía de Fermi del cobre es de 7.06 eV.

Si multiplicamos la densidad $n(E)$ de los estados *disponibles* por la probabilidad $p(E)$ de que esos estados estén

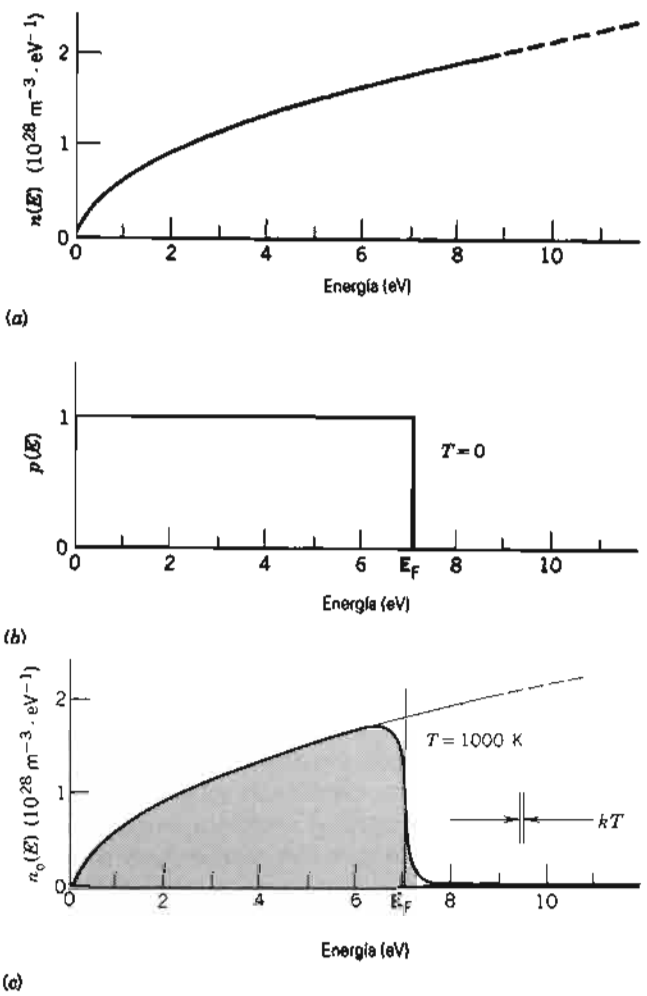


Figura 1 (*a*) La densidad de estados $n(E)$ graficada como función de la energía E. (*b*) La función de probabilidad $p(E)$ para $T = 0$. (*c*) La densidad de estados ocupados $n_0(E)$, igual al producto de $n(E)$ y $p(E)$. Todos los estados por debajo de E_F están ocupados y todos los estados por arriba de E_F están vacíos.

ocupados, el resultado es la *densidad de estados ocupados*, $n_o(E)$, o sea

$$n_o(E) = n(E)p(E). \tag{3}$$

Esta cantidad se grafica en la figura 1*c*.

El área sombreada de la figura 1*c* representa el número total de estados ocupados (por unidad de volumen). Hallar esta área e igualarla con la densidad n de los electrones de conducción en el metal nos permite un medio para determinar la energía Fermi. Al integrar entre los límites de $E = 0$ y $E = E_F$ para encontrar el área, obtenemos

$$n = \int_0^{E_F} n_o(E)dE, \tag{4}$$

o, llevando a cabo la integral,

$$n = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F} E^{1/2}\,dE = \left(\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\right)(\tfrac{2}{3}E_F^{3/2}).$$

Al despejar para obtener E_F, da

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} \tag{5}$$

Una mirada a la figura 1*c* es suficiente para hacer pedazos el popular concepto erróneo de que todo movimiento cesa en el cero absoluto de temperatura. Vemos que, precisamente gracias al principio de exclusión de Pauli, los electrones se apilan en energía desde cero hasta la energía de Fermi. La energía *promedio* para las condiciones de la figura 1*c* resulta que es de alrededor de 4.2 eV. Por comparación, el promedio de la energía cinética de traslación de una molécula de un gas ideal a la temperatura ambiente es de sólo 0.025 eV. ¡Los electrones de conducción en un metal tienen abundancia de energía en el cero absoluto!

Parece claro que las moléculas de un gas a temperaturas ordinarias y los electrones de conducción en un metal se comportan de modo muy diferente. Formalmente, decimos que las moléculas de gas obedecen la estadística (clásica) de Maxwell-Boltzmann y que los electrones de conducción obedecen la estadística (cuántica) de Fermi-Dirac. La palabra "estadística" se refiere aquí a las reglas formales en el conteo de las partículas. Por ejemplo, en la estadística de Maxwell-Boltzmann suponemos que podemos distinguir partículas idénticas, pero en la estadística de Fermi-Dirac suponemos que no. Una vez más, en la estadística de Maxwell-Boltzmann, el principio de exclusión de Pauli no desempeña ningún papel, pero en la estadística de Fermi-Dirac su papel, como hemos visto, es vital. Véase la sección 24-6 para un estudio de estas distribuciones estadísticas.

¿Qué le sucede a la distribución de electrones de la figura 1 conforme elevamos la temperatura? Sólo ocurre un pequeño cambio en la distribución, pero ese pequeño cambio tiene consecuencias importantes. La figura 2

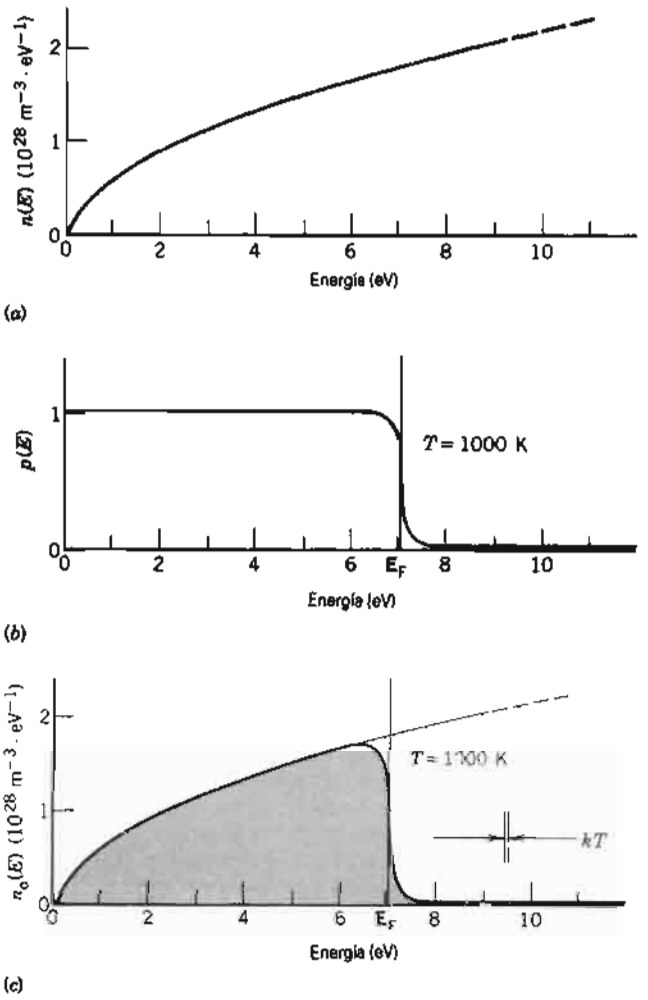


Figura 2 Lo mismo que la figura 1, pero para $T = 1000$ K. Nótese cuán poco difieren las gráficas al compararlas con la figura 1. (Estas gráficas están un tanto idealizadas en cuanto que suponen que los electrones se mueven en una región de potencial uniforme. Las gráficas de densidad de estados para metales reales no tienen esta forma sencilla.)

muestra cómo se verían las distribuciones de la figura 1 para $T = 1000$ K, una tamperatura a la cual una muestra de metal relumbraría fuertemente dentro de un cuarto oscuro.

La característica sorprendente de la figura 2 es lo poco que difiere de la figura 1, las distribuciones en el cero absoluto. En $T = 0$, la función de probabilidad $p(E)$ era estrictamente unitaria por debajo de E_F y estrictamente cero por arriba de E_F. Como lo muestra la figura 2*b*, en $T = 1000$ K existe una pequeña probabilidad de que haya unos cuantos estados vacíos por debajo de E_F y unos cuantos estados ocupados por arriba de E_F. En la figura 2*c* se muestra la densidad $n_o(E)$ de estados ocupados, nuevamente dada por la ecuación 3 como el producto de $n(E)$ y $p(E)$. Puesto que unos cuantos estados están ocupados por

arriba de E_F, la energía promedio es un poco mayor de lo que era en el cero absoluto pero no mucho más grande. Esto está nuevamente en notable contraste con el comportamiento de un gas ideal, en el que la energía cinética promedio de las moléculas es proporcional a la temperatura.

Al comparar las condiciones en $T = 0$ y $T = 1000$ K, vemos que toda la "acción" ocurre para los electrones de conducción cuyas energías están cerca de la energía de Fermi. El movimiento de la mayoría de los electrones permanece sin cambio conforme se eleva la temperatura, estando efectivamente cerrado su gran almacén de energía.

Veamos por qué es esto así. La figura 2*c* muestra la magnitud de kT, una medida de la energía disponible de su agitación térmica; su valor a 1000 K es de sólo 0.086 eV. No puede esperarse que un electrón cambie su energía en más de unas cuantas veces esta cantidad relativamente pequeña a causa de la agitación térmica únicamente. En razón del principio de exclusión, sólo los electrones cuyas energías estén cerca de la energía de Fermi tienen estados vacantes lo suficientemente cerca para que ocurran tales transiciones térmicas. Un electrón con una energía de, digamos, 2 eV no puede ganar ni perder energía porque todos los estados que están suficientemente cerca de él en cuanto a energía ya están ocupados; simplemente no hay a dónde ir. En analogía con las olas del mar, la agitación térmica de los electrones causa normalmente tan sólo ondulaciones ligeras (rizos) en la superficie del "mar de Fermi"; las vastas profundidades de ese mar no se alteran.

La función de probabilidad $p(E)$ graficada en las figuras 1*b* y 2*b* se llama *función de probabilidad de Fermi-Dirac* y puede demostrarse que es

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}, \qquad (6)$$

donde E_F es la energía de Fermi, definida ahora (véase la Fig. 2*b*) como la energía que corresponde a $p = \frac{1}{2}$.

Nótese que la ecuación 6 produce una gráfica rectangular en la figura 1*b* para $T = 0$. Conforme $T \to 0$, el exponente $(E - E_F)/kT$ de la ecuación 6 tiende a $-\infty$ si $E < E_F$ y a $+\infty$ si $E > E_F$. En el primer caso tenemos $p(E) = 1$ y en el segundo $p(E) = 0$, como se requiere.

La ecuación 6 también nos muestra que la cantidad importante no es la energía E sino más bien $E - E_F$, el intervalo de energía entre E y la energía de Fermi. Vemos más adelante que, en virtud de la naturaleza exponencial del término del denominador de la ecuación 6, $p(E)$ es muy sensible a pequeños cambios en $E - E_F$. Esto confirma nuestra aseveración de que los electrones cuyas energías estén cerca de la energía de Fermi son los únicos que desempeñan un papel activo. Como veremos, es muy probable que la primera pregunta al tratar con los electrones de un sólido —ya sea un conductor, un semiconductor o un aislante— sea: "En una escala de energía, ¿dónde se encuentra el nivel de Fermi?".

Problema muestra 2 Calcule la energía de Fermi del cobre, dado que el número de electrones de conducción por unidad de volumen (véase el problema muestra 2, capítulo 32) es de 8.49×10^{28} m^{-3}.

Solución De la ecuación 5 obtenemos

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(8)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}\left[\frac{(3)(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})}{\pi}\right]^{2/3}$$
$$= 1.13 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.06\ \text{eV}.$$

Problema muestra 3 ¿Cuál es la probabilidad de ocupación de un estado cuya energía es (*a*) 0.1 eV por arriba de la energía de Fermi, (*b*) 0.1 eV por debajo de la energía de Fermi y (*c*) igual a la energía de Fermi? Supóngase una temperatura de 800 K.

Solución (*a*) El exponente (adimensional) de la ecuación 6 es

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0.1\ \text{eV}}{(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(800\ \text{K})} = 1.45.$$

Al incluir este exponente en la ecuación 6 se obtiene

$$p(E_+) = \frac{1}{e^{1.45} + 1} = 0.19.$$

Así la probabilidad de ocupación de este estado es del 19%.

(*b*) Para una energía de 0.1 eV *por debajo* de la energía de Fermi, el exponente de la ecuación 6 tiene el mismo valor numérico que antes, pero es negativo. Así, de la ecuación 6,

$$p(E_-) = \frac{1}{e^{-1.45} + 1} = 0.81.$$

La probabilidad de ocupación para este estado es del 81%.

(*c*) Para $E = E_F$ el exponente de la ecuación 6 es cero y esa ecuación se convierte en

$$p(E_F) = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = 0.50.$$

Nótese que este resultado no depende de la temperatura. Adviértase también que ninguno de estos tres resultados depende del valor real de la energía de Fermi, sólo del intervalo de energía entre la energía de Fermi y la energía del estado en cuestión.

Problema muestra 4 (*a*) En el cobre a 1000 K, calcule la energía para la cual la probabilidad $p(E)$ de que el estado de un electrón de conducción esté ocupado sea del 90%. (Supóngase que los electrones de conducción en el cobre se comporten como un gas de electrón libre, con una energía de Fermi de 7.06 eV.) (*b*) Para esta energía, ¿cuál es $n(E)$, la distribución de energía de los estados disponibles? (*c*) Para esta misma energía, ¿cuál es $n_o(E)$, la distribución de energía de los estados ocupados?

Solución (*a*) La sustitución en la ecuación 6 nos da

$$p(E) = \frac{1}{e^{\Delta E/kT} + 1} = 0.9,$$

donde $\Delta E = E - E_F$. Un poco de álgebra conduce a $\Delta E/kT = -2.20$ de modo que

$$\Delta E = -2.20kT = -(2.20)(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(1000\ \text{K})$$
$$= -0.19\ \text{eV}.$$

Para el cobre, suponiendo que $E_F = 7.06$ eV, tenemos

$$E = E_F + \Delta E = 7.06\ \text{eV} - 0.19\ \text{eV} = 6.87\ \text{eV}.$$

(*b*) Llevando a cabo un cálculo del mismo modo que para el del problema muestra 1 para $E = 6.87$ eV da $n(E) = 1.78 \times 10^{28}$ $\text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1}$.

(*c*) De la ecuación 3 tenemos, nuevamente para $E = 6.87$ eV,

$$n_c(E) = n(E)p(E)$$
$$= (1.78 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1})(0.90)$$
$$= 1.60 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1}.$$

53-3 CONDUCCIÓN ELÉCTRICA EN METALES

La figura 3 representa la distribución de Fermi de las *velocidades* en un metal. La *velocidad de Fermi* v_F es la velocidad de un electrón cuya energía cinética es igual a E_F, la energía de Fermi. Cuando no hay un campo eléctrico aplicado, los electrones tienen velocidades que varían desde 0 hasta aproximadamente v_F, correspondiendo a energías que varían entre 0 y E_F aproximadamente. La distribución de la figura 3 representa una componente típica de la *velocidad*, más bien que la magnitud de la velocidad o rapidez. Esto ilustra que existen números iguales de electrones moviéndose en direcciones opuestas, de modo que la corriente neta es cero en ausencia de un campo eléctrico.

Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones se aceleran debido al campo y adquieren un pequeño aumento en velocidad en un sentido opuesto al campo. (Ya que los electrones están cargados negativamente, la fuerza sobre un electrón es $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, la cual está en una sentido opuesto a $\mathbf{E}$.) En presencia de un campo, toda la distribución de velocidades se desplaza ligeramente hacia la derecha en la figura 3. Sin embargo, la mayoría de los electrones todavía se suman en pares de modo que la velocidad es cero y no contribuyen a la conducción.

Los electrones que contribuyen a la conducción son aquéllos dentro de un pequeño grupo de velocidades cercanas a v_F. El campo eléctrico provoca que los estados que tienen velocidades justo por debajo de v_F en la dirección de $\mathbf{E}$ queden desocupados, mientras que los estados que tienen velocidades justo por arriba de v_F en un sentido opuesto a $\mathbf{E}$ resultan ocupados. Puede verse en la figura 3 por qué la velocidad de arrastre o de deriva (la velocidad promedio de todos los electrones) es mucho menor que v_F, porque en el proceso de promediarse muchas de las velocidades positivas y negativas se cancelarán entre sí. La velocidad de arrastre está determinada principalmente por el pequeño número de electrones que se mueven de los estados por debajo de la velocidad v_F a los estados por arriba de la velocidad v_F en presencia del campo eléctrico.

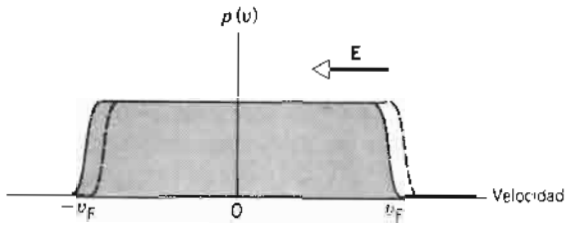


Figura 3 La distribución de Fermi de velocidades. Cuando no hay un campo eléctrico (línea llena) los estados hasta la velocidad de Fermi v_F están llenos. Cuando se aplica un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en la dirección que se muestra, la distribución se recorre hacia la derecha (línea entrecortada) al mismo tiempo que los electrones se aceleran a causa del campo.

La resistividad del metal al flujo de estos electrones se determina por las colisiones realizadas por los electrones con las corazas de los iones de la red. En el problema muestra 5 demostramos que, para el cobre a la temperatura ambiente, la velocidad de Fermi, que es la velocidad promedio de los electrones de conducción entre colisiones, es de 1.6×10^6 m/s, fracción significativa de la velocidad de la luz. El tiempo medio entre colisiones es de 2.5×10^{-14} s y el camino o trayectoria libre media es de 41 nm, que está a casi 150 distancias del vecino más cercano en la red del cobre.

Uno puede sorprenderse de que, a temperatura ambiente, un electrón de conducción pueda moverse tan lejos por toda la red de cobre sin chocar con una coraza de iones. A temperaturas más bajas —cuando la resistividad es menor— puede moverse aún mucho más allá. De hecho, quizá sea una predicción inesperada de la mecánica ondulatoria que una red perfectamente periódica en el cero absoluto de temperatura sería totalmente transparente para los electrones de conducción. ¡Nunca habría colisiones!

Empero, no existen redes perfectamente periódicas. Siempre habrá sitios vacantes en las redes y los átomos de impureza, independientemente de cuánto nos esforcemos en eliminarlos. Además, a temperaturas por arriba del cero absoluto la red está vibrando, y estos movimientos echan a perder también la periodicidad de la red. A la temperatura ambiente las "colisiones" de las que hemos hablado son, en su mayor parte, interacciones entre los electrones de conducción y las vibraciones la red.

Problema muestra 5 Considérese que la energía de Fermi para el cobre sea de 7.06 eV. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de un electrón de conducción con esta energía cinética? (*b*) La resistividad del cobre a temperatura ambiente es de $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. ¿Cuál es el tiempo promedio τ entre colisiones? (*c*) ¿Qué camino libre medio λ debe de calcularse de los resultados de (*a*) y (*b*)?

Solución (*a*) A lo largo de esta sección hemos supuesto que los electrones de conducción se mueven en una región en donde su energía potencial es cero. Así, su energía total E es toda ella cinética y podemos escribir, cuando $E = E_F$,

$$E_F = \tfrac{1}{2}mv_F^2,$$

donde v_F es la velocidad de Fermi. Al despejar v_F se obtiene

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{(2)(7.06\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}\right]^{1/2}$$
$$= 1.6 \times 10^6\ \text{m/s}.$$

No debe usted confundir esta velocidad con la *velocidad de arrastre o deriva* de los electrones de conducción, que es del orden de 10^{-4} m/s y, por lo tanto menor en un factor de unos 10^{10}. Como lo explicamos en la sección 32-5, la velocidad de arrastre es la velocidad promedio con la que los electrones se mueven realmente por de un conductor cuando se aplica un campo eléctrico; la rapidez Fermi es su rapidez promedio entre colisiones.

(*b*) Al despejar τ de la ecuación 1 nos da

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$
$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$
$$= 2.5 \times 10^{-14}\ \text{s}.$$

(*c*) Para hallar el trayecto libre medio, tenemos

$$\lambda = v_F\tau = (1.6 \times 10^6\ \text{m/s})(2.5 \times 10^{-14}\ \text{s})$$
$$= 4.1 \times 10^{-8}\ \text{m} = 41\ \text{nm}.$$

En la red del cobre los centros de las corazas de iones vecinos están separados por 0.26 nm. Así, un electrón de conducción típico puede moverse una distancia sustancial por una red de cobre a temperatura ambiente sin que se presente una colisión.

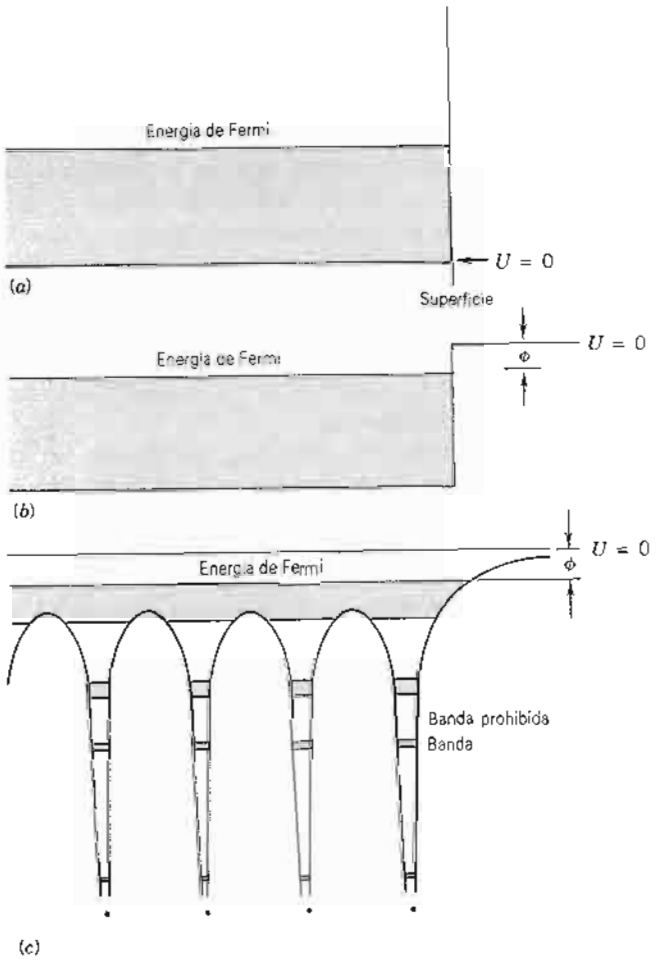


Figura 4 (*a*) La variación de la energía potencial supuesta para un metal en el modelo del gas del electron libre. (*b*) Una variación más realista, que muestra un cambio finito de la energía potencial en la superficie de la muestra. (*c*) Una variación todavía más realista, que tiene en cuenta la red de corazas de iones. Esta curva es un corte unidimensional a lo largo de una línea de corazas de iones (que se muestran como puntos en la parte inferior de la figura). Las regiones sombreadas son las bandas de energía permitidas para los electrones. No se permite que los electrones tengan energías correspondientes a la banda prohibida.

53-4 BANDAS DE ENERGÍA PERMITIDAS Y PROHIBIDAS

La figura 4*a* muestra la variación de la energía potencial que hemos estado usando para describir un electrón de conducción en un metal. La energía potencial es cero dentro del metal, y se eleva al infinito en la superficie. Sin embargo, hay problemas con este modelo. Por ejemplo, nos dice que, a causa de la barrera de potencial infinita, un electrón nunca podría escapar del interior de la muestra a través de su superficie. Sabemos que esto no es cierto, porque los electrones pueden ser "evaporados" de un metal al elevar su temperatura, como en el filamento calentado de un tubo al vacío (emisión termoiónica). También pueden ser "expulsados" si hacemos incidir luz con la frecuencia suficientemente alta sobre la superficie del metal (efecto fotoeléctrico).

La figura 4*b* muestra que podemos superar esta dificultad con facilidad suficiente al hacer finita la energía potencial en la superficie. Hemos hecho el mismo ajuste realista (véase la Fig. 20 del capítulo 50) en el electrón atrapado en un pozo unidimensional de las dimensiones de un átomo. La cantidad ϕ de la figura 4*b* es la *función de*

trabajo del metal, definida como la mínima cantidad de energía que debe suministrarse a un electrón para desprenderlo de la muestra.

La figura 4*b* se trazó para poner a nuestra escala de energía de acuerdo con la que usamos para el átomo de hidrógeno. Esto es, hemos elegido la configuración $E = 0$ para representar un electrón en reposo muy alejada de la muestra. Es posible hacer este cambio porque la energía potencial contiene siempre una constante aditiva arbitraria y nos preocupan más, en todo caso, los cambios en la energía total E que la propia E. En nuestra nueva escala de energía, las energías totales de los electrones atrapados en la muestra son negativas, al igual que lo son para el átomo de hidrógeno.

Con mucho, la mayor dificultad que permanece en la figura 4*b* es que supone que la energía potencial de un electrón de conducción es constante en todo el volumen de la muestra. Esto hace caso omiso del hecho de que los electrones de conducción se mueven por todos lados entre un grupo de corazas de iones cargados positivamente. De hecho, es bastante sorprendente que hayamos podido aprender tanto como lo hemos hecho acerca de la resistividad de los metales sin tener en cuenta las variaciones de la energía potencial causadas por las corazas de iones en la red. Sin embargo, no hemos sido capaces de contestar preguntas como: "¿Por qué el cobre es conductor y el diamante no?". Si tomamos en cuenta la periodicidad de la red, seremos capaces de contestar esta pregunta e ir más allá.

La figura 4*c* muestra una curva de energía potencial que toma en cuenta las corazas de iones. El hecho de sustituir esta energía potencial (o alguna aproximación de ella) en la ecuación de Schrödinger produce un nuevo e interesante fenómeno. Como lo muestra la figura 4*c*, *los estados permitidos se agrupan ahora en bandas, con espacios o bandas de energía entre ellas en donde no existen estados.* Nótese que los electrones justo por debajo del nivel de Fermi están en libertad de moverse por toda la red, pero los electrones con menores energías, los *electrones de la coraza*, no. Veamos si podemos entender estas bandas permitidas y prohibidas en términos físicos.

En una red de cobre, la distancia entre vecinos más cercanos es de 0.26 nm. Sin embargo, consideremos dos átomos de cobre separados por una distancia mucho mayor, digamos, de 50 nm, de tal modo que se puedan considerar como "aislados"; véase la figura 5*a*. En cada átomo los 29 electrones son asignados a los niveles mostrados en la figura 5*b*.

Ahora acerquemos los dos átomos entre sí de tal modo que un electrón exterior en uno u otro átomo pueda sentir la influencia, si bien ligeramente, de las fuerzas ejercidas sobre él por el otro átomo. En el lenguaje de la mecánica ondulatoria decimos que sus funciones de onda se traslapan. Afirmamos, sin demostrarlo, que el traslape de las dos funciones de onda pueden combinarse de dos modos independientes, que describen dos estados que tienen energías (ligeramente) diferentes, como se muestra en la segunda columna de la figura 6. Puesto que el traslape es mayor para los electrones exteriores, la separación de energía será mayor para ellos que para los electrones interiores.

Por extensión, si juntamos N átomos de cobre para formar una red de cobre, cada nivel del átomo aislado se convertirá en N niveles en el sólido. Entonces el nivel 1*s* del átomo se convierte en la banda 1*s* del sólido y así sucesivamente. La figura 6 indica este proceso.

Desde este punto de vista las bandas prohibidas no son tan difíciles de entender, siendo ya conocidas a partir de la estructura de niveles del átomo aislado. En realidad, podemos decir que Niels Bohr, aun antes de la mecánica ondulatoria, "inventó" las bandas de energía cuando dijo, en efecto: "Supongo que los átomos pueden existir sin radiar en un conjunto discreto de estados estacionarios de energía definida, *estando prohibidos los estados intermedios de energía*".

53-5 CONDUCTORES, AISLANTES Y SEMICONDUCTORES

La figura 7*a* representa la estructura de bandas de un conductor como el cobre. Su característica central es que la banda más energética que contenga electrones está ocupada sólo parcialmente. Existen estados vacantes arriba del nivel de Fermi, de modo que, si aplicamos un campo eléctrico **E**, todos los electrones de esta banda son capaces de aumentar su cantidad de movimiento en la dirección $-\mathbf{E}$, y se establecerá una corriente. Las bandas de menor energía están completamente ocupadas y no pueden contribuir al proceso de conducción, sumándose todas las velocidades en pares para anularse.

La figura 7*b* representa un aislante. Su característica central es que la banda más energética que contenga electrones está completamente ocupada, y la banda de energía prohibida que está inmediatamente arriba de ella, denotada por E_g en la figura, es sustancial. Por "sustancial" queremos decir que $E_g \gg kT$, de modo que la probabilidad de que el electrón suba, por agitación térmica, a la banda vacía que se encuentra arriba de la banda prohibida es despreciable. Si aplicamos un campo eléctrico dentro de un aislante, no hay manera de que cualquiera de los electrones responda a él, así que allí no habrá corriente.

El carbono en su forma de diamante es un aislante excelente, siendo su banda prohibida de energía de 5.5 eV, más de 200 veces el valor de kT a la temperatura ambiente.

La figura 7*c* representa un semiconductor. Difiere de un aislante en que su banda prohibida de energía es lo suficientemente pequeña y por excitación térmica los electrones pasen de una a la otra a temperatura ambiente.

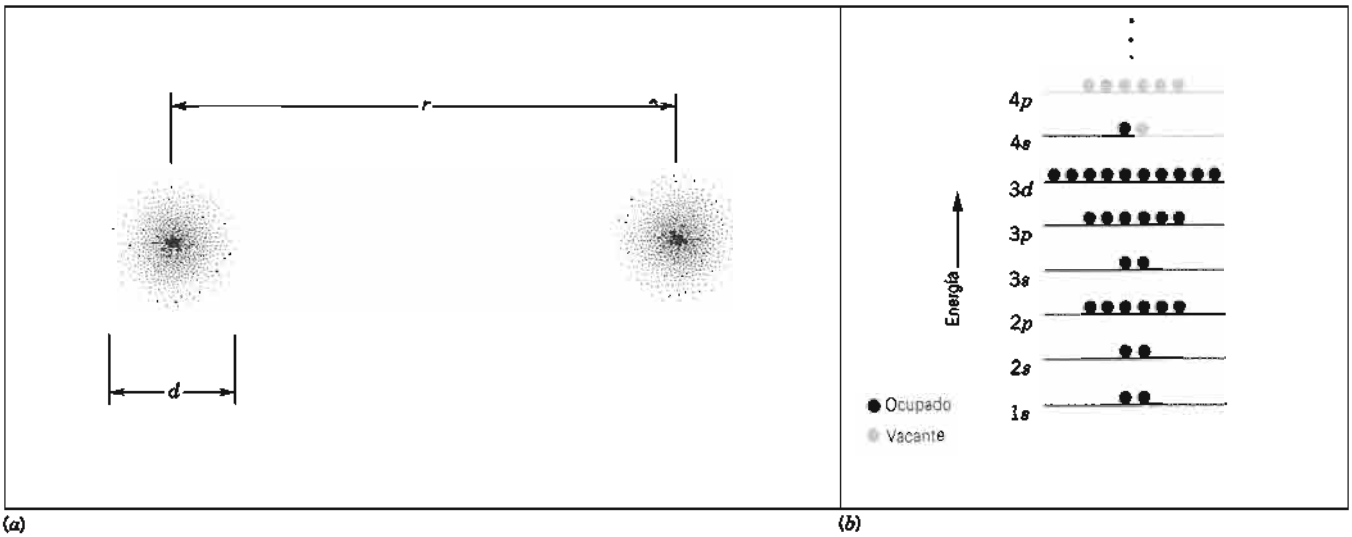


Figura 5 (*a*) Dos átomos neutros de cobre de diámetro d, separados por una distancia r, siendo $r \gg d$. (*b*) Los átomos son sistemas independientes, y su estado base tiene cada uno la misma asignación de números cuánticos a sus electrones, como se muestra. La escala de energía es sólo simbólica.

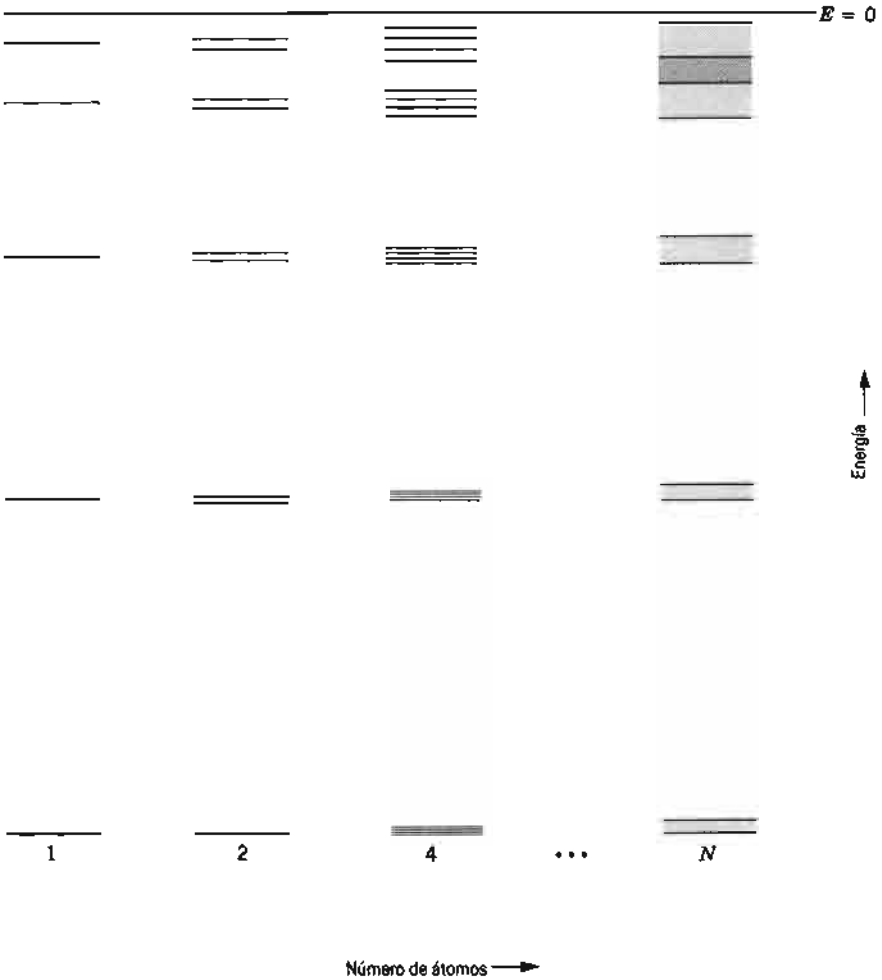


Figura 6 Cuando los átomos se juntan para formar una red, los niveles de los átomos aislados se separan, formando al final bandas de niveles muy próximos entre sí. En el caso mostrado, las bandas superiores se traslapan en energía.

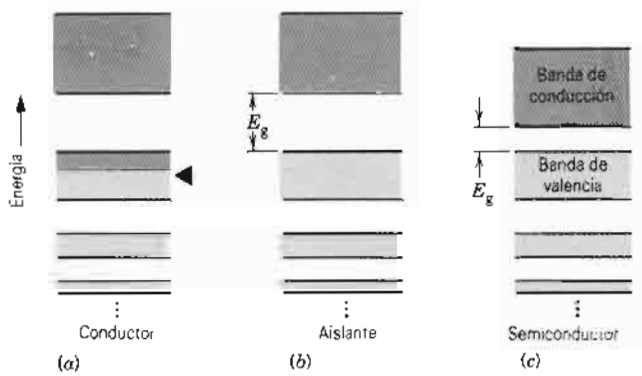


Figura 7 Representación idealizada de las bandas de energía de (*a*) un conductor, (*b*) un aislante y (*c*) un semiconductor. Se muestran las bandas ocupadas en sombreado suave, y las bandas vacías en sombreado intenso. El triángulo oscuro marca el nivel de Fermi del conductor.

Esto coloca algunos electrones en la banda (casi vacía) denotada como *banda de conducción* en la figura y deja un número igual de estados vacantes, o *huecos*, en la *banda de valencia* (casi llena). En una banda que esté casi llena, resulta ser más conveniente analizar su contribución a la conducción eléctrica en términos del movimiento de los huecos, los cuales se comportan como partículas cargadas *positivamente*.

El silicio es nuestro semiconductor prototipo. Tiene la misma estructura cristalina que el diamante pero su ancho de banda prohibida (= 1.1 eV) es considerablemente menor. En el cero absoluto de temperatura, donde la agitación térmica está ausente, todos los semiconductores son aislantes. Para cualquier temperatura más alta, la probabilidad de que un electrón pase a través de la banda prohibida es muy sensible a su ancho. Así, la distinción entre un aislante y un semiconductor es un tanto arbitraria. Sin embargo, no existe duda en llamar aislante al diamante (E_g = 5.5 eV) y al silicio (E_g = 1.1 eV) semiconductor.

Problema muestra 6 En el diamante y en el silicio, ¿cuál es la probabilidad, a la temperatura ambiente, de que un estado, en el fondo de la banda de conducción, esté ocupado? Considérese que la energía de Fermi está a la mitad de la banda prohibida entre las bandas de conducción y de valencia.

Solución Para un estado en el fondo de la banda de conducción, la diferencia de energía $E - E_F$ es $0.5E_g$, cuando la energía de Fermi está a la mitad de la banda prohibida. A la temperatura ambiente (300 K), kT = 0.026 eV. Por lo tanto, tenemos $E - E_F \gg kT$ y, en consecuencia, podemos aproximar la función de probabilidad de Fermi-Dirac (Ec. 6) así:

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \approx e^{-(E-E_F)/kT} = e^{-E_g/2kT}.$$

En el diamante, E_g = 5.5 eV, y así

$$p(E) = e^{-(5.5\text{ eV})/2(0.026\text{ eV})} = 1.2 \times 10^{-46}.$$

En el silicio, E_g = 1.1 eV, y así

$$p(E) = e^{-(1.1\text{ eV})/2(0.026\text{ eV})} = 6.5 \times 10^{-10}.$$

En un centímetro cúbico de material, que contiene aproximadamente 10^{23} átomos, habrá una probabilidad despreciable de hallar tan siquiera un electrón en la banda de conducción del diamante, mientras que habrá unos 10^{13} electrones en la banda de conducción (y un número igual de huecos en la banda de valencia) en el silicio disponibles para la conducción eléctrica. Este cálculo ilustra la extremada diferencia en la conductividad que resulta de pequeñas variaciones en la energía de la banda prohibida, y demuestra claramente la distinción entre los aislantes y los semiconductores. Por otro lado, en un centímetro cúbico de un conductor podría haber 10^{23} electrones disponibles para la conducción eléctrica.

Semiconductores

En el problema muestra anterior comparábamos una propiedad de un semiconductor con la de un aislante. La tabla 1 compara algunas propiedades de un semiconductor típico (el silicio) y un conductor típico (el cobre). Analicemos ahora estas propiedades con más detalle.

1. *La densidad de los portadores de carga, n.* El cobre tiene muchos más portadores de carga que el silicio, por un factor de unos 10^{13}. En el cobre los portadores son los electrones de conducción, alrededor de uno por átomo. La figura 7*c* muestra que, en el cero absoluto de temperatura, el silicio no tendría portadores de carga en absoluto. A la temperatura ambiente, a la cual se refiere la tabla 1, surgen portadores de carga únicamente porque, en el equilibrio térmico, la agitación térmica ha causado que un cierto número (muy pequeño) de electrones se eleven a la banda de conducción, dejando un número igual de estados vacantes (huecos) en la banda de valencia.

TABLA 1 ALGUNAS PROPIEDADES ELÉCTRICAS DEL COBRE Y DEL SILICIO[a]

	Cobre	*Silicio*
Tipo de material	Conductor	Semiconductor
Densidad de los portadores de carga[b] n (m^{-3})	9×10^{28}	1×10^{16}
Resistividad ρ ($\Omega \cdot m$)	2×10^{-8}	3×10^{3}
Coeficiente de temperatura de la resistividad α (K^{-1})	$+4 \times 10^{-3}$	-70×10^{-3}

[a] Todos los valores se refieren a la temperatura ambiente.
[b] Incluye, en el silicio, tanto a los electrones como a los huecos.

Los huecos en la banda de valencia de un semiconductor sirven también efectivamente como portadores de carga porque permiten cierta libertad de movimiento a los electrones de esa banda. Si se establece un campo eléctrico en un semiconductor, los electrones en la banda de valencia, por estar cargados negativamente, derivan en la dirección de -E. Los huecos derivan en la dirección del campo y se comportan como partículas que portan una carga $+e$, que es exactamente como los consideraremos. La conducción por huecos es una característica importante de los semiconductores.

2. *La resistividad*, ρ. A la temperatura ambiente la resistividad del silicio es considerablemente mayor que la del cobre, por un factor de unos 10^{11}. En ambos elementos, la resistividad se determina mediante la ecuación 1. Como lo muestra esa ecuación, la resistividad aumenta conforme n, la densidad de portadores de carga, disminuye. La gran diferencia en resistividad entre el cobre y el silicio puede explicarse por la gran diferencia en n. (El tiempo medio de colisión τ será también diferente en el cobre y el silicio, pero su efecto sobre la resistividad es anulado por la enorme diferencia en la densidad de portadores de carga.)

Para completar nuestro comentario, mencionamos que la resistividad de un buen aislante (por ejemplo el cuarzo fundido o el diamante) puede ser tan alta como $10^{20}\ \Omega \cdot \text{m}$, alrededor de 10^{28} veces más alta que la del cobre a la temperatura ambiente. Pocas propiedades físicas tienen una gama de valores mensurables tan amplia como la resistividad eléctrica.

3. *El coeficiente de temperatura de la resistividad*, α. Esta cantidad (véase la Ec. 16 del capítulo 32) es el cambio fraccionario en la resistividad ρ por unidad de cambio en temperatura, o sea

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}.$$

La resistividad del cobre y de otros metales *aumenta* con la temperatura ($d\rho/dT > 0$). Esto sucede porque las colisiones ocurren con mayor frecuencia cuanto más alta sea la temperatura, reduciéndose así τ en la ecuación 1. En los metales, la densidad n de portadores de carga en esa ecuación es independiente de la temperatura.

Por el contrario, la resistividad del silicio (y de otros semiconductores) *disminuye* con la temperatura ($d\rho/dT < 0$). Esto sucede porque en la ecuación 1 la densidad n de portadores de carga aumenta rápidamente con la temperatura. La disminución en τ mencionada arriba para los metales se presenta también en los semiconductores, pero su efecto sobre la resistividad es anulado por el aumento muy rápido de la densidad de portadores de carga.

En el laboratorio, es posible identificar un semiconductor por medio de su gran resistividad ρ y, especialmente, por su gran —y negativo— coeficiente de temperatura de la resistividad α, comparándose ambas cantidades con los valores de un metal típico.

53-6 SEMICONDUCTORES CON IMPUREZAS

El desempeño de los semiconductores puede cambiar sustancialmente al introducir deliberadamente un pequeño número de átomos de reemplazo apropiados como impurezas en la red del semiconductor, un proceso llamado *impurificación o contaminación*. Describimos el semiconductor resultante como *extrínseco*, para distinguirlo del puro, sin impurezas, o material *intrínseco*. Esencialmente, todos los dispositivos semiconductores de la actualidad se basan en materiales extrínsecos.

La figura 8*a* es una representación bidimensional de una red de silicio puro. Cada átomo de silicio tiene 4 electrones de valencia y forma un enlace de dos electrones con cada uno de sus cuatro vecinos más cercanos, donde los electrones participantes en el enlace constituyen la banda de valencia de la muestra.

En la figura 8*b* uno de los átomos de silicio ha sido reemplazado por un átomo de fósforo, el cual tiene 5 electrones de valencia. Cuatro de estos electrones se enlazan con los 4 átomos de silicio vecinos, pero el quinto electrón se enlaza débilmente con la coraza de iones del fósforo, como lo indica la figura 8*b*. Es bastante más fácil que *este* electrón sea excitado térmicamente hacia la banda de conducción a que sea excitado de esa manera uno de los electrones de valencia del silicio.

El átomo de fósforo se llama átomo *donador* porque *dona* fácilmente un electrón a la banda de conducción. Puede decirse que el electrón "extra" en la figura 8*b* se encuentra en un nivel donador localizado, como lo muestra la figura 9*a*. Este nivel está separado del fondo de la banda de conducción por una banda de energía prohibida E_d, donde generalmente $E_d \ll E_g$. El agregar átomos donadores aumenta en gran medida la densidad de electrones en la banda de conducción.

Los semiconductores con impurezas de átomos donadores se llaman *semiconductores del tipo n*, significando la "*n*" "negativo" porque los portadores de carga negativos (los electrones) superan con mucho al número de portadores de carga positivos (los huecos). En los semiconductores del *tipo n*, los electrones de la banda de conducción se llaman *portadores mayoritarios*, mientras que los huecos en la banda de valencia se llaman *portadores minoritarios*.

La figura 8*c* muestra una red de silicio donde se ha reemplazado un átomo de silicio por uno de aluminio, que tiene 3 electrones de valencia. En este caso existe un electrón "faltante", y es fácil para la coraza de iones del aluminio "robar" un electrón de valencia de un átomo de

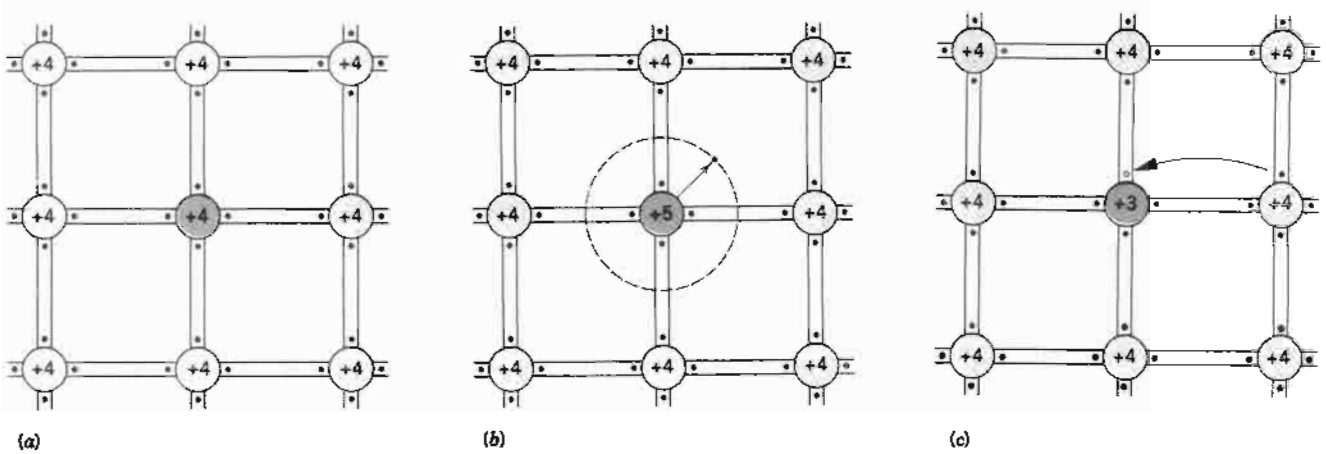


Figura 8 (*a*) Representación bidimensional de la red del silicio. Cada ion de silicio (carga del núcleo = +4*e*) se enlaza a cada uno de sus cuatro vecinos más cercanos por un enlace compartido por dos electrones. Los puntos muestran esos electrones de valencia. (*b*) Un átomo de fósforo (valencia = 5) es sustituido por un átomo de silicio, creando un sitio donador. (*c*) Un átomo de aluminio (valencia = 3) es sustituido por un átomo de silicio, creando un sitio aceptor.

silicio cercano, creando así un hueco en la banda de valencia.

El átomo de aluminio se llama átomo *aceptor* porque fácilmente *acepta* un electrón de la banda de valencia. El electrón así aceptado se mueve a un nivel aceptor localizado, como lo muestra la figura 9*b*. Este nivel está separado de la parte superior de la banda de valencia por una banda prohibida de energía E_a, donde $E_a \ll E_g$. El agregar átomos aceptores puede aumentar por mucho el número de huecos en la banda de valencia.

Los semiconductores con impurezas de átomos aceptores se llaman *semiconductores del tipo p*, queriendo decir la "*p*" "positivo" porque los portadores de carga positiva (los huecos) superan con mucho a los portadores negativos (los electrones). En los semiconductores del *tipo p* los portadores mayoritarios son los huecos en la banda de valencia y los portadores minoritarios son los electrones en la banda de conducción.

La tabla 2 resume las propiedades de un semiconductor típico del tipo *n* y de un semiconductor típico del tipo *p*. Nótese particularmente que las corazas de iones donadores y aceptores, si bien están cargados, no son portadores de carga porque, a las temperaturas normales, permanecen fijos en sus sitios en la red.

Problema muestra 7 La densidad de los electrones de conducción en el silicio puro a la temperatura ambiente es de unos 10^{16} m^{-3}. Supóngase que, al impurificar con fósforo la red, deseamos aumentar este número por un factor de 10^6. ¿Qué fracción de los átomos de silicio debe de reemplazarse con átomos de fósforo? (Supóngase que, a la temperatura ambiente, la agitación térmica es lo bastante efectiva como para que, esencialmente, cada átomo de fósforo done su electrón "extra" a la banda de conducción.)

Solución La densidad n_r de los átomos de fósforo debe ser de unos (10^{16} m^{-3})(10^6), o sea 10^{22} m^{-3}. La densidad de los átomos de silicio en una red de silicio puro puede hallarse de

$$n_{Si} = \frac{N_A d}{M},$$

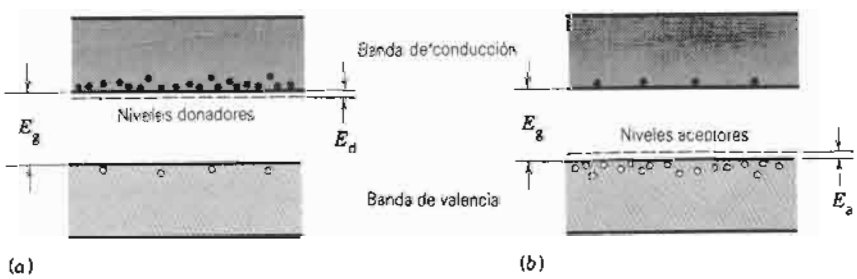


Figura 9 (*a*) Un semiconductor del tipo *n*, mostrando los niveles donadores que han contribuido con electrones (portadores mayoritarios) a la banda de conducción. Se muestra también el pequeño número de huecos (portadores minoritarios) en la banda de valencia. (*b*) Un semiconductor del tipo *p*, mostrando los niveles aceptores que han contribuido con huecos (portadores mayoritarios) a la banda de valencia. Se muestra también el pequeño número de electrones (portadores minoritarios) en la banda de conducción.

TABLA 2 DOS SEMICONDUCTORES EXTRÍNSECOS TÍPICOS

	Tipo n	*Tipo p*
Material de la matriz	Silicio	Silicio
Impureza	Fósforo	Aluminio
Tipo de impureza	Donadora	Aceptora
Valencia de la impureza	5 (= 4 + 1)	3 (= 4 - 1)
Banda prohibida de energía de la impureza	0.045 eV	0.057 eV
Portadores mayoritarios	Electrones	Huecos
Portadores minoritarios	Huecos	Electrones
Carga de la coraza de ion de la impureza	$+e$	$-e$

donde N_A es la constante de Avogadro, d (= 2330 kg/m³) es la densidad del silicio y M (= 28.1 g/mol) es la masa molar del silicio. Al sustituir se obtiene

$$n_{Si} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})(2330\ \text{kg/m}^3)}{0.0281\ \text{kg/mol}} = 5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}.$$

La razón de estas dos densidades es la cantidad que estamos buscando. Así pues,

$$\frac{n_{Si}}{n_p} = \frac{5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}}{10^{22}\ \text{m}^{-3}} = 5 \times 10^6.$$

Vemos que únicamente *un átomo de silicio en cada cinco millones* es reemplazado por un átomo de fósforo, y el número de electrones en la banda de conducción aumentará por un factor de 10^6.

¿Cómo puede tal diminuta "mezcla" de átomos de fósforo tener un efecto tan grande? La respuesta es que, en el silicio puro a temperatura ambiente, ¡no había allí muchos electrones de conducción para empezar! La densidad de electrones de conducción era de 10^{16} m^{-3} antes de agregar impurezas y 10^{22} m^{-3} después de la impurificación. Sin embargo, en el cobre la densidad de los electrones de conducción (véase la tabla 1) es de unos 10^{29} m^{-3}. Así, aun *después* de la impurificación, la densidad de electrones de conducción en el silicio sigue siendo mucho menor que la de un conductor típico como el cobre.

Problema muestra 8 Supóngase que el electrón "extra" de un átomo donador de fósforo se mueve en una órbita de Bohr alrededor de la coraza del ion del fósforo, como en la figura 8*b*. Calcule (*a*) la energía de enlace y (*b*) el radio de la órbita de este electrón.

Solución (*a*) La expresión de la teoría de Bohr para la energía de enlace E_b del estado $n = 1$ es (véase la Ec. 18 del capítulo 51)

$$E_b = -E_1 = \frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2}. \tag{7}$$

Aquí ponemos $Z = 1$ porque el electrón que orbita "ve" una carga central de $+e$.

Obtuvimos la energía de Bohr al considerar un átomo parecido al hidrógeno, moviéndose su electrón orbitante en el vacío. Sin embargo, en este caso el electrón se mueve por una red de silicio. Un efecto de esto es la reducción de la fuerza electrostática por un factor de κ_e, la constante dieléctrica del silicio. Para darnos cuenta cuantitativamente de esta reducción de fuerza, debemos reemplazar ϵ_0 en la ley de Coulomb por $\kappa_e\epsilon_0$. Al realizar la misma sustitución en la ecuación 7 nos conduce a

$$E_b = \frac{1}{\kappa_e^2}\left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}\right),$$

donde el factor entre paréntesis es precisamente 13.6 eV, la energía de enlace del átomo de hidrógeno. En el silicio tenemos $\kappa_e = 12$, de modo que

$$E_b = \frac{13.6\ \text{eV}}{(12)^2} \approx 0.094\ \text{eV}.$$

El orden de magnitud de este resultado concuerda bastante bien con el valor de 0.045 eV mostrado en la tabla 2.

(*b*) El radio de la órbita se deduce de la ecuación 19 del capítulo 51. Al sustituir como en la parte (*a*) conduce a

$$r = \kappa_e\left(\frac{\epsilon_0h^2}{\pi me^2}\right). \tag{8}$$

El factor dentro del paréntesis es precisamente el radio de Bohr (= 52.9 pm). Así,

$$r = (12)(52.9\ \text{pm}) = 630\ \text{pm}.$$

Esto es comparable al espaciamiento atómico en la red de silicio (540 pm).

También debemos reemplazar la masa m del electrón en las ecuaciones 7 y 8 por la masa efectiva m_{ef} del electrón, para tomar en cuenta parcialmente la naturaleza periódica del potencial de la red del silicio. Al hacerlo se reduce la energía de enlace calculada y aumenta el radio de la órbita estimado, estando ambos cambios en la dirección del mejoramiento de la concordancia con el experimento.

53-7 UNIÓN *pn*

En las pocas secciones siguientes describimos algunos dispositivos semiconductores que se emplean comúnmente, como rectificadores de diodo, diodos emisores de luz y transistores. No existe un límite al número de tales dispositivos que pudiera haberse elegido como descripción. De hecho, con la tecnología de hoy en día, es posible fabricar bajo pedido dispositivos semiconductores complejos que llenen necesidades específicas.

En esencia todos los dispositivos semiconductores implican una o más *uniones pn*. Consideremos un plano hipotético a través de una barra de un material semiconductor cristalino puro como el silicio. En un lado del plano, la barra contiene impurezas con átomos donadores (creando así un material tipo *n*), y en el otro lado tiene impurezas con átomos aceptores (creando

así un material tipo *p*). Esta combinación da una unión *pn*.*

La figura 10*a* representa una unión *pn* en el momento imaginario de su creación. Existe una abundancia de electrones en el material tipo *n* y de huecos en el material tipo *p*.

Los electrones que están cerca del plano de la unión tenderán a difundirse a través de él, por la misma razón que las moléculas de gas se difundirán a través de una membrana permeable dentro de un vacío más allá de ella. Los electrones que se difunden en la banda de conducción, la cual se mueve de derecha a izquierda en la figura 10*a*, se combinarán fácilmente con los huecos en la banda de valencia del otro lado del plano de la unión. De manera semejante, los huecos en la región *p* se difunden a través del plano de la unión de izquierda a derecha y se combinan con los electrones en la región *n*.

En cada uno de tales fenómenos de difusión y recombinación, la porción de la barra en el lado derecho de este plano adquiere una carga positiva y aquélla del lado izquierdo una carga negativa. Estas cargas† causan que se forme una diferencia de potencial V_0 en la la unión, como lo muestra la figura 10*c*. Con la diferencia de potencial se relaciona (por la Ec. $E = -dV/dx$) un campo eléctrico interno E_0 que aparece a través del plano de la unión, apuntando como se muestra en la figura 10*c*. Este campo ejerce una fuerza sobre los electrones, que se opone al movimiento de su difusión. Dicho de otro modo, para que un electrón tenga éxito en difundirse de derecha a izquierda o un hueco de izquierda a derecha en la figura 10*b*, debe ser lo suficientemente energético como para vencer la barrera de potencial representada por la figura 10*c*. Esto se representa en la figura 10*d*, que muestra las bandas de energía electrónica. Para difundirse de la región tipo *n* a la región tipo *p*, un electrón debe "subir" la pendiente de altura eV_0. Un hueco debe también "subir" una pendiente de esta misma altura para difundirse de izquierda a derecha. La difusión tanto de los electrones como de los huecos produce una corriente cuya dirección, en el sentido convencional, es de izquierda a derecha en la figura 10. Llamamos a esta corriente la *corriente de difusión* i_{dif}.

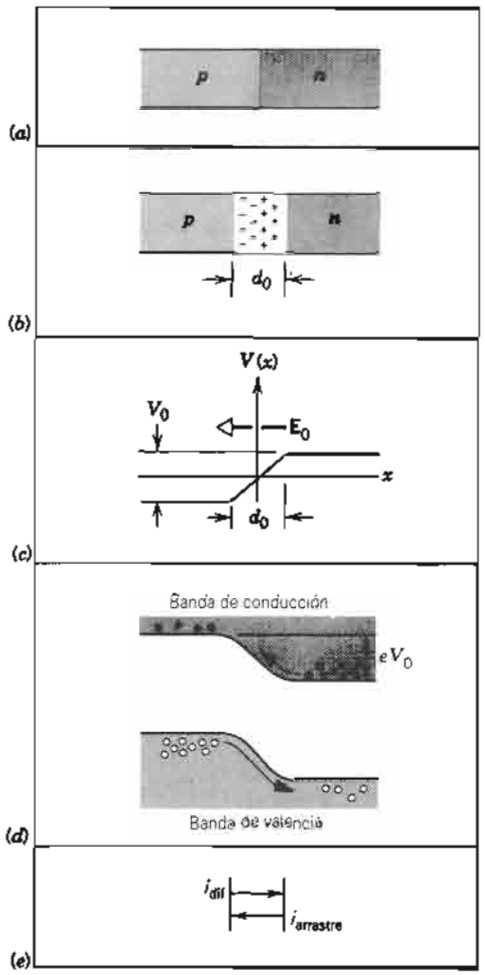


Figura 10 (*a*) Unión *pn* en el momento imaginario de su creación. (*b*) La difusión de los portadores mayoritarios a través del plano de la unión causa que aparezca una carga espacial de iones donadores y aceptores fijos. (*c*) La carga espacial genera una diferencia de potencial V_0 y un campo eléctrico E_0 correspondiente a través del plano de la unión. (*d*) Las bandas de energía electrónica cerca de la unión. Las flechas muestran la difusión de los portadores mayoritarios. (*e*) En equilibrio, la difusión de los portadores mayoritarios a través del plano de la unión se equilibra por el movimiento (deriva) de los portadores minoritarios en la dirección opuesta.

Por supuesto, no es posible tener una barra de silicio aislada que descanse en un estante con una corriente fluyendo en forma indefinida a todo su largo. Algo debe suceder para detener, o para compensar, a esta corriente. Para averiguar lo que sucede centremos nuestra atención a los portadores minoritarios.

* En la práctica común, para formar una unión *pn* se comienza con, dígamos, un material del tipo *p*, obtenido al agregar átomos aceptores al silicio fundido del cual se extrae el sólido cristalino de silicio. En seguida los átomos donadores se difunden en la muestra sólida a una temperatura elevada en un horno especial, sobrecompensando los átomos aceptores a una cierta profundidad (controlable) por debajo de la superficie y creando la región tipo *n*. La unión que analizamos aquí está idealizada en cuanto a que suponemos que las regiones tipo *n* y tipo *p* están separadas por un plano bien definido; en la práctica, estas regiones se mezclan entre sí gradualmente.

† Las cargas fijas, que están cerca del —y separadas por— el plano de la unión, son las de las corazas de iones donadores y aceptores, los que, como recordaremos, no se mueven. Normalmente, las cargas de estas corazas de iones se compensan con las cargas (opuestas) de los portadores de carga móviles. Sin embargo, cuando los portadores de carga cruzan el plano de la unión, las corazas de los iones ya no se compensan plenamente y quedan, por decirlo así, descubiertos.

Como lo muestran la figura 9 y la tabla 2, si bien los portadores mayoritarios en un material tipo *n* son electrones, también existen a pesar de todo unos cuantos huecos, los portadores minoritarios. De igual manera, en el material tipo *p*, si bien los portadores mayoritarios son huecos, también existen unos cuantos electrones. En la figura 10*d* se muestran los portadores minoritarios.

Aun cuando el campo eléctrico de la figura 10*c* actúa para retardar los movimientos de los portadores mayoritarios —por ser una barrera para ellos— existe un viaje de pendiente hacia abajo de los portadores minoritarios, ya sean electrones o huecos. Cuando, mediante la agitación térmica, un electrón que esté cerca del plano de la unión se eleva de la banda de valencia a la banda de conducción del material de tipo *p*, deriva uniformemente de izquierda a derecha a través del plano de la unión, barrido por el campo eléctrico E_0. De manera semejante, si se crea un hueco en el material de tipo *n*, también deriva a través hacia el otro lado. La región de carga espacial que se muestra en la figura 10*b*, es barrida efectivamente libre de portadores de carga por este proceso y, por esa razón, la llamamos *zona de agotamiento o de empobrecimiento.* La corriente representada por los movimientos de los portadores minoritarios, llamada *corriente de deriva o arrastre* i_{arrastre}, está en la dirección opuesta a la corriente de difusión y la compensa precisamente en el equilibrio, como lo muestra la figura 10*e*.

Así, en equilibrio, una unión *pn* que descanse en un estante genera una diferencia de potencial de contacto V_0 entre sus extremos. La corriente de difusión i_{dif} que se mueve a través del plano de la unión desde la dirección *p* a *n* se equilibra precisamente por medio de una corriente de arrastre i_{arrastre} que se mueve en la dirección opuesta. A través de la capa de agotamiento actúa un campo eléctrico E_0, cuya anchura es d_0.

Problema muestra 9 Una unión *pn* basada en silicio tiene una concentración n_0 igual de átomos donadores y aceptores. Su zona de agotamiento, de anchura *d*, es simétrica con respecto al plano de la unión, como lo muestra la figura 11*a*. (*a*) Deduzca una expresión de $E_{\text{máx}}$, la intensidad máxima del campo eléctrico en la zona de agotamiento. (*b*) Obtenga una expresión de V_0, la diferencia de potencial que existe a través de la zona de agotamiento; véase la figura 10*c*. (*c*) Supóngase que $n_0 = 3 \times 10^{22}\ \text{m}^{-3}$ y que V_0 se determina que es 0.6 V. Calcule la anchura de la zona de agotamiento o empobrecimiento. (*d*) Usando este valor de *d*, calcule el valor de $E_{\text{máx}}$.

Solución (*a*) Puede considerarse que el campo eléctrico es cero en los materiales tipo *n* y tipo *p* fuera de la zona de agotamiento. El campo apunta de derecha a izquierda dentro de la zona de agotamiento y, por simetría, tiene su valor máximo en el centro de esta zona; véase la figura 11*b*.

Apliquemos la ley de Gauss a la "caja" cerrada (la superficie gaussiana) que se muestra en la figura 11*a*. Esta ley es

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q,$$

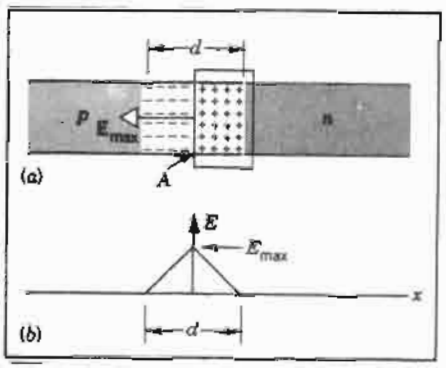


Figura 11 Problema muestra 9. (*a*) La zona de agotamiento o empobrecimiento de una unión *pn*. El rectángulo representa la sección transversal de una superficie gaussiana con tapas en los extremos de área *A*. (*b*) La variación del campo eléctrico en la zona de agotamiento.

donde κ_e (= 12) es la constante dieléctrica del silicio y q [$= n_0 eA(d/2)$] es la carga libre contenida dentro de la caja. La integral se considerará para toda la superficie de la caja.

La única contribución a la integral proviene de la cara de la caja que se encuentra en el plano de la unión, así que la integral tiene el valor $\kappa_e E_{\text{máx}} A$. Al hacer estas sustituciones y al resolver para obtener $E_{\text{máx}}$ se tiene

$$E_{\text{máx}} = \frac{n_0 ed}{2\kappa_e \epsilon_0}, \tag{9}$$

la relación que buscamos.

(*b*) Como lo muestra la figura 11*b*, el campo eléctrico cae linealmente desde su valor central de $E_{\text{máx}}$ hasta cero en cada extremo de la zona de agotamiento. Su valor *promedio* en toda la zona es, entonces, $\frac{1}{2}E_{\text{máx}}$. La diferencia de potencial V_0 es igual al trabajo por unidad de carga que se requiere para llevar una carga de prueba q_0 de una cara de la zona de agotamiento a la otra. Entonces, si *F* es la fuerza promedio que actúa sobre la carga de prueba,

$$V_0 = \frac{W}{q_0} = \frac{Fd}{q_0} = \frac{(\frac{1}{2}E_{\text{máx}} q_0)d}{q_0} = \tfrac{1}{2} dE_{\text{máx}}.$$

Al sustituir $E_{\text{máx}}$ de la ecuación 9 de arriba se obtiene

$$V_0 = \frac{n_0 ed^2}{4\kappa_e \epsilon_0}. \tag{10}$$

(*c*) Al despejar la ecuación 10 para obtener *d* y sustituyendo los valores dados, hallamos

$$d = \left(\frac{4\kappa_e \epsilon_0 V_0}{en_0}\right)^{1/2}$$

$$= \left[\frac{(4)(12)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(0.60\ \text{V})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3 \times 10^{22}\ \text{m}^{-3})}\right]^{1/2}$$

$$= 2.3 \times 10^{-7}\ \text{m} = 230\ \text{nm}.$$

(*d*) La sustitución en la ecuación 9 conduce a

$$E_{\text{máx}} = \frac{n_0 ed}{2\kappa_e \epsilon_0}$$

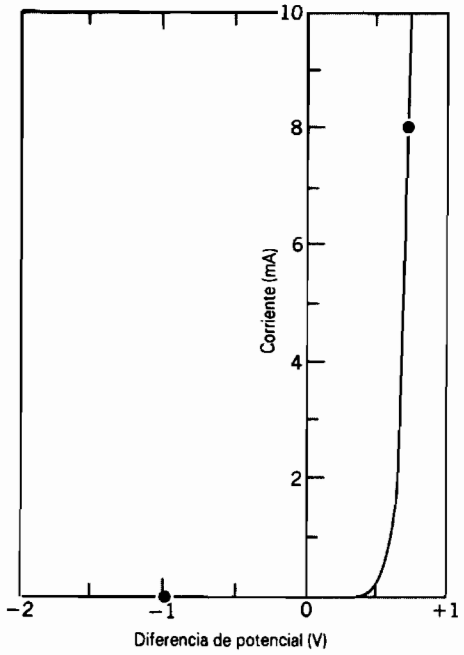


Figura 12 Gráfica voltaje-corriente de una unión *pn* típica, mostrando que conduce fácilmente en el sentido directo hacia adelante, pero es esencialmente no conductora en el sentido inverso. Los puntos se refieren al problema 43.

$$= \frac{(3 \times 10^{22}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2.3 \times 10^{-7}\ \text{m})}{(2)(12)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})}$$

$$= 5.2 \times 10^{6}\ \text{V/m}.$$

¿Qué suposiciones se hicieron en este problema que pudieran conducir a valores diferentes de las cantidades calculadas en condiciones prácticas de laboratorio ?

El diodo rectificador

Si bien una unión *pn* puede usarse de muchas maneras, básicamente es un rectificador. Esto es, si lo conectamos entre las terminales de una batería, la corriente en el circuito (unos cuantos picoamperes) será mucho menor para una polaridad de la conexión de la batería que para la otra. La figura 12 muestra que, en un diodo de unión *pn* típico de silicio, la corriente de la conexión con *polarización inversa* ($V < 0$) es despreciable en comparación con la corriente de la conexión polarizada en directa ($V > 0$).

La figura 13 muestra una de las muchas aplicaciones posibles de un de diodo rectificador. Un potencial de entrada de onda seno genera un potencial de salida de media onda, actuando el rectificador de diodo esencialmente como un circuito cerrado para una polaridad del potencial de entrada y esencialmente como un circuito abierto para la otra. De hecho, un diodo rectificador ideal tiene únicamente estos dos modos de operación. O conduce (resistencia cero) o no conduce (resistencia infinita).

La figura 13 muestra el símbolo convencional de un diodo rectificador. La punta de la flecha corresponde a la terminal de tipo *p* del dispositivo y apunta en la dirección convencional del flujo "fácil" de corriente. Esto es, el diodo está conectado cuando la terminal con la punta de la flecha es (suficientemente) positiva con respecto a la otra terminal.

La figura 14 muestra detalles de las dos conexiones. En la figura 14*a* (el arreglo con polarización inversa) la fem de la batería simplemente se suma a la diferencia de potencial de contacto, aumentando así la altura de la barrera que los portadores mayoritarios deben remontar. Pocos de ellos pueden hacerlo y, como resultado, la corriente de difusión disminuye marcadamente.

Sin embargo, la corriente de deriva no siente una barrera y entonces es independiente de la magnitud o la dirección del potencial externo. El equilibrio de corriente que existía en la polarización cero (véase la Fig. 10*e*) se altera entonces y, como se muestra en la figura 14*a*, aparece en el circuito una corriente —aunque muy pequeña.

Otro efecto de la polarización inversa es ensanchar la zona de agotamiento, como lo muestra la comparación de las figuras 10*b* y 14*a*. Esto parece razonable, porque, la terminal positiva de la batería, conectada al extremo tipo *n* de la unión, tiende a tirar a los electrones hacia afuera de la zona de agotamiento de regreso al material de tipo *n* y a repeler huecos de regreso al material tipo *p*. Puesto que la zona de agotamiento contiene muy pocos portadores de carga, es una región de alta resistividad. Así pues, el aumento sustancial en su anchura significa un aumento

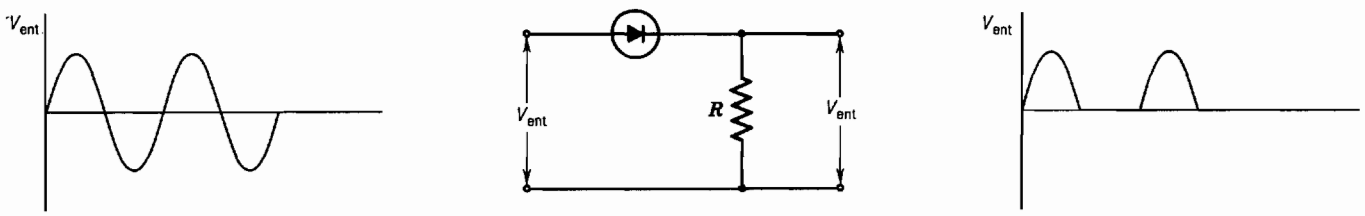


Figura 13 Un diodo de unión *pn* conectado como rectificador. El diodo conduce fácilmente en el sentido directo (las secciones positivas de la onda de entrada) pero nada en el sentido inverso (las secciones negativas de la onda de entrada).

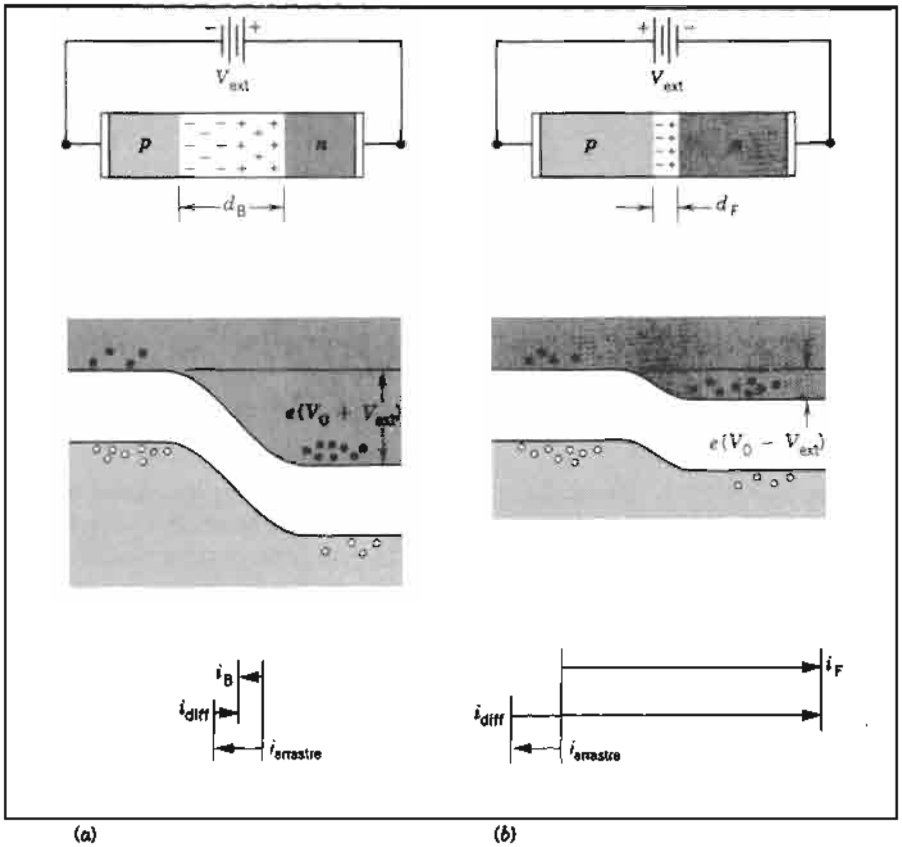


Figura 14 (*a*) La conexión con polarización inversa de una unión *pn*, mostrando la amplia zona de agotamiento, las bandas de energía y la pequeña corriente de retorno i_B correspondiente. (*b*) La conexión con polaridad en directa, mostrando la angosta zona de agotamiento, las bandas de energía, y la gran corriente i_F hacia adelante. Nótese que la corriente de arrastre es la misma en cada caso.

sustancial en la resistencia, consistente con el pequeño valor de la corriente en un diodo con polarización inversa.

La figura 14*b* muestra la conexión con polarización en directa, estando conectada la terminal positiva de la batería al extremo tipo *p* de la unión *pn*. Aquí la fem aplicada *se resta* del potencial de contacto, la corriente de difusión *se eleva* sustancialmente, y resulta una corriente neta en directo relativamente *grande*. La zona de agotamiento se vuelve *más angosta*, siendo consistente su baja resistencia con la gran corriente hacia adelante.

53-8 ELECTRÓNICA ÓPTICA

Todos estamos familiarizados con los números brillantemente coloreados que destellan y relucen hacia nosotros de las cajas registradoras, las bombas de gasolina y el equipo electrónico. En casi todos los casos esta luz se emite de un conjunto de uniones *pn* que operan como *diodos emisores de luz* (LED).

La figura 15*a* muestra el conocido indicador de siete segmentos de que se forman los números. La figura 15*b* muestra que cada elemento de este indicador es el extremo de una lente plástica plana, en el otro extremo de la cual hay un pequeño LED, posiblemente de 1 mm² de área. La figura 15*c* muestra un circuito típico, en el que el LED está polarizado en directa.

¿Cómo puede emitir luz una unión *pn*? Cuando un electrón en el fondo de la banda de conducción de un semiconductor cae en un hueco en la parte superior de la banda de valencia, se libera una energía E_g, donde E_g es la anchura de la banda prohibida. ¿Qué le sucede a esta energía? Existen dos posibilidades por lo menos. Puede transformarse en energía interna de la red en vibración y, con una alta probabilidad, eso es exactamente lo que sucede en un semiconductor basado en silicio.

Sin embargo, en ciertos materiales semiconductores la energía emitida puede aparecer también como radiación electromagnética, estando dada la longitud de onda por

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{E_g/h} = \frac{hc}{E_g}. \qquad (11)$$

Los LED comerciales diseñados para la región del visible se basan generalmente en un material semiconductor que es un compuesto de galio-arsénico-fósforo. Al ajustar la razón del fósforo al arsénico, el ancho de la banda prohibida puede variarse —y por lo tanto, la longitud de onda de la luz emitida.

Si la luz es emitida cuando un electrón cae de la banda de conducción a la banda de valencia, entonces la luz de esa misma longitud de onda se *absorberá* cuando el

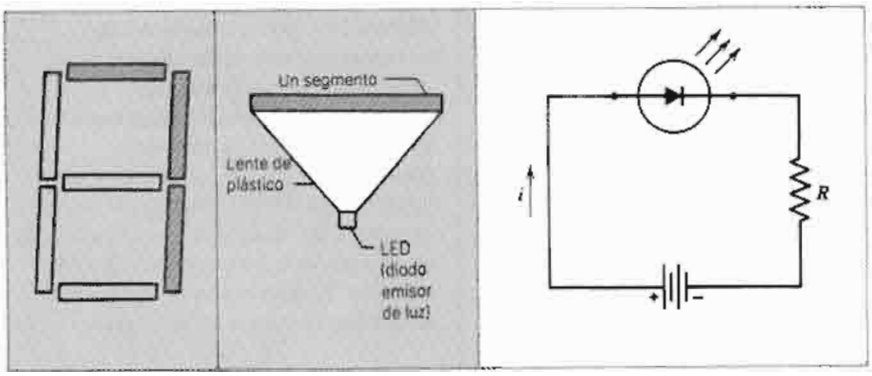


Figura 15 (*a*) El conocido indicador de siete segmentos de los números, activado para mostrar el número "7" (*b*) Uno de los segmentos de tal indicador. (*c*) Un LED conectado a una fuente externa de fem.

electrón se mueva en el sentido opuesto, esto es, de la banda de valencia a la de conducción. Para evitar que todos los fotones emitidos se absorban, es necesario tener un gran excedente tanto de electrones como de huecos presente en el material, en un numero mucho mayor que lo que se generaría por la agitación térmica en el material semiconductor intrínseco. Éstas son precisamente las condiciones que resultan cuando los portadores mayoritarios —sean electrones o huecos— son inyectados a través del plano central de una unión *pn* por la acción de una diferencia de potencial externo. Ésta es la razón por la cual un simple semiconductor intrínseco no servirá como LED. ¡Se necesita una unión *pn*! Para abastecer grandes cantidades de portadores mayoritarios —y por consiguiente grandes cantidades de fotones— debe estar densamente impurificada y con una gran polarización directa.

Problema muestra 10 Se construye un LED de una unión *pn* basada en un cierto material semiconductor cuya banda de energía prohibida es de 1.9 eV. ¿Cuál es la longitud de onda de su luz emitida?

Solución De la ecuación 11 tenemos

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(1.9\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$

$$= 6.53 \times 10^{-7}\ \text{m} = 653\ \text{nm}.$$

La luz de que corresponde a esta longitud de onda es roja.

El diodo láser

La caída de un electrón de la banda de conducción para ocupar un hueco en la banda de valencia, con la emisión de un fotón, tiene una gran semejanza con la caída de los electrones en las transiciones entre los estados atómicos que se consideraron en el capítulo 52. Existe una importante aplicación basada en esta semejanza: al inyectar electrones en la banda de conducción y huecos en la banda de valencia, es posible crear una inversión de población análoga a la que consideramos en nuestro análisis de los láseres en la sección 52-6. De esta manera es posible formar un *láser de diodo*, en donde el medio donde ocurre la acción láser no es un gas sino un semiconductor sólido. Los láseres de diodo se usan comúnmente en los tornamesas de discos compactos y otros sistemas ópticos de recuperación de datos.

La figura 16 muestra una representación de los niveles de energía de un diodo láser. El material donde ocurre la acción láser se introduce entre capas de materiales de tipo *p* y de tipo *n* en forma de emparedado o *sandwich*, el cual tiene una banda prohibida de energía ligeramente mayor. Los electrones se inyectan por medio de un circuito externo en el material tipo *n*; algunos de estos electrones excedentes derivan a la capa donde ocurre la acción láser, donde se les impide que deriven hacia el material de tipo *p* por una barrera de potencial. De manera similar, se inyectan huecos en el material tipo *p*, que derivan hacia la capa donde ocurre la acción láser y allí quedan atrapados. El exceso de electrones (y de huecos) en la región activa produce la acción láser.

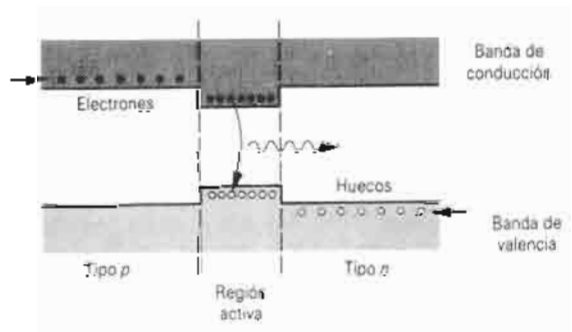


Figura 16 Las bandas de energía de un diodo láser. La región activa tiene una banda prohibida de energía menor que los materiales de tipo *n* y tipo *p* en cada lado. La luz se emite cuando los electrones de la banda de conducción de la región activa caen para llenar los huecos en la banda de valencia.

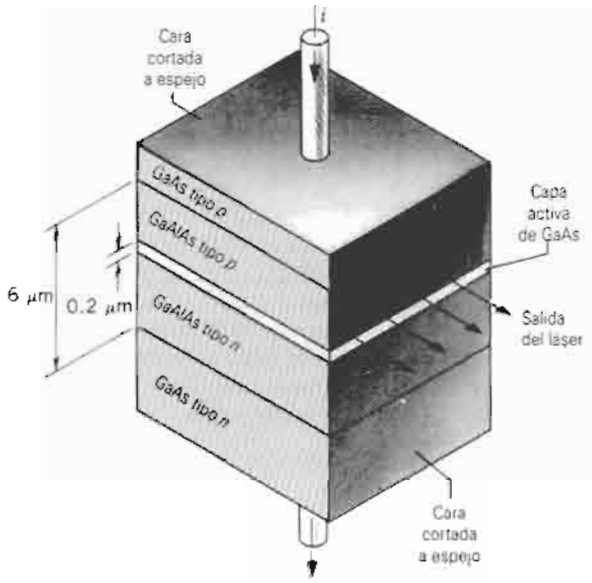


Figura 17 La construcción física de un diodo láser. La acción lasér ocurre en la angosta capa de GaAs.

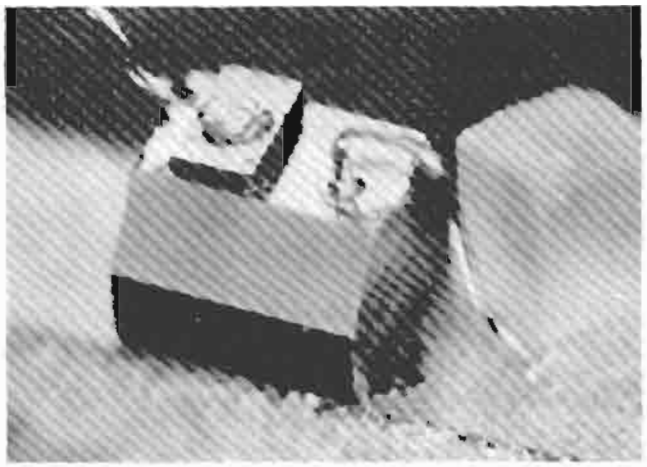


Figura 18 Un diodo láser, comparado en tamaño con un grano de sal de mesa (a la derecha).

En la figura 17 se ilustra esquemáticamente la construcción física del dispositivo, y en la figura 18 se muestra una fotografía del diodo láser. El material de acción láser es una capa angosta (0.2 μm) de un material como el GaAs (arseniuro de galio), y el material tipo *p* y tipo *n* en cada lado pueden ser capas de GaAlAs (arseniuro de aluminio y galio) de unos cuantos micrómetros de espesor. Los extremos del material se cortan para crear superficies a modo de espejo que reflejen una fracción de la onda luminosa que hace posible la emisión estimulada en la región activa. El dispositivo que se ilustra en la figura 18 emite a 840 nm (en la región del infrarrojo). Los láseres de diodo con esta longitud de onda se usan comúnmente en comunicaciones para enviar señales a lo largo de fibras ópticas. Pueden usarse de manera parecida otros materiales que produzcan radiación visible.

Entre las ventajas de los láseres de diodo están su pequeño tamaño y bajo consumo de potencia (en la región de 10 miliwatts, en comparación con el láser estándar de HeNe que puede requerir varios watts de potencia eléctrica). Al igual que otros dispositivos semiconductores, el diodo láser puede alimentarse con baterías. Son posibles eficiencias del orden del 20% (esto es, 20% de la potencia eléctrica suministrada al dispositivo aparece en el haz láser) en comparación con el 0.1% en el láser de HeNe. La señal luminosa puede modularse fácilmente al controlar la corriente de inyección, y así tenemos un dispositivo óptico que puede responder a los rápidos tiempos de conmutación (< 100 ps) característicos de los circuitos electrónicos.*

53-9 EL TRANSISTOR

Los diodos de unión que hemos considerado hasta ahora son dispositivos de dos terminales. Aquí consideraremos un dispositivo con tres (o más) terminales, llamado *transistor*.† Con frecuencia, un transistor funciona de la siguiente manera: una corriente establecida entre dos de las terminales es regulada por una corriente o voltaje en la tercera terminal.

Una variedad común de transistor es el *transistor de unión*, que consta de tres capas de semiconductores impurificados, que pueden ser *npn* o *pnp*. La figura 19*a* muestra una configuración típica de un transistor de unión *npn*. Las tres secciones se llaman *emisor, base y colector*. Se muestran las bandas de conducción y de valencia, y sólo se indican los portadores mayoritarios. Las uniones emisor-base y base-colector se comportan en forma muy parecida a las uniones *pn* ordinarias.

En la operación normal, como se ilustra en la figura 19*b*, la unión emisor-base está polarizada en directo y la unión base-colector tiene polarización inversa, lo cual da las bandas de energía que se muestran en la figura.

Los electrones fluyen del emisor tipo *n* fuertemente impurificado hacia la base. Puesto que la base es muy angosta, la mayoría de estos electrones llegan al colector, pero unos cuantos se recombinan con huecos en la región tipo *p*. Para rellenar los huecos de la base, los electrones de la banda de valencia de la base deben salir del transistor por el circuito externo como la pequeña corriente de base

* Véase "Applications of Lasers", por Elsa Garmire, en *Fundamentals of Physics* por David Halliday y Robert Resnick, Wiley, 1988, ensayo 19.

† El transistor se inventó en 1947 en lo que ahora son los laboratorios Bell de la AT&T por John Bardeen, Walter Brattain y William Shockley, quienes compartieron el premio Nobel de física en 1956 por su descubrimiento.

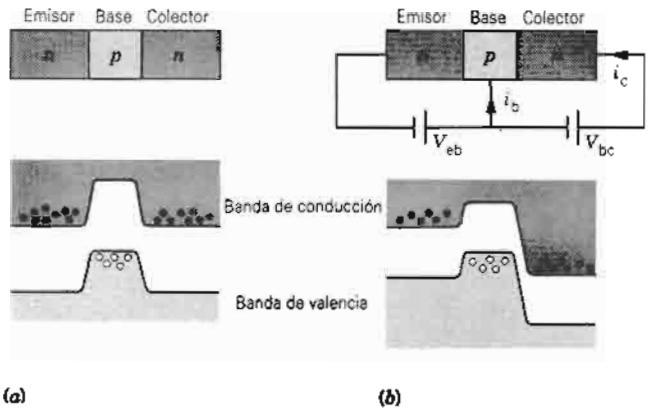


Figura 19 (*a*) Un transistor de unión *npn*. En la parte inferior se muestran las bandas de energía y los portadores mayoritarios en las tres regiones. (*b*) La unión emisor-base tiene polarización directa, y la unión base-colector tiene polarización inversa. Los electrones que se mueven del emisor a la base o bien se recombinan con los huecos o (mucho más probablemente) continúan al colector.

i_b. Un pequeño cambio en la corriente de base i_b puede dar por resultado un gran cambio en la corriente de colector i_c. En esta configuración, el transistor sirve como un amplificador de corriente, y la ganancia de corriente i_c/i_b puede tener valores típicos en exceso de 100.

Un segundo tipo de transistor es el llamado *transistor de efecto de campo* (FET, *field-effect transistor*). La figura 20 ilustra la geometría básica. Los electrones fluyen por la región *n* de la *fuente* hacia el *drenaje o drenador* cuando existe una diferencia de potencial externa V_{ds} entre el drenaje y la fuente. Las regiones de tipo *p* están altamente impurificadas, y las capas de agotamiento formadas en las dos uniones *pn* determinan la anchura del canal tipo *n*. Un voltaje externo V_g aplicado a la región tipo *p* (la *compuerta*) cambia la anchura de la región de agotamiento y, por consiguiente, cambia la anchura del canal de tipo *n*. Esto cambia, a su vez, la corriente que pasa por el dispositivo, porque la capacidad de la corriente para fluir a lo largo del canal *n* depende de la anchura del canal. Un pequeño cambio en el voltaje de compuerta cambia la anchura del canal y causa un gran cambio en la corriente que pasa por el canal *n*, así que el dispositivo puede operar como un amplificador.

Si el voltaje de compuerta se hace lo suficientemente grande, la anchura del canal *n* puede llegar a cero, y el FET deja de conducir. Aquí el transistor actúa como un interruptor: o está conduciendo (conectado) o no está conduciendo (desconectado). La corriente puede conmutarse en forma alterna muy rápidamente por medio de la señal aplicada a la compuerta; son comunes los tiempos de conmutación menores que 1 ns (10^{-9} s).

Un tipo común de FET ampliamente usado en circuitos digitales es el FET metal-óxido-semiconductor

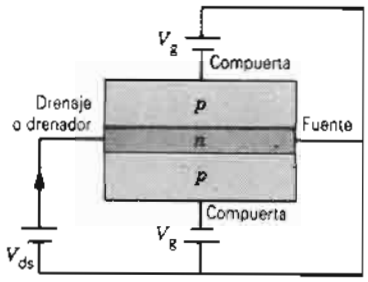


Figura 20 La estructura básica de un transistor de efecto de campo. Los electrones viajan a lo largo del estrecho canal *n* de la fuente hacia el drenaje. Puede controlarse la anchura del canal al variar el voltaje V_g de la compuerta.

(MOSFET), que se fabrica depositando y atacando químicamente capas sucesivas en un sustrato tipo *p*. En la figura 21 se muestra una sección transversal de un MOSFET. La región *n* y el canal *n* se forman por el ataque químico de una máscara en el sustrato tipo *p* y difundiendo átomos donadores a una distancia conocida adentro del sustrato. Luego se deposita una capa de óxido (SiO_2), y en seguida una capa de metal para formar los contactos para la región *n* y la compuerta.

53-10 SUPERCONDUCTORES

La resistividad de un conductor metálico típico decrece conforme disminuye la temperatura. Sin embargo, la resistividad no cae a cero, incluso cuando *T* tiende a 0 K. Como vimos en el capítulo 32, la resistividad de un conductor se origina con las colisiones que efectúan los electrones de conducción al moverse por la red. Las impurezas y los defectos de la red aumenta la probabilidad de que los electrones choquen, y las colisiones de los electrones con los átomos desplazados de sus sitios en la red por el movimiento vibratorio contribuyen a la resistividad.

En ciertos materiales llamados *superconductores* (véase la Sec. 32-8), la resistencia cae gradualmente al disminuir la temperatura, como se esperaba; no obstante, a una cierta *temperatura crítica* T_c la resistividad cae súbitamente a cero (Fig. 22). Por debajo de T_c, los electrones se mueven sin impedimento por el material. La tabla 3 muestra una selección de algunos superconductores y sus temperaturas críticas.

Se ha observado el fenómeno de superconductividad en 27 elementos y en un gran número de compuestos, pero éste no se ha observado en los buenos conductores metálicos (Cu, Ag, Au). Concluimos que un superconductor no es simplemente un buen conductor haciéndose mejor, y nos lleva a sospechar que el mecanismo que causa la

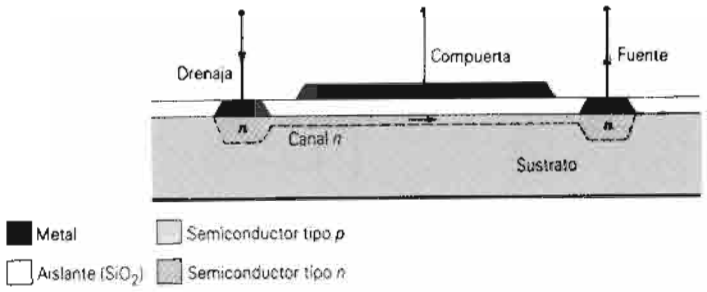


Figura 21 La estructura de un MOSFET.

superconductividad puede diferir del mecanismo que causa la conductividad de los metales ordinarios. Como veremos, la superconductividad resulta de un acoplamiento *fuerte* entre electrones de conducción y la red. La conducción normal en los mejores conductores se presenta cuando ocurre un acoplamiento *débil* entre el electrón de valencia y la red.

Consideremos un electrón que se mueve por una red. Al moverse, atrae hacia sí a las corazas de iones positivos y cambia la densidad de carga en su vecindad. Éste deja una densidad de carga algo mayor en su camino (estela) de la que habría allí de otro modo. Esta carga positiva atrae otros electrones. Los electrones interactúan entre sí por medio de la red, un tanto parecido a cómo interactúan las estelas de dos embarcaciones. El resultado neto es una ligera atracción de los electrones entre sí.

La teoría BCS (Bardeen, Cooper y Schrieffer)* de la superconductividad demuestra que el sistema electrónico tiene la mínima energía posible si los electrones se enlazan entre sí en pares, llamados *pares de Cooper*. Cuando no existe corriente en un superconductor, los dos electrones de un par de Cooper tienen ímpetus de igual magnitud pero de sentidos exactamente opuestos, de modo que el ímpetu total y la corriente eléctrica se hacen cero ambas. Cuando se genera una corriente, ambos electrones del par adquieren el mismo incremento en el ímpetu, dando por resultado un movimiento del centro de masa del par. Todos los pares Cooper adquieren el mismo ímpetu.

La superconductividad es un fenómeno de cooperación. Cuando se han formado algunos pares de Cooper, la reducción de energía que se presenta en el siguiente par es mayor que si no se hubieran formado pares previamente. Una vez que la temperatura cae a menos de T_c y se han formado algunos pares, una pequeña reducción adicional en la temperatura causa que se formen muchos más pares. El cambio del estado normal al de superconductor es bastante precipitado. Los movimientos cooperativos de los pares de Cooper también fuerzan a que todos los pares tengan el mismo ímpetu.

Los pares de Cooper tienen una energía de enlace Δ, llamada *energía de apareamiento*, que está típicamente en el intervalo de 10^{-4} a 10^{-3} eV, como se muestra en la tabla 3. Nótese que temperaturas críticas entre 1 y 10 K (típicas de la mayoría de los superconductores que se muestran en la tabla 3) corresponden a energías kT_c en el mismo intervalo de 10^{-4} a 10^{-3} eV. La temperatura

* Esta teoría de la superconductividad fue desarrollada en 1957 por John Bardeen, Leon N. Cooper y J. Robert Schrieffer, quienes fueron galardonados por su trabajo con el premio Nobel de física en 1972. Bardeen compartió también el premio Nobel de 1956 por su investigación sobre superconductores y el descrubrimiento del transistor.

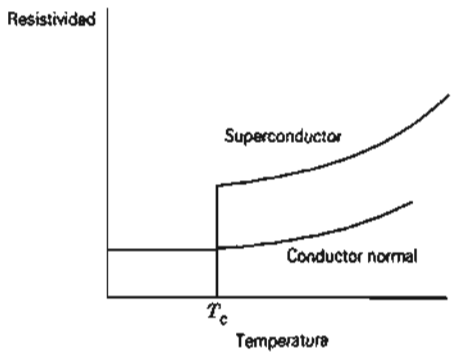


Figura 22 Comparación de la dependencia entre la resistividad y la temperatura en un conductor normal y en un superconductor. La resistividad de un conductor normal cae gradualmente conforme la temperatura disminuye. En los materiales superconductores, la resistividad cae súbitamente a cero a la temperatura crítica T_c.

TABLA 3 PROPIEDADES DE ALGUNOS SUPERCONDUCTORES

Material	T_c (K)	*Energía de apareamiento* (meV)
Cd	0.56	0.27
Al	1.19	0.34
Sn	3.75	1.15
Hg	4.16	1.65
Pb	7.22	2.73
Nb	9.46	3.05
Nb_3Sn	18.1	
$YBa_2Cu_3O_7$	90	
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	125	

crítica de un superconductor se relaciona directamente con la energía de apareamiento. Por arriba de T_c, los pares se rompen y el material tiene una resistencia eléctrica normal.

La energía de enlace (amarre) de un par de Cooper introduce una *banda de apareamiento* 2Δ dentro de la densidad de estados $n(E)$ cerca de la energía de Fermi. (La figura 1*a* muestra un ejemplo de la densidad de estados en un conductor normal.) En términos de energía, es favorable que los electrones cerca de la energía de Fermi en un superconductor se liguen entre sí en pares de Cooper. Como resultado, la densidad de los estados disminuye a cero dentro de un intervalo de $\pm\Delta$ de E_F, con un aumento correspondiente en $n(E)$ justo por arriba y por debajo de E_F. La figura 23 muestra la densidad de estados y la banda de apareamiento 2Δ resultantes. Por arriba de T_c, la densidad de estados de un superconductor sea como se muestra en la figura 1*a*. La banda comienza a abrirse conforme el superconductor se enfría por debajo de T_c; la energía de la banda aumenta a medida que disminuye la temperatura, alcanzando su máximo conforme T se aproxima a 0 K.

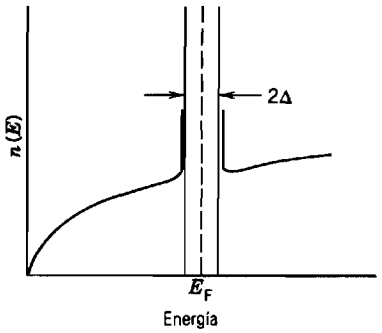


Figura 23 La densidad de estados en un superconductor por debajo de la temperatura de transición (temperatura crítica). Existe una banda de energía de 2Δ, dentro de la cual la densidad de estados es cero. Se exageró la escala de este dibujo; típicamente la energía de Fermi E_F es de unos cuantos electronvolts, mientras que la banda de apareamiento es de 10^{-4} a 10^{-3} eV.

En un superconductor, la probabilidad de ocupación de estados electrónicos puede hallarse del producto de la densidad de estados, mostrada en la figura 23, y una función de distribución de Fermi-Dirac, como se mostró en la figura 2*b*. Esto conduce a una alta probabilidad de ocupación de los estados superconductores justo por debajo de la banda. Por arriba de ésta, ocurre una pequeña densidad de estados normales (no apareados) cuando $T > 0$.

A principios de 1986 se descubrió una nueva clase de superconductores* con valores de T_c sorprendentemente elevados. Los dos últimos renglones de la tabla 3 son ejemplos de estos compuestos, que son materiales cerámicos que (al contrario de los tipos de cerámica más familiares) son conductores a temperatura ambiente. Puesto que la temperatura más elevada a la que se había observado previamente la superconductividad era alrededor de 20 K, estos nuevos materiales representan un avance sustancial en la tecnología. En particular, permiten que se obtenga superconductividad a temperaturas características de enfriamiento con nitrógeno líquido (77 K) más bien que aquellas características del helio líquido (4 K), más caro y menos conveniente. Este salto de un factor de 6 en T_c mantiene firme la esperanza de que, con otro salto de un factor de menos de 3, podría ser posible alcanzar la superconductividad a temperatura ambiente.

Estos superconductores de alta temperatura son óxidos de cobre en combinación con otros diversos elementos. La teoría de operación de estos materiales no se entiende todavía; no está claro si existe un mecanismo del tipo BCS. Parece manifiesto que la superconductividad reside con los óxidos de cobre; si bien el cobre elemental no es superconductor, las combinaciones de óxido de cobre sí lo son. La estructura cristalina de estos compuestos coloca al cobre y al oxígeno en planos anclados entre otros elementos, y es probable que estos planos proporcionen el camino para los electrones que portan la corriente de superconducción.

* Véase "Superconductors Beyond 1-2-3", por Robert J. Cava, *Scientific American*, agosto de 1990, pág. 42.

PREGUNTAS

1. ¿Cree que cualquiera de las propiedades de los sólidos mencionados en la lista al principio de este capítulo se relacionen entre sí? De ser así, ¿cuáles?
2. Los electrones de conducción en una esfera metálica ocupan estados de energía cuantizada. ¿Depende el promedio del intervalo de energía entre estados contiguos del (*a*) material de que está hecha la esfera, (*b*) del radio de la esfera, (*c*) de la energía del estado o (*d*) de la temperatura de la esfera?
3. ¿Qué papel desempeña el principio de exclusión de Pauli para explicar la conductividad eléctrica de un metal?
4. ¿En qué modos difieren el modelo clásico y el modelo de la mecánica cuántica en relación con la conductividad eléctrica de un metal?

5. Si comparamos los electrones de conducción de un metal con los átomos de un gas ideal, nos sorprende notar (véase la Fig. 1*c*) que haya tanta energía cinética encerrada en el sistema electrones de conducción en el cero absoluto. ¿Sería mejor comparar los electrones de conducción, no con los átomos de un gas, sino con los electrones internos de un átomo pesado? Después de todo, también hay una gran cantidad de energía cinética encerrada en este caso, y no parece que lo hallemos sorprendente. Analícelo.
6. ¿Qué aspectos de la figura 2 la hacen específica del cobre, para el cual fue dibujada? ¿Qué aspectos son independientes de la identidad del metal?
7. ¿Por qué difieren tan poco entre sí las curvas de las figuras 1*c* y 2*c*?
8. Distinga cuidadosamente entre la función $n(E)$ de las densidades de estados, la función $n_o(E)$ de la densidad de estados ocupados y la función $p(E)$ de la probabilidad de Fermi-Dirac, todas las cuales aparecen en la ecuación 3.
9. ¿Para un metal dado la energía de Fermi depende del volumen de la muestra? Por ejemplo, si se compara una muestra cuyo volumen sea de 1 cm^3 con otra cuyo volumen sea del doble, la última muestra tiene precisamente el doble de los electrones de conducción disponibles; esto puede parecer que uno tendría que ir a energías más elevadas para llenar sus niveles disponibles. ¿Es así?
10. En la sección 25-4 demostramos que la capacidad calorífica (molar) de un gas monoatómico ideal es $\frac{3}{2}R$. Si los electrones de conducción del metal se comportaran como uno de estos gases, esperaríamos de ellos que contribuyeran con esta cantidad aproximadamente al calor específico medido de un metal. Sin embargo, este calor específico medido puede explicarse bastante bien en términos de la energía absorbida por las vibraciones de las corazas de los iones que forman la red metálica. No parece que los electrones absorban mucha energía conforme aumenta la temperatura de la muestra. ¿Cómo proporciona la figura 2 una explicación de este problema de los tiempos precuánticos?
11. Dé un argumento físico que explique cualitativamente la existencia de las bandas de energía permitidas y prohibidas en los sólidos.
12. ¿Es más difícil de aceptar la existencia de una banda de energía prohibida en un aislante que la existencia de energías prohibidas en un electrón en, digamos, un átomo de hidrógeno?
13. En el marco de la teoría de las bandas, ¿cuáles son los requisitos *esenciales* para que un sólido sea (*a*) un metal, (*b*) un aislante o (*c*) un semiconductor?
14. ¿Qué nos puede decir la teoría de bandas acerca de los sólidos que el modelo clásico no pueda decirnos? Véase la sección 32-5.
15. Distinga entre la velocidad de arrastre y la velocidad de Fermi de los electrones de conducción en un metal.
16. ¿Por qué, en un sólido, las bandas permitidas se vuelven más anchas a medida que vamos de los electrones atómicos interiores a los exteriores?
17. ¿Los semiconductores puros (sin impurezas) obedecen la ley de Ohm?
18. A temperatura ambiente un campo eléctrico aplicado generará una velocidad de arrastre en los electrones de conducción del silicio que es de aproximadamente 40 veces mayor que la de los electrones de conducción del cobre. ¿Por qué el silicio no es un mejor conductor de la electricidad que el cobre?
19. Considere estas dos afirmaciones: (*a*) A temperaturas suficientemente bajas el silicio cesa de ser un semiconductor y se convierte en un muy buen aislante. (*b*) A temperaturas suficientemente elevadas el silicio deja de ser un semiconductor y se vuelve un muy buen conductor. Analice hasta qué punto es cierta o no cada una de estas afirmaciones.
20. ¿La conductividad eléctrica de un semiconductor intrínseco (sin impurezas) depende de la temperatura? ¿O de la banda prohibida de energía E_g entre las bandas ocupadas y vacías?
21. ¿Cómo puede explicarse el hecho de que la resistividad de los metales aumenta con la temperatura pero la de los semiconductores disminuye?
22. Las bandas prohibidas de energía de los semiconductores silicio y germanio son 1.1 eV y 0.67 eV, respectivamente. ¿Qué sustancia esperaría usted que tuviera la mayor densidad de portadores de carga a temperatura ambiente? ¿Y a la temperatura de cero absoluto?
23. Analice esta frase: "La distinción entre un metal y un semiconductor es inconfundible y definida, pero aquélla entre un semiconductor y un aislante no lo es".
24. El efecto Hall es mucho mayor en los semiconductores que en los metales. ¿Por qué? ¿Qué uso práctico puede dársele a este resultado?
25. ¿Una placa de material tipo *n* porta una carga negativa *neta*?
26. Supóngase que un semiconductor contiene números iguales de impurezas donadoras y aceptoras. ¿Se cancelan entre sí en cuanto a sus efectos eléctricos? De ser así ¿cuál es el mecanismo? Si no, ¿por qué no?
27. ¿Por qué un semiconductor tipo *n* tiene muchos más electrones que huecos? ¿Por qué un semiconductor tipo *p* tiene muchos más huecos que electrones? Explíquelo con sus propias palabras.
28. ¿Qué elementos diferentes al fósforo son buenos candidatos para usarse como impurezas donadoras en el silicio? ¿Qué elementos diferentes del aluminio son buenos candidatos para usarse como impurezas aceptoras? Consulte la tabla periódica.
29. ¿Puede distinguirse entre los portadores mayoritarios y minoritarios de un semiconductor intrínseco como el silicio o el germanio? Si no, ¿por qué no? De ser así, ¿qué criterio emplearía?
30. Al preparar semiconductores tipo *n* o tipo *p* por impurificación, ¿por qué es extremadamente importante evitar la impurificación de la muestra con tan siquiera concentraciones muy pequeñas de impurezas indeseadas?
31. ¿Esperaría usted que la impurificación cambie en mucho la resistividad del silicio?
32. Cuando una corriente fluye por un material tipo *p*, los huecos positivos se mueven hacia la terminal negativa de

la batería y se recombinan con los electrones en el electrodo óhmico conectado en la frontera del cristal. ¿Por qué el cristal no se carga negativamente?

33. ¿Por qué se prefiere con frecuencia el silicio sobre el germanio para fabricar dispositivos semiconductores?
34. El germanio y el silicio son materiales semiconductores similares cuya diferencia principal es que la anchura de la banda prohibida E_g es de 0.67 eV en el primero y de 1.1 eV en el segundo. Si se quisiera construir una unión *pn* (véase la Fig. 10) donde la corriente de retorno (de fuga) se mantuviera tan pequeña como fuera posible, ¿qué material escogería usted y por qué?
35. Hemos visto que, en una unión *pn* (véase la Fig. 10), los electrones y los huecos pueden difundirse, en sentidos opuestos, a través de la región de la unión. ¿Cuál es el destino final de cada una de tales partículas conforme se difunden hacia el material en el lado opuesto de la unión? ¿Por qué los electrones y los huecos positivos no *todos* se recombinan evitando así la posibilidad de conducción?
36. Considere dos técnicas posibles para la fabricación de una unión *pn* (véase la Fig. 10). (*a*) Prepare por separado una muestra tipo *n* y otra tipo *p* y únalas entre sí, asegurándose de que sus superficies de contacto sean planas y altamente pulidas. (*b*) Prepare una muestra tipo *n* y difunda en ella impurezas aceptoras en exceso en una cara, a alta temperatura. ¿Qué método se prefiere y por qué?
37. La unión *pn* que se muestra en la figura 11*a* tiene concentraciones iguales de impurezas en cada lado de su plano de unión. Sin embargo, supóngase que la concentración de donadores fuera significativamente mayor que la concentración de aceptores. ¿Estaría la zona de agotamiento todavía localizada simétricamente con respecto al plano de la unión? Si no, ¿se movería el plano central de la zona hacia la cara tipo *n* o hacia la del tipo *p* de la unión? Dé sus razones.
38. ¿Por qué no podemos medir la diferencia del potencial de contacto generado en una unión *pn* simplemente conectando un voltímetro entre sus extremos?
39. En la figura 10*b*, ¿por qué se forma la zona de agotamiento cerca del plano de la unión? ¿Por qué no se dispersa en todo el volumen de la muestra?
40. ¿Qué quiere decir que una unión *pn* tiene polarización directa?
41. (*a*) Analice los movimientos de los portadores mayoritarios (tanto electrones como huecos) en una unión *pn* polarizada en directo. (*b*) Analice los movimientos de los portadores minoritarios en esta misma unión.
42. Explique en sus propias palabras cómo puede disminuir el espesor de la zona de agotamiento de una unión *pn* mediante (*a*) el aumento del voltaje de polarización directa y (*b*) el aumento de la concentración de las impurezas.
43. Si se aumenta la temperatura de una unión *pn* con polarización inversa, ¿qué le sucede a la corriente (véase la Fig. 14*a*)? ¿Es mayor el efecto en el silicio o en el germanio? (La banda prohibida de energía intrínseca E_g del silicio es mayor que la del germanio.)
44. ¿El rectificador de diodo cuyas características se muestran en la figura 12 obedece la ley de Ohm? ¿Cuál es su criterio de decisión?
45. Hemos visto que no puede usarse un simple semiconductor intrínseco (sin impurezas) como diodo emisor de luz. ¿Por qué no? ¿Funcionaría un semiconductor altamente impurificado tipo *n* o tipo *p*?
46. Dé su propia versión de cómo funciona el dispositivo MOSFET de la figura 21.
47. ¿Piensa que existe una correlación entre la temperatura crítica de un superconductor (tabla 3) y su conductividad eléctrica (el recíproco de la resistividad) a temperatura ambiente?

PROBLEMAS

Sección 53-1 Electrones de conducción en un metal

1. (*a*) Demuestre que la ecuación 2 puede escribirse así:

$$n(E) = CE^{1/2},$$

donde $C = 6.81 \times 10^{27}\ \text{m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-3/2}$. (*b*) Use esta relación para verificar un cálculo del problema muestra 1, a saber, que cuando $E = 5.00$ eV, $n(E) = 1.52 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1}$.

2. Calcule la densidad $n(E)$ de estados electrónicos de conducción en un metal cuando $E = 8.00$ eV y demuestre que el resultado es consistente con la curva de la figura 1*c*.
3. El oro es un metal monovalente con una masa molar de 197 g/mol y una densidad de 19.3 g/cm³ (véase el apéndice D). Calcule la densidad de los portadores de carga.
4. ¿A qué presión un gas ideal tendría densidad de moléculas igual a la densidad de electrones de conducción en el cobre ($= 8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$)? Suponga que $T = 297$ K.
5. La densidad y la masa molar del sodio son de 971 kg/m³ y 23.0 g/mol, respectivamente; el radio del ion Na^+ es de 98 pm. (*a*) ¿De qué fracción del volumen del sodio metálico disponen sus electrones de conducción? (*b*) Realice el mismo cálculo para el cobre. Su densidad, masa molar y radio iónico son 8960 kg/m³, 63.5 g/mol y 96 pm, respectivamente. (*c*) ¿En cuál de estos dos metales piensa que los electrones de conducción se comportarían más como un gas de electrón libre?

Sección 53-2 Ocupación de los estados permitidos

6. Calcule la probabilidad de que un estado 0.0730 eV por arriba de la energía de Fermi esté ocupado a (*a*) $T = 0$ K y (*b*) $T = 320$ K.
7. La energía de Fermi de la plata es de 5.5 eV. (*a*) A $T = 0°$ C, ¿cuáles son las probabilidades de que los estados, para las siguientes energías, estén ocupados: 4.4 eV, 5.4 eV,

5.5 eV, 5.6 eV, 6.4 eV? (*b*) ¿Cuál sería la temperatura a la que la probabilidad de que un estado a 5.6 eV esté ocupado fuera de 0.16?

8. Demuestre que las probabilidades de ocupación de dos estados cuyas energías estén igualmente espaciadas por arriba y por debajo de la energía de Fermi al sumarse el resultado es la unidad.
9. La densidad del oro es de 19.3 g/cm^3. Cada átomo contribuye con un electrón de conducción. Calcule la energía de Fermi del oro. Véase el apéndice D para la masa molar del oro.
10. La figura 2*c* muestra la densidad $n_o(E)$ de los estados ocupados de los electrones de conducción en el cobre a 1000 K. Calcule $n_o(E)$ del cobre para las energías E = 4.00, 6.75, 7.00, 7.25 y 9.00 eV. La energía de Fermi del cobre es de 7.06 eV.
11. En la sección 50-7 consideramos la situación de un electrón atrapado en un pozo infinitamente profundo. Supongamos que se colocan 100 electrones en un pozo de 120 pm de anchura, dos por nivel con espines opuestos. Calcule la energía de Fermi del sistema. (*Nota*: La energía de Fermi es la energía del nivel ocupado más alto en el cero absoluto de temperatura.)
12. Los electrones de conducción de un metal se comportan como un gas ideal cuando la temperatura es lo suficientemente elevada. En particular, la temperatura debe ser tal que $kT \gg E_F$, la energía de Fermi. ¿Qué temperaturas se necesitan para que el cobre (E_F = 7.06 eV) satisfaga este requisito? Compare su respuesta con el punto de ebullición del cobre; véase el apéndice D. Estúdiese la figura 2*c* en este aspecto y observe que tenemos $kT \ll E_F$ para las condiciones de esa figura. Esto es precisamente el inverso del requisito citado arriba.
13. Demuestre que la ecuación 5 puede escribirse como:

$$E_F = An^{2/3},$$

donde la constante A tiene el valor de 3.65 148 10^{-19} m^2 · eV.

14. La energía de Fermi del cobre es de 7.06 eV. (*a*) En cobre a 1050 K, calcule la energía para la cual la probabilidad de ocupación sea de 0.910. Para esta energía, evalúe (*b*) la densidad de estados y (*c*) la densidad de estados ocupados.
15. Demuestre que la función de la densidad de estados dada por la ecuación 2 puede escribirse en la forma

$$n(E) = \tfrac{3}{2}nE_F^{-3/2}E^{1/2}.$$

Explique cómo puede ser que $n(E)$ sea independiente del material cuando la energía de Fermi E_F (= 7.06 eV en el cobre, 9.44 eV en el zinc, etc.) aparece explícitamente en esta expresión.

16. Demuestre que si $E \gg E_F$, la distribución de energía de estados ocupados $n_o(E)$ puede escribirse como:

$$n_o(E) \approx CE^{1/2}e^{-E/kT},$$

donde C es una constante. Compare este resultado con el calculado para la distribución de Maxwell-Boltzmann en la sección 24-4. ¿Qué se concluye?

17. Demuestre que la probabilidad p_h de que exista un *hueco* en un estado de energía E está dada por

$$p_h = \frac{1}{e^{-(E-E_F)/kT} + 1}.$$

(*Sugerencia*: La existencia de un hueco significa que el estado está desocupado; convénzase de que esto implica que $p_h = 1 - p$.)

18. La energía de Fermi del aluminio es de 11.66 eV; su densidad es 2.70 g/cm^3, y su masa molar 27.0 g/mol (véase el apéndice D). De estos datos, determine el número de electrones libres por átomo.
19. Las estrellas enanas blancas representan una etapa tardía en la evolución de estrellas como el Sol. Se vuelven lo suficientemente densas y calientes como para que podamos analizar su estructura como un sólido en el que todos los electrones Z por átomo están libres. Calcule la energía de Fermi de los electrones de una enana blanca con una masa igual a la del Sol y un radio igual al de la Tierra. Suponga que la estructura atómica está representada por átomos de hierro y que T = 0 K.
20. Una estrella de neutrones puede analizarse mediante técnicas similares a las empleadas en los metales ordinarios. En este caso, los neutrones (más bien que los electrones) obedecen la función de la probabilidad, ecuación 6. Considérese una estrella de neutrones de 2.00 masas solares con un radio de 10.0 km. Calcule la energía de Fermi de los neutrones.
21. Estime el número N de electrones de conducción en un metal que tenga energías mayores que la energía de Fermi como sigue. Estrictamente, N está dado por

$$N = \int_{E_F}^{\infty} n(E)p(E)dE.$$

Al estudiar la figura 2*c*, convénzase de que, con un buen grado de aproximación, esta expresión puede escribirse como

$$N = \int_{E_F}^{E_F + 4kT} n(E_F)(\tfrac{1}{4})dE.$$

Por sustitución de la función de la densidad de estados, evaluada para la energía de Fermi, demuestre que esto da, para la fracción f de los electrones de conducción excitados a energías mayores que la energía de Fermi,

$$f = \frac{N}{n} = \frac{3kT/2}{E_F}.$$

¿Por qué no evaluar directamente la primera integral de arriba sin recurrir a una aproximación?

22. Use el resultado del problema 21 para calcular la fracción de electrones excitados en el cobre a temperaturas de (*a*) cero absoluto, (*b*) 300 K y (*c*) 1000 K.
23. ¿A qué temperatura será igual a 0.0130 la fracción de los electrones excitados en el litio? La energía de Fermi del litio es de 4.71 eV. Véase el problema 21.
24. La plata se funde a 962°C. En el punto de fusión, ¿qué fracción de los electrones de conducción está en los estados con energías mayores que la energía de Fermi de 5.5 eV? Véase el problema 21.

25. Demuestre que, en el cero absoluto de temperatura, la energía promedio $\bar{E}$ de los electrones de conducción de un metal es igual a $\frac{3}{5}E_F$, donde E_F es la energía de Fermi. (*Sugerencia*: Obsérvese que, de la definición de promedio, $\bar{E} = (1/n)\int En_c(E)dE$.)
26. (*a*) Usando el resultado del problema 25, estime cuánta energía se liberaría mediante los electrones de conducción en una moneda pequeña (suponiendo que esté formada de cobre exclusivamente, con masa = 3.1 g) si pudiésemos hacer a un lado súbitamente el principio de exclusión de Pauli. (*b*) ¿Durante cuánto tiempo estaría encendida con esta cantidad de energía una lámpara de 100 W? ¡Téngase en cuenta que no existe una manera conocida de hacer a un lado el principio de Pauli!

Sección 53-3 Conducción eléctrica en metales

27. La plata es un metal monovalente. Calcule (*a*) el número de electrones de conducción por metro cúbico, (*b*) la energía de Fermi, (*c*) la velocidad de Fermi y (*d*) la longitud de onda de de Broglie que corresponde a esta velocidad. Consulte en el apéndice D los datos necesarios.
28. El zinc es un metal bivalente. Calcule (*a*) el número de electrones de conducción por metro cúbico, (*b*) la energía de Fermi, (*c*) la velocidad de Fermi y (*d*) la longitud de onda de de Broglie que corresponde a esta velocidad. Véase el apéndice D para los datos necesarios del zinc.
29. En la plata, calcule (*a*) el camino (o trayectoria) libre medio de los electrones de conducción y (*b*) la razón del camino libre medio a la distancia entre las corazas de iones vecinos. La plata tiene una energía de Fermi de 5.51 eV y una resistividad de $1.62 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Véase el problema 27.

Sección 53-5 Conductores, aislantes y semiconductores

30. Repita el cálculo del problema muestra 6 para una temperatura de (*a*) 1000 K y (*b*) 4.0 K.
31. La función de distribución de Fermi-Dirac puede aplicarse por igual a los semiconductores y a los metales. En los semiconductores, E es la energía por arriba de la parte superior de la banda de valencia. El nivel de Fermi de un semiconductor intrínseco está casi en el centro entre la parte superior de la banda de valencia y la parte inferior de la banda de conducción. En el germanio estas bandas están separadas por una banda prohibida de 0.67 eV. Calcule la probabilidad de que (*a*) un estado en el fondo de la banda de conducción esté ocupado y (*b*) un estado en la parte superior de la banda de valencia a 290 K esté desocupado.
32. La banda prohibida del germanio puro es de 0.67 eV. Supóngase que el nivel de Fermi está en el centro de la banda prohibida. (*a*) Calcule la probabilidad de que un estado en el fondo de la banda de conducción a 16°C esté ocupado. (*b*) ¿A qué temperatura será la probabilidad de ocupación de este estado 3.0 veces mayor que la probabilidad a 16°C?
33. En un modelo simplificado de un semiconductor intrínseco (sin impurezas), la distribución real de la energía de los estados se sustituye por otra donde existen N_v estados en la banda de valencia, teniendo todos estos estados la misma energía E_v, y N_c estados en la banda de conducción, teniendo todos estos estados la misma energía E_c. El número de electrones en la banda de conducción es igual al número de huecos en la banda de valencia. (*a*) Demuestre que esta última condición implica que

$$\frac{N_c}{e^{(E_c - E_F)/kT} + 1} = \frac{N_v}{e^{-(E_v - E_F)/kT} + 1}.$$

(*Sugerencia*: Véase el problema 17.) (*b*) Si el nivel de Fermi se encuentra en la banda prohibida entre las dos bandas y lejos de ambas bandas en comparación con kT, entonces las exponenciales dominan en los denominadores. En estas condiciones, demuestre que

$$E_F = \tfrac{1}{2}(E_c + E_v) + \tfrac{1}{2}kT \ln(N_v/N_c),$$

y, por lo tanto que, si $N_v = N_c$, el nivel de Fermi está cerca del centro de la banda prohibida.

Sección 53-6 Semiconductores con impurezas

34. Identifique los siguientes semiconductores como tipo p o tipo n: (*a*) Sb en Si; (*b*) In en Ge; (*c*) Al en Ge; (*d*) As en Si.
35. El silicio puro a 300 K tiene una densidad de electrones en la banda de conducción de $1.5 \times 10^{16}\ m^{-3}$ y una densidad igual de huecos en la banda de valencia. Supóngase que uno de cada 1.0×10^7 átomos de silicio se reemplaza por un átomo de fósforo. (*a*) ¿Qué densidad de portadores de carga añadirá el fósforo? Supóngase que todos los electrones donadores estén en la banda de conducción. (Véase el apéndice D para los datos necesarios sobre el silicio.) (*b*) Halle la razón de la densidad de los portadores de carga en el silicio impurificado a la del silicio puro.
36. ¿Qué masa de fósforo se necesitaría para impurificar una muestra de 1.0 g de silicio hasta el punto descrito en el problema muestra 7?
37. Un cristal de silicio se impurifica con fósforo a una concentración de 10^{22} átomos de fósforo por metro cúbico. En promedio, ¿cuán alejados están estos átomos entre sí? Véase el problema muestra 7.
38. Una muestra de germanio muy puro tiene un átomo impureza por cada 1.3×10^9 átomos de germanio. Calcule la distancia entre los átomos impureza.
39. En la figura 24 se representan dos bandas de energía de un sólido hipotético. Las bandas están llenas hasta el nivel E_x, que puede estar en la banda 1 o en la banda 2. Puede existir un nivel de impureza en E_i. Indique si el sólido es un conductor, un aislante, un semiconductor intrínseco o un semiconductor extrínseco. El tipo de impureza puede ser un donador, un aceptor, o ninguno, y los semiconductores extrínsecos pueden ser del tipo p o del tipo n. Complete la tabla de la página siguiente.
40. La impurificación cambia la energía de Fermi de un semiconductor. Considérese el silicio, con una banda prohibida de 1.1 eV entre las bandas de valencia y de conducción. A 290 K el nivel de Fermi del material puro está casi en el centro de la banda prohibida. Supóngase que esté impurificado con átomos donadores, cada uno de los cuales

			Tipo		
E_x (eV)	E_i (eV)	E_b (eV)	*Sólido*	*Impureza*	*Semiconductor extrínseco*
3.00	—	9.00			
3.00	4.06	4.10			
3.00	—	4.10			
1.49	—	9.00			
4.40	—	4.10			
3.00	3.04	4.10			

tiene un estado 0.15 eV abajo del fondo de la banda de conducción, y supóngase, además, que la impurificación eleva el nivel de Fermi a 0.084 eV abajo del fondo de esa banda. (*a*) Calcule, tanto para el silicio puro como para el silicio impurificado, la probabilidad de que un estado en el fondo de la banda de conducción esté ocupado. (*b*) Calcule también la probabilidad de que esté ocupado un estado donador en el material impurificado. Véase la figura 25.

41. Una muestra de silicio está impurificada con átomos que tienen un estado donador 0.11 eV abajo del fondo de la banda de conducción. (*a*) Si cada uno de estos estados está ocupado con una probabilidad de 4.8×10^{-5} a la temperatura de 290 K, ¿dónde está el nivel de Fermi en relación con la parte superior de la banda de valencia? (*b*) ¿Cuál es, entonces, la probabilidad de que un estado en el fondo de la banda de conducción esté ocupado? La banda prohibida de energía del silicio es 1.1 eV.

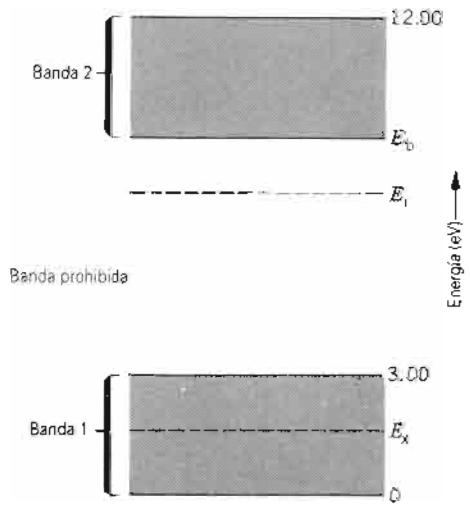


Figura 24 Problema 39.

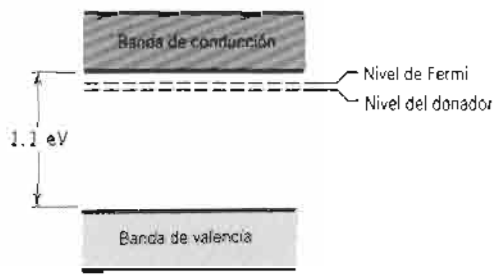


Figura 25 Problema 40.

Sección 53-7 Unión pn

42. Cuando un fotón entra en la región de agotamiento de una unión *pn*, pueden crearse pares electrón-hueco mientras los electrones absorben parte de la energía del fotón y se excitan desde la banda de valencia hacia la banda de conducción. Estas uniones se usan entonces a menudo como detectores de fotones, especialmente de rayos X y de rayos gamma nucleares. ¿Cuántos pares de electrones y huecos se crean cuando un fotón de 662 keV de rayos gamma es totalmente absorbido por un semiconductor con una banda prohibida de energía de 1.1 eV?

43. Calcule y compare las resistencias del diodo rectificador en los dos puntos mostrados en la curva característica de la figura 12. La corriente en el punto a la izquierda (demasiado pequeña para mostrarla en la figura) es de 50 pA.

44. En un diodo de unión *pn* ideal, con una frontera definida entre los dos materiales semiconductores, la corriente i se relaciona con la diferencia de potencial V entre los extremos del diodo por

$$i = i_0(e^{eV/kT} - 1),$$

donde i_o, que depende de los materiales pero no de la corriente o de la diferencia de potencial, se llama *corriente inversa de saturación*. V es positivo cuando la unión está polarizada en directo y negativo cuando tiene polarización inversa. (*a*) Verifique que esta expresión predice el comportamiento esperado de un diodo al graficar i en función de V dentro del intervalo $-0.12\ \text{V} < V < +0.12\ \text{V}$. Considere que $T = 290$ K e $i_o = 5$ nA. (*b*) Para la misma temperatura, calcule la razón de la corriente para 0.50 V polarizada en directo a la corriente para 0.50 V con polarización inversa.

45. Una gota de plomo (función de trabajo = 3.4 eV) está en contacto íntimo con una lámina de cobre (función de trabajo = 4.5 eV). Halle la diferencia del potencial de contacto que aparece entre la interfaz plomo-cobre. ¿Cómo podría medirse? Dibuje un diagrama de energía, que muestre (como en el caso de la figura 4*b*) los niveles de Fermi relativos tanto antes como después de que se hayan unido los dos metales entre sí. ¿Puede servir una unión de éstas como un rectificador de diodo?

46. (*a*) Se asocia una capacitancia con una unión *pn*. Explique por qué. (*b*) Deduzca una expresión para la capacitancia de la unión *pn* del problema muestra 9.

Sección 53-8 Electrónica óptica

47. (*a*) Calcule la longitud de onda máxima que producirá fotoconducción en diamante, que tiene una banda prohibida de 5.5 eV. (*b*) ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentra esta longitud de onda?

48. En un cristal en particular, la banda de estados ocupada más alta está llena. El cristal es transparente a la luz de las

longitudes de onda más largas de 295 nm pero opaco a las longitudes de onda más cortas. Calcule, en electronvolts, la anchura de la banda prohibida entre la banda ocupada más alta y la siguiente banda (vacía).

49. El cristal de KCl tiene una banda prohibida entre bandas de 7.6 eV arriba de la banda ocupada más alta, la cual está llena. ¿Este cristal es opaco o transparente a la radiación de 140 nm de longitud de onda?

50. (*a*) Llene el indicador de siete segmentos que se muestra en la figura 15*a* para mostrar cómo pueden generarse los diez números. (*b*) Si los números se muestran al azar, ¿en qué fracción de los despliegues se usará cada uno de los siete segmentos?

51. En la sección 53-8 se estudió el modo de operación de un diodo emisor de luz, donde la luz se emite al inyectar portadores de carga a través del plano central de la unión *pn* mediante un potencial externo. El dispositivo inverso, un *fotodiodo*, es también una posibilidad. Esto es, uno puede hacer que incida luz en una unión *pn* y a través del plano de la unión se creará una corriente. Analice cómo opera tal dispositivo. ¿Sería mejor operarlo en el modo de polarización directa o con polarización inversa?

CAPÍTULO 54

FÍSICA NUCLEAR

En lo profundo del átomo se encuentra su núcleo, que ocupa únicamente 10^{-15} del volumen del átomo y, sin embargo, proporciona la mayor parte de su masa, así como de la fuerza que lo mantiene unido. La siguiente meta en nuestro estudio de la física consiste en entender la estructura del núcleo y la subestructura de sus componentes.

Nuestra tarea se hace más fácil gracias a las muchas similitudes entre el estudio de los átomos y el estudio de los núcleos. Ambos sistemas se rigen por las leyes de la mecánica cuántica. Al igual que los átomos, los núcleos tienen estados excitados que pueden decaer al estado base mediante la emisión de fotones (rayos gamma). Como lo veremos, los núcleos pueden exhibir, en ciertas circunstancias, efectos de capa que son muy parecidos a los de los átomos. También veremos que existen diferencias entre el estudio de los átomos y el estudio de los núcleos, las cuales nos impiden alcanzar un entendimiento de los núcleos tan completo como el que tenemos de los átomos.

En este capítulo estudiaremos la estructura de los núcleos y sus constituyentes. Al estudiar sus propiedades consideraremos algunas técnicas experimentales, y concluiremos con una descripción de la base teórica para entender la estructura de los núcleos.

54-1 DESCUBRIMIENTO DEL NÚCLEO

En los primeros años del siglo XX no se sabía mucho acerca de la estructura de los átomos más allá del hecho de que contenían electrones. Esta partícula se descubrió (por J. J. Thomson) apenas en 1897, y su masa se desconocía en aquellos tempranos días. Así pues, no era posible decir ni siquiera cuántos electrones contenía determinado átomo. Los átomos son eléctricamente neutros, de modo que deben contener también cierta carga positiva; pero en aquellos tiempos nadie sabía qué forma tomaba esta carga positiva compensatoria. Cómo se movían los electrones dentro del átomo y cómo se dividía la masa del átomo entre electrones y carga positiva eran igualmente preguntas sin respuesta.

Ernest Rutherford, en 1911, interpretando algunos experimentos realizados en su laboratorio, se inclinó a proponer que la carga positiva del átomo se concentraba densamente en el centro del átomo y que, además, era la responsable de la mayor parte de la masa del átomo. ¡Había descubierto el núcleo atómico!

Hasta que se dio este paso, todos los intentos para entender los movimientos de los electrones dentro del átomo estaban sentenciados al fracaso. Sólo 2 años después de la proposición de Rutherford, Niels Bohr empleó el concepto del átomo nuclear para desarrollar la teoría semiclásica de la estructura atómica que describimos en el capítulo 51. Este trabajo preliminar de Rutherford y Bohr marca el comienzo de nuestro entendimiento de la estructura de los átomos.

¿Cómo llegó Rutherford a hacer esta propuesta? No era una conjetura vana, sino que se basaba firmemente en los resultados de un experimento sugerido por él y llevado a cabo por sus colaboradores, Hans Geiger (famoso por el contador Geiger) y Ernest Marsden, un estudiante de 20 años de edad que no había obtenido aún su título de licenciatura.

La idea de Rutherford era sondear las fuerzas que actúan dentro de un átomo al disparar partículas alfa (α) energéticas a través de una delgada lámina como blanco y midiendo la magnitud con la que se desviaban conforme pasaban por la lámina. Las partículas alfa, que son alrededor de 7300 veces más masivas que los electrones,

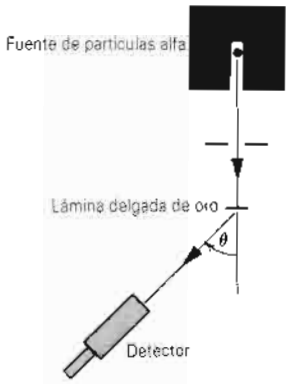


Figura 1 El aparato experimental empleado en el laboratorio de Rutherford para estudiar la dispersión de partículas por láminas delgadas de metal. El detector puede girarse para varios ángulos de dispersión θ.

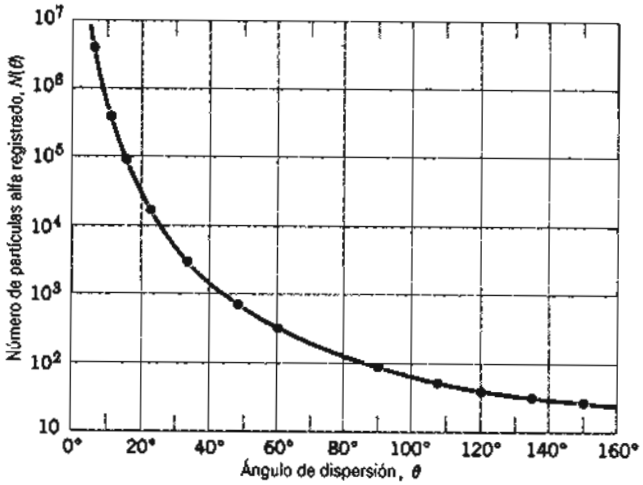


Figura 2 Los puntos muestran los resultados de la dispersión de partículas alfa de los experimentos de Geiger y Marsden, y la curva se calculó de acuerdo con la teoría del núcleo de Rutherford. Nótese que el eje vertical está marcado en potencias de 10.

portan una carga de $+2e$ y se emiten espontáneamente (con energías de unos cuantos MeV) por muchos de los materiales radiactivos. Ahora sabemos que estos útiles proyectiles son los núcleos de los átomos del helio ordinario. La figura 1 muestra el aparato experimental de Geiger y Marsden. El experimento consiste en contar el número de partículas α desviadas por diversos ángulos de dispersión θ. (Véase la Sec. 29-7.)

La figura 2 muestra sus resultados. Nótese especialmente que la escala vertical es logarítmica. Vemos que la mayoría de las partículas se dispersan a ángulos más bien pequeños, pero —y ésta fue la gran sorpresa— una muy pequeña fracción de ellas se dispersaba a ángulos muy grandes, que llegaban a 180°. En las palabras de Rutherford: "Fue en realidad la cosa más increíble que me haya sucedido en la vida. Casi tan increíble como si uno hubiera disparado un proyectil de 15 pulgadas sobre un trozo de papel de seda y hubiera rebotado para pegarle a uno".

¿Por qué se sorprendió tanto Rutherford? En los tiempos de estos experimentos, muchos físicos creían en un modelo del átomo propuesto por J. J. Thomson. En el modelo de Thomson se creía que la carga positiva del átomo se dispersaba en todo el volumen del átomo. Se creía que los electrones se hallaban distribuidos en todo este volumen, de manera un poco parecida a como se hallan las semillas en una sandía, y que vibraban alrededor de sus posiciones de equilibrio dentro de esta esfera de carga.

La fuerza deflectora máxima que actúa sobre la partícula α al pasar por tal esfera de carga positiva prueba ser demasiado pequeña para desviar la partícula α tan siquiera un grado. Los electrones del átomo tendrían también muy poco efecto sobre la enérgica y masiva partícula α. De hecho, estos mismos se desviarían fuertemente, en forma parecida a como un enjambre de mosquitos se haría a un lado por una piedra arrojada contra ellos. Simplemente en el modelo del átomo de Thomson no existe un mecanismo que explique el retroceso de una partícula α.

Rutherford vio que para producir una desviación tan grande debía de haber una gran fuerza, que podía proveerse siempre y cuando la carga positiva se concentrara fuertemente en el centro del átomo, en lugar de estar esparcida en todo su volumen. En este modelo, la partícula α incidente puede llegar muy cerca del centro de la carga positiva sin penetrarla, dando por resultado una gran fuerza de desviación; véase el problema muestra 1.

La figura 3 muestra las trayectorias que las partículas α típicas siguen al pasar a través de los átomos de la lámina blanco. Como puede observarse, la mayoría no se desvían o sólo muy poco, pero unas cuantas (aquéllas cuyas trayectorias de incidencia prolongadas pasan, por probabilidad, cerca de un núcleo) se desvían en ángulos grandes. De un análisis de los datos, Rutherford concluyó que las dimensiones del núcleo deben ser menores que el diámetro de un átomo por un factor de unos 10^4. ¡El átomo es en su mayor parte espacio vacío! No sucede a menudo que la penetrante perspicacia de un científico dotado, con el apoyo de unos cuantos cálculos sencillos,* conduzca a resultados de tal importancia.

Problema muestra 1 Una partícula α de 5.30 MeV se proyecta, por casualidad, directamente hacia el núcleo de un átomo

* Para un análisis de este experimento de dispersión, véase Kenneth S. Krane, *Modern Physics*, Wiley, 1983, capítulo 6.

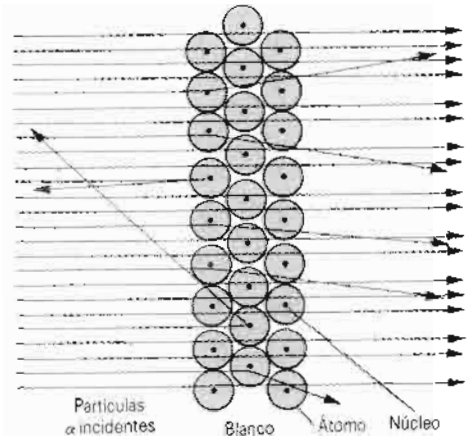


Figura 3 El ángulo al cual se dispersa una partícula α depende de cuán cerca del núcleo de un átomo se encuentre la prolongación de su trayectoria incidente. Sólo se obtienen desviaciones grandes de encuentros muy cercanos.

de oro ($Z = 79$). ¿Cuánto se acerca antes de llegar momentáneamente al reposo e invertir su curso? Desprecie el retroceso del (relativamente masivo) núcleo de oro.

Solución Inicialmente toda la energía mecánica de las dos partículas en interacción es precisamente igual a K_α (= 5.30 MeV), la energía cinética inicial de la partícula α. En el momento en que la partícula α llega al reposo, la energía total es la energía potencial electrostática del sistema de dos partículas. Puesto que la energía debe conservarse, estas dos cantidades deben ser iguales, o sea,

$$K_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{d},$$

donde q (= $2e$) es la carga de la partícula α, Q (= $79e$) es la carga del núcleo de oro, y d es la distancia entre los centros de las dos partículas.

Al sustituir para las cargas y despejar d se obtiene

$$d = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 K_\alpha}$$

$$= (8.99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{(2)(79)(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(5.30\ \mathrm{MeV})(1.60 \times 10^{-13}\ \mathrm{J/MeV})}$$

$$= 4.29 \times 10^{-14}\ \mathrm{m} = 42.9\ \mathrm{fm}.$$

Ésta es una distancia pequeña para los estándares atómicos, pero no para los nucleares. Como veremos en la sección siguiente, ésta es considerablemente mayor que la suma de los radios del núcleo de oro y de la partícula α. Así, la partícula α invierte su curso sin haber "tocado" siquiera el núcleo de oro.

Si la carga positiva asociada con el átomo de oro se hubiera distribuido uniformemente en todo el volumen del átomo, la fuerza retardante máxima que actúa sobre la partícula α habría ocurrido en el momento en que la partícula α comenzó a tocar la superficie del átomo. Esta fuerza (véase el problema 2) habría sido demasiado débil para que tuviese mucho efecto sobre el movimiento de la partícula α, que se iría con gran velocidad justo a través de un átomo "esponjoso".

54-2 ALGUNAS PROPIEDADES NUCLEARES

El núcleo, por muy pequeño que pueda ser, tiene una estructura que es en todos aspectos tan compleja como la del átomo. Los núcleos se forman de protones y neutrones. Estas partículas (al contrario del electrón) no son verdaderas partículas elementales, las cuales se forman de otras partículas, llamadas *quarks*. Sin embargo, la física nuclear —el tema de este capítulo— se ocupa primordialmente de estudiar al núcleo y no considera la estructura interna de los protones y neutrones en sí mismos. La naturaleza fundamental de estas dos partículas es un tema en el campo de la física de las partículas elementales, las cuales estudiaremos en el capítulo 56.

Sistematización del núcleo

El núcleo se compone de protones y neutrones. El número de protones en el núcleo se llama el *número atómico* y se representa por Z. El número de neutrones se llama el *número neutrónico*, y lo representamos por N. Si hacemos a un lado la diferencia en sus cargas eléctricas ($q = +e$ en el protón, $q = 0$ en el neutrón), el protón y el neutrón son partículas muy parecidas: tienen masas casi iguales y experimentan fuerzas nucleares idénticas en el interior de los núcleos. Por esta razón, clasificamos tanto al protón como al neutrón como *nucleones*. El número total de nucleones ($Z + N$) se llama *número másico* y lo representamos por A.

Al especificar Z y A (y por tanto N) identificamos en forma única una especie nuclear en particular o *núclidos*. Usamos A, el número total de nucleones, como un superíndice de identificación al denotar a los núclidos. Por ejemplo, en el ^{81}Br, hay 81 nucleones. El símbolo "Br" nos dice que se trata del bromo, en el cual $Z = 35$. Los 46 nucleones restantes son neutrones, de modo que, en este núclido, $Z = 35$, $N = 46$ y $A = 81$. Dos núclidos con el mismo Z pero N y A diferentes, como el ^{81}Br y el ^{82}Br, se llaman *isótopos*.

La figura 4 muestra una gráfica de los núclidos conocidos en forma de gráfica de Z contra N. El sombreado oscuro representa los núclidos estables; el sombreado claro representa los núclidos radiactivos conocidos, o *radionúclidos*. La tabla 1 muestra algunas propiedades de unos cuantos núclidos seleccionados.

Obsérvese que en la figura 4 existe una zona de estabilidad razonablemente bien definida. A ambos lados de la zona de estabilidad se encuentran los radionúclidos inestables.

La fuerza nuclear

La fuerza que controla la estructura electrónica y las propiedades del átomo es la conocida fuerza de Coulomb.

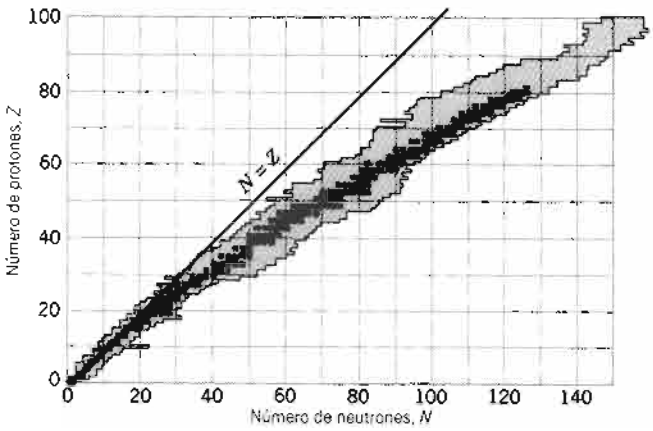


Figura 4 Gráfica de los núclidos conocidos. El sombreado oscuro representa los núclidos estables y el sombreado claro muestra los núclidos radiactivos. Nótese que los núclidos estables ligeros tienen esencialmente igual número de protones y de neutrones, mientras que $N > Z$ en los núcleos pesados.

Sin embargo, para aglutinar los núcleos entre sí debe existir una fuerza de atracción intensa de una clase totalmente nueva que actúe entre los neutrones y los protones. Esta fuerza debe ser lo suficientemente intensa como para vencer la fuerza Coulomb de repulsión entre los protones (cargados positivamente) y para unir tanto a los neutrones como a los protones dentro de un diminuto volumen nuclear. Los experimentos indican que esta *fuerza fuerte*, como se la llama sencillamente, tiene el mismo carácter entre cualquier par de constituyentes nucleares, ya fueran neutrones o protones.

La "fuerza fuerte" tiene un alcance corto, aproximadamente igual a 10^{-15} m. Esto significa que la fuerza de atracción entre pares de nucleones cae rápidamente a cero para separaciones nucleónicas mayores que un cierto valor crítico. Esto significa a su vez que, excepto en los núcleos más pequeños, un nucleón determinado no puede interactuar con fuerza intensa con los demás nucleones del núcleo, sino sólo con unos cuantos de sus vecinos más cercanos. En contraste, la fuerza de Coulomb no es una fuerza de corto alcance. Un determinado protón que se encuentre dentro de un núcleo ejerce una repulsión de Coulomb sobre los demás protones, sin importar cuán grande sea su separación; véase el problema 12.

La figura 4 muestra que los núclidos estables más ligeros tienden a estar en o cerca de la línea $Z = N$. Los núclidos estables más pesados están muy por debajo de esta línea y, por consiguiente, tienen típicamente muchos más neutrones que protones. La tendencia a un exceso de neutrones en números másicos grandes es un efecto de repulsión de Coulomb. Ya que un determinado nucleón interactúa con sólo un número pequeño de sus vecinos mediante la fuerza fuerte, la cantidad de energía vinculada en los enlaces con fuerza fuerte entre nucleones aumenta precisamente en proporción a A. La energía vinculada en los enlaces con fuerzas de Coulomb entre los protones aumenta más rápidamente que esto porque cada protón interactúa con los demás protones del núcleo. Así, la energía de Coulomb se vuelve cada vez más importante para los números másicos mayores.

Consideremos un núcleo con 238 nucleones. Si quisiéramos encontrarlo sobre la línea $Z = N$, tendría $Z = N = 119$. Sin embargo, este núcleo, si pudiese ser constituido, se dispararía al momento a causa de la repulsión de Coulomb. Se encuentra una estabilidad relativa únicamente si sustituimos a 27 de los protones por neutrones, diluyendo así en gran medida el efecto de repulsión de Coulomb. Entonces tendríamos el núclido ^{238}U, que tiene $Z = 92$ y $N = 146$, un exceso de 54 neutrones.

Aun en el ^{238}U, los efectos de Coulomb son evidentes en cuanto a que (1) este núclido es radiactivo y emite partículas α, y (2) puede desintegrarse (fisión) fácilmente en dos fragmentos. Ambos procesos disminuyen la energía de Coulomb más de lo que lo hace la energía en los enlaces de fuerza intensa.

Radios nucleares

Hemos empleado el radio de Bohr a_0 ($= 5.29 \times 10^{-11}$ m) como una unidad conveniente para medir las dimensiones de los átomos. Los núcleos son más pequeños por un factor de unos 10^4, y una unidad conveniente para medir distancias en esta escala es el *femtómetro* ($= 10^{-15}$ m). Esta unidad se llama a menudo el *fermi* y comparte la misma abreviatura. Así,

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ femtómetro} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}.$$

Podemos aprender acerca del tamaño y la estructura de los núcleos mediante experimentos de dispersión, como lo muestra bastante bien la figura 1, usando un haz incidente de electrones altamente energéticos. La energía de los electrones incidentes debe ser lo suficientemente elevada (> 200 MeV) como para que su longitud de onda de de Broglie sea lo bastante pequeña como para que actúen como sondas nucleares sensibles a la estructura. En efecto, estos experimentos miden el patrón de difracción de las partículas dispersadas, deduciendo, así, la forma del objeto dispersor (el núcleo).

A partir de una variedad de experimentos de dispersión, se ha deducido que la densidad nuclear es de la forma que se muestra en la figura 5. Vemos que el núcleo no tiene una superficie bien definida. Sin embargo, tiene un radio medio R característico. La densidad $\rho(r)$ tiene un valor constante en el interior del núcleo y cae a cero en una zona superficial difusa. De estos experimentos se ha hallado que R aumenta con A aproximadamente como

$$R = R_0 A^{1/3}, \qquad (1)$$

TABLA 1 ALGUNAS PROPIEDADES DE NUCLIDOS SELECTOS

Núclido	*Z*	*N*	*A*	*Estabilidad*[a]	*Masa atómica* (u)	*Radio* (fm)	*Energía de amarre por nucleón* (MeV)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Momento magnético* (μ_N)
^{7}Li	3	4	7	92.5%	7.016003	2.30	5.61	$\frac{3}{2}$	+3.26
^{14}N	7	7	14	99.6%	14.003074	2.89	7.48	1	+0.403
^{31}P	15	16	31	100%	30.973762	3.77	8.48	$\frac{1}{2}$	+1.13
^{88}Rb	37	51	88	18 m	87.911326	5.34	8.68	2	+0.508
^{120}Sn	50	70	120	32.4%	119.902199	5.92	8.50	0	0
^{157}Gd	64	93	157	15.7%	156.923956	6.47	8.20	$\frac{3}{2}$	-0.340
^{197}Au	79	118	197	100%	196.966543	6.98	7.92	$\frac{3}{2}$	+0.146
^{239}Pu	94	145	239	24,100 y	239.052158	7.45	7.56	$\frac{1}{2}$	+0.203

[a] En los núclidos estables se da la abundancia isotópica; en los radionúclidos, la vida media.

donde A es el número másico y R_0 es una constante con un valor de unos 1.2 fm. Por ejemplo, para el ^{63}Cu,

$$R = (1.2 \text{ fm})(63)^{1/3} = 4.3 \text{ fm}.$$

A modo de comparación, el radio medio de un ion de cobre en una red de cobre sólido es de 1.8 radios de Bohr, alrededor de 2×10^4 veces más grande.

Las masas nucleares y las energías de amarre

Las masas atómicas pueden medirse con gran precisión usando los modernos espectrómetros de masas y las técnicas de reacción nuclear. Recordamos que tales masas se miden en *unidades unificadas de masa atómica* (abreviatura u), elegidas de modo que la masa atómica (*no* la masa nuclear) del ^{12}C es exactamente de 12 u. La relación entre esta unidad y el patrón de masa en el SI es

$$1 \text{ u} = 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Nótese que el número másico (símbolo A) que identifica un núclido se llama así porque este número es igual a la masa atómica del núclido, redondeada al entero más próximo. Así pues, el número másico del núclido ^{137}Cs es 137; este núclido contiene 55 protones y 82 neutrones, un total de 137 partículas; su masa atómica es de 136.907073 u, que se redondea numéricamente a 137.

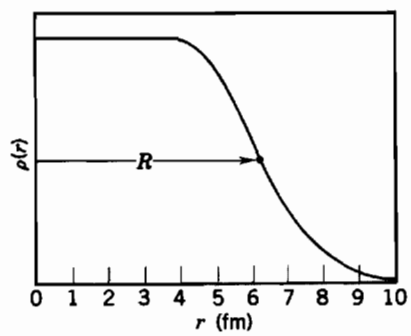


Figura 5 La variación de la densidad de un núcleo de ^{197}Au con la distancia radial.

En física nuclear, al contrario de lo que sucede con la física atómica, los cambios de energía por suceso son por lo general tan grandes que la bien conocida relación masa-energía de Einstein $E = \Delta m c^2$ es una herramienta de trabajo cotidiano indispensable. A menudo necesitaremos usar el equivalente de la energía de 1 unidad de masa atómica, y la hallamos de

$$E = \Delta m\, c^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.9979 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{1.6022 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}}$$
$$= 931.5 \text{ MeV}.$$

Esto significa que podemos escribir c^2 como 931.5 MeV/u y así hallar fácilmente el equivalente (en MeV) de la energía de cualquier masa o diferencia de masa (en u), o a la inversa.

Como ejemplo, consideremos el deuterón, el núcleo del átomo de hidrógeno pesado. Un deuterón consta de un protón y un neutrón unidos entre sí por medio de la fuerza fuerte. La energía E_B que debe añadirse al deuterón para separarlo en sus dos nucleones constituyentes se llama su *energía de amarre o de unión*. En efecto, la energía de amarre (o energía de enlace) es la energía interna total del núcleo, debida en parte a la fuerza fuerte entre los nucleones, la fuerza de Coulomb entre los nucleones y las energías cinéticas de los nucleones en relación al centro de masa de todo el núcleo. De la conservación de la energía podemos escribir, para este proceso de separación,

$$m_d c^2 + E_B = m_n c^2 + m_p c^2. \qquad (2)$$

Si sumamos $m_e c^2$, el equivalente de la energía de una masa del electrón, a cada lado de esta ecuación, tenemos

$$(m_d + m_e)c^2 + E_B = m_n c^2 + (m_p + m_e)c^2,$$

o sea

$$m(^2\text{H})c^2 + E_B = m_n c^2 + m(^1\text{H})c^2. \qquad (3)$$

Aquí $m(^2\text{H})$ y $m(^1\text{H})$ son las masas del átomo neutro de hidrógeno *pesado* y el átomo neutro del hidrógeno *ordinario*, respectivamente. Son masas atómicas, no masas nucleares. Al resolver la ecuación 3 para E_B se obtiene

$$E_B = [m_n + m(^1\text{H}) - m(^2\text{H})]c^2 = \Delta m c^2, \qquad (4)$$

donde Δm es la diferencia de masas. Al realizar cálculos de esta clase siempre usamos masas atómicas, más bien que nucleares, ya que así es como se tabulan normalmente. En cuanto a este ejemplo, las masas del electrón se cancelan convenientemente.*

En el cálculo del deuterón las masas necesarias son

$$m_n = 1.008665 \text{ u}, \qquad m(^1\text{H}) = 1.007825 \text{ u},$$
$$m(^2\text{H}) = 2.014102 \text{ u}.$$

Al sustituir en la ecuación 4 y al reemplazar c^2 por su equivalente, 931.5 MeV/u, hallamos que la energía de amarre es

$$\begin{aligned} E_B &= (1.008665 \text{ u} + 1.007825 \text{ u} \\ &\quad - 2.014102 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) \\ &= (0.002388 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 2.224 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Compárese esto con la energía de amarre del átomo de hidrógeno en su estado base, que es de 13.6 eV, unos cinco órdenes de magnitud menor.

Si dividimos la energía de amarre de un núcleo entre su número másico, obtenemos la energía de amarre promedio por nucleón, propiedad que hemos incluido en la tabla 1. La figura 6 muestra una gráfica de esta cantidad como función del número másico. El hecho de que esta *curva de la energía de amarre* "disminuya" para números másicos tanto altos como bajos tiene consecuencias prácticas de la mayor importancia.†

La inclinación de la curva de la energía de amarre para números másicos mayores nos dice que los nucleones se unen más fuertemente cuando están reunidos dentro de dos núcleos de masa media más bien que en un solo núcleo de masa elevada. En otras palabras, puede liberarse energía en la *fisión nuclear* de un solo núcleo masivo en dos fragmentos más pequeños.

Por el contrario, la disminución progresiva de la curva de la energía de amarre para números másicos bajos nos dice que se liberará energía si dos núcleos de número másico pequeño se combinan para formar un solo núcleo de masa media. Este proceso, el inverso de la fisión, se llama *fusión nuclear*. Ocurre dentro del Sol y de otras estrellas y es el mecanismo por el cual el Sol genera la energía que nos irradia.

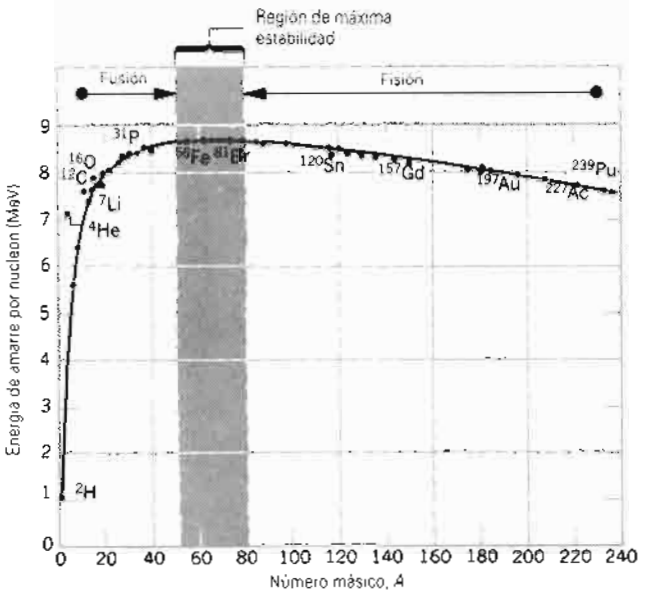


Figura 6 La energía de amarre por nucleón dentro del intervalo de números másicos. Se identifican algunos de los núclidos de la tabla 1, junto con otros más. La región de mayor estabilidad corresponde a los números másicos entre 50 y 80.

El espín nuclear y el magnetismo

Los núcleos, al igual que los átomos, tienen un ímpetu angular intrínseco cuya componente máxima a lo largo de cualquier eje z elegido está dada por $J\hbar$. Aquí J es un número cuántico, que puede ser un entero o un semientero, llamado *espín nuclear*; en la tabla 1 se muestran algunos valores para núclidos seleccionados.

Al igual que en los átomos, un ímpetu angular nuclear tiene un momento magnético nuclear asociado con él. Recordemos que, en el magnetismo atómico, el *magnetón de Bohr* μ_B, definido como

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{4\pi m_e} = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T},$$

Es una unidad de conveniencia. La unidad correspondiente en física nuclear es el *magnetón nuclear* μ_N, que se define en forma parecida al magnetón de Bohr excepto que la masa del electrón m_e se reemplaza por la masa del protón m_p. Esto es,

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{4\pi m_p} = 3.15 \times 10^{-8} \text{ eV/T}.$$

* Véase, sin embargo, el problema 51, a modo de excepción.

† *The Curve of Binding Energy* es incluso el título adoptado para un libro (por John McPhee) acerca de las posibilidades de un terrorismo nuclear.

Puesto que el momento magnético del electrón libre es (muy aproximadamente) un magnetón de Bohr, podría suponerse que el momento magnético del protón libre sería (muy aproximadamente) un magnetón nuclear. Sin embargo, no está tan cerca, siendo el valor medido de $+2.7929\ \mu_N$. Para entender los momentos magnéticos del protón y del neutrón es necesario considerar su estructura interna. Los momentos magnéticos de los núcleos más pesados pueden analizarse a su vez en términos de los momentos magnéticos de los protones y neutrones constituyentes.

Problema muestra 2 ¿Cuál es la densidad aproximada de la *materia nuclear* de la que están hechos todos los núcleos?

Solución Sabemos que esta densidad es grande, porque virtualmente toda la masa del átomo reside en su diminuto núcleo. El volumen del núcleo, aproximado como una esfera uniforme de radio R, está dado por la ecuación 1 como

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi(R_0^3 A).$$

La densidad ρ_n de la materia nuclear, expresada en nucleones por unidad de volumen, es entonces

$$\rho_n = \frac{A}{V} = \frac{A}{(4\pi/3)R_0^3 A}$$
$$= \frac{1}{(4\pi/3)(1.2\text{ fm})^3} = 0.14\text{ nucleones/fm}^3.$$

La masa de un nucleón es 1.7×10^{-27} kg. La densidad ρ_m de la materia nuclear es entonces

$$\rho_m = (0.14\text{ nucleones/fm}^3)(1.7 \times 10^{-27}\text{ kg/nucleón}) \times (1\text{ fm}/10^{-15}\text{ m})^3$$
$$= 2.4 \times 10^{17}\text{ kg/m}^3,$$

o sea ¡2.4×10^{14} veces la densidad del agua! Al contrario de los electrones orbitales, los núclidos tienen una densidad casi independiente del número de sus nucleones. Hasta cierto punto los nucleones están empaquetados como lo están las canicas en una bolsa.

Problema muestra 3 Imagine que un núcleo típico de masa media como el ^{120}Sn se separa en sus protones y neutrones constituyentes. Halle (*a*) la energía total necesaria y (*b*) la energía por nucleón. La masa atómica del ^{120}Sn es 119.902199 u; véase la tabla 1.

Solución (*a*) El ^{120}Sn contiene 50 protones y 120 - 50 = 70 neutrones. La masa atómica combinada de estas partículas libres es

$$M = Zm_p + Nm_n = 50 \times 1.007825\text{ u} + 70 \times 1.008665\text{ u}$$
$$= 120.997800\text{ u}.$$

Esto excede a la masa atómica del ^{120}Sn en

$$\Delta m = 120.997800\text{ u} - 119.902199\text{ u} = 1.095601\text{ u}.$$

Al convertir esto en energía en reposo se obtiene la energía total de amarre,

$$E_B = \Delta mc^2 = (1.0956\text{ u})(931.5\text{ MeV/u}) = 1020.6\text{ MeV}.$$

(*b*) La energía de amarre E por nucleón es

$$E = \frac{E_B}{A} = \frac{1020.6\text{ MeV}}{120} = 8.50\text{ MeV/nucleón}.$$

Esto concuerda con el valor que puede leerse en la curva de la figura 6.

54-3 DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

Como lo muestra la figura 4, la mayoría de los núclidos que se han identificado son radiactivos. Esto es, emiten espontáneamente una partícula, transformándose a sí mismos en el proceso en un núclido diferente. En este capítulo veremos las dos situaciones más comunes, la emisión de una partícula (desintegración alfa) y la emisión de un electrón (desintegración beta).

No importa cuál sea la naturaleza de la desintegración, su principal característica es que es estadística. Por ejemplo, considérese una muestra de 1 mg de uranio metálico. Contiene 2.5×10^{18} átomos de emisor alfa de muy larga vida ^{238}U. Los núcleos de estos átomos han existido sin desintegrarse desde que fueron creados (antes de la formación de nuestro sistema solar) en la explosión de una supernova.

Durante cualquier segundo dado se desintegrarán unos 12 de los núcleos de nuestra muestra, emitiendo una partícula α en el proceso. Sin embargo, no hay absolutamente ninguna manera de predecir si cualquier núcleo dado de la muestra estará entre aquellos que lo hacen. Cada núcleo individual de ^{238}U tiene exactamente la misma probabilidad que otro de desintegrarse durante cualquier periodo observado de 1 s, a saber, $12/(2.5 \times 10^{18})$, o una probabilidad en 2×10^{17}.

En general, si una muestra contiene N núcleos radiactivos, podemos expresar el carácter estadístico del proceso de desintegración diciendo que la relación entre la velocidad de desintegración R ($= -dN/dt$) y el número de núcleos en la muestra es igual a una constante, o sea

$$\frac{-dN/dt}{N} = \lambda, \tag{5}$$

donde λ, la *constante de desintegración*, tiene un valor característico diferente para cada núclido radiactivo. Podemos reescribir la ecuación 5 como

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt,$$

la cual se integra sin dificultad

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{6}$$

Aquí N_0 es el número de núcleos radiactivos en la muestra para $t = 0$. Observemos que la disminución de N con el tiempo sigue una ley exponencial simple.

Con frecuencia estamos más interesados en la *actividad* o velocidad de desintegración R ($= -dN/dt$) de la muestra de lo que lo estamos en N. Al derivar la ecuación 6 se obtiene

$$R = R_0 e^{-\lambda t}, \tag{7}$$

en la cual R_0 ($= \lambda N_0$) es la velocidad de desintegración a $t = 0$. Adviértase, asimismo, que $R = \lambda N$ para cualquier tiempo t. Hemos supuesto inicialmente que la razón R a N es constante, de modo que no nos sorprendamos de que ambas decrezcan con el tiempo conforme a la misma ley exponencial.

Una cantidad de interés es el tiempo $t_{1/2}$, llamado *vida media*, después del cual tanto N como R se reducen a la mitad de sus valores iniciales. Al poner $R = \frac{1}{2}R_0$ en la ecuación 7 se obtiene

$$\tfrac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-\lambda t_{1/2}},$$

lo cual sin dificultad nos lleva a

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \tag{8}$$

relación entre la vida media y la constante de desintegración.

Los dos problemas muestra siguientes muestran cómo λ puede medirse para un proceso con vidas medias relativamente cortas y también con vidas medias relativamente largas.

Problema muestra 4 En desintegraciones de vida corta es posible medir directamente la disminución en la velocidad de desintegración R con el tiempo. La siguiente tabla ofrece algunos datos de una muestra de ^{128}I, un radionúclido usado a menudo en medicina como un trazador para medir la velocidad de asimilación del yodo de la glándula tiroides. De estos datos, determine (*a*) la constante λ de desintegración y (*b*) la vida media $t_{1/2}$.

Tiempo (min)	R (cuentas/s)	*Tiempo* (min)	R (cuentas/s)
4	392.2	132	10.9
36	161.4	164	4.56
68	65.5	196	1.86
100	26.8	218	1.00

Solución (*a*) Si tomamos los logaritmos naturales en cada lado de la ecuación 7, hallamos que

$$\ln R = \ln R_0 - \lambda t. \tag{9}$$

Así, si graficamos el logaritmo natural de R contra t, debemos obtener una línea recta cuya pendiente es $-\lambda$. La figura 7 muestra tal gráfica. Al igualar la pendiente de la línea con $-\lambda$ se obtiene

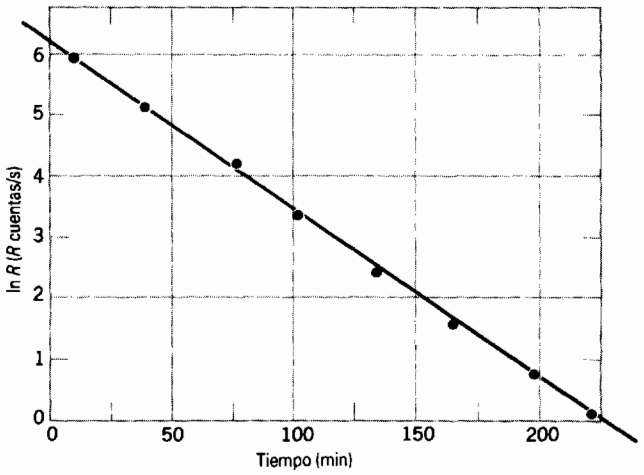


Figura 7 Problema muestra 4. La gráfica logarítmica de los datos de la desintegración se ajusta a una línea recta, mostrando la naturaleza exponencial de la desintegración. La constante de desintegración λ puede hallarse de la pendiente de la línea.

$$-\lambda = -\frac{(6.06 - 0)}{(220 \text{ min} - 0)},$$

o sea

$$\lambda = 0.0275 \text{ min}^{-1}.$$

(*b*) La ecuación 8 da, para $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{0.0275 \text{ min}^{-1}} = 25.2 \text{ min}.$$

Problema muestra 5 Una muestra de 1.00 g de KCl puro de un almacén de química se determina como radiactiva y se desintegra con una velocidad absoluta R de 1600 cuentas/s. La desintegración proviene del elemento potasio y en particular del isótopo ^{40}K, el cual constituye el 1.18% del potasio normal. ¿Cuál es la vida media de esta desintegración?

Solución En el caso de las desintegraciones de larga vida no es posible esperar el tiempo necesario para observar una disminución mensurable en la velocidad de desintegración R con el tiempo. Debemos hallar λ midiendo tanto a N como $-dN/dt$ en la ecuación 5. La masa molar del KCl es de 74.9 g/mol, de modo que el número de átomos de potasio en la muestra es

$$N_K = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(1.00 \text{ g})}{74.9 \text{ g/mol}} = 8.04 \times 10^{21}.$$

El número de átomos de ^{40}K es 1.18% de N_K, o sea

$$N_{40} = (0.0118)(8.04 \times 10^{21}) = 9.49 \times 10^{19}.$$

De la ecuación 5 tenemos

$$\lambda = \frac{-dN/dt}{N} = \frac{R}{N_{40}} = \frac{1600 \text{ s}^{-1}}{9.49 \times 10^{19}} = 1.69 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1},$$

y la vida media, de la ecuación 8, es

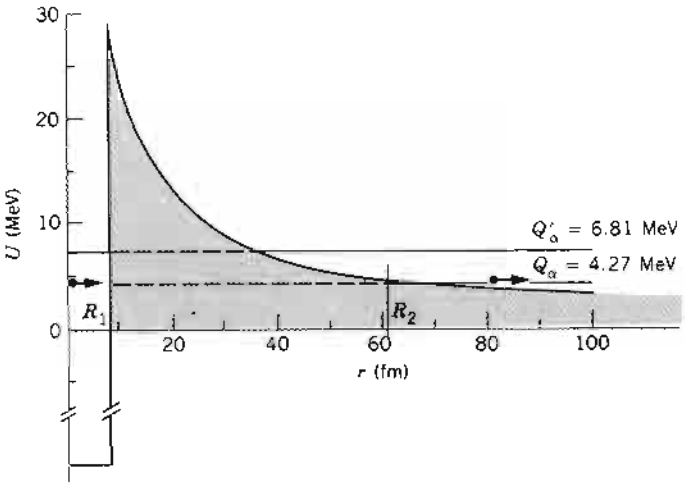


Figura 8 Función de la energía potencial que representa la emisión de partículas α por el ^{238}U. El área sombreada representa la barrera de potencial que inhibe el proceso de desintegración. Las líneas horizontales representan las energías de desintegración del ^{238}U (4.27 MeV) y del ^{228}U (6.81 MeV).

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \left(\frac{0.693}{1.69 \times 10^{-17}\ \text{s}^{-1}}\right)\left(\frac{1\ \text{año}}{3.16 \times 10^{7}\ \text{s}}\right)$$
$$= 1.30 \times 10^{9}\ \text{años}.$$

Esto es del orden de magnitud de la edad del Universo. ¡Por supuesto no podemos medir la vida media de este núclido y quedarnos esperando a que su velocidad de desintegración disminuya! (Algo interesante es que el potasio en nuestro organismo tiene su parte normal del isótopo ^{40}K. Todos somos ligeramente radiactivos.)

54-4 DESINTEGRACIÓN ALFA

El radionúclido ^{238}U, un emisor alfa típico, se desintegra espontáneamente de acuerdo con el esquema

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + {}^{4}\text{He}, \qquad (10)$$

con una vida media de 4.47×10^9 años. En el problema muestra 6 demostramos que, en cada una de las desintegraciones, se emite una energía de 4.27 MeV, apareciendo como la energía cinética compartida entre la partícula α (^{4}He) y el núcleo residual en retroceso (^{234}Th).

Ahora nos preguntamos: "Si se libera energía en cada evento de desintegración, ¿por qué no se desintegraron los núcleos de ^{238}U poco después de su creación?". Se piensa que el proceso de creación ocurrió durante las violentas explosiones de estrellas ancestrales (las supernovas) que precedieron a la formación de nuestro sistema solar. ¿Por qué esperaron tanto tiempo estos núcleos para liberarse de su energía excedente por medio de la emisión de una partícula α? Para contestar esta pregunta, debemos estudiar el mecanismo detallado de la desintegración alfa.

Elegimos un modelo donde nos imaginamos que la partícula existe preformada dentro del núcleo antes de escapar. La figura 8 muestra la función $U(r)$ aproximada de la energía potencial de la partícula α y el núcleo ^{234}Th residual como función de su separación. Es una combinación de un pozo de potencial asociado con la fuerza fuerte nuclear (de atracción) que actúa en el interior nuclear ($r < R_1$) y un potencial de Coulomb asociado con la fuerza electrostática (de repulsión) que actúa entre las dos partículas después de haber ocurrido su decaimiento ($r > R_1$).

La línea horizontal marcada $Q_\alpha = 4.27$ MeV muestra la energía de desintegración del proceso, que se calcula en el problema muestra 6. Nótese que esta línea interseca la curva de energía potencial en dos puntos, R_1 y R_2. ¡Ahora vemos por qué no se emite inmediatamente una partícula α del núcleo de ^{238}U! Ese núcleo está rodeado de una barrera de potencial impresionante, que se muestra por medio del área sombreada en la figura 8. Imaginemos esta barrera como una esfera hueca cuyo radio interior sea R_1 y cuyo radio exterior sea R_2, estando prohibido su volumen a la partícula α según las leyes de la física clásica. Si la partícula α se encuentra a sí misma en esa región, su energía potencial U excedería su energía total E, lo cual significaría, clásicamente, que su energía cinética K ($= E - U$) sería negativa, una situación que es imposible.

En realidad, ahora replanteamos nuestra pregunta de la siguiente manera: "¿Cómo puede el núcleo de ^{238}U *emitir* una partícula alfa?". La partícula α parece atrapada permanentemente dentro del núcleo por la barrera.

La respuesta es que, como aprendimos en la sección 50-8, en la mecánica ondulatoria existe siempre una probabilidad (descrita por la Ec. 19 del capítulo 50) de que una partícula pueda efectuar una tunelización a través de una barrera que sea clásicamente insuperable. De hecho, la explicación de la desintegración alfa por medio de la tunelización de la barrera en la mecánica ondulatoria fue una de las mas tempranas aplicaciones de la nueva física cuántica.

En la desintegración de vida larga del ^{238}U la barrera no es realmente muy "permeable". Podemos demostrar que la partícula α, que se presume está en movimiento de un lado al otro dentro del núcleo, debe estar presente en la

superficie interior de la barrera unas 10^{38} veces antes de que tenga éxito la tunelación. ¡Esto es alrededor de 10^{20} veces por segundo en unos 10^9 años! Por supuesto, nosotros estamos esperando afuera, tomando nota únicamente de aquellas partículas α que *se las arreglan* para escapar.

Podemos verificar esta explicación de la tunelización por la barrera de la desintegración alfa si observamos otros emisores alfa, para los cuales la barrera sería diferente. Como contraste extremo, consideremos la desintegración alfa de otro núclido del uranio, el ^{228}U, que tiene una energía de desintegración Q'_α de 6.81 MeV, como se muestra en la figura 8. En este caso, la barrera es más delgada (compárense las longitudes de las líneas de trazos en la Fig. 8) y más baja (compárense las alturas de la barrera por arriba de las líneas de trazos); si nuestras nociones de la tunelización por la barrera son correctas, esperaríamos que se presentara una desintegración alfa más rápidamente en el ^{228}U que en el ^{238}U. Así es, en efecto. Como lo muestra la tabla 2, ¡la vida media del ^{228}U es tan sólo de 550 s! Recordemos de la sección 50-8 que el coeficiente de transmisión por una barrera —a causa de la naturaleza exponencial de la ecuación 19 del capítulo 50— es muy sensible a pequeños cambios en las dimensiones de la barrera. Vemos que un aumento en Q_α por un factor de 1.6 únicamente produce una disminución en la vida media (esto es, en la efectividad de la tunelización por la barrera) por un factor de 3×10^{14}.

Problema muestra 6 (*a*) Halle la energía liberada durante la desintegración alfa del ^{238}U. (*b*) Demuestre que este núclido no puede emitir espontáneamente un protón. Las masas atómicas necesarias son

^{238}U 238.050785 u ^{4}He 4.002603 u

^{234}Th 234.043593 u ^{1}H 1.007825 u

^{237}Pa 237.051143 u.

Solución (*a*) En el proceso de desintegración alfa de la ecuación 10 la masa atómica total de los productos de la desintegración (= 238.046196 u) es menor que la masa atómica del ^{238}U por Δm = 0.004589 u, cuya energía equivalente es

$$Q_\alpha = \Delta m\, c^2 = (0.004589 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 4.27 \text{ MeV}.$$

Esta *energía de desintegración* está disponible para compartirse como energía cinética entre la partícula α y el átomo de ^{234}Th que retrocede.

(*b*) Si el ^{238}U fuera a emitir un protón, el proceso de desintegración sería

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{237}\text{Pa} + {}^{1}\text{H}.$$

En este caso la masa de los productos de desintegración *excede* a la masa del ^{238}U por Δm = 0.008183 u, siendo −7.622 MeV la energía equivalente Q_p. El signo menos significa que debemos de *agregar* energía para separar el ^{238}U en ^{237}Pa más un protón. Así, el ^{238}U es estable contra la emisión espontánea de protones.

TABLA 2 LA DESINTEGRACION ALFA DEL ^{238}U Y DEL ^{228}U

Núclido	Q_α	*Vida media*
^{238}U	4.27 MeV	4.5×10^9 años
^{228}U	6.81 MeV	550 s

54-5 DESINTEGRACIÓN BETA

Se dice que un núcleo que decae espontáneamente emitiendo un electrón (ya sea positivo o negativo) sufre una *desintegración beta*.* He aquí dos ejemplos:

$$^{32}\text{P} \rightarrow {}^{32}\text{S} + e^- + \bar{\nu} \qquad (t_{1/2} = 14.3 \text{ días}) \quad (11)$$

y

$$^{64}\text{Cu} \rightarrow {}^{64}\text{Ni} + e^+ + \nu \qquad (t_{1/2} = 12.7 \text{ horas}). \quad (12)$$

Los símbolos ν y $\bar{\nu}$ representan el *neutrino* y a su antipartícula, el *antineutrino*, las partículas neutras que son emitidas durante el proceso de desintegración del núcleo junto con el electrón o el positrón (electrón positivo). Los neutrinos interactúan sólo muy débilmente con la materia y —por tal razón— son tan extremadamente difíciles de detectar que, durante muchos años, su presencia pasó inadvertida. En el capítulo 56 consideraremos la naturaleza fundamental y la importancia de estas esquivas partículas.

Debe parecer sorprendente que los núcleos puedan emitir electrones (y neutrinos) en vista del hecho de que hemos dicho que los núcleos están formados por neutrones y protones únicamente. Sin embargo, dijimos antes que los átomos emiten fotones, y ciertamente no decimos que los átomos "contienen" fotones, sino que los fotones se crean durante el proceso de emisión.

Lo mismo pasa con los electrones y los neutrinos emitidos por el núcleo durante la desintegración beta. Ambos se crean durante el proceso de emisión, transformándose un neutrón por sí mismo en un protón dentro del núcleo (o inversamente) de acuerdo con

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad \text{(desintegración } \beta^-\text{)} \quad (13)$$

o

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu \quad \text{(desintegración } \beta^+\text{)} \quad (14)$$

Éstos son los procesos básicos en la desintegración beta.

En cualquier proceso de desintegración, la cantidad de energía que se libera está determinada en forma única por la diferencia en la energía en reposo entre el núcleo inicial

* La desintegración beta incluye también la captura de un electrón, donde un núcleo se desintegra absorbiendo a uno de sus electrones orbitales. Aquí no consideramos este proceso.

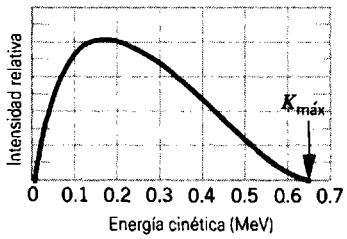


Figura 9 La distribución de la energía cinética de los positrones que se emiten en la desintegración beta del ^{64}Cu. La energía cinética máxima es de 0.653 MeV.

y el núcleo final más los productos de la desintegración (véase, por ejemplo, el problema muestra 6). En un proceso de desintegración alfa particular, como el del ^{238}U, cada partícula alfa emitida lleva la misma energía cinética. Sin embargo, en la desintegración beta la energía cinética de los electrones emitidos no se determina en forma única. En cambio, los electrones emitidos tienen un espectro de energías continuo, desde cero hasta un máximo $K_{máx}$, como lo ilustra la figura 9 para la desintegración beta del ^{64}Cu (Ec. 12).

Durante muchos años, antes de que el neutrino se identificara, las curvas como la de la figura 9 eran un problema retador. Sugerían que en el proceso de desintegración se "perdía" algo de energía y condujo a muchos físicos de renombre, incluyendo a Niels Bohr, a especular que quizá la ley de la conservación de la energía pudiera ser válida sólo estadísticamente en tales desintegraciones.

La respuesta a este problema se basa en la emisión del neutrino o el antineutrino, lo cual lleva parte de la energía de desintegración. Si fuésemos a medir las energías de ambas partículas (electrón y antineutrino o positrón y neutrino) en un proceso en particular de desintegración y las sumásemos, llegaríamos siempre al mismo valor fijo, igual a la energía de desintegración. La energía se conserva realmente en cada uno de los procesos de desintegración.

Pauli propuso en 1931 la existencia de una partícula no detectada como solución al problema de la energía perdida, y el neutrino vino a formar parte de una teoría formal de la desintegración beta gracias a Fermi en 1934. Sin embargo, transcurrieron otros 20 años antes de que los neutrinos se detectaran en el laboratorio. La dificultad de su medición proviene de sus interacciones excesivamente débiles con la materia —su camino (o trayectoria) libre medio a través de la materia sólida es del orden de varios miles de años luz. En la actualidad la física del neutrino es un subcampo importante de la física nuclear y de las partículas, y quienes se dedican a su estudio no sólo estudian los neutrinos que parten de fuentes radiactivas sino también los emitidos en grandes cantidades por el Sol y los que se crearon durante la formación del Universo

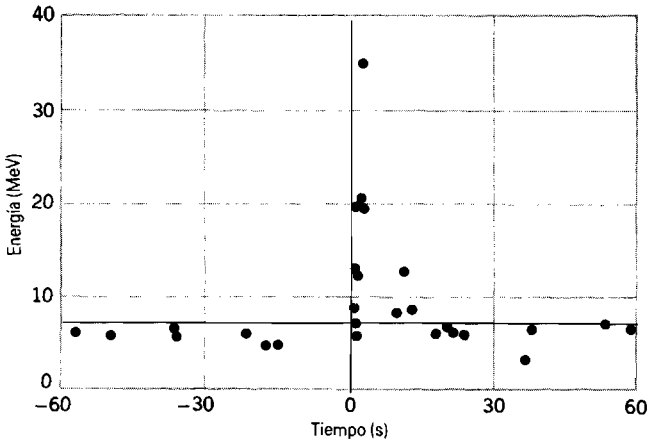


Figura 10 La evidencia de una ráfaga de neutrinos de la supernova SN 1987A.

(que tienen una densidad presente de unos 100 por cm^3). La figura 10 muestra la evidencia de una ráfaga de neutrinos detectados en la Tierra como resultado de la supernova de 1987 en la vecina Gran Nube Magallánica (véase la Fig. 17 del capítulo 8). Puesto que el detector se localizaba en Japón y que la supernova ocurrió en los cielos del Sur, los neutrinos tuvieron que recorrer toda la Tierra para llegar al detector.

Nuestro estudio de la desintegración alfa y beta nos permite ver el diagrama de núclidos de la figura 4 de un modo nuevo. Construyamos una superficie tridimensional trazando la masa de cada núclido en una dirección en ángulo recto con el plano *NZ* de esa figura. La superficie así formada ofrece una representación gráfica de la estabilidad nuclear. Como lo muestra la figura 11 (para los núclidos ligeros), describe un "valle de los núclidos", corriendo la zona de estabilidad de la figura 4 a lo largo de su parte inferior. Los núclidos en la pared frontal del valle (una región no mostrada en la Fig. 11) decaen en ella en su mayor parte por cadenas de desintegración alfa y de fisión espontánea. Los núclidos en el lado rico en protones del valle decaen en ella emitiendo electrones positivos, y aquéllos en el lado rico en neutrones lo hacen emitiendo electrones negativos.

Problema muestra 7 Calcule la energía de desintegración Q en la desintegración beta del ^{32}P, como se describe por la ecuación 11. Las masas atómicas necesarias son 31.973907 u para el ^{32}P y 31.972071 u para el ^{32}S.

Solución A causa de la presencia del electrón emitido, debemos ser especialmente cuidadosos en distingur entre las masas nuclear y atómica. Hagamos que m' represente las masas nucleares del ^{32}P y del ^{32}S, y que m represente sus masas atómicas. Consideremos que la energía de desintegración Q sea $\Delta m\ c^2$, donde

$$\Delta m = m'(^{32}\mathrm{P}) - [m'(^{32}\mathrm{S}) + m_e],$$

siendo m_e la masa del electrón y suponiendo que el neutrino carece de masa. Si sumamos y restamos $15m_e$ en el lado de la derecha, tenemos

$$\Delta m = [m'(^{32}\mathrm{P}) + 15m_e] - [m'(^{32}\mathrm{S}) + 16m_e].$$

Las cantidades entre corchetes son las masas atómicas. Así, tenemos

$$\Delta m = m(^{32}\mathrm{P}) - m(^{32}\mathrm{S}).$$

Si restamos las masas atómicas de esta manera, la masa del electrón emitido se toma en cuenta automáticamente.*

La energía de desintegración en el decaimiento del ^{32}P es, entonces

$$Q = \Delta m\, c^2 = (31.973907\ \mathrm{u} - 31.972071\ \mathrm{u})(931.5\ \mathrm{MeV/u})$$
$$= 1.71\ \mathrm{MeV}.$$

Esto es justo igual al valor medido de $K_{máx}$, la energía máxima de los electrones emitidos. Así, aunque se liberan 1.71 MeV cada vez que un núcleo de ^{32}P se desintegra, en cada caso, esencialmente, el electrón lleva menos energía que esto. El neutrino obtiene el resto, llevándosela fuera del laboratorio sin detectar. (También va al núcleo del ^{32}S una cuota despreciable, del orden de eV, a fin de que se conserve el ímpetu en la desintegración.)

54-6 MEDICIÓN DE LA RADIACIÓN IONIZANTE†

Cuando las radiaciones como los rayos X, los rayos gamma, las partículas beta o las partículas alfa encuentran un átomo, pueden causar que el átomo expulse electrones y resulte ionizado. Puesto que la ionización puede dañar a las células de tejido vivo, los efectos de las radiaciones ionizantes han sido un asunto de interés público general. Tales radiaciones surgen en la naturaleza a partir de los rayos cósmicos y también de los elementos radiactivos de la corteza de la Tierra. Las radiaciones producidas artificialmente también contribuyen, incluyendo los rayos X que se emplean en el diagnóstico y en la terapéutica, así como las radiaciones de los radionúclidos usados en medicina y en la industria. El desecho de materiales radiactivos y la evaluación de las probabilidades de accidentes nucleares continúan siendo tratados (en Estados Unidos) al nivel de política nacional.

Nuestra tarea aquí no es explorar las diversas fuentes de radiaciones ionizantes, sino simplemente describir las unidades en las cuales las propiedades y efectos de estas radiaciones se expresan. Existen cuatro de tales unidades, y a menudo se usan vaga o incorrectamente en la divulgación popular.

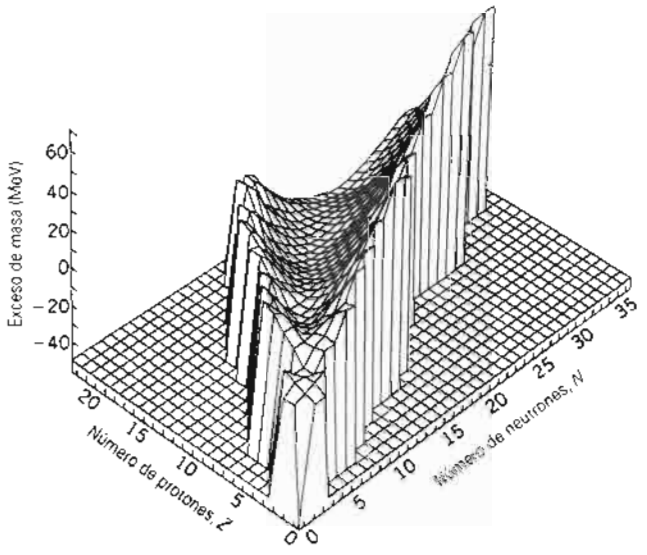


Figura 11 Una porción del valle de los núclidos, mostrando únicamente los núclidos más livianos. La cantidad trazada sobre el eje vertical es el exceso de masa, definido como $(m - A)c^2$, donde m es la masa atómica en u.

1. *El curie (abreviado Ci).* Ésta es una medida de la *actividad* o velocidad de desintegración de una fuente radiactiva. Originalmente se la definía como la actividad de 1 g de radio en equilibrio con sus subproductos, pero ahora se define simplemente así:

1 curie = 3.7×10^{10} desintegraciones por segundo.

Esta definición no dice nada acerca de la naturaleza de las desintegraciones. Nótese también que esta unidad no es adecuada para describir los efectos ionizantes de los rayos X de, digamos, un equipo médico de rayos X. Las radiaciones deben emitirse de un radionúclido.

Un ejemplo del uso apropiado del curie es la frase: "Un miligramo de ^{239}Pu tiene una actividad de 62 μCi". No interviene el hecho de que el ^{239}Pu sea un emisor alfa.

2. *El roentgen (abreviatura R).* Ésta es una medida de la *exposición*, es decir, de la capacidad de que un haz de rayos X o de rayos gamma produzca iones en una sustancia en particular. Específicamente, un roentgen se define como la exposición que produciría 1.6×10^{12} pares de iones por gramo de aire, estando el aire seco y a temperatura y presión normales. Podríamos decir, por ejemplo, que: "En 0.1 s, este haz de rayos X de un equipo dental proporciona una exposición de 30 mR". Esto no dice nada acerca de si realmente se producen iones o si hay un paciente en la silla o no.

* Éste no es el caso en la desintegración del positrón o en la captura del electrón; véanse los problemas 51 y 52. Nótese también que en este problema muestra despreciamos la (pequeña) diferencia en las energías de amarre de los electrones atómicos antes y después de la desintegración beta.

† Véase "Radiation Exposure in Our Daily Lives", por Stewart C. Bushong, *The Physics Teacher*, marzo de 1977, pág. 135.

3. *El rad.* El rad es una medida de la dosis realmente entregada a un objeto específico en términos de la energía que se le transfiere. *Rad* es un acrónimo de "radiation absorbed dose". Un objeto, que puede ser una persona (todo el cuerpo) o una parte específica del cuerpo humano (las manos, digamos) ha recibido una dosis absorbida de 1 rad cuando le han sido entregados 10^{-2} J/g por radiaciones ionizantes. Una frase representativa para mostrar su empleo es: "Una dosis a todo el organismo de 300 rad de rayos gamma causa la muerte en el 50% de la población expuesta a ella". Para tranquilidad del lector, hacemos notar que el promedio actual de exposición a la radiación que procede tanto de fuentes naturales como artificiales es de unos 0.2 rad (= 200 mrad) por año.

4. *El rem.* Éste es un acrónimo de *roentgen equivalent in man*, es decir, roentgen equivalente en el hombre y es una medida de la *dosis equivalente*. Toma en cuenta el hecho de que, si bien diferentes tipos de radiación (los rayos gamma y los neutrones, digamos) pueden entregar al cuerpo la misma energía por unidad de masa, no tienen el mismo efecto biológico. La dosis equivalente (en rems) se halla al multiplicar la dosis absorbida (en rads) por un *factor de calidad* FC (QF: *quality factor*, en inglés), que puede hallarse tabulado en diversas fuentes de referencia. En los rayos X y en los electrones, FC = 1. En los neutrones lentos, FC = 5, y así sucesivamente. Los dispositivos de monitoreo de personal, como los gafetes, se diseñan para registrar la dosis equivalente en rems.

Un ejemplo del uso correcto del rem es: "La recomendación del National Council on Radiation Protection (Consejo nacional para la protección de la radiación) es que ningún individuo que esté expuesto (en forma ajena a su ocupación habitual) a radiaciones debería recibir una dosis equivalente mayor de 500 mrem (= 0.5 rem) dentro de un año calendario". Esto incluye las radiaciones de todas clases, usando los factores de calidad apropiados.

Problema muestra 8 Una dosis de 300 rad es letal para el 50% de la población que la reciba. Si la cantidad equivalente de energía se aborbiera directamente en forma de calor, ¿qué aumento de temperatura resultaría? Supóngase que c, la capacidad calorífica específica del cuerpo humano, es la misma que la del agua, es decir, 4180 J/kg · K.

Solución Una dosis absorbida de 300 rad corresponde a una energía absorbida por unidad de masa de

$$(300 \text{ rad})\left(\frac{10^{-2} \text{ J/kg}}{1 \text{ rad}}\right) = 3 \text{ J/kg}.$$

El aumento de temperatura que resultaría de tal flujo de calor se halla de

$$\Delta T = \frac{Q/m}{c} = \frac{3 \text{ J/kg}}{4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} = 7.2 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

Vemos por este pequeño aumento de temperatura que el daño producido por la radiación ionizante tiene poco que hacer con el calentamiento térmico. Los efectos dañinos surgen a causa de que la radiación ionizante produce el rompimiento de los enlaces moleculares interfiriendo así con el funcionamiento normal del tejido donde se absorbió.

54-7 RADIACTIVIDAD NATURAL

Todos los elementos más allá del hidrógeno y del helio se formaron a partir de las reacciones nucleares en los interiores de las estrellas o en las supernovas que explotaron. En estos procesos se crean los núclidos tanto radiactivos como estables. El sistema solar se compone de núclidos que se formaron hace unos 4.5×10^9 años. (Más adelante en esta sección se verá cómo se determina esto.) La mayoría de los núclidos radiactivos que se formaron en ese tiempo tienen vidas medias que son mucho más breves que un millar de millones de años y, por lo tanto, han estado desde entonces desintegrándose a núclidos estables mediante emisiones alfa o beta. Sin embargo, unos cuantos de los núclidos radiactivos originales tienen vidas medias que no son breves si se les compara con la edad del sistema solar. Todavía puede observarse la desintegración de estos núclidos, y tales desintegraciones son el fondo de la radiactividad natural en nuestro medio circundante.

Parte de estas especies radiactivas son una fracción de las cadenas de desintegración que comienzan con los núclidos pesados, como el ^{232}Th ($t_{1/2} = 1.4 \times 10^{10}$ años) o el ^{238}U ($t_{1/2} = 4.5 \times 10^9$ años). Estos núclidos se desintegran siguiendo una secuencia de desintegraciones alfa y beta, llegando finalmente a los productos estables finales (^{208}Pb y ^{206}Pb, respectivamente). Los núcleos intermedios, en estas cadenas de desintegración tienen vidas medias mucho más cortas; la velocidad con que desaparece el núclido original y es reemplazado por el producto estable final se determina mediante el miembro con vida más larga de la cadena. Estos procesos de desintegración han estado sucediendo presumiblemente desde que se formó el sistema solar, y así (como lo estudiaremos más adelante) las cantidades relativas del núclido inicial y los productos estables de la desintegración presentes en un material pueden dar una medida de la edad del material. Se piensa también que estas desintegraciones contribuyen al calentamiento interno de los planetas.

Normalmente, los productos de estas desintegraciones permanecen en su lugar dentro de las rocas o de los materiales que contienen núclidos padre. Sin embargo, una de las sustancias intermedias producidas en estas cadenas de desintegración, el radón, es un gas. Las desintegraciones naturales que ocurren cerca de la superficie de la Tierra (y en materiales de construcción como el concreto) liberan gas radón radiactivo a la atmósfera. Los

TABLA 3 ALGUNOS ISÓTOPOS RADIACTIVOS NATURALES

Isótopos	$t_{1/2}$ (años)
^{40}K	1.28×10^{9}
^{87}Rb	4.8×10^{10}
^{113}Cd	9×10^{15}
^{115}In	4.4×10^{14}
^{138}La	1.3×10^{11}
^{176}Lu	3.6×10^{10}
^{187}Re	5×10^{10}

peligros de respirar este gas radón son en la actualidad tema de una investigación activa. El gas radón puede liberarse también de la fractura de las rocas debajo de la superficie; por lo tanto, la detección del gas radón se ha empleado como una manera de predecir los terremotos.

Además de los elementos pesados, en las sustancias naturales están presentes otros núclidos radiactivos con vidas medias largas. Algunos de éstos se muestran en la tabla 3.

Por medio de procesos naturales continuamente se producen otros núclidos radiactivos, por lo general en la atmósfera de la Tierra, por reacciones de las moléculas del aire con los rayos cósmicos (protones de alta energía que proceden del espacio). Entre ellos es notable el ^{14}C ($t_{1/2}$ = 5730 años), que tiene aplicaciones importantes en el fechado o datación radiactiva de los materiales orgánicos.

Fechado o datación radiactiva

Supongamos que tenemos un radionúclido inicial I que se desintegra a un producto final F con una vida media conocida $t_{1/2}$. En un tiempo $t = 0$ particular, comenzamos con N_0 núcleos iniciales y ninguno de los núcleos del producto final. Después de un tiempo t, hallamos que N_I de los núcleos originales permanecen, mientras que han aparecido N_F ($= N_0 - N_I$) de los núcleos producto. Los núcleos iniciales decaen de acuerdo con

$$N_I = N_0 e^{-\lambda t},$$

y entonces

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_I} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N_I}$$

o, al sustituir N_0 por $N_I + N_F$,

$$t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{N_F}{N_I}\right). \qquad (15)$$

Esto es, una medición de la razón presente del producto a los núcleos originales puede determinar la edad de la muestra.

Este cálculo se basó en la hipótesis de que ninguno de los núcleos producto estaban presentes en $t = 0$. Esta hipótesis puede no ser válida siempre, pero existen técnicas de fechado o datación radiactiva con lo que puede corregirse por la presencia de estos núcleos producto originales.

Este método puede usarse para determinar el tiempo transcurrido desde la formación del sistema solar; los ejemplos incluyen las razones del ^{238}U al ^{206}Pb, del ^{87}Rb al ^{87}Sr, y del ^{40}K al ^{40}Ar. Las rocas terrestres y lunares, y los meteoritos analizados con estos métodos parecen tener todos ellos edades comunes de unos 4.5×10^9 años, que es lo que consideramos ser la edad del sistema solar.

El isótopo radiactivo ^{14}C está presente en la atmósfera; alrededor de 1 átomo de carbono en 10^{12} es ^{14}C radiactivo. Cada gramo de carbono tiene una actividad de unas 12 desintegraciones por minuto debido al ^{14}C. Los organismos vivos pueden absorber esta actividad por aspiración del CO_2 o al ingerir plantas que lo hayan hecho. Cuando el organismo muere, cesa de absorber ^{14}C, y el ^{14}C presente a su muerte comienza a desintegrarse. Midiendo la velocidad de desintegración del ^{14}C podemos determinar la edad de la muestra. Por ejemplo, si examinamos una muestra y exhibe 6 desintegraciones por minuto y gramo de carbono, sabemos que la actividad inicial se ha reducido a la mitad, y la muestra debe tener una edad de una vida media (5730 años).

Este método de *fechado o datación por radiocarbono* (el cual fue desarrollado por Willard Libby en 1947, quien fue galardonado con el premio Nobel de química en 1960 por esta labor) es útil para muestras de materia orgánica que tengan una edad de menos de unas 10 vidas medias. En 10 vidas medias la actividad de una muestra cae por un factor de 2^{-10}, o alrededor de 10^{-3}, y la velocidad de desintegración resulta demasiado pequeña para que pueda determinarse con precisión. El límite práctico superior de la edad de las muestras que pueden fecharse por este método es de unos 50,000 años. En años recientes se ha desarrollado una nueva técnica en la cual se usa un acelerador como espectrómetro de masas para determinar la razón $^{14}C/^{12}C$ con gran precisión. De este modo se ha extendido la utilidad del fechado o datación por el método del radiocarbono a muestras de una antigüedad de 100,000 años.

Problema muestra 9 En una muestra de roca, se encuentra que la razón de los núcleos del ^{206}Pb al ^{238}U es de 0.65. ¿Cuál es la edad de la roca?

Solución De la ecuación 15, usando 4.5×10^9 años como la vida media del ^{238}U, tenemos

$$t = \frac{4.5 \times 10^9 \text{ años}}{0.693} \ln (1 + 0.65) = 3.3 \times 10^9 \text{ años}.$$

Esta roca es un tanto más joven que la edad máxima de 4.5×10^9 años que determinamos para las rocas el sistema solar. Esto puede indicar que la roca se solidificó hace 3.3×10^9 años. El ^{206}Pb que se formó antes de ese tiempo "hirvió" de la roca fundida. El ^{206}Pb pudo comenzar a acumularse sólo después de que la roca se solidificó.

54-8 REACCIONES NUCLEARES

Podemos representar una reacción nuclear por

$$X + a \rightarrow Y + b \tag{16}$$

o, en una notación mas compacta,

$$X(a,b)Y. \tag{17}$$

Por lo general, la partícula a es el *núcleo proyectil* y la partícula X es el *núcleo blanco*, que a menudo está en reposo en el laboratorio. Si el proyectil es una partícula cargada, puede llevarse a su energía deseada en un acelerador Van de Graaff (véase la Sec. 30-11) o en un ciclotrón (véase la Sec. 34-3). El proyectil puede ser también un neutrón procedente de un reactor nuclear. Se acostumbra designar a la partícula producto Y como el *núcleo residual*, más pesado, y a b como el *núcleo emergente*, más ligero.

La energía Q de la reacción se define como:

$$Q = (m_X + m_a)c^2 - (m_Y + m_b)c^2. \tag{18}$$

Si se aplica el principio de la conservación de la energía, podemos escribir la ecuación 18 como:

$$Q = (K_Y + K_b) - (K_X + K_a), \tag{19}$$

donde K representa la energía cinética.

Las ecuaciones 18 y 19 son válidas sólo cuando Y y b están en sus estados bases. Como lo veremos más adelante en esta sección, si cualquier núclido se produce en un estado excitado, la energía de la reacción se reduce por la energía de excitación.

Una reacción representativa

$$^{19}F(p,\alpha)^{16}O,$$

para la cual $Q = 8.13$ MeV. Las ecuaciones 18 y 19 nos dicen que, en esta reacción, el sistema pierde energía en reposo y gana energía cinética, en la cantidad de 8.13 MeV por suceso. Las reacciones, al igual que ésta, para las cuales $Q > 0$ se llaman *exotérmicas*. Las reacciones para las cuales $Q < 0$ se llaman *endotérmicas*; tales reacciones no "proceden" a no ser que sea transportada hacia el sistema una cierta energía cinética mínima (la *energía de umbral*) por el proyectil.

Si a y b son partículas idénticas, lo cual requiere que X y Y sean también idénticas, describimos la reacción como *dispersión*. Si la energía del sistema es la misma tanto antes como después del suceso (lo que significa que $Q = 0$ y que todos los núclidos permanecen en sus estados base), tenemos una *dispersión elástica*. Si estas energías son diferentes ($Q \neq 0$), tenemos una *dispersión inelástica*, en cuyo caso Y o b pueden quedar en un estado excitado.

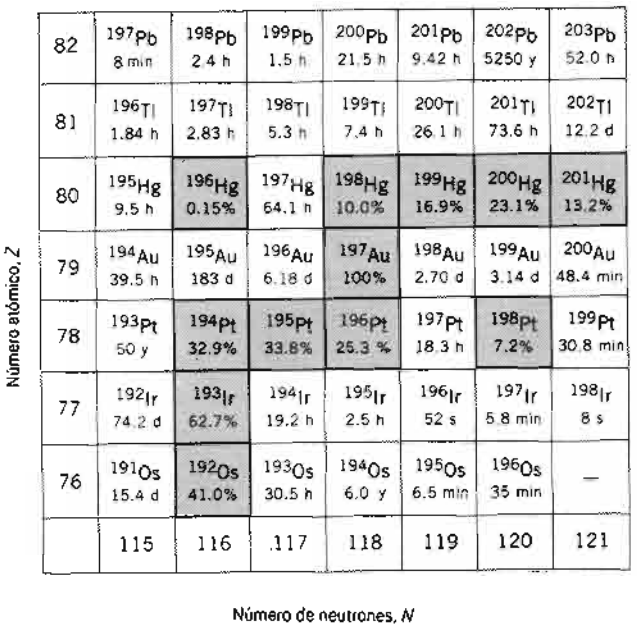


Figura 12 Parte amplificada del diagrama de los núclidos (Fig. 4).

Podemos seguir fácilmente la pista de las reacciones nucleares al graficarlas en un diagrama de núclidos como el de la figura 4. La figura 12 muestra una parte amplificada de uno de estos diagramas, centrada arbitrariamente en el núclido del ^{197}Au. Los núclidos estables están sombreados, y se muestran sus abundancias isotópicas. Los cuadros sin sombrear representan los radionúclidos, mostrándose sus vidas medias.

La figura 13 muestra una pantalla transparente que podemos colocar sobre un diagrama de núclidos como el de la figura 12. Si el cuadro central sombreado de la figura 13 se sobrepone a un blanco particular del diagrama de la figura 12, se identifican los núclidos residuales resultantes de las diversas reacciones impresas en la pantalla.

Así, si elegimos el ^{197}Au como un blanco, una reacción (p,α) producirá ^{194}Pt (estable), y ya sea una reacción (n,γ) o una reacción (d,p) producirá el radionúclido ^{198}Au, cuya vida media es de 2.70 días.

Los núcleos, al igual que los átomos, tienen estados estacionarios de energía definida, y pueden emplearse estudios de reacción para identificarlos. Consideremos, por ejemplo, la reacción

$$^{27}Al(d,p)^{28}Al, \qquad Q = 5.49 \text{ MeV},$$

donde una lámina delgada blanco de aluminio se bombardea con deuterones de 2.10 MeV. En el laboratorio, los

			α,n	α,γ
	p,n	p,γ d,n	d,γ α,d	α,p
	γ,n p,d		n,γ d,p	
p,α	γ,d d,α	n,d γ,p	n,p	
γ,α	n,α			

Figura 13 Colocando este cuadro como pantalla sobrepuesta en la figura 12, con el cuadro central sombreado sobre un núclido blanco en particular, se muestran los núclidos residuales que resultan de las reacciones indicadas.

protones emergentes se ven salir con un número de energías discretas bien definidas y son acompañados de rayos gamma. La figura 14 muestra la distribución de energía de los protones emergentes.

En cada suceso de reacción sabemos que se dispone de una energía igual a la energía cinética del deuterón incidente (= 2.10 MeV) más la energía de la reacción Q (= 5.49 MeV) para ser compartida entre los dos productos de la reacción, esto es, entre el núcleo residual ^{28}Al y el protón emergente p. ¿Cómo se comparte esta energía total (2.10 MeV + 5.49 MeV = 7.59 MeV) entre estas dos partículas?

Todo depende de si el núcleo residual de ^{28}Al se produce en su estado base o en uno de sus estados estacionarios excitados. En el primer caso, el protón emergente tendrá la máxima energía posible, que corresponde al pico en el extremo derecho del espectro de protones en la figura 14. Sin embargo, si el núcleo residual se forma en un estado excitado, dicho núcleo retendrá más energía de la disponible y habrá menos energía sobrante para el protón emergente. El núcleo residual no permanecerá en su estado excitado por mucho tiempo sino que se liberará de su energía excedente, como por emisión de un rayo gamma.

Cada pico de protón en el espectro de la figura 14 corresponde a un estado estacionario del núcleo residual ^{28}Al. La figura 15 muestra los niveles de energía que pueden deducirse al analizar este espectro. Se puede ver la correspondencia entre los picos de la figura 14 y los niveles de energía de la figura 15. Hemos visto que nuestra comprensión del modo en que se juntan los átomos se basa en las energías medidas de los estados del átomo de hidrógeno como su cimiento firme. De la misma manera, podemos aprender cómo se juntan los núcleos al estudiar las energías y otras propiedades de sus estados estacionarios.

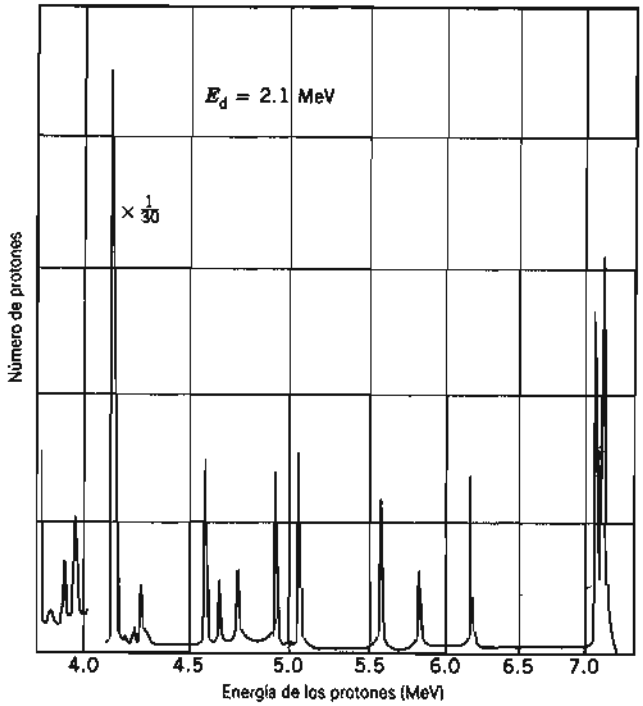


Figura 14 La distribución de energía de los protones que resultan de la reacción ^{27}Al(d,p)^{28}Al. El deuterón incidente tiene una energía de 2.10 MeV. Los protones se detectan cuando emergen del blanco en ángulo recto con el haz incidente.

Problema muestra 10 En la reacción

$$^1\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + {}^2\text{H},$$

los protones (^{1}H) con 5.70 MeV de energía cinética inciden sobre el ^{3}H en reposo. (*a*) ¿Cuál es el valor Q para esta reacción? (*b*) Determine las energías cinéticas de los deuterones emitidos a lo largo de la dirección de este protón incidente.

Solución (*a*) De la ecuación 18 tenemos

$$\begin{aligned} Q &= [m(^1\text{H}) + m(^3\text{H}) - m(^2\text{H}) - m(^2\text{H})]c^2 \\ &= (1.007825\ \text{u} + 3.016049\ \text{u} - 2.014102\ \text{u} \\ &\quad - 2.014102\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= -4.03\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Esta reacción es endotérmica; los productos finales tienen la mayor masa y por consiguiente la menor energía cinética según la ecuación 19.

(*b*) Al usar la ecuación 19, con $K = 0$ para el ^{3}H inicial, tenemos

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= Q + K_p = -4.03\ \text{MeV} + 5.70\ \text{MeV} \\ &= 1.67\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{20}$$

Aquí los subíndices 1 y 2 se refieren a los dos núcleos producto ^{2}H. La conservación del ímpetu a lo largo de la dirección de los protones incidentes da

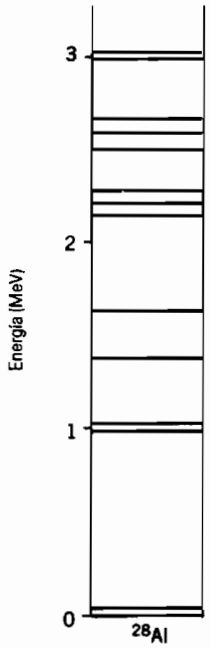


Figura 15 Los niveles de energía del ^{28}Al, deducidos de datos como los de la figura 14.

$$p_1 + p_2 = p_p = \sqrt{2m(^1\text{H})K_p} = \sqrt{2(938\ \text{MeV}/c^2)(5.70\ \text{MeV})}$$
$$= 103.4\ \text{MeV}/c. \qquad (21)$$

Las ecuaciones 20 y 21 pueden resolverse como dos ecuaciones con dos incógnitas (ya sean p_1 y p_2 o K_1 y K_2). Los resultados son

$$K_1 = 0.24\ \text{MeV} \quad \text{y} \quad K_2 = 1.43\ \text{MeV}.$$

Nótese que para resolver este problema hemos empleado la dinámica no relativista. ¿Es ésta una buena aproximación?

54-9 MODELOS NUCLEARES (*Opcional*)

Ahora conocemos bien la estructura de los átomos. La fuerza de Coulomb es ejercida por el centro masivo (el núcleo) sobre los electrones, y podemos usar (dedicando el tiempo suficiente para el uso de la computadora) los métodos de la mecánica cuántica para calcular las propiedades del átomo.

Las cosas no se entienden tan bien en el caso de los núcleos. La ley de la fuerza es complicada y no puede ponerse por escrito explícitamente con todo detalle. Tampoco existe un centro natural de fuerza que simplifique los cálculos. Para entender la estructura nuclear, nos enfrentamos a un problema de muchos cuerpos de gran complejidad.

En ausencia de una teoría global de la estructura nuclear, tratamos de construir en cambio *modelos nucleares*. Los físicos emplean modelos como maneras simplificadas de ver un sistema complejo para obtener una percepción interna física de sus propiedades. La utilidad de un modelo se prueba mediante su capacidad de hacer predicciones que puedan verificarse experimentalmente en el laboratorio.

Han probado ser útiles dos modelos del núcleo. Uno de ellos describe situaciones en las que podemos considerar que todos los protones y neutrones se comportan cooperativamente, mientras que el otro modelo desprecia todo menos al protón o al neutrón en la determinación de las propiedades del núcleo. Estos dos modelos representan aspectos de la estructura nuclear muy opuestos, pero que pueden combinarse para crear un solo modelo unificado del núcleo.

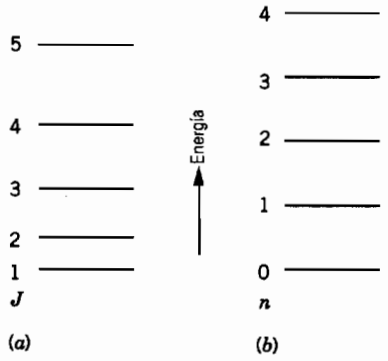


Figura 16 (*a*) Los estados excitados rotatorios, denotados por el número cuántico J del ímpetu angular. (*b*) Los estados vibratorios, denotados por el número cuántico vibratorio n.

El modelo colectivo

En el modelo colectivo hacemos caso omiso de los movimientos de los nucleones individuales y tratamos el núcleo como una sola entidad. Este modelo, originalmente llamado el "modelo de la gota de líquido", fue desarrollado por Niels Bohr para explicar la fisión nuclear. Imaginemos el núcleo como un cuerpo análogo a una gota de líquido, donde los nucleones interactúan entre sí como las moléculas en un líquido.

La forma de equilibrio de la gota de líquido se determina por las interacciones de sus moléculas, y de igual manera la forma de equilibrio de un núcleo se determina por las interacciones de sus nucleones. Muchos núcleos tienen formas de equilibrio esféricas, mientras que otros pueden ser elipsoidales.

Al igual que una gota de líquido, un núcleo puede absorber energía por todo el núcleo girando alrededor de un eje o vibrando con respecto a su forma de equilibrio. Es posible, con experimentos de desintegración radiactiva o de reacciones nucleares, estudiar los espectros de estos estados excitados. La figura 16 muestra ejemplos de las dos clases de situaciones. La energía rotatoria $\frac{1}{2}I\omega^2$ puede escribirse en términos del ímpetu angular L ($= I\omega$) como $L^2/2I$. Al escribir el ímpetu angular cuantizado de acuerdo con la ecuación 23 del capítulo 51 como $L = \sqrt{J(J+1)}\hbar$, donde J es el número cuántico del ímpetu angular rotatorio de todo el núcleo, obtenemos

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1). \qquad (22)$$

Nótese que el espaciamiento entre los estados crece conforme aumenta el ímpetu angular.

Los estados vibratorios tienen energías dadas por

$$E_n = n\hbar\omega = nh\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (23)$$

donde ν es la frecuencia de vibración. Ésta es la misma expresión que Planck empleó para describir las vibraciones cuantizadas de los osciladores atómicos en la teoría de la radiación de la cavidad (véase la Ec. 7 y la Fig. 6 del capítulo 49). Nótese que en la figura 16*b* los estados vibratorios están espaciados uniformemente, como lo da la ecuación 23.

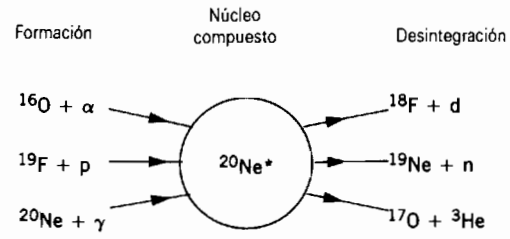


Figura 17 Unas cuantas de las muchas formaciones posibles y modos de desintegración del núcleo compuesto de $^{20}Ne^*$.

En las reacciones nucleares puede encontrarse también evidencia de la estructura colectiva. En cierta clase de reacciones $X + a \rightarrow Y + b$, se forma un estado intermedio cuando X y a coalescen en una entidad única C^*, llamada *núcleo compuesto*, que luego se descompone en $Y + b$. La energía portada por el proyectil a hacia el blanco X es compartida rápidamente más o menos por igual en el movimiento aleatorio de los nucleones del núcleo compuesto. (En el contexto del modelo de la gota de líquido, pensemos en dos gotas que se juntan para formar una gota más grande cuyas moléculas tengan una energía cinética media mayor, correspondiente a una temperatura más elevada de la gota combinada.)

El núcleo compuesto puede existir durante un tiempo tan largo como 10^{-16} s, tiempo muy largo para los estándares de las reacciones nucleares, que pueden durar típicamente tan sólo 10^{-22} s. Con el tiempo, un nucleón o un grupo de nucleones adquirirán, por fluctuaciones estadísticas, la energía suficiente para liberarse del núcleo compuesto. Observamos esta partícula saliente b y al núcleo residual Y.

Una característica central de esta hipótesis es que, una vez que la energía del proyectil se comparte entre los nucleones, el núcleo compuesto "olvida" cómo se formó y se desintegra puramente de acuerdo con consideraciones estadísticas. La figura 17 representa este proceso, donde un núcleo compuesto de $^{20}Ne^*$ se forma en cualquiera de tres modos y se desintegra en cualquiera de tres modos diferentes. Experimentalmente, observamos que la probabilidad relativa de los diferentes modos de desintegración tienen el mismo valor para cualquiera de las combinaciones de proyectiles y blancos. Esto confirma la interpretación del núcleo compuesto y proporciona otro ejemplo del comportamiento colectivo de los nucleones en el núcleo.

El modelo de la partícula independiente

En el modelo de la gota de líquido, los nucleones se mueven alrededor aleatoriamente y tropiezan entre sí frecuentemente. Sin embargo, el modelo de la partícula independiente considera que cada nucleón se mueve en una órbita bien definida dentro del núcleo y que ¡difícilmente choca! El núcleo —al contrario del átomo— no tiene un centro de carga fijo, y en este modelo suponemos que cada nucleón se mueve en un potencial que está determinado por los movimientos difundidos de todos los demás nucleones.

Un nucleón en un núcleo, al igual que un electrón en un átomo, tiene un conjunto de números cuánticos que definen su estado de movimiento. También los nucleones, de nuevo del mismo modo que los electrones, obedecen el principio de exclusión de Pauli. Esto es, dos nucleones no pueden ocupar el mismo estado al mismo tiempo. Los neutrones y los protones se tratan por separado al considerar los estados nucleónicos, teniendo cada uno su propio arreglo de estados cuantizados disponibles.

El hecho de que los nucleones obedezcan el principio de Pauli nos ayuda a entender la estabilidad relativa de los estados nucleónicos. Si dos nucleones dentro del núcleo van a chocar, la energía de cada uno de ellos después del choque debe corresponder a la energía de un estado estacionario desocupado. Si estos estados (e incluso sólo uno de ellos) están ocupados, la colisión simplemente no puede ocurrir. En el tiempo, cualquier nucleón dado encontrará posible la colisión, pero entre tanto habrá completado en su órbita las revoluciones suficientes para dar significado a la noción de un estado nucleónico estacionario con una energía cuantizada.

En el reino atómico, la esencia de la tabla periódica de los elementos es que ésta es periódica. Esto es, ciertas propiedades de los elementos se repiten a sí mismas de una manera regular conforme uno se mueve a lo largo de la tabla. Estas repeticiones se asocian con el hecho de que los electrones atómicos se ordenan a sí mismos en capas y subcapas que tienen una estabilidad especial cuando están completamente ocupadas. Podemos considerar los números atómicos de los gases inertes,

$$2, 10, 18, 36, 54, 86, \ldots,$$

como *números mágicos del electrón* que señalan que tales capas están llenas.

También los núcleos muestran efectos de capa, asociados con ciertos *números mágicos del nucleón*:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \ldots.$$

Sucede que cualquier núclido cuyo número de protones Z o número de neutrones N tenga uno de estos valores tiene una estabilidad especial que puede ser evidente de maneras diversas.

Son ejemplos de núclidos "mágicos" el ^{18}O ($Z = 8$), el ^{40}Ca ($Z = 20$, $N = 20$), el ^{92}Mo ($N = 50$) y el ^{208}Pb ($Z = 82$, $N = 126$). Se dice que tanto el ^{40}Ca como el ^{208}Pb son "doblemente mágicos" porque contienen capas llenas *tanto* de protones *como* de neutrones.

El número mágico 2 se muestra en la estabilidad excepcional de la partícula α (^4He), el cual, con $Z = N = 2$, es doblemente mágico. Por ejemplo, la energía de amarre por nucleón de este núclido está bastante por encima de la de sus vecinos en la curva de la energía de amarre de la figura 6. De hecho, la partícula α está unida tan fuertemente que es imposible agregarle otra partícula; no existe un núclido estable con $A = 5$.

Puede hallarse evidencia de la estructura *atómica* de la capa, por ejemplo, a partir de las mediciones de las energías de ionización o de los radios medios de los átomos. La figura 6 del capítulo 52 muestra la variación en la energía de ionización de los átomos en función del número de electrones. Si trazamos los radios atómicos en función del número de electrones, hallamos una disminución gradual conforme se llena una capa, y luego un salto súbito conforme comenzamos a llenar la capa siguiente, porque el radio depende principalmente del número cuántico principal n. Estos saltos súbitos del radio y de la energía de ionización ocurren cuando el número de electrones es igual a uno de los números mágicos del electrón.

En el caso de los núcleos, podemos obtener una evidencia similar para la estructura *nuclear* de capas. El problema muestra 12 ofrece un ejemplo del cambio de la "energía de ionización" (la energía necesaria para sacar a un solo protón o a un solo neutrón del núcleo) en capas cerradas. La figura 18 muestra la variación del radio nuclear en función del número de neutrones. Al igual que en el caso atómico, el radio disminuye gradualmente dentro de una capa y luego aumenta súbitamente cuando comenzamos a llenar la capa siguiente. Los cambios súbitos se

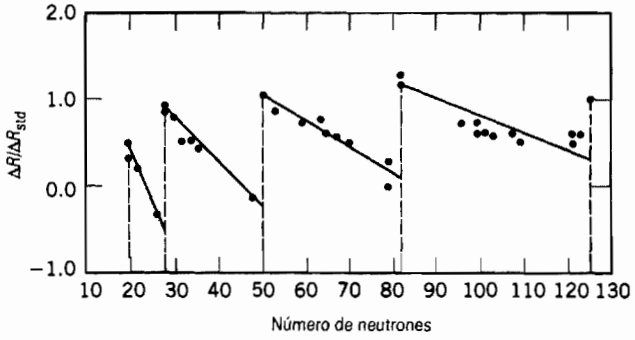


Figura 18 La variación del radio nuclear como función del número de neutrones. La variación se expresa en relación a la variación estándar esperada de la estructura "colectiva" de $R = R_0A^{1/3}$. Los saltos súbitos indican la estructura de capas.

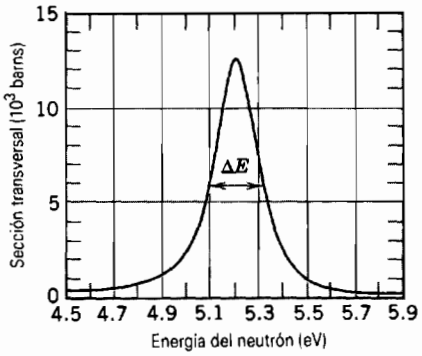


Figura 19 Problema muestra 11. La sección transversal de la reacción $^{109}Ag(n,\gamma)^{110}Ag$ en función de la energía del neutrón incidente. La anchura del pico a la mitad de su máximo es de unos 0.20 eV.

presentan cuando, ya sea, el número de protones o el número de neutrones es igual a uno de los números mágicos del nucleón. Se puede hallar una evidencia similar de la estructura de capas en otras propiedades nucleares, incluyendo las vidas medias de la desintegración alfa, los momentos dipolares magnéticos, las secciones transversales para captura de neutrones y de la dispersión de los electrones, y las energías de los estados excitados. ■

Problema muestra 11 Considérese la reacción de captura de neutrones

$$^{109}Ag + n \rightarrow {}^{110}Ag^* \rightarrow {}^{110}Ag + \gamma.$$

La figura 19 muestra su sección transversal en función de la energía del neutrón incidente. Analice esta figura en términos del concepto del núcleo compuesto y del principio de incertidumbre.

Solución La curva de la sección transversal de la figura 19 tiene picos muy pronunciados, que llegan a una sección transversal máxima de 12,500 barns.† Este "pico de resonancia" indica que estamos tratando con un nivel excitado único en el núcleo compuesto de $^{110}Ag^*$. Cuando la energía disponible se equipara precisamente con la energía de este nivel por arriba del estado base del ^{110}Ag, tenemos una "resonancia", y la reacción se desencadena realmente.

Sin embargo, el pico de resonancia no es infinitamente agudo. De la figura podemos medir que tiene una anchura aproximada a la mitad de su máximo (es decir, a 6250 barns) de 0.20 eV. Esto lo tomamos en cuenta diciendo que ^{110}Ag en su estado excitado no tiene una energía precisamente definida; es "difusa", con una incertidumbre de energía ΔE de 0.20 eV.

Podemos emplear el principio de incertidumbre, escrito en la forma

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h/2\pi \qquad (24)$$

para decirnos algo sobre cualquier estado de un sistema atómico o de un sistema nuclear. Hemos visto que ΔE es una medida de la incertidumbre de nuestro conocimiento de la energía del estado. La cantidad Δt se interpreta como el tiempo disponible para medir la energía del estado; de hecho, esto es la vida media del estado antes de que se desintegre.

En el estado excitado $^{110}Ag^*$ tenemos, de la ecuación 24,

$$\Delta t \sim \frac{h/2\pi}{\Delta E} = \frac{6.58 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}}{0.20\ \text{eV}} = 3.3 \times 10^{-15}\ \text{s}.$$

Éste es el orden de magnitud del tiempo de vida característico de un núcleo compuesto.

Problema muestra 12 El núclido ^{120}Sn ($Z = 50$) tiene una capa de protones llena, siendo 50 uno de los números mágicos del nucleón. El núclido ^{121}Sb ($Z = 51$) tiene un protón "extra" fuera de esta capa. De acuerdo con el concepto de capa, este protón extra sería más fácil de remover que un protón de la capa llena. Verifique lo anterior mediante el cálculo de la energía requerida en cada caso. Use los siguientes datos másicos:

Núclido	*Z*	*N*	*Masa atómica*(u)
^{121}Sb	50 + 1	70	120.903821
^{120}Sn	50	70	119.902199
^{119}In	50 - 1	70	118.905819

La masa atómica del protón es de 1.007825 u.

Solución El hecho de quitar el protón "extra" corresponde al proceso

$$^{121}Sb \rightarrow {}^{120}Sn + p.$$

La energía requerida E se deduce de

$$\begin{aligned} E &= [m(^{120}Sn) + m(^1H) - m(^{121}Sb)]c^2 \\ &= (119.902199\ \text{u} + 1.007825\ \text{u} - 120.903821\ \text{u}) \\ &\quad \times (931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 5.8\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

El hecho de sacar al protón de la capa llena corresponde a

† La *sección transversal* de una reacción es una medida de la probabilidad de que ocurra la reacción. Una unidad común para expresar la sección transversal en el *barn*, que equivale a $10^{-28}\ m^2$.

$$^{120}\text{Sn} \rightarrow {}^{119}\text{In} + \text{p}.$$

La energía requerida se deduce de

$$\begin{aligned} E &= [m(^{119}\text{In}) + m(^{1}\text{H}) - m(^{120}\text{Sn})]c^2 \\ &= (118.905819\ \text{u} + 1.007825\ \text{u} - 119.902199\ \text{u}) \\ &\quad \times (931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 10.7\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Esto es considerablemente mayor que la energía necesaria para remover un protón "extra" (= 5.8 MeV), tal y como lo predice el modelo de la capa. De manera muy parecida, la energía necesaria para sacar un *electrón* de una *capa electrónica* llena (= 22 eV en la capa de neón llena) es mucho mayor que la necesaria para remover a un electrón "extra" del exterior de tal capa llena (= 5 eV en el electrón "extra" de sodio).

PREGUNTAS

1. Cuando una lámina delgada se bombardea con partículas α, unas cuantas se retrodispersan hacia la fuente. Rutherford concluyó de esto que la carga positiva del átomo —y también la mayor parte de su masa— debe estar concentrada en un "núcleo" muy pequeño dentro del átomo. ¿Cuál fue su proceso de razonamiento?
2. ¿En qué difieren la llamada fuerza intensa y la fuerza electrostática o de Coulomb?
3. ¿Por qué la importancia *relativa* de la fuerza de Coulomb comparada con la fuerza intensa nuclear aumenta para números másicos grandes?
4. ¿Cree usted que en su organismo existen más neutrones que protones? ¿Más protones que electrones? Analícelo.
5. ¿Por qué los núcleos tienden a contener más neutrones que protones para números másicos altos?
6. ¿Por qué empleamos masas atómicas en lugar de masas nucleares para analizar la mayoría de los procesos nucleares de decaimiento y de reacción?
7. ¿Cómo puede llegarse a la igualdad $1\ \text{u} = 1.6605 \times 10^{-27}$ kg en el laboratorio?
8. Los átomos de un elemento dado pueden diferir en masa, poseer características físicas distintas, y aun así no variar químicamente. ¿Por qué es esto?
9. La desviación de las masas isotópicas de valores enteros se debe a muchos factores. Nombre algunos. ¿Cuál es el más importante?
10. ¿Cómo se determina la masa del neutrón?
11. Los núclidos más estables tienen un número másico A cercano a 60 (véase la Fig. 6). ¿Por qué no tienen *todos* los núclidos números másicos cercanos a 60?
12. Si despreciamos a los núclidos muy ligeros, la energía de amarre por nucleón en la figura 6 es aproximadamente constante entre 7 y 8 MeV/nucleón. ¿Espera que la energía electrónica de enlace media por electrón en los átomos sea también aproximadamente constante en toda la tabla periódica?
13. ¿Por qué es baja la energía de amarre por nucleón (Fig. 6) para números másicos bajos? ¿Para números másicos elevados?
14. En la curva de la energía de amarre de la figura 6, ¿qué es lo especial o notable acerca de los núclidos ^{2}H, ^{4}He, ^{62}Ni y ^{239}Pu?
15. El momento magnético del neutrón es $-1.9130\mu_N$. ¿Qué es un magnetón nuclear y en qué difiere de un magnetón de Bohr? ¿Qué significa el signo menos? ¿Cómo puede tener el neutrón, que no porta una carga neta, un momento magnético en primer lugar?
16. En una explosión estelar masiva, quizás hace 10^{10} años, se creó un núcleo particular de ^{238}U. Se desintegra súbitamente mediante emisión α mientras lo observamos. ¿Por qué decidió desintegrarse en ese momento en particular después de todos estos años?
17. ¿Puede usted justificar esta frase?: "Al medir las vidas medias por el método del problema muestra 4, no es necesario medir la velocidad de desintegración absoluta R; sería suficiente cualquier cantidad proporcional a ella. Sin embargo, en el método del problema muestra 5 *se necesita* una velocidad absoluta".
18. ¿Afecta la temperatura a la velocidad de desintegración de los núclidos radiactivos? De ser así, ¿cómo?
19. Está usted ensayando la longevidad de focos eléctricos. ¿Espera que su "desintegración" sea exponencial? ¿Cuál es la diferencia esencial entre la desintegración en un foco eléctrico y el de los radionúclidos?
20. Los relojes exhiben generalmente una regularidad completa de algunos procesos periódicos. Considerando que la desintegración radiactiva sea aleatoria por completo, ¿cómo puede, a pesar de todo, emplearse en la medición del tiempo?
21. ¿Puede ofrecer una justificación, al menos una parcial, del fenómeno de tunelización por una barrera en términos de ideas básicas acerca de la naturaleza ondulatoria de la materia?
22. Explique por qué, en la desintegración alfa, vidas medias cortas corresponden a energías de desintegración grandes, e inversamente.
23. Un núcleo radiactivo puede emitir un positrón, e^+. Esto corresponde a un protón en un núcleo convirtiéndose en un neutrón. Sin embargo, la masa de un neutrón es mayor que la de un protón. ¿Cómo puede ocurrir la emisión del positrón?
24. En la desintegración beta los electrones emitidos forman un espectro continuo, pero en la desintegración alfa forman un espectro discreto. ¿Qué dificultades ocasionó esto para explicar la desintegración beta, y cómo se superaron finalmente estas dificultades?

25. ¿En qué difieren los neutrinos de los fotones? Cada uno de ellos tiene una carga cero y (presumiblemente) una masa en reposo también nula y viajan a la velocidad de la luz.
26. La desintegración de los elementos radiactivos produce helio, el que finalmente pasa a la atmósfera de la Tierra. Sin embargo, la cantidad de helio realmente presente en la atmósfera es mucho menor que la cantidad liberada de esta manera. Explique.
27. La vida media del ^{238}U es de 4.5×10^9 años, aproximadamente la edad del sistema solar. ¿Cómo puede medirse una vida media tan larga?
28. En el fechado o datación radiactiva con el ^{238}U, ¿cómo explica el hecho de no saber cuánto ^{238}U estaba presente en las rocas al principio? (*Sugerencia*: ¿Cuál es el producto final de la desintegración del ^{238}U?)
29. Haga una lista de las diversas fuentes de radiación ionizante, ya sea natural o artificial, que se encuentran en nuestro entorno.
30. ¿Cuál de estas leyes de conservación se aplica a todas las reacciones nucleares? La conservación de (*a*) la carga, (*b*) la masa, (*c*) la energía total, (*d*) la energía de reposo, (*e*) la energía cinética, (*f*) el ímpetu lineal, (*g*) el ímpetu angular y (*h*) el número total de nucleones.
31. Pequeños cambios de temperatura tienen un gran efecto en la velocidad de las reacciones químicas, pero generalmente tienen un efecto despreciable en la velocidad de las reacciones nucleares. Explíquelo.
32. En el desarrollo de nuestro entendimiento del átomo, ¿usamos modelos atómicos de la misma manera que usamos ahora modelos nucleares? ¿Es la teoría de Bohr un modelo atómico? ¿Se emplean ahora los modelos en la física atómica? ¿Cuál es la diferencia entre un modelo y una teoría?
33. ¿Cuáles son las hipótesis básicas de los modelos de la gota de líquido y de la partícula independiente de la estructura nuclear? ¿En qué difieren? ¿Existen semejanzas entre ellos?
34. ¿Nos da el modelo colectivo del núcleo una imagen de los fenómenos siguientes: (*a*) la aceptación por parte del núcleo de una partícula que choca; (*b*) la pérdida de una partícula por emisión espontánea; (*c*) la fisión; (*d*) la dependencia de la estabilidad sobre el contenido de energía?
35. ¿Qué es tan especial ("mágico") acerca de los números mágicos de los nucleones?
36. ¿Por qué no son lo mismo los números mágicos de los nucleones y los números mágicos del electrón? ¿Qué los distingue?
37. El número promedio de isótopos estables (o de muy larga vida) de los gases inertes es de 3.7. Sin embargo, el número promedio de núclidos estables para los cuatro números mágicos del neutrón es de 5.8, considerablemente mayor. Si los gases inertes son tan estables, ¿por qué no se crearon sus isótopos más estables cuando se formaron los elementos?

PROBLEMAS

Sección 54-1 Descubrimiento del núcleo

1. Calcule la distancia de mayor acercamiento de una colisión de frente entre una partícula α de 5.30 MeV y el núcleo de un átomo de cobre.
2. (*a*) Calcule la fuerza eléctrica sobre una partícula α en la superficie de un átomo de oro, suponiendo que la carga positiva esté distribuida uniformemente en todo el volumen del átomo. No tome en cuenta los electrones atómicos. Un átomo de oro tiene un radio de 0.16 nm; considere a la partícula α como una partícula puntual. (*b*) ¿A lo largo de qué distancia tendría que actuar esta fuerza, que se presume constante, para llevar al reposo a la partícula α de 5.30 MeV? Exprese su respuesta en términos del diámetro del átomo de oro.
3. Supóngase que un nucleo de oro tiene un radio de 6.98 fm (véase la tabla 1), y una partícula α tiene un radio de 1.8 fm. ¿Qué energía debe tener una partícula α incidente para apenas tocar al núcleo de oro?
4. Cuando una partícula α choca elásticamente con un núcleo, el núcleo retrocede. Una partícula α de 5.00 MeV tiene una colisión elástica de frente con un núcleo de oro, inicialmente en reposo. ¿Cuál es la energía cinética (*a*) del núcleo en retroceso y (*b*) del rebote de la partícula α? Puede considerarse que la masa de la partícula α es de 4.00 u y la del núcleo de oro es de 197 u.

Sección 54-2 Algunas propiedades nucleares

5. Localice los núclidos mostrados en la tabla 1 en el diagrama de núclidos de la figura 4. ¿Cuáles de estos núclidos están dentro de la zona de estabilidad?
6. Se mide que el radio de un núcleo, por métodos de dispersión de electrones, es de 3.6 fm. ¿Cuál es el número másico probable del núcleo?
7. Ordene los 25 núclidos dados en seguida en cuadros a la manera de una sección de un diagrama de núclidos similar al de la figura 4. Dibuje y denote (*a*) todas las líneas isobáricas (A constante) y (*b*) todas las líneas de exceso de neutrones constante, el cual se define como $N - Z$. Considere los núclidos $^{118\text{-}122}Te$, $^{117\text{-}121}Sb$, $^{116\text{-}120}Sn$, $^{115\text{-}119}In$ y $^{114\text{-}118}Cd$.
8. Una estrella de neutrones es un objeto estelar cuya densidad es aproximadamente aquélla de la materia nuclear, que se calculó en el problema muestra 2. Supóngase que el Sol fuese a chocar contra una de estas estrellas sin perder nada de su masa actual. ¿Cuál sería su radio esperado?

9. Verifique que la energía de amarre por nucleón dada en la tabla 1 para el ^{239}Pu es realmente 7.56 MeV/nucleón. Las masas atómicas necesarias son 239.052158 u (^{239}Pu), 1.007825 u (^{1}H) y 1.008665 u (neutrón).
10. Calcule la energía de amarre por nucleón promedio del ^{62}Ni, que tiene una masa atómica de 61.928346 u. Este núcleo tiene la máxima energía de amarre por nucleón de todos los núcleos estables conocidos.
11. Las masas atómicas del ^{1}H, ^{12}C y ^{238}U son 1.007825 u, 12.000000 u (por definición), y 238.050785 u, respectivamente. (*a*) ¿Cuáles serían estas masas si la masa unitaria se definiese como si la masa del ^{1}H fuese (exactamente) 1.000000 u? (*b*) Use su resultado para indicar por qué no se hizo esta elección por demás obvia?
12. (*a*) Convénzase de que la energía vinculada con los enlaces nucleares, o fuerza fuerte, es proporcional a A, el número másico del núcleo en cuestión. (*b*) Convénzase de que la energía vinculada con los enlaces por medio de la fuerza de Coulomb entre los protones es proporcional a $Z(Z-1)$. (*c*) Demuestre que, cuando vamos a núcleos cada vez más grandes (véase la Fig. 4), la importancia de (*b*) aumenta más rápidamente de lo que lo hace (*a*).
13. En la tabla periódica, la anotación del magnesio es:

12
Mg
24.305

Existen tres isótopos:

^{24}Mg, masa atómica = 23.985042 u.

^{25}Mg, masa atómica = 24.985837 u.

^{26}Mg, masa atómica = 25.982594 u.

La abundancia del ^{24}Mg es del 78.99% en masa. Calcule las abundancias de los otros dos isótopos.

14. Puesto que un nucleón está confinado en un núcleo, podemos considerar que la incertidumbre en su posición es aproximadamente el radio nuclear R. ¿Qué dice el principio de incertidumbre para la energía cinética de un nucleón en un núcleo con, digamos $A = 100$? (*Sugerencia*: Considere que la incertidumbre en el ímpetu Δp sea el ímpetu real p.)
15. Se le pide que divida una partícula α (^{4}He) quitando, en secuencia, un protón, un neutrón y un protón. Calcule (*a*) el trabajo necesario en cada paso, (*b*) la energía de amarre total de la partícula α y (*c*) la energía de amarre por nucleón. Las masas atómicas necesarias son

^{4}He 4.002603 u ^{2}H 2.014102 u

^{3}H 3.016049 u ^{1}H 1.007825 u

n 1.008665 u.

16. Para simplificar los cálculos, a veces se tabulan las masas atómicas no como masas atómicas reales m sino como $(m - A)c^2$, donde A es el número másico expresado en unidades de masa. Esta cantidad, que por lo general se expresa en MeV, se llama el *exceso de masa* (simbolo Δ). Usando los datos del problema muestra 3, halle los excesos de masa de (*a*) el ^{1}H, (*b*) el neutrón y (*c*) el ^{120}Sn.
17. (*a*) Demuestre que la energía de amarre total de un núclido puede escribirse como:

$$E_B = Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta,$$

donde Δ_H, Δ_n, y Δ son los excesos másicos apropiados; véase el problema 16. (*b*) Usando este método calcule la energía de amarre por nucleón del ^{197}Au. Compare su resultado con el valor mostrado en la tabla 1. Los excesos másicos necesarios son $\Delta_H = +7.289$ MeV, $\Delta_n = +8.071$ MeV y $\Delta_{197} = -31.17$ MeV. Δ_H es el exceso de masa del ^{1}H. Nótese la economía en el cálculo que resulta cuando se emplean los excesos másicos en lugar de las masas reales.
18. Una moneda de cobre tiene una masa de 3.00 g. Calcule la energía nuclear que se requeriría para separar a todos los neutrones y protones contenidos en esta moneda. Haga caso omiso de la energía de amarre de los electrones. Para simplificar, supóngase que la moneda está formada por completo de átomos de ^{63}Cu (masa = 62.929599 u). Las masas atómicas del protón y del neutrón son 1.007825 u y 1.008665 u, respectivamente.
19. Los radios nucleares pueden medirse por la dispersión de electrones de alta energía de los núcleos. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de de Broglie para electrones de 480 MeV? (*b*) ¿Son sondas apropiadas para este objeto? Debe tenerse en cuenta la relatividad.
20. Ya que el neutrón carece de carga, su masa debe determinarse de algún otro modo que mediante el uso de un espectrómetro de masas. Cuando se encuentran un neutrón en reposo y un protón, se combinan y forman un deuterón, emitiendo un rayo gamma cuya energía es de 2.2233 MeV. Las masas atómicas del protón y del deuterón son 1.007825 u y 2.014102 u, respectivamente. Encuentre la masa del neutrón a partir de estos datos, hasta tantas cifras significativas como éstos lo permitan.
21. El espín y el momento magnético (componente z máxima) del ^{7}Li en su estado base (véase la tabla 1) son $\frac{3}{2}$ y +3.26 magnetones nucleares, respectivamente. Un núcleo libre de ^{7}Li se coloca dentro de un campo magnético de 2.16 T. (*a*) ¿En cuántos niveles se desdoblará el estado base a causa de la cuantización espacial? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre pares de niveles contiguos? (*c*) ¿Cuál es la longitud de onda que corresponde a una transición entre un par de niveles como éste? (*d*) ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra esta longitud de onda?
22. (*a*) Demuestre que la energía potencial electrostática de una esfera uniforme de carga Q y radio R está dada por

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

(*Sugerencia*: Armar la esfera a partir de esferas huecas delgadas traídas desde el infinito.) (*b*) Halle la energía potencial electrostática del núclido de ^{239}Pu, supuesto como esférico; véase la tabla 1. (*c*) Compare su energía potencial electrostática por partícula con su energía de

amarre por nucleón de 7.56 MeV. (*d*) ¿Qué concluye usted?

Sección 54-3 Desintegración radiactiva

23. La vida media de un isótopo radiactivo es de 140 días. ¿Cuántos días transcurrirían para que la actividad de una muestra de este isótopo cayera a un cuarto de su velocidad de desintegración inicial?

24. La vida media de un isótopo radiactivo en particular es de 6.5 horas. Si existen inicialmente 48×10^{19} átomos de este isótopo en una muestra particular, ¿cuántos átomos de este isótopo permanecen después de 26 horas?

25. Un isótopo radiactivo de mercurio, ^{197}Hg, se desintegra en oro, ^{197}Au, con una constante de desintegración de 0.0108 h^{-1}. (*a*) Calcule su vida media. (*b*) ¿Qué fracción de la cantidad inicial permanecerá después de tres vidas medias? (*c*) ¿Después de 10 días?

26. Deduzca, a partir de los datos presentados en los primeros párrafos de la sección 54-3, (*a*) la constante de desintegración λ y (*b*) la vida media del ^{238}U.

27. El ^{67}Ga, masa atómica = 66.93 u, tiene una vida media de 78.25 h. Considérese una muestra inicialmente pura de 3.42 g de este isótopo. (*a*) Halle su actividad (velocidad de desintegración). (*b*) Halle su actividad después de 48.0 h.

28. Demuestre que la ley de la desintegración radiactiva (Ec. 6) puede escribirse en la forma

$$N = N_0(\tfrac{1}{2})^{t/t_{1/2}}.$$

29. Se desintegra ^{223}Ra por desintegración alfa con una vida media de 11.43 días. ¿Cuántos átomos de helio se crean en 28 días a partir de una muestra de ^{223}Ra inicialmente puro que contiene 4.70×10^{21} átomos?

30. El radionúclido ^{64}Cu tiene una vida media de 12.7 horas. ¿Cuánto de una muestra de 5.50 g de ^{64}Cu inicialmente puro se desintegrará durante el periodo de 2 horas que comienza después de 14.0 h?

31. El radionúclido ^{32}P (vida media = 14.28 días) se emplea a menudo como un trazador para seguir el curso de las reacciones bioquímicas en las que interviene el fósforo. (*a*) Si el conteo en un experimento particular es de 3050 cuentas/s, ¿después de cuánto tiempo caerá a 170 cuentas/s? (*b*) Una solución que contiene ^{32}P alimenta al sistema de la raíz de una planta experimental de tomate y 3.48 días más tarde se mide la actividad del ^{32}P de una hoja. ¿Por qué factor debe multiplicarse esta lectura para corregir la desintegración que ha ocurrido desde que comenzó el experimento?

32. Una muestra de 1.00 g de samario emite partículas α a razón de 120 partículas/s. El ^{147}Sm, cuya abundancia natural en el samario a granel es de 15.0%, es el isótopo responsable. Calcule la vida media de este isótopo.

33. El ^{239}Pu, de masa atómica = 239 u, decae mediante desintegración alfa con una vida media de 24,100 años. ¿Cuántos gramos de helio se producen, de una muestra de 12.0 g de ^{239}Pu inicialmente puro, después de 20,000 años? (Recuérdese que una partícula α es un núcleo de helio, con una masa atómica de 4.00 u.)

34. Una fuente contiene dos radionúclidos de fósforo, ^{32}P ($t_{1/2}$ = 14.3 días) y ^{33}P ($t_{1/2}$ = 25.3 días). Inicialmente el 10.0% de las desintegraciones provienen del ^{33}P. ¿Cuánto tiempo debemos esperar hasta que sea del 90.0%?

35. Después de una breve irradiación neutrónica de plata hay dos actividades presentes: ^{108}Ag ($t_{1/2}$ = 2.42 min) con una velocidad de desintegración inicial de 3.1×10^5/s, y ^{110}Ag ($t_{1/2}$ = 24.6 s) con una velocidad de desintegración inicial de 4.1×10^6/s. Haga una gráfica similar a la de la figura 7 que muestre la velocidad de desintegración combinada de los dos isótopos en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 10$ min. En la figura 7 se ilustró la obtención de la vida media para desintegraciones sencillas. Dada únicamente la gráfica de la velocidad de desintegración total, ¿puede uno indicar un modo de analizarla con objeto de hallar las vidas medias de ambos isótopos?

36. Al momento de escribir esto existe una especulación de que el protón libre pudiera no ser realmente una partícula estable sino que puede ser radiactiva, con una vida media de unos 1×10^{32} años. Si esto llega a ser verdad, ¿alrededor de cuánto tiempo tendría uno que esperar para estar razonablemente seguro de que un protón de su cuerpo se ha desintegrado? Supóngase que el cuerpo es agua y tiene una masa de 70 kg.

37. En un ciclotrón está siendo fabricado un cierto radionúclido, a una razón constante P. También está decayendo, con una constante de desintegración λ. Hagamos que el proceso de producción continúe durante un tiempo largo comparado con la vida media del radionúclido. Convénzase de que el número de núcleos radiactivos presentes en tales tiempos deben ser constantes y estarán dados por $N = P/\lambda$. Convénzase también de que este resultado se cumple sin importar cuántos núcleos radiactivos estaban presentes inicialmente. Se dice que el núcleo está en *equilibrio secular* con su fuente; en este estado su velocidad de desintegración es precisamente igual a su velocidad de producción.

38. El radionúclido ^{56}Mn tiene una vida media de 2.58 h y se produce en un ciclotrón bombardeando un blanco de manganeso con deuterones. El blanco contiene sólo el isótopo estable de manganeso ^{55}Mn y la reacción que produce el ^{56}Mn es

$$^{55}\text{Mn} + \text{d} \rightarrow {}^{56}\text{Mn} + \text{p}.$$

Después de haber sido bombardeado durante un tiempo $\gg$ 2.58 h, la actividad del blanco debida al ^{56}Mn es $8.88 \times 10^{10}\ s^{-1}$; véase el problema 37. (*a*) ¿A qué velocidad constante P se están produciendo núcleos de ^{56}Mn en el ciclotrón durante el bombardeo? (*b*) ¿A qué velocidad se están desintegrando (también durante el bombardeo)? (*c*) ¿Cuántos núcleos de ^{56}Mn están presentes al final del bombardeo? (*d*) ¿Cuál es su masa total? La masa atómica del ^{56}Mn es 55.94 u.

39. Una fuente de radio contiene 1.00 mg de ^{226}Ra, el cual decae con una vida media de 1600 años para producir ^{222}Rn, un gas inerte. Este gas radón decae a su vez por desintegración alfa con una vida media de 3.82 días. (*a*) Calcule la velocidad de desintegración del ^{226}Ra de la fuente. (*b*) ¿A qué velocidad se desintegra el radón cuando

ha llegado a un equilibrio secular con la fuente de radio? Véase el problema 37. (*c*) ¿Cuánto radón está en equilibrio secular con la fuente de radio?

Sección 54-4 Desintegración alfa

40. Por lo general, los núclidos más pesados tienden a ser más inestables a la desintegración alfa. Por ejemplo, el isótopo de uranio más estable, el ^{238}U, tiene una desintegración alfa de vida media de 4.5×10^9 años. El isótopo más estable del plutonio es el ^{244}Pu con una vida media de 8.2×10^7 años y en el curio tenemos ^{248}Cm y 3.4×10^5 años. Cuando se haya desintegrado la mitad de una muestra original de ^{238}U, ¿qué fracciones de los isótopos originales de (*a*) plutonio y (*b*) de curio quedan?

41. Considérese que un núcleo de ^{238}U esté constituido de una partícula α (^{4}He) y un núcleo residual (^{234}Th). Grafique la energía potencial electrostática $U(r)$, donde r es la distancia entre estas partículas. Abarque la región de 10 fm < r < 100 fm y compare su gráfica con la de la figura 8.

42. Un núcleo de ^{238}U emite una partícula α de 4.196 MeV de energía. Calcule la energía de desintegración Q de este proceso, teniendo en cuenta la energía de retroceso del núcleo residual de ^{234}Th. La masa atómica de una partícula α es 4.0026 u y la del ^{234}Th es 234.04 u. Compare su resultado con el del problema muestra 6*a*.

43. Los radionúclidos pesados emiten una partícula α más bien que otras combinaciones de nucleones porque la partícula α es una estructura estable, rígidamente ligada. Para confirmarlo, calcule las energías de desintegración de estos procesos hipotéticos de desintegración y analice el significado de sus hallazgos:

$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{232}\text{Th} + {}^{3}\text{He}, \qquad Q_3;$$
$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{231}\text{Th} + {}^{4}\text{He}, \qquad Q_4;$$
$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{230}\text{Th} + {}^{5}\text{He}, \qquad Q_5.$$

Las masas atómicas necesarias son

^{232}Th	232.038051 u	^{3}He	3.016029 u
^{231}Th	231.036298 u	^{4}He	4.002603 u
^{230}Th	230.033128 u	^{5}He	5.01222 u .
^{235}U	235.043924 u		

44. Considérese que un núcleo de ^{238}U emite (*a*) una partícula α o (*b*) una secuencia de neutrón, protón, neutrón, protón. Calcule la energía liberada en cada caso. (*c*) Convénzase tanto por argumentos razonados como por cálculo directo de que la diferencia entre estos dos números es justamente la energía total de amarre de la partícula α. Halle esa energía de amarre. Las masas atómicas necesarias son

^{238}U	238.050785 u	^{4}He	4.002603 u
^{237}U	237.048725 u	^{1}H	1.007825 u
^{236}Pa	236.048890 u	n	1.008665 u.
^{235}Pa	235.045430 u		
^{234}Th	234.043593 u		

45. En ciertas circunstancias, un núcleo puede desintegrarse emitiendo una partícula más pesada que una partícula α. Tales desintegraciones son muy raras. Considérense las desintegraciones

$$^{223}\text{Ra} \rightarrow {}^{209}\text{Pb} + {}^{14}\text{C}$$

y

$$^{223}\text{Ra} \rightarrow {}^{219}\text{Rn} + {}^{4}\text{He}.$$

(*a*) Calcule los valores Q de estas desintegraciones y determine que ambas son enérgeticamente posibles. (*b*) La altura de la barrera de Coulomb de las partículas α en esta desintegración es de 30 MeV. ¿Cuál es la altura de la barrera para la desintegración del ^{14}C? Las masas atómicas son

^{223}Ra	223.018501 u	^{14}C	14.003242 u
^{209}Pb	208.981065 u	^{4}He	4.002603 u.
^{219}Rn	219.009479 u		

Sección 54-5 Desintegración beta

46. Cierto núclido estable, después de absorber un neutrón, emite un electrón negativo y luego se divide espontáneamente en dos partículas α. Identifique el núclido.

47. El ^{137}Cs está presente en la precipitación radiactiva producida por las detonaciones de las bombas nucleares en la atmósfera. A causa de ello son una preocupación ambiental las desintegraciones beta con una vida media lenta de 30.2 años en ^{137}Ba, liberando en el proceso una energía considerable. Las masas atómicas del Cs y del Ba son 136.907073 u y 136.905812 u, respectivamente. Calcule la energía total liberada en una desintegración.

48. Un neutrón libre se desintegra de acuerdo con la ecuación 13. Calcule la energía máxima $K_{máx}$ del espectro beta. Las masas atómicas necesarias son

$$\text{n} \quad 1.008665 \text{ u}; \qquad {}^{1}\text{H} \quad 1.007825 \text{ u}.$$

49. De un núclido de masa media (A = 150, por ejemplo) se emite un electrón con una energía cinética de 1.00 MeV. (*a*) Halle su longitud de onda de de Broglie. (*b*) Calcule el radio del núcleo que se emite. (*c*) ¿Puede tal electrón estar confinado dentro de una "caja" de tales dimensiones como una onda estacionaria? (*d*) ¿Puede emplear estos números para refutar el argumento (abandonado desde hace tiempo) de que realmente existen electrones en el núcleo?

50. El radionúclido ^{32}P decae a ^{32}S como se describió por medio de la ecuación 11. En un determinado suceso de desintegración, se emite un electrón de 1.71 MeV, el valor máximo posible. Halle la energía cinética del átomo de ^{32}S que retrocede en este suceso. La masa atómica del ^{32}S es 31.97 u. (*Sugerencia*: Es necesario usar las expresiones relativistas de la energía cinética y del ímpetu lineal para el electrón. Puede usarse con seguridad la mecánica newtoniana para el átomo de ^{32}S de movimiento relativamente lento.)

51. El radionúclido ^{11}C se desintegra de acuerdo con

$$^{11}\text{C} \rightarrow {}^{11}\text{B} + e^+ + \nu, \qquad t_{1/2} = 20.3 \text{ min}.$$

La energía máxima del espectro del positrón es 960.8 keV. (*a*) Demuestre que la energía de desintegración Q para este proceso está dada por

$$Q = (m_C - m_B - 2m_e)c^2,$$

donde m_C y m_B son las masas atómicas del ^{11}C y del ^{11}B, respectivamente y m_e es la masa del electrón (positrón). (*b*) Dado que $m_C = 11.011433$ u, $m_B = 11.009305$ u y $m_e = 0.0005486$ u, calcule Q y compárela con la energía máxima del espectro del positrón, dada arriba. (*Sugerencia*: Sean m'_C y m'_B las masas nucleares y procédase como en el problema muestra 7 para la desintegración beta. Nótese que la desintegración del positrón es una excepción a la regla general de que, cuando se emplean las masas atómicas en los procesos de desintegración nuclear, automáticamente se tiene en cuenta la masa del electrón emitido.)

52. Ciertos radionúclidos se desintegran al capturar a uno de sus propios electrones atómicos, por ejemplo, un electrón K. Un ejemplo es

$$^{49}V + e^- \rightarrow {}^{49}Ti + \nu, \qquad t_{1/2} = 331 \text{ d}.$$

Demuestre que la energía de desintegración Q de este proceso está dada por

$$Q = (m_V - m_{Ti})c^2 - E_K,$$

donde m_V y m_{Ti} son las masas atómicas del ^{49}V y del ^{49}Ti, respectivamente, y E_K es la energía de amarre del electrón K del vanadio. (*Sugerencia*: Poner m'_V y m'_{Ti} como las masas nucleares correspondientes y proceder como en el problema muestra 7; véase la nota de pie de página de ese problema muestra.)

53. Halle la energía de desintegración Q de la desintegración del ^{49}V por medio de la captura de un electrón K, como se describió en el problema 52. Los datos necesarios son $m_V = 48.948517$ u, $m_{Ti} = 48.947871$ u y $E_K = 5.47$ keV.

Sección 54-6 Medición de la radiación ionizante

54. Un contador Geiger registra 8722 cuentas en un minuto. Calcule la actividad de la fuente en Ci, suponiendo que el contador registre todas las desintegraciones.

55. Una dosis típica de radiación de rayos X en el pecho es de 25 mrem, entregada por medio de rayos X con un factor de calidad de 0.85. Calcule la energía absorbida en joules, suponiendo que la masa del tejido expuesto sea la mitad de la masa de 88 kg del paciente.

56. Una persona de 75 kg recibe una dosis de radiación de cuerpo entero de 24 mrad, entregada por medio de partículas α en las que el factor de calidad es 12. Calcule (*a*) la energía absorbida en joules y (*b*) la dosis equivalente en rem.

57. Se necesita una actividad de 3.94 μCi en una muestra radiactiva para emplearse en un procedimiento médico. Una semana antes del tratamiento se preparó una muestra de núclidos con una vida media de 1.82×10^5 s. ¿Cuál debe ser la actividad de la muestra en el momento de la preparación con objeto de que tenga la actividad requerida en el momento del tratamiento?

58. En los reactores nucleares se produce el isótopo del plutonio ^{239}Pu, de masa atómica = 239.05 u, como un subproducto y de aquí que se acumule en los elementos del combustible del reactor. Es radiactivo, decayendo por medio de una desintegración alfa con una vida media de 2.411×10^4 años. Pero el plutonio es también uno de los químicos más tóxicos que se conocen; una cantidad tan pequeña como 2.00 mg es letal para un ser humano. (*a*) ¿Cuántos núcleos constituyen una dosis químicamente letal? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de desintegración de esta cantidad? (*c*) ¿Cuál es su actividad en curies?

59. Las células cancerosas son más vulnerables a las radiaciones X y gamma de lo que lo son las células saludables. Si bien los aceleradores lineales están reemplazando estas radiaciones, en el pasado la fuente normal en la terapia de radiación era el ^{60}Co radiactivo, con desintegraciones beta en el estado nuclear excitado de ^{60}Ni, el cual cae inmediatamente en el estado base, emitiendo dos fotones de rayos gamma, cada uno con una energía aproximada de 1.2 MeV. La vida media de la desintegración beta controlante es de 5.27 años. ¿Cuántos núcleos radiactivos de ^{60}Co están presentes en una fuente de 6000 Ci empleada en un hospital? La masa atómica del ^{60}Co es de 59.93 u.

60. Un piloto de una aerolínea pasa un promedio de 20 h por semana volando a 12,000 m, a cuya altitud la dosis equivalente debida a la radiación cósmica y solar es de 12 μSv/h (1 Sv = 1 sievert = 100 rem; el sievert es la unidad de dosis equivalente en el SI). Calcule la dosis equivalente anual en mrem.

61. En 1902, después de un prolongado esfuerzo, Marie y Pierre Curie lograron la separación, a partir de mineral de uranio, de la primera cantidad sustancial de radio, un decigramo (dg) de $RaCl_2$ puro. El radio era un isótopo radiactivo ^{226}Ra, el cual se desintegra con una vida media de 1600 años. (*a*) ¿Cuántos núcleos de radio aislaron? (*b*) ¿Cuál fue la velocidad de desintegración de su muestra, en Bq? (1 Bq = 1 becquerel = 1 desintegración/s). (*c*) ¿En curies? La masa molar del Cl es de 35.453 g/mol; la masa atómica del isótopo de radio es de 226.03 u.

62. Calcule la masa de 4.60 μCi de ^{40}K, que tiene una vida media de 1.28×10^9 años y una masa atómica de 40.0 u.

63. Uno de los peligros de la precipitación radiactiva producida por una bomba nuclear es el ^{90}Sr, que se desintegra por emisión beta con una vida media de 29 años. El estroncio, debido a que tiene propiedades químicas muy parecidas al calcio, cuando una vaca lo ingiere, se concentra en su leche y pasa después a los huesos de la persona que tome la leche. Los electrones energéticos de la desintegración dañan la médula ósea e impiden por ello la producción de los glóbulos rojos de la sangre. Una bomba de 1 megatón produce aproximadamente 400 g de ^{90}Sr. Si la precipitación se esparce uniformemente en un área de 2000 km^2, ¿qué área de radiactividad igualaría a la carga ósea permitida de 0.002 mCi en una persona? La masa atómica del ^{90}Sr es 89.9 u.

64. El núclido ^{198}Au, de vida media = 2.693 días, se emplea en la terapia del cáncer. Calcule la masa necesaria de este isótopo para producir una actividad de 250 Ci.

65. Un obrero de 87 kg que trabaja en una planta de alimentación de reactores ingiere accidentalmente 2.5 mg de ^{239}Pu en polvo. El ^{239}Pu tiene una vida media de 24,100 años, decayendo por desintegración alfa. La energía de las partículas α emitidas es de 5.2 MeV, con un factor de calidad de 13. Supóngase que el plutonio permanezca en el cuerpo del obrero durante 12 h, y que el 95% de las partículas α emitidas se encuentran detenidas dentro del cuerpo. Calcule (*a*) el número de átomos de plutonio ingeridos, (*b*) el número de los que se desintegran durante las 12 h, (*c*) la energía absorbida por el cuerpo, (*d*) la dosis física resultante en rad y (*e*) la dosis biológica equivalente en rem.

Sección 54-7 Radiactividad natural

66. Se halla que una roca contiene 4.20 mg de ^{238}U y 2.00 mg de ^{206}Pb. Supóngase que la roca no contenga plomo en formación, surgiendo todo el plomo ahora presente de la desintegración del uranio. Halle la edad de la roca. La vida media del ^{238}U es de 4.47×10^9 años.

67. Dos materiales radiactivos que son inestables a la desintegración alfa, ^{238}U y ^{232}Th, y uno que es inestable a la desintegracion beta, ^{40}K, abundan mucho en el granito como para contribuir significativamente al calentamiento de la Tierra a través de la energía de desintegración que se produce. Los isótopos inestables alfa dan lugar a cadenas de desintegración que detienen a los isótopos estables del plomo. El ^{40}K tiene una sola desintegración beta. La información de la desintegración es la siguiente:

Núclido padre	*Modo de desintegración*	*Vida media* (años)	*Punto final estable*	*Q* (MeV)	*f* (ppm)
^{238}U	α	4.47×10^9	^{206}Pb	51.7	4
^{232}U	α	1.41×10^{10}	^{208}Pb	42.7	13
^{40}K	β	1.28×10^9	^{40}Ca	1.32	4

Q es la energía total liberada en la desintegración de un núcleo padre al punto extremo estable final y *f* es la abundancia del isótopo en kilogramos por kilogramo de granito; ppm significa partes por millón. (*a*) Demuestre que estos materiales dan lugar a una producción total de calor de 987 pW por cada kilogramo de granito. (*b*) Suponiendo que existan 2.7×10^{22} kg de granito en una corteza esférica de 20 km de espesor alrededor de la Tierra, calcule la potencia que esto producirá en toda la Tierra. Compárese esto con la potencia solar total interceptada por la Tierra, 1.7×10^{17} W.

68. Se cree que una roca particular tiene una edad de 260 millones de años. Si contiene 3.71 mg de ^{238}U, ¿cuánto ^{206}Pb debe contener?

69. Se halla que una roca, recuperada de una gran profundidad, contiene 860 μg de ^{238}U, 150 μg de ^{206}Pb y 1.60 mg de ^{40}Ca. ¿Cuánto ^{40}K es probable que contenga? En el problema 67 se muestran las vidas medias necesarias.

Sección 54-8 Reacciones nucleares

70. Llene los núclidos faltantes en cada una de las reacciones siguientes: (*a*) ^{116}Sn(?,p)^{117}Sn; (*b*) ^{40}Ca(α,n)?; y (*c*) ?(p,n)^{7}Be.

71. Calcule *Q* de la reacción ^{59}Co(p,n)^{59}Ni. Las masas atómicas necesarias son:

^{59}Co	58.933198 u	^{1}H	1.007825 u
^{59}Ni	58.934349 u	n	1.008665 u.

72. Haciendo uso mental de la pantalla superpuesta de la figura 13 aplicada a la figura 12, escriba las reacciones por las cuales puede prepararse, por lo menos en principio, el radionúclido ^{197}Pt ($t_{1/2}$ = 18.3 h). Excepto en circunstancias especiales, sólo los núclidos estables pueden servir como blancos prácticos en las reacciones nucleares.

73. El radionúclido ^{60}Co ($t_{1/2}$ = 5.27 años) se usa mucho en la terapia del cáncer. Tabule las reacciones posibles que pudieran usarse para prepararlo. Limite los proyectiles a neutrones, protones y deuterones. Limite los blancos a los núclidos estables. Los núclidos estables aconsejablemente afines al ^{60}Co son el ^{63}Cu, el ^{60,61,62}Ni, el ^{59}Co y el ^{57,58}Fe. (Comercialmente, el ^{60}Co se obtiene bombardeando el cobalto elemental, que consta sólo del isótopo ^{59}Co, con los neutrones de un reactor.)

74. Un haz de deuterones incide sobre un blanco de cobre. El cobre tiene dos isótopos estables, el ^{63}Cu (69.2%) y el ^{65}Cu (30.8%). Tabule los núclidos residuales que pueden producirse mediante las reacciones (d,n), (d,p), (d,α), y (d,γ). Por observación de la figura 4, indique cuáles núclidos residuales son estables y cuáles son radiactivos.

75. Prepare una pantalla transparente como la de la figura 13 donde esa figura se extiende para incluir las reacciones en las que intervienen los núclidos livianos ^{3}H (tritio) y ^{3}He, considerados lo mismo como proyectiles que como partículas emergentes.

76. Un blanco de platino se bombardea durante varias horas con deuterones acelerados en el ciclotrón y luego se separa de él químicamente al elemento iridio (Z = 77). ¿Cuáles radioisótopos del iridio están presentes y por qué reacciones se formaron? (*Nota*: El ^{190}Pt y el ^{192}Pt, que no se muestran en la Fig. 12, son isótopos estables del platino, pero sus abundancias isotópicas son tan pequeñas que puede hacerse caso omiso su presencia.)

77. Considérese la reacción $X(a,b)Y$, donde se estima que X está en reposo en el marco de referencia del laboratorio. La energía cinética inicial en este marco es

$$K_{\text{lab}} = \tfrac{1}{2} m_a v_a^2.$$

(*a*) Demuestre que la velocidad inicial del centro de masa del sistema en el marco del laboratorio es

$$V = v_a \left(\frac{m_a}{m_X + m_a} \right).$$

¿Cambia esta cantidad por la reacción? (*b*) Demuestre que la energía cinética inicial, vista ahora en un marco de referencia unido al centro de masa de las dos partículas, está dada por

$$K_{cm} = K_{lab}\left(\frac{m_X}{m_X + m_a}\right).$$

¿Cambia esta cantidad por la reacción? (*c*) En la reacción ^{90}Zr(d,p)^{91}Zr la energía cinética del deuterón, medida en el marco del laboratorio, es de 15.9 MeV. Halle v_a (= v_d), V, y K_{cm}. No tome en cuenta los pequeños efectos relativistas.

78. En una reacción endotérmica ($Q < 0$), las partículas a y X que interactúan deben tener una energía cinética, medida en el marco de referencia del centro de masa, de por lo menos $|Q|$ si la reacción ha de desencadenarse. Demuestre, usando el resultado del problema 77, que la *energía de umbral* de la partícula a, medida en el marco de referencia del laboratorio, es

$$K_{umbral} = |Q|\frac{m_X + m_a}{m_X}.$$

¿Es razonable decir que K_{umbral} debe ser mayor que $|Q|$?

79. Prepare una pantalla transparente como la de la figura 13 donde puedan aparecer como partículas emergentes dos nucleones o núcleos livianos. La reacción ^{63}Cu(α,pn)^{65}Zn es un ejemplo. Considérense como posibilidades las combinaciones nn, np y pd.

Sección 54-9 Modelos nucleares

80. Puede considerarse que la energía cinética típica de un nucleón en un núcleo de masa intermedia es de 5 MeV. ¿A qué temperatura nuclear efectiva corresponde esto, usando las hipótesis del modelo de la gota de líquido de la estructura nuclear? (*Sugerencia*: Véase la Ec. 30 en el capítulo 24.)

81. Un núcleo intermedio en una reacción nuclear particular se desintegra dentro de 1.2×10^{-22} s de su formación. (*a*) ¿Cuál es la incertidumbre ΔE en nuestro conocimiento de este estado intermedio? (*b*) ¿Puede decirse de este estado que es un núcleo compuesto? Véase el problema muestra 11.

82. Partiendo de la siguiente lista de núclidos, identifique (*a*) aquéllos con capas nucleónicas llenas, (*b*) aquéllos con un nucleón fuera de una capa llena y (*c*) aquéllos con una vacante en una capa de otro modo llena. Núclidos: ^{13}C, ^{18}O, ^{40}K, ^{49}Ti, ^{60}Ni, ^{91}Zr, ^{92}Mo, ^{121}Sb, ^{143}Nd, ^{144}Sm, ^{205}Tl y ^{207}Pb.

83. Como lo muestra la tabla 1, el núclido ^{197}Au tiene un espín nuclear de $\frac{3}{2}$. (*a*) Si vemos a este núcleo como una esfera rígida girando con un radio dado en la tabla 1, ¿qué frecuencia rotatoria resulta? (*b*) ¿Qué energía cinética rotatoria? Nótese que este punto de vista es demasiado mecanicista.

84. Considérense los tres modos de formación mostrados para el núcleo compuesto ^{20}Ne* en la figura 17. ¿Qué energías deben tener (*a*) la partícula α, (*b*) el protón y (*c*) el fotón de rayos gamma para proporcionar 25.00 MeV de energía de excitación al núcleo compuesto? Las masas atómicas necesarias son

^{20}Ne	19.992435 u	α	4.002603 u
^{19}F	18.998403 u	^{1}H	1.007825 u.
^{16}O	15.994915 u		

85. Considere los tres modos de desintegración que se muestran en la figura 17 para el núcleo compuesto ^{20}Ne*. Si éste está inicialmente en reposo y tiene una energía de excitación de 25.0 MeV, ¿qué energías cinéticas, medidas en el laboratorio, tendrán (*a*) el deuterón, (*b*) el neutrón y (*c*) el núclido ^{3}He cuando el núcleo se desintegre? Las masas atómicas necesarias son

^{20}Ne	19.992435 u	d	2.014102 u
^{19}Ne	19.001879 u	n	1.008665 u
^{18}F	18.000937 u	^{3}He	3.016029 u.
^{17}O	16.999131 u		

86. El núclido ^{208}Pb es "doblemente mágico" en cuanto que su número de protones Z (= 82) y su número de neutrones N(= 126) ambos representan capas nucleónicas llenas. Un protón de más produciría ^{209}Bi y un neutrón extra ^{209}Pb. Sería más fácil expulsar a estos nucleones "extra" que a un protón o a un neutrón de las capas del ^{208}Pb llenas. (*a*) Calcule la energía necesaria para mover al protón "extra" del ^{209}Bi y compárelo con la energía necesaria para expulsar un protón de la capa de protones de ^{208}Pb llena. (*b*) Calcule la energía necesaria para quitar al neutrón "extra" del ^{209}Pb y compárela con la energía necesaria para quitar a un neutrón de una capa de neutrones de ^{208}Pb llena. ¿Concuerdan sus resultados con lo esperado? Use estos datos de las masas atómicas:

Núclido	*Z*	*N*	*Masa atómica* (u)
^{209}Bi	82 + 1	126	208.980374
^{208}Pb	82	126	207.976627
^{207}Tl	82 - 1	126	206.977404
^{209}Pb	82	126 + 1	208.981065
^{207}Pb	82	126 - 1	206.975872

Las masas atómicas del protón y del neutrón son 1.007825 u y 1.008665 u, respectivamente.

87. El núcleo de ^{91}Zr (Z = 40, N = 51) tiene un solo neutrón fuera de un centro de 50 neutrones lleno. Ya que 50 es un número mágico, este neutrón debe quizás estar pobremente ligado. (*a*) Calcule su energía de amarre. (*b*) Calcule la energía de amarre del neutrón siguiente, que debe extraerse del centro lleno. (*c*) Determine la energía de amarre por partícula para todo el núcleo. Compare estos tres números y analícelo. Las masas atómicas necesarias son

^{91}Zr	90.905644 u	n	1.008665 u
^{90}Zr	89.904703 u	^{1}H	1.007825 u.
^{89}Zr	88.908890 u		

CAPÍTULO 55

ENERGÍA DEL NÚCLEO

En un sistema de partículas que interactúan, podemos extraer energía útil cuando el sistema pasa a un estado de energía menor (esto es, un estado más fuertemente enlazado). En un sistema atómico, podemos extraer esta energía por medio de reacciones químicas, como la combustión. En un sistema nuclear, podemos extraer energía de diversas maneras. Por ejemplo, se utiliza la energía liberada en la desintegración radiactiva para proporcionar energía eléctrica a los marcapasos cardiacos y a las sondas espaciales.

En el presente capítulo consideraremos los dos métodos primarios que se emplean para extraer energía del núcleo y convertirla para propósitos útiles. En la fisión nuclear, *un núcleo pesado se divide en dos fragmentos. En la* fusión nuclear, *dos núcleos livianos se combinan para formar un núcleo pesado. La figura 6 del capítulo 54 mostraba que cualquiera de estos procesos puede dar por resultado núcleos fuertemente enlazados y por tanto puede liberar energía nuclear de amarre en exceso para convertirla en otras formas de energía. Hoy día, los reactores que se basan en la fisión nuclear proporcionan una parte significativa de la energía eléctrica mundial. La investigación y la ingeniería se afanan para desarrollar reactores basados en la fusión nuclear.*

55-1 EL ÁTOMO Y EL NÚCLEO

Cuando obtenemos energía del carbón al quemarlo en un horno, estamos trabajando con *átomos* de carbono y oxígeno, reordenando sus *electrones* exteriores en combinaciones más estables. Cuando obtenemos energía del uranio consumiéndolo en un reactor nuclear, estamos trabajando con su *núcleo*, reordenando sus *nucleones* en combinaciones más estables.

Los electrones se mantienen en los átomos por medio de la fuerza de Coulomb, y se necesitan unos cuantos electronvolts para expulsar a uno de los electrones exteriores. Por otra parte, los nucleones se mantienen en los núcleos por medio de la fuerza fuerte nuclear, y se necesitan unos cuantos *millones* de electronvolts para sacar a uno de *ellos*. Este factor se refleja también en nuestra capacidad de extraer alrededor de un millón de veces más energía de un kilogramo de uranio que de un kilogramo de carbón.

Tanto en el caso atómico como en el caso nuclear, la aparición de la energía viene acompañada de una disminución en la energía de reposo del combustible. La única diferencia entre consumir uranio y quemar carbón es que, en el primer caso, una fracción mucho mayor de energía de reposo disponible (una vez más, por un factor de varios millones) se convierte en otras formas de energía.

Debemos tener claro si lo que nos interesa es la cantidad de energía o la velocidad con que se entrega ésta, es decir, la *potencia*. En el caso nuclear, ¿se consumirá el kilogramo de uranio lentamente en un reactor de energía o explosivamente en una bomba? En el caso atómico, ¿estamos pensando en la explosión de un cartucho de dinamita o digiriendo una rosquilla de postre? (Resulta sorprendente, pero ¡la liberación de energía es mayor en el segundo caso que en el primero!)

La tabla 1 muestra cuánta energía puede extraerse de 1 kg de materia haciéndole varias cosas. En lugar de reportar la energía directamente, la medimos mostrando cuánto tiempo la energía extraída puede alimentar a un foco eléctrico de 100 W. En el renglón 6, la aniquilación mutua total de la materia y la antimateria es el final en la extracción de energía a partir de la materia. Cuando se ha empleado toda la masa disponible ya no se puede hacer

TABLA 1 LA ENERGÍA DE 1 kg DE MATERIA

Forma de la materia	*Proceso*	*Tiempo*[a]
Agua	Una caída de agua de 50 m	5 s
Carbón	Combustión	8 h
UO_2 (3%) enriquecido	Fisión en un reactor	680 años
^{235}U	Fisión completa	3×10^4 años
Deuterio gaseoso caliente	Fusión completa	3×10^4 años
Materia y antimateria	Aniquilación completa	3×10^7 años

[a] Estos números muestran el tiempo que la energía generada podría alimentar a un foco eléctrico de 100 W.

más. (Sin embargo, nadie ha resuelto aún la forma de hallar un medio económico de producir y almacenar 1 kg de antimateria para usarla en la producción de energía.)

Téngase en cuenta que las comparaciones de la tabla 1 se hacen con base en la masa unitaria. Kilogramo por kilogramo obtenemos varios millones de veces más energía del uranio que del carbón o de una caída de agua. Por otra parte, existen grandes cantidades de carbón en la corteza terrestre y grandes cantidades de agua almacenada tras la cortina de una gran presa.

55-2 FISIÓN NUCLEAR: EL PROCESO BÁSICO

En 1932, el físico inglés James Chadwick descubrió el neutrón. Unos cuantos años más tarde, en Roma, Enrico Fermi y sus colaboradores descubrieron que, cuando se bombardean diversos elementos por medio de estos nuevos proyectiles, se producen nuevos elementos radiactivos. Fermi había predicho que el neutrón, por carecer de carga, sería un proyectil nuclear útil; al contrario del protón o de la partícula α, no experimenta ninguna fuerza de Coulomb de repulsión cuando se acerca a una superficie nuclear. Puesto que no existe una barrera de Coulomb para él, el neutrón, más lento, puede penetrar e interactuar con el núcleo aún más masivo y altamente cargado. Los *neutrones térmicos*, que son neutrones en equilibrio con la materia a la temperatura ambiente, son partículas de bombardeo convenientes y efectivas. A 300 K, la energía cinética media de tales neutrones es

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 0.04\ \text{eV}.$$

En 1939, los químicos alemanes Otto Hahn y Fritz Strassmann, continuando el trabajo iniciado por Fermi y sus colaboradores, bombardearon uranio con neutrones térmicos. Hallaron mediante análisis químico que después del bombardeo se presentaba un número de elementos radiactivos nuevos, entre ellos uno cuyas propiedades químicas eran notablemente parecidas a las del bario. Pruebas repetidas los convencieron finalmente de que este "nuevo" elemento no era tan nuevo; en realidad *era* bario. ¿Cómo pudo producirse este elemento de masa media (Z = 56) al bombardear el uranio (Z = 92) con neutrones?

El enigma fue resuelto en unas cuantas semanas por los físicos Lise Meitner y su sobrino Otto Frisch. Demostraron que un núcleo de uranio, por haber absorbido un neutrón, podía dividirse, liberando energía, en dos partes casi iguales, una de las cuales bien podría ser bario. A este proceso lo llamaron *fisión nuclear*.† La figura 1 muestra las trazas dejadas en el gas de una cámara de niebla por los dos fragmentos energéticos de la fisión que

† Véase "The Discovery of Fission", por Otto Frisch y John Wheeler, *Physics Today*, noviembre de 1967, pág. 43, para un relato fascinante de los primeros días del descubrimiento.

Figura 1 Cuando una partícula rápida cargada pasa a través de una cámara de niebla, deja una traza de gotas de líquido. Las dos trazas que parecen reflejo una de la otra representan fragmentos de la fusión, producidos por un suceso de fisión que ocurrió dentro de una laminilla vertical delgada de uranio en el centro de la cámara.

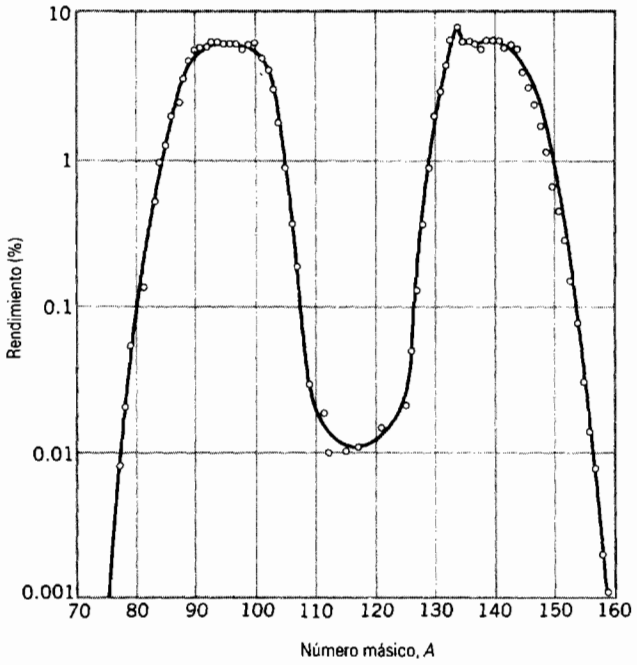


Figura 2 La distribución de masa de los fragmentos de fisión X y Y (véase la Ec. 1) que resultan de la fisión del ^{235}U por neutrones térmicos. Nótese que la escala vertical es logarítmica.

resultan del suceso de fisión ocurrido cerca del centro de la cámara.

La fisión del ^{235}U mediante neutrones térmicos, un proceso de gran importancia práctica, puede representarse por

$$^{235}U + n \rightarrow {}^{236}U^* \rightarrow X + Y + bn, \qquad (1)$$

donde ^{236}U, como lo indica el asterisco, es un núcleo compuesto. Aquí X y Y son los *fragmentos de la fisión*, núcleos de masa media que por lo general son altamente radiactivos. El factor b, que tiene el valor promedio de 2.47 en sucesos de fisión de este tipo, es el número de neutrones liberados en tales sucesos.

La figura 2 muestra la distribución por número másico de los fragmentos X y Y de la fisión. Vemos que los fragmentos tendrán masas iguales en tan sólo un 0.01% de los sucesos. Los números másicos más probables, que ocurren en alrededor del 7% de los sucesos, son $A = 140$ y $A = 95$. También podemos decir, a partir de la diferencia en la longitud de los dos trazos de fragmentos de fisión de la figura 1 que los dos fragmentos en este suceso de fisión en particular no tienen la misma masa.

El núclido ^{236}U, que es el núcleo fisionante en la ecuación 1, tiene 92 protones y 236 - 92, o sea 144 neutrones, una razón neutrón/protón de aproximadamente 1.6. Los fragmentos primarios que se formaron inmediatamente después de la fisión retendrán esta misma razón neutrón/protón. Empero, el estudio de la curva de estabilidad de la figura 4 del capítulo 54, muestra que los núclidos estables en la región de masa media ($75 < A < 150$) tienen una razón neutrón/protón de tan sólo 1.2 a 1.4. Así, los fragmentos primarios serán excesivamente ricos en neutrones y "evaporarán" un pequeño número de neutrones, 2.47 de ellos en el promedio de la reacción de la ecuación 1. Los fragmentos X y Y que permanecen todavía son demasiado ricos en neutrones y tienden a la línea de estabilidad por una cadena de desintegraciones beta sucesivas.

Un ejemplo específico del proceso generalizado de fisión de la ecuación 1 es

$$^{235}U + n \rightarrow {}^{236}U^* \rightarrow {}^{140}Xe + {}^{94}Sr + 2n. \qquad (2)$$

Los fragmentos de fisión ^{140}Xe y ^{94}Sr decaen hasta que cada uno llega a un producto final estable, como sigue:

$$^{140}Xe \xrightarrow[14\ s]{} {}^{140}Cs \xrightarrow[65\ s]{} {}^{140}Ba \xrightarrow[13\ d]{} {}^{140}La \xrightarrow[40\ h]{} {}^{140}Ce \text{ (estable)}$$

$$^{94}Sr \xrightarrow[75\ s]{} {}^{94}Y \xrightarrow[19\ min]{} {}^{94}Zr \text{ (estable)}$$

Las desintegraciones son sucesos β^-, indicándose las vidas medias en cada etapa. Como en todas las desintegraciones, los números másicos (140 y 94) permanecen sin cambio al continuar las desintegraciones.

La energía de desintegración Q de fisión es mucho mayor que en los procesos químicos. Podemos apoyar esto por medio de un cálculo burdo. De la curva de energía de amarre de la figura 6 del capítulo 54, vemos que en los núclidos pesados (digamos, $A = 240$) la energía de amarre por nucleón es de unos 7.6 MeV. En la región intermedia (digamos, $A = 120$), es de unos 8.5 MeV. La diferencia en la energía de amarre total entre un solo núcleo ($A = 240$) y los dos fragmentos (que se suponen iguales) en que puede dividirse es, entonces

$$Q = 2(8.5 \text{ MeV})\frac{A}{2} - (7.6 \text{ MeV})A \approx 200 \text{ MeV}.$$

En el problema muestra 1 se realiza un cálculo más cuidadoso, que concuerda muy bien con este cálculo aproximado.

Problema muestra 1 Calcule la energía de desintegración Q del suceso de fisión de la ecuación 2, teniendo en cuenta la desintegración de los fragmentos de la fisión. Las masas atómicas necesarias son

^{235}U	235.043924 u	^{140}Ce	139.905433 u
n	1.008665 u	^{94}Zr	93.906315 u.

Solución Si los fragmentos de la fisión se sustituyen en la ecuación 2 por sus productos estables finales, vemos que la transformación global es

$$^{235}U \rightarrow {}^{140}Ce + {}^{94}Zr + n.$$

El neutrón único surge porque el neutrón (iniciador) en el lado izquierdo de la ecuación 2 cancela a uno de los dos neutrones en el lado derecho de ella.

La diferencia másica de esta reacción es

$$\Delta m = 235.043924\ \text{u} - (139.905433\ \text{u} + 93.906315\ \text{u} + 1.008665\ \text{u}) = 0.223511\ \text{u},$$

y la energía correspondiente es

$$Q = \Delta m\, c^2 = (0.223511\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 208.2\ \text{MeV},$$

que concuerda bien con nuestro cálculo aproximado previo de 200 MeV.

Alrededor del 80% de la energía de la desintegración está en forma de energía cinética de los dos fragmentos, yendo el resto al neutrón y a los productos radiactivos de la desintegración.

Si el suceso de fisión ocurre en un sólido macroscópico, la mayoría de la energía de la desintegración aparece como un aumento en la energía interna del sólido, lo cual muestra un aumento correspondiente de temperatura. Sin embargo, más o menos el cinco por ciento de la energía de desintegración se asocia con los neutrinos que se emiten durante la desintegración beta de los fragmentos de fisión primarios. Esta energía se lleva fuera del sistema y no contribuye al aumento en su energía interna.

55-3 TEORÍA DE LA FISIÓN NUCLEAR

Poco tiempo después del descubrimiento de la fisión, Niels Bohr y John Wheeler desarrollaron una teoría, basada en la analogía entre un núcleo y una gota de líquido cargada, que explicó sus principales características.

La figura 3 indica cómo procede el proceso de fisión. Cuando un núcleo pesado como el ^{235}U absorbe un neutrón lento, como se muestra en la figura 3*a*, el neutrón cae en el pozo de potencial asociado con las fuerzas nucleares intensas que actúan en el interior del núcleo. Su energía potencial se transforma luego en energía de excitación interna, como lo indica la figura 3*b*.

La cantidad de energía de excitación que lleva un neutrón lento hacia el núcleo que absorbe es igual al trabajo necesario para tirar al neutrón de regreso al núcleo, esto es, a la energía de amarre E_n del neutrón. De manera muy parecida, la cantidad de energía de excitación que se entrega a un pozo cuando una piedra se arroja dentro de él es igual al trabajo necesario para sacar a la piedra del pozo, o sea, la "energía de amarre" E_p de la piedra. En el problema muestra 2 mostramos que la energía E_n de un neutrón en el ^{236}U es de 6.5 MeV.

La figura 3*c* muestra que el núcleo, que se comporta como una gota de líquido oscilatoria cargada energéticamente, tarde o temprano desarrollará un "cuello" corto y comenzará a separarse en dos "glóbulos" cargados. Si las condiciones son adecuadas, la repulsión electrostática entre estos dos glóbulos los obligará a separarse, rompiendo el cuello. Entonces se disparan los dos fragmentos, cada uno de ellos portando aún cierta energía residual de excitación. Ha ocurrido la fisión.

Hasta ahora este modelo proporciona un modelo cualitativo bueno del proceso de fisión. Sin embargo, queda por verse si puede responder a una pregunta difícil: "¿Por qué ciertos núclidos pesados (el ^{235}U y el ^{239}Pu, por ejemplo) son fácilmente fisionables mediante neutrones lentos mientras que otros núclidos (el ^{238}U y el ^{243}Am, por ejemplo), igualmente pesados, no lo son?".

Bohr y Wheeler fueron capaces de contestar esta pregunta. La figura 4 muestra la curva de energía potencial del proceso de fisión que se dedujo de su modelo. El eje horizontal muestra el *parámetro de distorsión* r, el cual constituye una medida burda de hasta qué punto el núcleo oscilatorio se aparta de una forma esférica. La figura 3*d* indica cómo se define este parámetro antes de que ocurra la fisión. Cuando los fragmentos están muy separados, este parámetro es simplemente la distancia entre sus centros.

En la figura 4 se muestra el intervalo de energía entre el estado inicial y el estado final de los núcleos al fisionarse —es decir, la energía de desintegración Q. Sin embargo, la característica central de dicha figura es que la curva de energía potencial pasa por un máximo para un cierto valor de r. Existe una *barrera de potencial* de altura E_b que debe ser traspasada (o atravesada por tunelización) antes de que pueda ocurrir la fisión. Esto nos recuerda la desintegración alfa (véase la Fig. 8 del capítulo 54), que

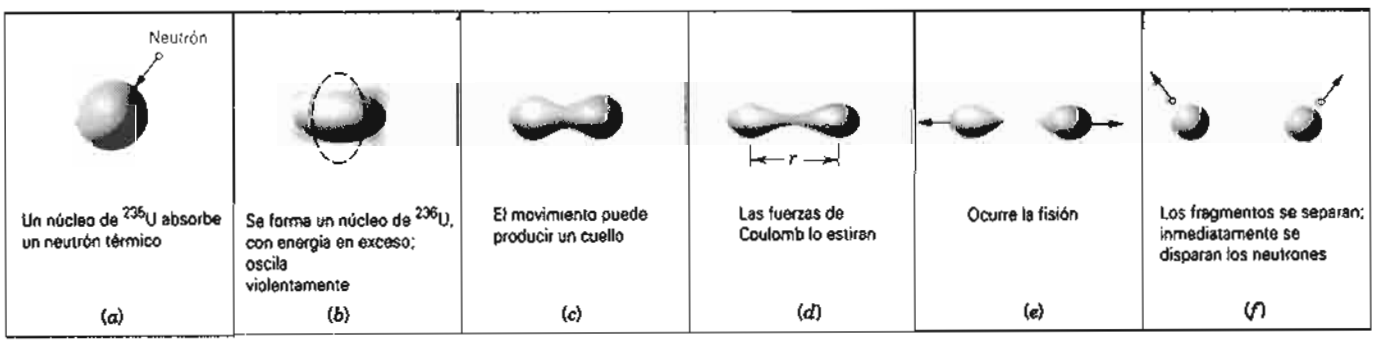


Figura 3 Etapas de un proceso de fisión, de acuerdo con el modelo de fisión de la gota de líquido.

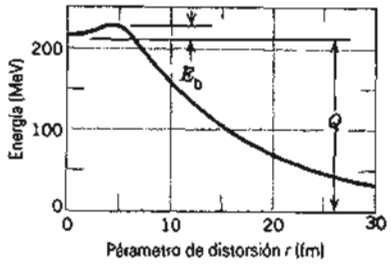


Figura 4 Energía potencial de las diferentes etapas del proceso de fisión, donde se muestra la energía de desintegración Q y la altura E_b de la barrera.

es también un proceso inhibido por una barrera de potencial. Vemos entonces que la fisión ocurrirá *sólo* si el neutrón absorbido proporciona una energía de excitación E_n lo suficientemente grande como para vencer la barrera o para tener una probabilidad razonable de atravesarla por tunelización.

La tabla 2 muestra una prueba de fisionabilidad por medio de neutrones térmicos aplicada a cuatro núclidos pesados, elegidos entre docenas de candidatos que pudieron haberse considerado. Se dan tanto la altura de la barrera E_b como la energía de excitación E_n de cada núclido. E_b se calculó de la teoría de Bohr y Wheeler, y E_n se calculó (como en el problema muestra 2) de las masas conocidas.

Vemos que $E_n > E_b$ en el ^{235}U y en el ^{239}Pu. Esto significa que se predice que ocurra la fisión en estos núclidos por la absorción de un neutrón térmico. Esto se confirma al advertir, en la tabla, las secciones transversales grandes (esto es, las probabilidades de reacción) medidas para el proceso.

Para los otros dos núclidos (el ^{238}U y el ^{243}Am), tenemos $E_n < E_b$, así que no existe la energía suficiente para superar la barrera o para que ocurra la tunelización a través de ella en forma efectiva. El núcleo excitado (Fig. 3*b*) prefiere deshacerse de su energía de excitación emitiendo un rayo gamma en lugar de romperse en dos fragmentos grandes. La tabla 2 muestra, como lo esperamos, que las secciones transversales de la fisión térmica por neutrones son, en estos casos, demasiado pequeñas. Sin embargo, estos núclidos *pueden* fisionar si absorben un neutrón sustancialmente energético (distinto al térmico). Por ejemplo, en el ^{238}U el neutrón absorbido debe tener una energía de al menos 1.3 MeV para que el proceso de fisión "ocurra" con una probabilidad razonable.

Problema muestra 2 Considérese un núcleo de ^{236}U en su estado base. ¿Cuánta energía se necesita para sacar un neutrón de allí, dejando atrás un núcleo de ^{235}U? Las masas atómicas necesarias son

^{235}U 235.043924 u; n 1.008665 u; ^{236}U 236.045563 u.

Solución El aumento de masa del sistema cuando se saca al neutrón es

$$\Delta m = 1.008665 \text{ u} + 235.043924 \text{ u} - 236.045563 \text{ u} = 0.007026 \text{ u}.$$

Esto significa que debe de emplearse una energía igual a

$$E_n = \Delta m\, c^2 = (0.007026 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 6.545 \text{ MeV}$$

Por definición, ésta es la energía de amarre del neutrón del núcleo de ^{236}U.

Cuando un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón térmico, la cantidad de energía de excitación que el neutrón térmico entrega al núcleo de ^{236}U es de 6.545 MeV. En efecto, el núcleo de ^{236}U se forma en un estado excitado de 6.545 MeV por arriba del estado base. El núcleo excitado puede deshacerse de esta energía ya sea emitiendo rayos gamma (lo cual deja un núcleo de ^{236}U en su estado base) o por fisión (véase la Ec. 1). Resulta que la fisión es aproximadamente seis veces más probable que la emisión de rayos gamma.

55-4 REACTORES NUCLEARES: PRINCIPIOS BÁSICOS

Las liberaciones de energía por átomo en sucesos nucleares individuales como la emisión alfa son alrededor de un

TABLA 2 PRUEBA DE LA FISIONABILIDAD DE CUATRO NÚCLIDOS

Núclido meta	*Núclido que se fisiona*	E_b (MeV)	E_n (MeV)	$E_n - E_b$ (MeV)	*Sección transversal de fisión*[a] (en barns)
^{235}U	^{236}U	5.2	6.5	+1.3	584
^{238}U	^{239}U	5.7	4.8	-0.9	2.7×10^{-6}
^{239}Pu	^{240}Pu	4.8	6.4	+1.6	742
^{243}Am	^{244}Am	5.8	5.5	-0.3	< 0.08

[a] La sección transversal es una medida de la probabilidad de que ocurra una reacción nuclear. La sección transversal se mide en la unidad barn, 1 barn = 10^{-28} m^2.

millón de veces mayores que aquellos de las reacciones químicas. Para hacer uso en gran escala de la energía nuclear, debemos disponer un suceso nuclear para que active a otro hasta que el proceso se disperse por todo el volumen de materia como una llama a través de un tronco ardiendo. El hecho de que en la fisión se generen más neutrones de los que se consumen (véase la Ec. 1) promueve precisamente esta posibilidad; los neutrones que se producen pueden causar la fisión en los núcleos vecinos y de este modo puede autopropagarse una cadena de sucesos de fisión. Tal proceso se llama *reacción en cadena*. Puede ser rápida y sin control como en una bomba nuclear o controlada como en un reactor nuclear.

Supongamos que deseamos diseñar un reactor nuclear basado, como lo están la mayoría de los reactores actuales, en la fisión del ^{235}U por neutrones lentos. En tales reactores el combustible se "enriquece" artificialmente, de modo que el ^{235}U constituye un porcentaje pequeño de los núcleos de uranio más bien que el 0.7% que ocurre en el uranio natural; el 99.3% restante del uranio natural es ^{238}U, que no es fisionable por neutrones térmicos. Si bien en promedio se producen 2.47 neutrones en la fisión del ^{235}U por cada neutrón térmico consumido, existen dificultades serias en hacer que una reacción en cadena "se active". He aquí tres de las dificultades, junto con sus soluciones:

1. *El problema de fuga de neutrones.* Cierto porcentaje de los neutrones que se producen simplemente se fugarán del núcleo del reactor y se perderán para la reacción en cadena. Si lo hacen demasiados de ellos, el reactor no funcionará. La fuga es un efecto de superficie, siendo su magnitud proporcional al *cuadrado* de la dimensión típica del núcleo del reactor (en una esfera, área superficial $= 4\pi r^2$). Sin embargo, la producción de neutrones es un efecto de volumen, proporcional al *cubo* de una dimensión típica (en una esfera, volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$). La fracción de neutrones perdidos por fuga puede hacerse tan pequeña como lo deseemos haciendo el núcleo de reactor lo suficientemente grande, disminuyendo así su razón superficie/volumen ($= 3/r$ en una esfera).

2. *El problema de la energía del neutrón.* La fisión produce neutrones *rápidos*, con energías cinéticas de unos 2 MeV, pero la fisión se induce más efectivamente por medio de neutrones *lentos*. Los neutrones rápidos pueden retardarse al mezclar el combustible de uranio con una sustancia que tenga estas propiedades: (*a*) que sea efectiva en causar que los neutrones pierdan energía cinética mediante colisiones y (*b*) que no absorba neutrones excesivamente, quitándolos así de la cadena de fisión. Tal sustancia se llama moderador. La mayoría de los reactores de energía en Estados Unidos se moderan con agua, donde los núcleos de hidrógeno (protones) son el elemento moderador efectivo.

3. *El problema de captura del neutrón.* Los neutrones pueden ser capturados por los núcleos de modo que la captura no dé por resultado una fisión. La posibilidad más común es la captura seguida por la emisión de un rayo gamma. En particular, cuando los neutrones rápidos (MeV) que se generan en los procesos de fisión son retardados en el moderador hasta el equilibrio térmico (0.04 eV), deben atravesar un intervalo de energía (1 a 100 eV) en el que son particularmente susceptibles a la captura sin fisión por el ^{238}U.

Para hacer mínima esta *captura por resonancia*, como se le llama, el combustible de uranio y el moderador (digamos, agua) no se mezclan íntimamente sino que se "aglutinan", permaneciendo en contacto íntimo entre sí pero ocupando regiones diferentes del volumen del reactor. La esperanza es que una fisión de neutrón rápida, producida en una "aglutinación" de uranio (la cual puede ser una barra de combustible), se encuentre a sí misma con alta probabilidad en el moderador al pasar a través de la región de energía "peligrosa" de resonancia. Una vez que haya alcanzado energías térmicas, viajará de regreso hacia una aglutinación de combustible y producirá un suceso de fisión. La tarea de los diseñadores de reactores es producir el arreglo geométrico del combustible y del moderador más efectivo.

La figura 5 muestra el balance neutrónico en un reactor de potencia típico operando con una producción estable. Rastreemos el comportamiento de una muestra de 1000 neutrones térmicos en el núcleo del reactor. Producen 1330 neutrones por fisión en el combustible de ^{235}U y 40 más mediante la fisión rápida en el ^{238}U, haciendo un total de 370 nuevos neutrones, todos ellos rápidos. Exactamente este mismo número de neutrones se pierde entonces en la cadena por fuga del núcleo y de la captura sin fisión, quedando 1000 neutrones térmicos para continuar la cadena. Por supuesto, lo que se gana en este ciclo es que cada uno de los 370 neutrones producidos por fisión han depositado unos 200 MeV de energía en el núcleo del reactor, calentándolo.

Un parámetro importante del reactor es el *factor de multiplicación k*, la razón del número de neutrones presente en el comienzo de una generación en particular al número presente en el comienzo de la generación subsecuente. En la situación de la figura 5, el factor de multiplicación es exactamente 1. Para $k = 1$, se dice que la operación del reactor es exactamente *crítica*, que es lo que deseamos que sea para una producción de energía estable. Los reactores se diseñan de modo que sean inherentemente *supercríticos* ($k > 1$); el factor de multiplicación se ajusta entonces para la operación crítica ($k = 1$) al introducir *barras de control* en el núcleo del reactor. Estas barras, que contienen un material como el cadmio que absorbe neutrones sin dificultad, pueden irse retirando según se necesite para compensar la tendencia del reactor

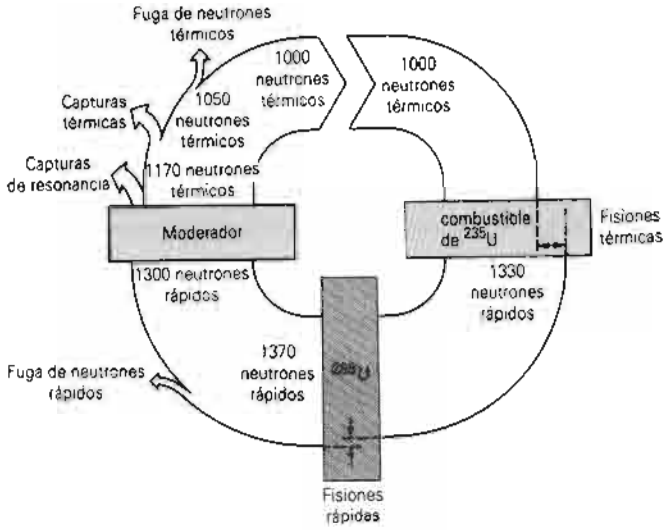


Figura 5 La generación de 1000 neutrones térmicos sigue diversas etapas en un reactor. Para un nivel de operación estable, la pérdida de neutrones debida a las capturas (en el combustible, el moderador y los elementos estructurales) y la fuga a través de la superficie se equilibran exactamente por la producción de neutrones en los procesos de fisión.

a pasar a subcrítico conforme los productos de fisión (absorbedores de neutrones) se generen en el núcleo durante la operación continua.

Si uno sacara una de las barras de control, ¿cuán rápido aumentaría el nivel de potencia del reactor? Este *tiempo de respuesta* se controla por medio de la fascinante circunstancia de que una pequeña fracción de los neutrones que se generan por fisión no se emite inmediatamente de los fragmentos de fisión recién formados sino que se emite de estos fragmentos posteriormente, conforme se desintegran por emisión beta. Por ejemplo, de los 370 "nuevos" neutrones que se analizan en la figura 5, alrededor de 16 se retrasan, siendo emitidos de fragmentos que siguen desintegraciones beta cuyas vidas medias varían entre 0.2 y 55 s. Estos neutrones retrasados son pocos en número pero sirven al útil propósito de retardar el tiempo de respuesta del reactor para igualar los tiempos de reacción humanos.

La figura 6 muestra a grandes rasgos una planta de energía eléctrica basada en un *reactor de agua a presión* (PWR: *pressurized-water reactor*), un tipo en uso común en Estados Unidos. En tal reactor, el agua se usa como moderador y como el medio de transferencia del calor. En el *circuito primario*, fluye agua a temperatura y presión elevadas (posiblemente 600 K y 150 atm) a través del recipiente del reactor y transfiere calor del núcleo del reactor al generador de vapor, lo cual proporciona vapor a alta presión para operar la turbina que impulsa al generador. Para completar el *circuito secundario*, el vapor a baja presión que viene de la turbina se condensa a agua la cual se fuerza de regreso al generador de vapor por medio de una bomba. Para dar cierta idea de la escala, un recipiente típico de un reactor en una planta (eléctrica) de 1000 MW puede tener unos 10 m de altura y pesar 450

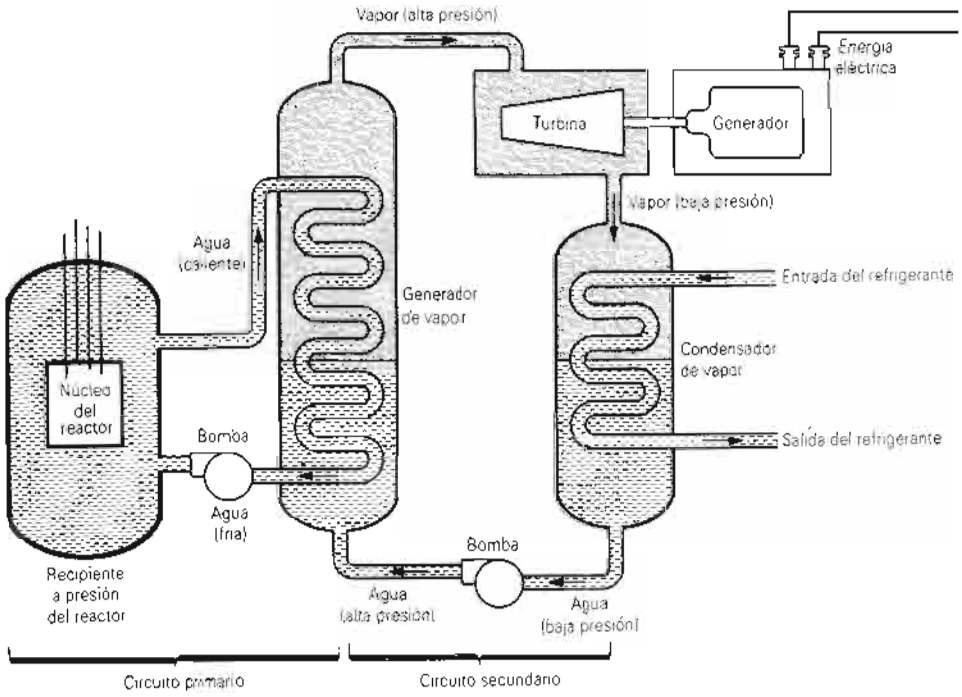


Figura 6 Un diagrama simplificado de una planta de energía nuclear basada en un reactor de agua a presión.

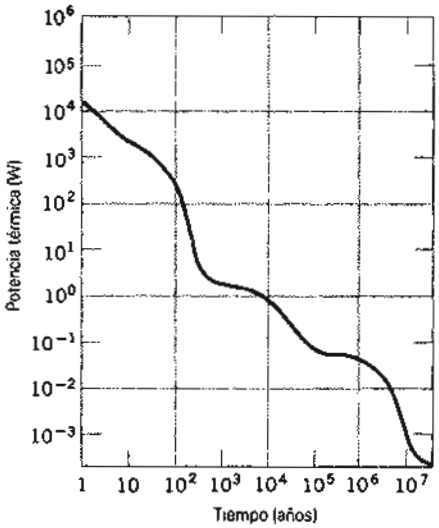


Figura 7 La potencia térmica liberada por desechos radiactivos en un año de operación de una gran planta de energía nuclear típica, en función del tiempo después de haber sido retirado el combustible. La curva representa el efecto de los muchos radionúclidos con un intervalo de vidas medias. Obsérvese que ambas escalas son logarítmicas.

toneladas. El agua fluye por el circuito primario con un gasto de unos 300,000 gal/min.

Una característica inevitable de la operación del reactor es la acumulación de desechos radiactivos, incluyendo tanto productos de fisión como núclidos "transuránicos" pesados como el plutonio y el americio. Una medida de su radiactividad es la velocidad con la cual liberan energía en forma térmica. La figura 7 muestra la variación con el tiempo de la potencia térmica generada por tales desechos en un año de operación de una gran planta nuclear típica. Nótese que ambas escalas son logarítmicas. La actividad total del desecho 10 años después de haberlo retirado del reactor es de unos 3×10^7 Ci.

Problema muestra 3 Una gran planta de generación de electricidad está impulsada por un reactor nuclear de agua a presión. La potencia térmica en el reactor es de 3400 MW, y se generan 1100 MW de electricidad. El combustible consta de 86,000 kg de uranio en forma de 110 toneladas de óxido de uranio, distribuido entre 57,000 barras de combustible. El uranio está enriquecido al 3% ^{235}U. (*a*) ¿Cuál es la eficiencia de la planta? (*b*) ¿Con qué velocidad R ocurren los sucesos de fisión en el núcleo del reactor? (*c*) ¿A qué velocidad está desapareciendo el combustible de ^{235}U? Suponga condiciones de arranque. (*d*) ¿Cuánto tiempo durará el abastecimiento de combustible con esta tasa de consumo? (*e*) ¿A qué razón se está perdiendo masa del núcleo del reactor?

Solución (*a*) La eficiencia e es la razón entre la producción de potencia (en forma de energía eléctrica) y el abasto de potencia (en forma de energía térmica), o sea

$$e = \frac{\text{salida eléctrica}}{\text{entrada térmica}} = \frac{1100\ \text{MW}}{3400\ \text{MW}}$$
$$= 0.32 \text{ o sea } 32\%.$$

Como en todas las plantas de energía, ya sean basadas en combustibles fósiles o en combustibles nucleares, la eficiencia está controlada por la segunda ley de la termodinámica. En esta planta, deben descargarse al ambiente 3400 MW - 1100 MW, o sea 2300 MW de potencia en forma de energía térmica.

(*b*) Si P (= 3400 MW) es la potencia térmica en el núcleo y Q (= 200 MeV) es la energía promedio liberada por suceso de fisión, entonces, en una operación en estado estacionario,

$$R = \frac{P}{Q} = \frac{3.4 \times 10^9\ \text{J/s}}{(200\ \text{MeV/fisión})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}$$
$$= 1.06 \times 10^{20}\ \text{fisiones/s}.$$

(*c*) El ^{235}U desaparece por fisión a la velocidad calculada en (*b*). Se consume también a través de la captura de neutrones (sin fisión) a una tasa de la cuarta parte de esa cantidad. La tasa total de consumo de ^{235}U es, entonces, $(1.25)(1.06 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1})$, o sea $1.33 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1}$. Repetimos esto como una tasa másica del modo siguiente:

$$\frac{dM}{dt} = (1.33 \times 10^{20}\ \text{s}^{-1}) \left(\frac{0.235\ \text{kg/mol}}{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}} \right)$$
$$= 5.19 \times 10^{-5}\ \text{kg/s} = 4.5\ \text{kg/d}.$$

(*d*) De los datos dados, podemos calcular que, al inicio, había unos (0.03)(86,000 kg), o sea 2600 kg de ^{235}U. Así, una respuesta un tanto simplista sería

$$T = \frac{2600\ \text{kg}}{4.5\ \text{kg/d}} = 580\ \text{d}.$$

En la práctica, las barras de combustible se reemplazan (a menudo en lotes) antes de que su contenido de ^{235}U se consuma por completo.

(*e*) De la relación de Einstein $E = \Delta m\, c^2$ podemos escribir

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dE/dt}{c^2} = \frac{3.4 \times 10^9\ \text{W}}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2}$$
$$= 3.8 \times 10^{-8}\ \text{kg/s} = 3.3\ \text{g/d}.$$

¡La tasa de pérdida de masa equivale casi a la masa de una moneda de cobre pequeña, cada día! Esta tasa de pérdida de masa (la reducción en la energía de reposo) es una cantidad muy diferente a la tasa de consumo de combustibles (pérdida de ^{235}U) calculada en el inciso (*c*).

55-5 UN REACTOR NATURAL

El 2 de diciembre de 1942, cuando el reactor construido por Enrico Fermi y sus colaboradores se convirtió en crítico por vez primera, tenían todo el derecho de suponer que habían puesto en operación el primer reactor de fisión que jamás había existido en este planeta. Unos 30 años más tarde se descubrió que, de hecho de haberlo pensado así, se habrían equivocado.

Hace unos dos mil millones de años, en un yacimiento de uranio que está hoy día siendo explotado en Gabón, África Occidental, entró en operación un reactor natural de fisión y funcionó quizás durante varios cientos de miles de años antes de dejar de operar por sí solo.

La historia de este descubrimiento es fascinante al nivel de la mejor de las aventuras detectivescas. Lo que es más importante, proporciona un ejemplo de primera clase de la naturaleza de evidencia científica necesaria para respaldar a lo que puede parecer a primera vista una afirmación improbable. Estableció una norma elevada para todos los que especulan acerca de sucesos pasados. Aquí consideramos sólo dos puntos.*

1. *¿Había suficiente combustible?* El combustible de un reactor de fisión basado en uranio debe ser el fácilmente fisionable isótopo ^{235}U, que constituye únicamente el 0.72% del uranio natural. Esta razón isotópica se ha medido no sólo en muestras terrestres sino también en rocas de la Luna y en los meteoritos, en los que se ha encontrado siempre el mismo valor. La pista inicial del descubrimiento en Gabón fue que el uranio de este depósito era deficiente en ^{235}U, teniendo algunas muestras una abundancia tan baja como de un 0.44%. La investigación condujo a la especulación de que este déficit de ^{235}U podría explicarse si, en algun tiempo en el pasado, este isótopo se hubiera consumido parcialmente por la operación de un reactor natural de fisión.

Queda el serio problema de que, con una abundancia isotópica de sólo el 0.72%, puede construirse un reactor (como lo aprendieron Fermi y su grupo) sólo con una enorme dificultad. No parece haber ninguna probabilidad de que hubiera sucedido naturalmente.

Empero, las cosas fueron diferentes en el pasado distante. Tanto el ^{235}U como el ^{238}U son radiactivos, con vidas medias de 0.704×10^9 y 4.47×10^9 años, respectivamente. Así, la vida media del fácilmente fisionable ^{235}U es de alrededor de 6.4 veces más corto que el del ^{238}U. Puesto que el ^{235}U se desintegra más rápidamente, en el pasado debió haber más de él en comparación con el ^{238}U. De hecho, hace dos mil millones de años, la abundancia no era del 0.72%, como lo es ahora, sino del 3.8%. Sucede que esta abundancia es justamente casi la abundancia a la que se enriquece artificialmente el uranio natural para servir como combustible en los reactores de energía modernos.

Con esta cantidad de combustible fácilmente fisionable disponible en el pasado remoto, la presencia de un reactor natural (siempre que se cumplan otras ciertas condiciones) es mucho menos sorprendente. El combustible estuvo allí. Por cierto, hace dos mil millones de años las formas de vida de orden superior que habían evolucionado eran las algas azulverdes.

2. *¿Cuál es la evidencia?* El simple agotamiento del ^{235}U en un yacimiento de mineral no es evidencia suficiente como base de una afirmación de la existencia de un reactor de fisión natural. Se necesitan pruebas más convincentes.

De haber habido un reactor, habría también los productos de la fisión; véase la figura 2. De los más o menos 30 elementos cuyos isótopos estables se producen de esta manera, algunos deben permanecer aún. El estudio de sus razones isotópicas podría proporcionar la evidencia convincente que necesitamos.

De los varios elementos investigados, el caso del neodimio es espectacularmente convincente. La figura 8*a* muestra las abundancias isotópicas de los siete isótopos estables del neodimio como se encuentran normalmente en la naturaleza. La figura 8*b* muestra estas abundancias como aparecen entre los productos estables finales de la fisión del ^{235}U. Las claras diferencias no son sorprendentes, considerando sus orígenes totalmente distintos. Los isótopos que se muestran en la figura 8*a* se formaron en explosiones de supernovas que ocurrieron antes de la formación de nuestro sistema solar. Los isótopos de la figura 8*b* se procesaron en un reactor con procesos totalmente diferentes. Nótese particularmente que el ^{142}Nd, el isótopo dominante en el elemento natural, está por completo ausente de los productos de fisión.

La gran pregunta es: "¿Cómo son los isótopos del neodimio hallados en los volúmenes de mineral de uranio de Gabón?". Debemos esperar que, de haber operado allí un reactor natural, pueden estar presentes los isótopos de *ambas* fuentes (esto es, los isótopos naturales y los isótopos producto de la fisión). La figura 8*c* muestra los resultados después de ésta y otras correcciones que se hicieron a los datos obtenidos. La comparación entre las figuras 8*b* y 8*c* indica ciertamente que ¡en verdad hubo un reactor natural de fisión en funcionamiento!

Problema muestra 4 La razón isotópica del ^{235}U al ^{238}U en depósitos de uranio naturales de hoy en día es de 0.0072. ¿Cuál era esta razón hace 2.0×10^9 años? Las vidas medias de los dos isótopos son de 0.704×10^9 años y 4.47×10^9 años, respectivamente.

Solución Consideremos dos muestras que, en un tiempo t en el pasado, contenían $N_5(0)$ y $N_8(0)$ átomos de ^{235}U y ^{238}U, respectivamente. Los números de átomos que quedan en el presente son

$$N_5(t) = N_5(0)e^{-\lambda_5 t} \quad \text{y} \quad N_8(t) = N_8(0)e^{-\lambda_8 t},$$

respectivamente, donde λ_5 y λ_8 son las constantes de desintegración correspondientes. Al dividir tenemos que

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_5(0)}{N_8(0)} e^{-(\lambda_5 - \lambda_8)t}.$$

---

* Para la historia completa, véase "A Natural Fission Reactor", por George A. Cowan, *Scientific American*, julio de 1976, pág. 36.

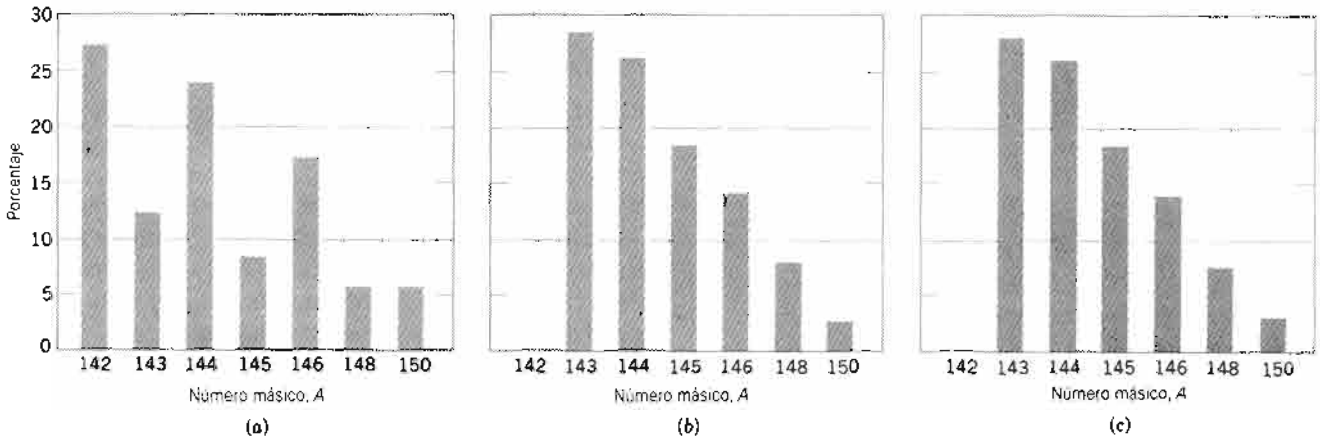


Figura 8 La distribución por número másico de los isótopos del neodimio como se encuentran en (*a*) depósitos terrestres naturales, (*b*) el combustible consumido de un reactor de energía y (*c*) la mina de uranio de Gabón, África occidental. Nótese que (*b*) y (*c*) son virtualmente idénticas y muy diferentes de (*a*).

Expresado en términos de la razón isotópica $R = N_5/N_8$, esto resulta

$$R(0) = R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t}.$$

Las constantes de desintegración se relacionan con las vidas medias por la ecuación 8 del capítulo 54, o sea

$$\lambda_5 = \frac{\ln 2}{t_{1/2,5}} = \frac{0.693}{7.04 \times 10^8 \text{ años}} = 0.984 \times 10^{-9} \text{ años}^{-1}$$

y

$$\lambda_8 = \frac{\ln 2}{t_{1/2,8}} = \frac{0.693}{4.47 \times 10^9 \text{ años}} = 0.155 \times 10^{-9} \text{ años}^{-1}.$$

Al sustituir en la expresión de la razón isotópica nos da

$$\begin{aligned} R(0) &= R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t} \\ &= (0.0072)e^{(0.984 - 0.155)(10^{-9} \text{ años}^{-1})(2.00 \times 10^9 \text{ años})} \\ &= (0.0072)e^{1.65} = 0.0378 \text{ o sea } 3.78\%. \end{aligned}$$

Vemos que, hace dos mil millones de años, la razón ^{235}U al ^{238}U en los depósitos naturales de uranio era mucho mayor de lo que es en la actualidad. Esta razón era del 30% cuando se formó la Tierra (hace 4500 millones de años).

55-6 FUSIÓN TERMONUCLEAR: PROCESO BÁSICO

Hemos señalado en relación con la curva de energía de amarre de la figura 6 del capítulo 54 que puede liberarse energía cuando núcleos ligeros se combinan para formar núcleos de un número másico un poco más grande, proceso llamado *fusión nuclear*. Sin embargo, este proceso está obstaculizado por la mutua repulsión de Coulomb que tiende a impedir que dos de tales partículas cargadas (positivamente) lleguen dentro del alcance de una con la otra de las fuerzas nucleares de atracción y "se fusionen". Esto nos recuerda la barrera potencial que inhibe a la fisión nuclear (véase la Fig. 4) y también la barrera que inhibe la desintegración alfa (véase la Fig. 8 del capítulo 54).

En el caso de la desintegración alfa, dos partículas cargadas —la partícula α y el núcleo residual— están inicialmente *dentro* de su barrera de potencial mutua. Para que se presente la desintegración alfa, la partícula debe penetrar esta barrera por el proceso de tunelización por una barrera y aparecer en el *exterior*. En la fusión nuclear la situación es precisamente la opuesta. Aquí las dos partículas deben penetrar su barrera mutua desde el *exterior*, si ha de ocurrir la interacción nuclear.

La interacción entre dos deuterones es de particular importancia en la fusión. El problema muestra 5 da un cálculo aproximado de la barrera de potencial entre dos deuterones, que resulta ser de unos 200 keV. La barrera correspondiente para dos núcleos de ^3He (carga = $+2e$) en interacción es de aproximadamente 1 MeV. Por supuesto, la barrera es correspondientemente más alta en partículas con carga mayor.

Una manera de hacer que los núcleos ligeros penetren su barrera de Coulomb mutua es usar una partícula ligera como blanco y acelerar a la otra por medio de un ciclotrón o un aparato similar. Sin embargo, para generar energía que sea útil a partir del proceso de fusión debemos tener la interacción de la materia a nivel macroscópico, como en el caso de la combustión del carbón. La técnica del ciclotrón no nos promete nada en este sentido. La mejor esperanza de lograr la fusión en la materia a nivel macros-

cópico de una manera controlada es elevar la temperatura del material de tal modo que las partículas tengan la energía suficiente para penetrar la barrera gracias a sus movimientos térmicos tan sólo. Este proceso se llama *fusión termonuclear.*

La energía cinética térmica media $\overline{K}$ de una partícula en equilibrio a la temperatura T está dada, como lo vimos en el capítulo 23, por

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}kT, \qquad (3)$$

donde k ($= 8.62 \times 10^{-5}$ eV/K) es la constante de Boltzmann. A temperatura ambiente ($T \approx 300$ K), $\overline{K} \approx 0.04$ eV, que es, por supuesto, demasiado pequeña para nuestros propósitos.

Aun en el centro del Sol, donde $T \approx 1.5 \times 10^7$ K, la energía cinética térmica media calculada de la ecuación 3 es de sólo 1.9 keV. Esto todavía parece desesperanzadoramente pequeño en vista de la magnitud de la barrera de Coulomb de 200 keV calculada en el problema muestra 5. Sin embargo sabemos que la fusión termonuclear no sólo ocurre en el interior solar sino que es su característica central y dominante.

El problema se resuelve al darse cuenta de que (1) la energía calculada de la ecuación 3 es una energía cinética *media*; las partículas con energías mucho mayores que este valor medio constituyen las "colas" de alta energía de las curvas de distribución maxwellianas de velocidades (véase la Fig. 10 del capítulo 24). También, (2) las alturas de la barrera que hemos señalado representan sólo los *picos* de las barreras. La tunelización por la barrera puede ocurrir en medida significativa con energías muy por debajo de estos picos, como lo vimos en la sección 54-4 en el caso de la desintegración alfa.

La figura 9 resume la situación con un ejemplo cuantitativo. La curva denotada por $n(K)$ en esta figura es una curva de distribución de energía de Maxwell trazada para corresponder con la temperatura del centro del Sol, 1.5×10^7 K. Si bien la misma curva es válida independientemente de qué partícula se considere, centramos nuestra atención en los protones, teniendo en cuenta que el hidrógeno constituye alrededor del 35% de la masa del núcleo central del Sol.

Para $T = 1.5 \times 10^7$ K, la ecuación 3 da $\overline{K} = 1.9$ keV, y este valor se indica por una línea vertical en la figura 9. Nótese que existen muchas partículas cuyas energías exceden este valor medio.

La curva denotada por $p(K)$ en la figura 9 es la probabilidad de penetración por la barrera para dos protones en colisión. Por ejemplo, para $K = 6$ keV tenemos $p = 2.4 \times 10^{-5}$. Ésta es la probabilidad de que dos protones en colisión, cada uno con $K = 6$ keV, logren penetrar su barrera mutua de Coulomb y queden al alcance de las otras fuerzas nucleares intensas. Dicho de otro modo, en promedio, uno de cada 42,000 de tales encuentros lo conseguirá.

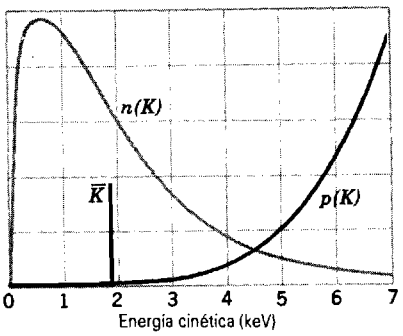


Figura 9 La curva denotada por $n(K)$ da la distribución de la energía de los protones en el núcleo del Sol, correspondiente a una temperatura de 1.5×10^7 K. La línea vertical indica la energía cinética media por partícula a dicha temperatura. La curva denotada por $p(K)$ da la probabilidad de penetración por la barrera en las colisiones entre protones. Las dos curvas están trazadas con escalas verticales arbitrarias diferentes.

Sucede que la energía más probable de los sucesos de fusión entre protones que ocurre a la temperatura en el centro del Sol es de unos 6 keV. Si la energía es mucho mayor, la barrera es penetrada más fácilmente (esto es, p es mayor), pero existen muy pocos protones en la "cola" maxwelliana (n es menor). Si la energía es mucho menor, existe una gran cantidad de protones pero ahora la barrera es demasiado formidable.

Problema muestra 5 El deuterón (^{2}H) tiene una carga $+e$, y se sabe que su radio es de 2.1 fm. Se disparan a dos de tales partículas una contra la otra con la misma energía cinética inicial K. ¿Cuál debe ser K si las partículas se llevan al reposo por medio de sus repulsiones de Coulomb mutuas cuando los dos deuterones apenas se "tocan"?

Solución Puesto que los dos deuterones están momentáneamente en reposo cuando se "tocan" uno al otro, su energía cinética se ha transformado por completo en energía potencial electrostática asociada con la repulsión de Coulomb entre ellas. Si las tratamos como cargas puntuales separadas por una distancia $2R$, tenemos

$$2K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2R},$$

lo cual da

$$K = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 R}$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(16\pi)(8.9 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{J}\cdot\text{m})(2.1 \times 10^{-15}\ \text{m})}\left(\frac{1\ \text{keV}}{1.6 \times 10^{-16}\ \text{J}}\right)$$

$$\approx 200\ \text{keV}.$$

Esta cantidad proporciona una medida razonable de la altura de la barrera de Coulomb entre los dos deuterones.

55-7 FUSIÓN TERMONUCLEAR EN LAS ESTRELLAS

Aquí se consideran con más detalle los procesos de fusión termonuclear que ocurren en nuestro Sol y en las demás estrellas. En lo profundo del Sol, donde se concentra su masa y donde se genera la mayor parte de su energía, la temperatura (en el centro) es de 1.5×10^7 K y la densidad en el centro es del orden de 10^5 kg/m^3, alrededor de 13 veces la densidad del plomo. La temperatura en el centro es tan elevada que, a pesar de la enorme presión allí (2×10^{11} atm), el Sol permanece totalmente gaseoso.

La composición presente del núcleo del Sol es de un 35% de hidrógeno por masa, alrededor del 65% de helio y cerca del 1% de otros elementos. A estas temperaturas los elementos ligeros están esencialmente ionizados, así que nuestra imagen corresponde a la de un agrupamiento de protones, electrones y partículas α con movimiento aleatorio.

El Sol irradia a razón de 3.9×10^{26} W y lo ha estado haciendo desde que existe el sistema solar, que son unos 4.5×10^9 años. Desde los años treinta se sabe que los procesos de fusión termonuclear en el interior del Sol son los que explican su prodigiosa generación de energía. Sin embargo, antes de analizar esto más extensamente, consideremos las otras dos posibilidades que primero se sugirieron. Consideremos primero reacciones químicas como la simple combustión. Si el Sol, cuya masa es de 2.0×10^{30} kg, estuviera hecho de carbón y oxígeno justo en las proporciones adecuadas para la combustión, tan sólo duraría unos 10^3 años, lo cual es, por supuesto, un tiempo demasiado breve (véase el problema 47). El Sol, como lo veremos, no quema carbón sino hidrógeno, y en un horno nuclear, no en uno atómico o químico.

Otra posibilidad es que, conforme el núcleo del Sol se enfría y su presión cae, éste se contraerá por la acción de sus propias fuerzas gravitatorias intensas. Mediante la transferencia de la energía potencial gravitatoria a energía interna (tal y como lo hacemos cuando dejamos caer una piedra sobre la superficie de la Tierra), la temperatura del núcleo del Sol se elevará de tal modo que la radiación pueda continuar. Sin embargo, los cálculos demuestran que el Sol podría irradiar por esta causa durante unos 10^8 años únicamente, demasiado poco por un factor de 30 (véase el problema 51).

La energía del Sol se genera por la "combustión" termonuclear (esto es, la "fusión") del hidrógeno para formar helio. La figura 10 muestra el *ciclo protón-protón* mediante el cual se logra esto. Nótese que cada reacción mostrada es una reacción de fusión, en la que uno de los productos (^{2}H, ^{3}He o ^{4}He) tiene un número másico mayor que cualquiera de las partículas reactivas que la forman. La energía de reacción Q de cada reacción que se muestra en la figura 10 es positiva. Esto caracteriza una reacción exotérmica, con la generación neta de energía.

El ciclo se inicia por la colisión de dos protones (^{1}H + ^{1}H) para formar un deuterón (^{2}H), con la creación simultánea de un positrón (e^+) y un neutrino (ν). El positrón encuentra muy rápidamente un electrón libre (e^-) en el Sol y ambas partículas se aniquilan, apareciendo sus energías de reposo como dos fotones de rayos gamma (γ), como lo vimos en la sección 8-7. En la figura 10 seguimos las consecuencias de dos de tales sucesos, como se indica en el renglón superior de la figura. Tales sucesos son extremadamente raros. De hecho, solamente se formará un deuterón una vez en 10^{26} colisiones protón-protón; en la gran mayoría de los casos, los protones simplemente se dispersarán al chocar. Es la lentitud de este proceso la que regula la velocidad de generación de energía y evita que el Sol explote. A pesar de esta lentitud, existen tantísimos protones en el enorme volumen del núcleo del Sol que, de esta manera, allí se produce deuterio ¡a razón de unos 10^{12} kg/s!

Una vez que se ha producido el deuterón, rápidamente (en unos pocos segundos) choca con otro protón y forma un núcleo de ^{3}He, como lo muestra el segundo renglón de la figura 10. Entonces dos de tales núcleos de ^{3}He pueden chocar finalmente (dentro de unos 10^5 años), formando una partícula α (^{4}He) y dos protones, como se muestra en el tercer renglón de la figura. Existen otras variaciones del ciclo protón-protón, en los que intervienen otros elementos ligeros, pero nos concentramos en la secuencia principal tal como se representa en la figura 10.

Al considerar una visión general del ciclo protón-protón, vemos que éste asciende a la combinación de cuatro protones y dos electrones para formar una partícula α, dos neutrinos y seis rayos gamma:

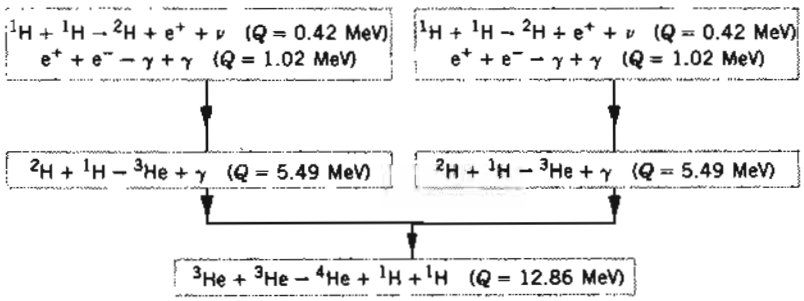


Figura 10 El ciclo protón-protón que explica primariamente la generación de energía en el Sol.

$$4^1\text{H} + 2e^- \rightarrow {}^4\text{He} + 2\nu + 6\gamma. \qquad (4)$$

Ahora, de una manera formal, sumemos dos electrones en cada uno de los miembros de la ecuación 4, lo que nos da

$$4(^1\text{H} + e^-) \rightarrow (^4\text{He} + 2e^-) + 2\nu + 6\gamma. \qquad (5)$$

Las cantidades entre paréntesis representan entonces *átomos* (no simples núcleos) de hidrógeno y de helio.

La liberación de energía en la reacción de la ecuación 5 es, al usar las masas atómicas del hidrógeno y del helio,

$$\begin{aligned} Q = \Delta m\, c^2 &= [4m(^1\text{H}) - m(^4\text{He})]c^2 \\ &= [4(1.007825\ \text{u}) - 4.002603\ \text{u}](931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 26.7\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Los neutrinos y los fotones de rayos gamma no tienen masa y por consiguiente no intervienen en el cálculo de la energía de desintegración. Este mismo valor de Q se deduce (como debe ser) al sumar los valores de Q de cada una de las etapas del ciclo protón-protón en la figura 10.

Realmente no se dispone de toda esta energía como energía interna dentro del Sol. Aproximadamente 0.5 MeV se asocian con los dos neutrinos que se producen en cada ciclo. Los neutrinos son tan penetrantes que en casi todos los casos escapan del Sol, llevando esta energía con ellos. Algunos son interceptados por la Tierra, los cuales son los que nos proporcionan la única información directa acerca del interior del Sol.

Al restar la energía del neutrino nos quedan 26.2 MeV por ciclo disponibles dentro del Sol. Como lo demostramos en el problema muestra 6, esto corresponde a un "calor de combustión" del quemado nuclear de hidrógeno a helio de 6.3×10^{14} J/kg de hidrógeno consumido. A modo de comparación, el calor de combustión del carbón es de alrededor de 3.3×10^7 J/kg, unos 20 millones de veces menor, reflejando grosso modo la razón general de las energías en los procesos nuclear y químico.

Podemos preguntar cuánto tiempo continuará brillando el Sol con su tasa actual antes de que todo el hidrógeno de su núcleo se convierta en helio. La combustión del hidrógeno ha venido sucediendo durante 4.5×10^9 años, y los cálculos demuestran que existe disponible el hidrógeno suficiente para unos 5×10^9 años más. En ese tiempo comenzarán a ocurrir cambios de consideración. El núcleo del Sol, que para entonces será helio en su mayor parte, comenzará a sufrir un colapso y a calentarse mientras la envolvente exterior se expandirá mucho, quizás hasta el punto de abarcar la órbita de la Tierra. El Sol se convertirá en lo que los astrónomos llaman una *gigante roja*.

Si la temperatura del núcleo se eleva hasta unos 10^8 K, puede producirse energía al quemar helio hasta que se forme carbono. El helio no se quema fácilmente, siendo la única reacción posible

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma \qquad (Q = +7.3\ \text{MeV}).$$

Tal colisión de tres cuerpos de tres partículas α debe ocurrir dentro de 10^{-16} s si la reacción ha de efectuarse. No obstante, si la densidad y la temperatura del núcleo de helio son lo suficientemente elevadas, se generará de este modo carbono por la combustión del helio.

Pueden formarse otros elementos por otras reacciones de fusión mientras que la estrella evoluciona y se vuelve todavía más caliente. Sin embargo, los elementos más allá de $A = 56$ no pueden producirse mediante procesos de fusión posteriores. Los elementos con $A = 56$ (^{56}Fe, ^{56}Co, ^{56}Ni) se encuentran cerca del pico de la curva de energías de amarre de la figura 6 del capítulo 54, y la fusión entre núclidos más allá de este punto implica el consumo, y no la generación, de energía. En el capítulo 56 se estudia la producción de los elementos en procesos de fusión.

Problema muestra 6 ¿A qué velocidad se está consumiendo el hidrógeno en el núcleo del Sol, suponiendo que toda la energía irradiada se genere por el ciclo protón-protón de la figura 10?

Solución Hemos visto que aparecen 26.2 MeV como energía interna en el Sol por cada cuatro protones consumidos, a razón de 6.6 MeV/protón. Podemos expresarlo como

$$\left(\frac{6.6\ \text{MeV/protón}}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg/protón}}\right)(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV}) \approx 6.3 \times 10^{14}\ \text{J/kg},$$

lo cual nos dice que el Sol irradia 6.3×10^{14} J por cada kilogramo de protones consumido. La velocidad de consumo de hidrógeno es entonces igual a la generación de energía ($\approx 3.9 \times 10^{26}$ W) dividida entre esta cantidad, o sea

$$\frac{dm}{dt} = \frac{3.9 \times 10^{26}\ \text{W}}{6.3 \times 10^{14}\ \text{J/kg}} \approx 6.2 \times 10^{11}\ \text{kg/s}.$$

Para darse una idea de este número, téngase en cuenta que la masa del Sol es de 2.0×10^{30} kg.

55-8 FUSIÓN TERMONUCLEAR CONTROLADA

Las reacciones termonucleares han venido sucediéndose en el Universo desde su creación en el presunto "big bang" cósmico de hace unos 15,000 millones de años. Sin embargo, tales reacciones han ocurrido en la Tierra tan sólo desde octubre de 1952, cuando explotó la primera bomba de fusión (o de hidrógeno). En este caso las altas temperaturas necesarias para iniciar la reacción termonuclear fueron proporcionadas por medio de una bomba de fisión usada como un disparador.

Una fuente de energía termonuclear sostenida y controlable —un reactor de fusión— está mostrando ser mucho

más difícil de lograr. Sin embargo, este objetivo se persigue con gran interés, pues muchos consideran el reactor de fusión como la fuente de energía fundamental del futuro, por lo menos en lo que se refiere a la generación de electricidad.

La interacción protón-protón que se muestra en la figura 10 no es apropiada para su uso en el reactor de fusión terrestre ya que el proceso exhibido en el primer renglón es desesperanzadoramente lento. La sección transversal de la reacción es de hecho tan pequeña que no puede medirse en el laboratorio. La reacción se logra en las condiciones que prevalecen en los interiores estelares sólo gracias al enorme número de protones disponible en los núcleos estelares de alta densidad.

Las reacciones más atractivas para el uso terrestre parecen ser las reacciones entre deuterones (d-d) y aquéllas entre el deuterón y el tritón (d-t):

$$\text{d-d:}\quad {}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \text{n} \qquad (Q = +3.27\ \text{MeV}), \quad (6)$$

$$\text{d-d:}\quad {}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + {}^1\text{H} \qquad (Q = +4.03\ \text{MeV}), \quad (7)$$

$$\text{d-t:}\quad {}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{n} \qquad (Q = +17.59\ \text{MeV}). \quad (8)$$

Aquí el *tritón* indica ^{3}H, el núcleo de hidrógeno con $A = 3$. Nótese que cada una de estas reacciones es realmente una reacción de fusión y tiene un valor Q positivo. Se dispone del deuterio, cuya abundancia isotópica en el hidrógeno normal es del 0.015%, en cantidades ilimitadas como un componente del agua de mar. El tritio (^{3}H atómico) es radiactivo y no se encuentra por lo general en el hidrógeno en estado natural.

Existen tres requisitos básicos para la operación exitosa de un reactor termonuclear:

1. *Una alta densidad n de las partículas.* El número de partículas interactuantes (por ejemplo, deuterones) por unidad de volumen debe ser lo suficientemente grande como para asegurar una gran cantidad de colisiones entre deuterones suficientemente elevada. Para las altas temperaturas necesarias, el gas deuterio se ionizaría completamente en un *plasma* neutro consistiendo en deuterones y electrones.

2. *Una alta temperatura T del plasma.* El plasma debe ser caliente. De otro modo los deuterones que chocan no tendrán la energía suficiente para penetrar la mutua barrera de Coulomb que tiende a mantenerlos separados. En las investigaciones de la fusión, a menudo las temperaturas se expresan dando el valor correspondiente de kT (no el de $\frac{3}{2}kT$). En el laboratorio se ha obtenido una temperatura del plasma de 33 keV, que corresponde a 2.8×10^8 K. Ésta es mucho más elevada que la temperatura del centro del Sol (1.3 keV o 1.5×10^7 K).

3. *Un tiempo de confinamiento* τ largo. Un problema principal es el contener el plasma caliente el tiempo necesario para asegurar que su densidad y temperatura permanezcan lo suficientemente elevadas. Es evidente que ningún contenedor sólido real puede soportar las elevadas temperaturas necesariamente implicadas, así que deben emplearse técnicas especiales, que se describirán más adelante. Se han logrado tiempos de confinamiento mayores de 1 s mediante el uso de una de esas técnicas.

Puede demostrarse que, para la operación exitosa de un reactor termonuclear, es necesario tener

$$n\tau \geq 10^{20}\ \text{s}\cdot\text{m}^{-3}, \qquad (9)$$

una condición llamada *criterio de Lawson*. La ecuación 9 nos dice, hablando vagamente, que podemos optar por confinar un gran número de partículas durante un tiempo relativamente breve o, en cambio, por confinar muchas menos partículas durante un tiempo un poco más largo. Además de cumplir con este criterio, es también necesario que la temperatura sea lo suficientemente elevada.

Existen dos técnicas que se han empleado en el intento por lograr la combinación de la temperatura T y el parámetro de Lawson $n\tau$ que son necesarias para producir reacciones de fusión. El *confinamiento magnético* emplea campos magnéticos para confinar al plasma mientras que aumenta su temperatura. Por otra parte, en el *confinamiento inercial* se comprime una pequeña cantidad de combustible y se calienta tan rápidamente que la fusión ocurre antes de que el combustible pueda expandirse y enfriarse. Estas técnicas se estudian en las dos secciones que siguen.

Deducción del criterio de Lawson *(Opcional)*

Veamos cómo surge el criterio de Lawson. Para llevar a un plasma a una temperatura apropiadamente elevada y mantenerlo allí contra pérdidas, debe agregarse energía al plasma con una velocidad P_c por unidad de volumen, donde el subíndice quiere decir "calentamiento". El calentamiento puede efectuarse mediante el paso de una corriente eléctrica a través del plasma, mediante el disparo de un haz de partículas energéticas neutras hacia él, o de otros modos. Cuanto más denso sea el plasma, mayor será la energía de calentamiento necesaria, en proporción directa, o sea

$$P_c = C_c n, \qquad (10)$$

donde C_c es una constante apropiada.

Si la fusión termonuclear ocurre en el plasma, habrá una cierta velocidad de generación de energía por unidad de volumen P_f, donde el subíndice quiere decir "fusión". P_f es proporcional al tiempo de confinamiento τ. También es proporcional a n^2, donde n es la densidad de las partículas. Para ver esto, supóngase que la densidad de las partículas se duplica. No sólo tendrá una partícula el doble de choques al desplazarse a través del plasma, sino que existirán el doble de partículas en movimiento, dando un factor total de cuatro. Así,

$$P_f = C_f n^2 \tau. \qquad (11)$$

Para tener una generación de energía neta, debemos tener

$$P_f > P_c$$

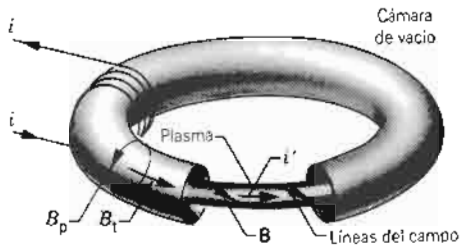


Figura 11 La cámara toroidal que constituye la base del tokamak. Nótese el plasma, el campo magnético helicoidal B que lo confina, y la corriente inducida *i'* que lo calienta.

o, de las ecuaciones 10 y 11,

$$n\tau > C_e/C_f,$$

lo que conduce directamente a la ecuación 9 cuando las constantes C_e y C_f se evalúan apropiadamente. La condición en la que $P_f = P_e$ se llama de *equilibrio*. ■

55-9 CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

Puesto que el plasma consta de partículas cargadas, su movimiento puede controlarse con campos magnéticos. Por ejemplo, las partículas cargadas se mueven en espiral alrededor de la dirección de un campo magnético uniforme. Al variar apropiadamente la intensidad del campo, es posible diseñar un "espejo magnético" (véase la Fig. 14 del capítulo 34) del cual puedan reflejarse las partículas. Otro diseño hace uso de la geometría toroidal, donde las partículas se mueven en espiral alrededor del eje de un toroide colocado dentro de una cámara de vacío en "forma de rosca". El tipo de reactor de fusión basado en este principio, que se desarrolló por vez primera en Rusia, se llama *tokamak*, que proviene del acrónimo en lengua rusa con el que se designa a una "cámara magnética toroidal". Se han construido y probado varias máquinas grandes de este tipo.

En un tokamak existen dos componentes del campo magnético, como se ilustra en la figura 11. El campo *toroidal* B_t es el que generalmente asociamos con un devanado toroidal de conductores; la figura 11 muestra una pequeña sección de una bobina externa que contribuye al campo toroidal. Ya que el campo toroidal disminuye al aumentar el radio, es necesario agregar una segunda componente de campo para confinar las partículas. Esta componente *poloidal* B_p del campo se suma a la componente toroidal para dar al campo total una estructura helicoidal, como se ilustra en la figura 11. El campo poloidal se produce mediante una corriente *i'* en el plasma mismo, que se induce mediante un grupo de devanados que no se ilustra en la figura. Esta corriente sirve también

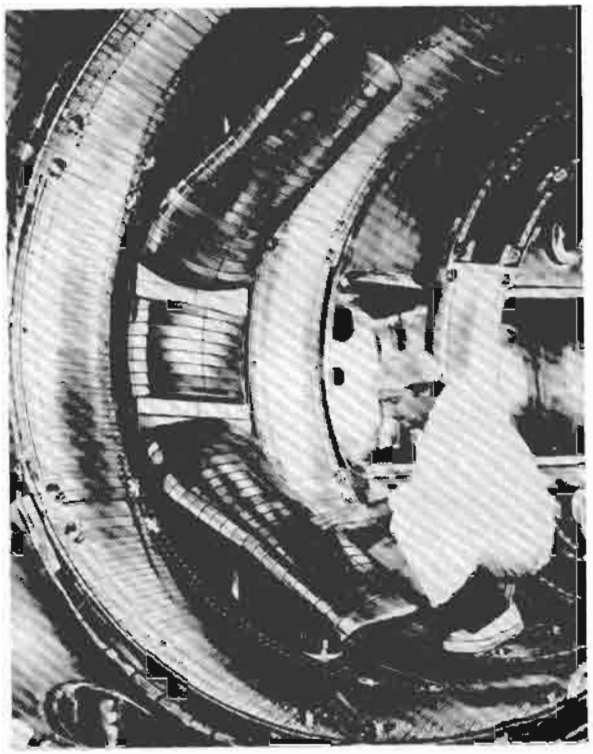


Figura 12 Una persona dentro de la cámara toroidal del reactor Tokamak de pruebas de fusión, en la Universidad de Princeton.

para calentar al plasma. Para lograr la temperatura deseada en el plasma también se necesitan medios de calentamiento adicionales, como el disparo de haces neutros de partículas hacia el plasma.

La figura 12 muestra a una persona en el interior de la cámara de vacío toroidal del reactor Tokamak de pruebas de fusión en el Laboratorio de física de plasmas de Princeton. El radio interior de la cámara de vacío es de unos 2 m, y el radio mayor del toroide es de 2.5 m.

Al diseñar aparatos de confinamiento magnético como el tokamak, el objetivo es aumentar tanto el parámetro de confinamiento de Lawson $n\tau$ como la temperatura T del plasma. Para valores de estos parámetros suficientemente elevados, las reacciones de fusión en el plasma producirán la energía suficiente para igualar la energía que debe de ser suministrada para calentar el plasma. Esta condición se llama "equilibrio". Para valores de estos parámetros todavía más elevados, el aparato puede lograr la "ignición", donde ocurrirán reacciones autoalimentadas de fusión. La figura 13 ilustra el progreso continuo logrado hacia estos objetivos. A pesar de aproximarse a la condición de equilibrio, quedan muchos problemas formidables de ingeniería que resolver, y es probable que la generación de energía eléctrica de la fusión esté todavía a varias décadas de distancia.

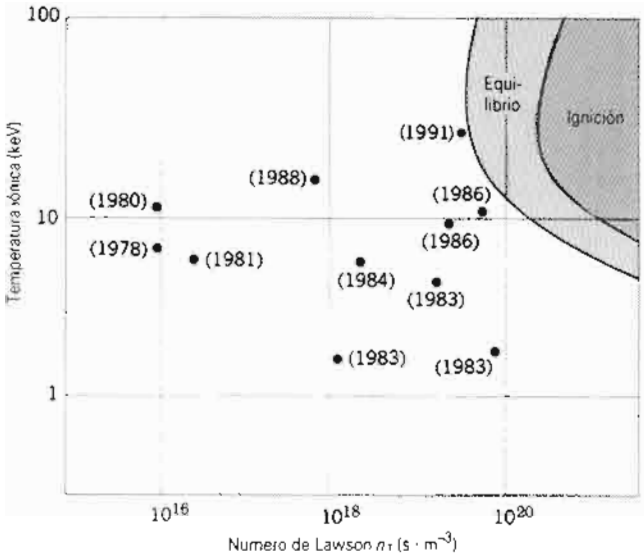


Figura 13 La tendencia al equilibrio y la ignición en los reactores de fusión controlada, mostrada en forma de una gráfica del número de Lawson contra la temperatura.

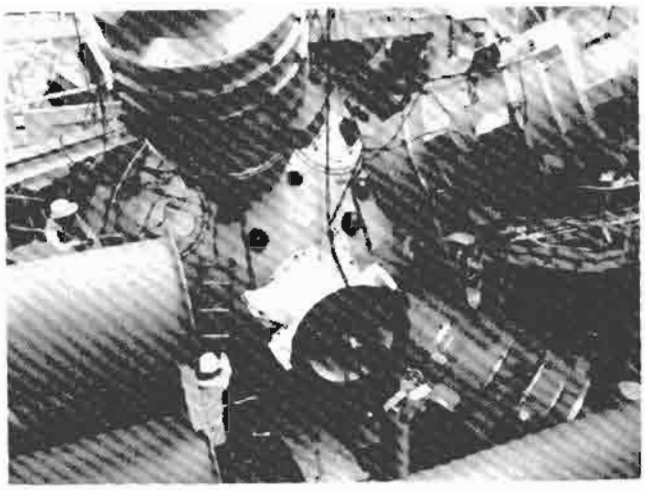


Figura 14 La cámara blanco de la instalación NOVA de fusión por confinamiento inercial en el laboratorio nacional Lawrence Livermore. La fotografía muestra varios de los 10 tubos de haces de láser.

Problema muestra 7 El reactor Tokamak de pruebas de fusión en Princeton ha logrado un tiempo de confinamiento de 400 ms. (*a*) ¿Cuál debe ser la densidad de las partículas en el plasma si ha de satisfacerse el criterio de Lawson? (*b*) ¿Cómo se compara este número con la densidad de las partículas de los átomos de un gas ideal en condiciones normales? (*c*) Si pudiera alcanzarse la ignición en un tokamak de la próxima generación, con una temperatura del plasma de 10 keV y un tiempo de confinamiento de 1 s, ¿cuál sería la densidad de las partículas que tendría que tener este plasma?

Solución (*a*) Si se emplea el criterio de Lawson (Ec. 9), debemos tener

$$n = \frac{10^{20}\ \text{s}\cdot\text{m}^{-3}}{0.40\ \text{s}} = 2.5 \times 10^{20}\ \text{m}^{-3}.$$

(*b*) La densidad del número de átomos en un gas ideal en las condiciones normales está dada por $n' = N_A/V_m$, donde N_A es la constante de Avogadro y V_m ($= 2.24 \times 10^{-2}$ m^3/mol) es el volumen molar de un gas ideal en condiciones normales, lo cual da

$$n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}}{2.24 \times 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{mol}} = 2.7 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}.$$

La densidad de las partículas del plasma que hallamos en el inciso (*a*) es menor que la de un gas ideal por un factor de 10^5 aproximadamente.

(*c*) De la figura 13 vemos que la línea de la temperatura de 10 keV interseca a la curva que señala la "ignición" en un valor del número de Lawson de 1×10^{21} s · m^{-3}, aproximadamente. (Al hacer esta última estimación, téngase presente que la escala es logarítmica.) La densidad de las partículas necesaria es, entonces,

$$n = \frac{1 \times 10^{21}\ \text{s}\cdot\text{m}^{-3}}{1\ \text{s}} = 1 \times 10^{21}\ \text{m}^{-3}.$$

55-10 CONFINAMIENTO INERCIAL

Una segunda técnica para confinar el plasma de modo que pueda ocurrir la fusión termonuclear se llama *confinamiento inercial*. En términos del criterio de Lawson (Ec. 9), implica trabajar con densidades de partículas n extremadamente grandes durante tiempos de confinamiento τ extremadamente breves. Estos tiempos hacen que sean tan cortos que el proceso de la fusión termina antes de que las partículas del plasma tengan tiempo de moverse de manera perceptible de las posiciones que ocupan al inicio de la fusión. Las partículas interactuantes se confinan por su propia inercia.

Se está investigando en laboratorios alrededor del mundo la *fusión por láser*, que se basa en el principio del confinamiento inercial. En el laboratorio Lawrence Livermore, por ejemplo, en el proyecto NOVA de fusión por láser (véase la Fig. 14) van a ser "fulminadas" pequeñas bolitas de combustible deuterio-tritio, cada una más pequeña que un grano de arena (véase la Fig. 15) mediante 10 pulsos sincronizados de láser de alta potencia, dispuestos simétricamente alrededor de la esferita. Los pulsos de láser están diseñados para entregar en total unos 200 kJ de energía a cada bolita de combustible en menos de un nanosegundo. Esto es una entrega de potencia de 2×10^{14} W durante el pulso, lo cual equivale a ¡unas 100 veces la capacidad total de generación de energía eléctrica del mundo!

La energía de los pulsos de láser sirve para calentar la bolita de combustible, ionizándola para formar un plasma y —se espera— subir su temperatura hasta alrededor de 10^8 K. Conforme se evaporan las capas superficiales

Figura 15 Las minúsculas esferas, que se muestran descansando sobre una moneda estadounidense de diez centavos, son bolitas de combustible deuterio-tritio para usarse en experimentos de confinamiento inercial.

de la bolita con estas velocidades térmicas grandes, la fuerza de reacción de las partículas que escapan comprime el núcleo de la bolita, aumentando su densidad por un factor de quizás 10^3. Si todas estas cosas sucedieran, entonces las condiciones serían las adecuadas para que se presente la fusión termonuclear en el núcleo de la altamente comprimida bolita de plasma, siendo la reacción de fusión la reacción d-t dada en la ecuación 8.

Se prevé que, en un reactor termonuclear en operación del tipo de fusión por laser, las bolitas de combustible explotarán al igual que bombas de hidrógeno en miniatura a razón de quizás 10 a 100 por segundo. Las partículas energéticas emergentes de la reacción de fusión (^{4}He y n) pueden absorberse en una "sábana" consistente en una corriente de litio fundido en movimiento, calentándola. Entonces se extraería de la corriente de litio energía interna de otro lugar y se usaría para generar vapor, tal y como en un reactor de fisión o en una planta de energía por combustibles fósiles. El litio sería una elección apropiada para el medio de transferencia de calor porque los neutrones energéticos entregarían, con alta probabilidad, su energía a la "sábana" por la reacción

$$^6\text{Li} + \text{n} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{H}.$$

Las dos partículas cargadas serían llevadas al reposo sin dificultad en el litio. Puede extraerse el tritio que se produce en la reacción para usarlo como combustible en el reactor. La posibilidad de la fusión por láser como base de un reactor de fusión no ha sido demostrada concluyentemente, desde 1991, pero se continúa afanosamente con la investigación.

Problema muestra 8 Supóngase que una bolita de combustible, en un dispositivo de fusión por láser, está hecha de una mezcla líquida de deuterio y tritio que contiene números iguales de átomos de deuterio y de tritio. Se aumenta la densidad d ($= 200\ \text{kg/m}^3$) de la bolita por un factor de 10^3 mediante la acción de pulsos láser. (*a*) ¿Cuántas partículas por unidad de volumen (ya sea deuterones o tritones) contiene la bolita en su estado comprimido? (*b*) De acuerdo con el criterio de Lawson, ¿durante cuánto tiempo debe mantener la bolita esta densidad de partículas si ha de ocurrir la operación de equilibrio?

Solución (*a*) Podemos escribir, en cuanto a la densidad d' de la bolita comprimida,

$$d' = 10^3 d = m_d \frac{n}{2} + m_t \frac{n}{2},$$

donde n es el número de partículas por unidad de volumen (ya sean deuterones o tritones) en la bolita comprimida, m_d es la masa de un átomo de deuterio, y m_t es la masa de un átomo de tritio. Estas masas atómicas se relacionan con la constante de Avogadro N_A y con las masas molares correspondientes (M_d y M_t) por

$$m_d = M_d/N_A \quad \text{y} \quad m_t = M_t/N_A.$$

Al combinar estas ecuaciones y al despejar n nos lleva a

$$\begin{aligned} n &= \frac{2d'N_A}{M_d + M_t} \\ &= \frac{(2)(10^3 \times 200\ \text{kg/m}^3)(6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})}{2.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol} + 3.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}} \\ &= 4.8 \times 10^{31}\ \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

(*b*) Con base en el criterio de Lawson (Ec. 9), tenemos

$$\tau > \frac{10^{20}\ \text{s} \cdot \text{m}^{-3}}{n} = \frac{10^{20}\ \text{s} \cdot \text{m}^{-3}}{4.8 \times 10^{31}\ \text{m}^{-3}} = 2 \times 10^{-12}\ \text{s}.$$

La bolita debe permanecer comprimida cuando menos este tiempo si ha de ocurrir la operación de equilibrio. (También se necesita que la temperatura efectiva sea lo suficientemente alta.)

Una comparación con el problema muestra 7 nos dice que, a diferencia de lo que sucede en la operación del tokamak, la fusión de láser busca operar en los dominios de densidades de partículas muy elevadas y tiempos de confinamiento correspondientemente muy breves.

PREGUNTAS

1. Si es mucho más difícil sacar un nucleón fuera de un núcleo que sacar un electrón fuera de un átomo, ¿por qué intentarlo?
2. ¿Puede decir, al examinar la tabla 1, que una fuente de energía, o de potencia, es mejor que otra? Si no lo es, ¿qué otras consideraciones intervienen?
3. ¿A cuál de los procesos de la tabla 1 se aplica la relación $E = \Delta m\, c^2$?
4. De las dos estelas de los fragmentos de fisión que se muestran en la figura 1, ¿qué fragmento tiene, (*a*) el ímpetu, (*b*) la energía cinética, (*c*) la velocidad, (*d*) la masa, más grande?
5. En la ecuación generalizada de la fisión del ^{235}U por neutrones térmicos, $^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow X + Y + b\text{n}$, ¿espera usted que la Q de la reacción dependa de la identidad de X y Y?
6. ¿Es la curva de los fragmentos de fisión de la figura 2 necesariamente simétrica alrededor de su mínimo central? Explique su respuesta.
7. ¿Por qué no se presentan desintegraciones β^+ en las desintegraciones en cadena de los fragmentos de fisión primaria (véase la Ec. 2)?
8. La vida media del ^{235}U es de 7.0×10^8 años. Analice la aseveración de que si ésta hubiera resultado ser menor por un factor de 10 más o menos, no habría bombas atómicas en la actualidad.
9. El ^{238}U no es fisionable por medio de neutrones térmicos. ¿Que energía neutrónica mínima cree que sería necesaria para inducir la fusión en este núclido?
10. La vida media de desintegración del ^{235}U por emisión alfa es de 7×10^8 años; mediante la fisión espontánea, actuando por sí sola, sería de 3×10^{17} años. Ambos son procesos de tunelización por una barrera, como lo muestran la figura 8 del capítulo 54 y la figura 4 del capítulo 55. ¿Por qué esta enorme diferencia en la probabilidad de tunelización por una barrera?
11. Compare la fisión con la desintegración alfa de tantas maneras como sea posible. ¿Cómo puede entregar un neutrón térmico varios millones de electronvolts de energía de excitación a un núcleo que lo absorba, como en la figura 3*a*? Para comenzar, ¡el neutrón carece esencialmente de energía!
12. La curva de la energía de amarre de la figura 6 en el capítulo 54 nos dice que cualquier núcleo más masivo que $A \approx 56$ puede liberar energía mediante el proceso de fisión. Sin embargo, sólo los núclidos muy masivos parecen hacerlo. ¿Por qué el plomo, por ejemplo, no puede liberar energía por el proceso de fisión?
13. Es posible, por medio del bombardeo de núclidos pesados en el laboratorio, preparar otros núclidos pesados que se desintegren, por lo menos en parte, por la *fisión espontánea*. Es decir, después de una cierta vida media se dividen espontáneamente en dos fragmentos principales. ¿Puede usted explicarlo con base en la teoría de Bohr y Wheeler?
14. Los neutrones lentos son más efectivos para inducir la fisión que los rápidos. ¿Puede usted hacer eso factible? (*Sugerencia*: Considere cómo pudiera relacionarse la longitud de onda de de Broglie con su sección transversal de captura en el ^{235}U.)
15. Compare un reactor nuclear con una fogata de carbón. ¿En qué sentido ocurre una reacción en cada uno? ¿Cuál es el mecanismo de liberación de energía en cada caso?
16. No todos los neutrones que se producen en un reactor se destinan a iniciar un suceso de fisión. ¿Qué les pasa a aquellos que no?
17. Explique qué significa precisamente la aseveración de que, en el núcleo de un reactor, la pérdida de neutrones es un efecto de superficie y la producción de neutrones es un efecto de volumen.
18. Explique el objeto del moderador en un reactor nuclear. ¿Es posible diseñar un reactor que no necesite un moderador? De ser así, ¿cuáles son algunas de las ventajas y desventajas de tal reactor?
19. Describa cómo operar las barras de control de un reactor nuclear (*a*) durante el arranque inicial, (*b*) para reducir el nivel de energía y (*c*) con base en un periodo prolongado, conforme se va consumiendo el combustible.
20. Un reactor está operando a potencia plena con su factor de multiplicación k ajustado a la unidad. Si después ajustamos el reactor para que opere establemente a media potencia, ¿qué valor de k debemos suponer para este caso?
21. La separación de los dos isótopos ^{238}U y ^{235}U del uranio natural requiere un método físico, como la difusión, más bien que un método químico. Explique por qué.
22. Un trozo de ^{235}U (o de ^{239}Pu) puro explotará espontáneamente cuando sea mayor que cierto "tamaño crítico". Un trozo más pequeño no explotará. Explique.
23. ¿Qué puede decir, acerca del valor del factor de multiplicación k en una bomba atómica (de fisión)?
24. Se cree que el núcleo de la Tierra en su mayor parte es hierro porque, durante la formación de la Tierra, los elementos pesados como el hierro se habrían hundido hacia el centro de la Tierra y los elementos más ligeros, como el silicio, habrían flotado ascendiendo para formar la corteza de la Tierra. Sin embargo, el hierro está muy lejos de ser el elemento más pesado. ¿Por qué no está hecho de uranio el núcleo de la Tierra?
25. De la información dada en el texto, reúna y ponga por escrito las alturas aproximadas de las barreras de Coulomb para (*a*) la desintegración alfa del ^{238}U, (*b*) la fisión del ^{235}U por neutrones térmicos y (*c*) la colisión de frente de dos deuterones.
26. Se supone que la energía del Sol se genera mediante reacciones nucleares como el ciclo protón-protón. ¿Qué maneras alternativas de generación de la energía solar se propusieron en el pasado, y por qué se las rechazó?
27. Los elementos hasta el número másico ≈ 56 se crearon por fusión termonuclear en los núcleos de las estrellas. ¿Por qué no se crearon los elementos más pesados mediante este proceso?
28. ¿Cree usted que la reacción de fusión termonuclear controlada por las dos curvas trazadas en la figura 9 tiene necesariamente su efectividad máxima para la energía en

donde se cruzan entre sí las dos curvas? Explique su respuesta.

29. En la figura 9, ¿le sorprende que, a juzgar por las áreas bajo la curva denotada por $n(K)$, el número de partículas con $K > \overline{K}$ sea más pequeño que el número con $K < \overline{K}$, donde $\overline{K}$ es la energía térmica promedio?
30. Los núclidos de uranio presentes en la Tierra hoy día se formaron originalmente y fueron arrojados al espacio durante la explosión de las estrellas, los llamados sucesos supernova. Estas explosiones, que ocurrieron antes de la formación de nuestro sistema solar, representan el colapso de las estrellas bajo su propia gravedad. ¿Puede decirse entonces que la energía derivada de la fisión estuvo alguna vez almacenada en un campo gravitatorio? Así, en este sentido limitado, ¿tiene la energía de fisión algo en común con la energía derivada de fuentes hidroeléctricas?
31. ¿Por qué les toma tanto tiempo (¡~ 10^6 años!) a los fotones de rayos gamma que se generan por reacciones nucleares en el núcleo central del Sol difundirse hacia la superficie? ¿Qué clases de interacciones tienen con los protones, las partículas α y los electrones que constituyen el núcleo?
32. Se cree que la materia primordial de los primeros tiempos del Universo era hidrógeno en su mayor parte. ¿De dónde provino todo el silicio a la Tierra? ¿Y todo el oro?
33. ¿Satisfacen el criterio de Lawson, para una reacción de fusión termonuclear sostenida, las condiciones en el núcleo del Sol? Explique.
34. Para lograr el encendido en un tokamak ¿por qué se necesita una temperatura alta en el plasma? ¿Una densidad elevada de las partículas de plasma? ¿Un tiempo de confinamiento largo?
35. ¿Cuál generaría más productos radiactivos de desecho, un reactor de fisión o un reactor de fusión?
36. ¿Es válido el criterio de Lawson tanto en los tokamaks como en los dispositivos de fusión por láser?

PROBLEMAS

Sección 55-2 Fisión nuclear: el proceso básico

1. Se desea producir 1.0 GJ de energía. Calcule y compare (*a*) la cantidad de carbón necesario cuando la energía se obtiene por combustión de carbón y (*b*) la cantidad de uranio natural necesario para obtener la energía mediante la fisión en un reactor. Supóngase que la combustión de 1.0 kg de carbón libera 2.9×10^7 J; la fisión de 1.0 kg de uranio en un reactor libera 8.2×10^{13} J.
2. En Estados Unidos, el carbón contiene comúnmente alrededor de 3 partes por millón (3 ppm) de uranio y torio fisionables. Calcule y compare (*a*) la energía derivada del quemado de 100 kg de carbón y (*b*) la energía que podría derivarse de la fisión de las impurezas fisionables que permanecen en sus cenizas. Suponga que la combustión de 1 kg de carbón libera 2.9×10^7 J; la fisión de 1 kg de uranio o de torio en un reactor libera 8.2×10^{13} J.
3. (*a*) ¿Cuántos átomos están contenidos en 1.00 kg de ^{235}U puro? (*b*) ¿Cuánta energía, en joules, se produce por fisión completa de 1.00 kg de ^{235}U? Suponga que $Q = 200$ MeV. (*c*) ¿Durante cuántos años mantendría encendido esta energía a un foco eléctrico de 100 W?
4. ¿Con que velocidad deben de experimentar fisión los núcleos de ^{235}U por neutrones para generar 2.00 W? Supóngase que $Q = 200$ MeV.
5. Verifique que, como se indicó en la tabla 1, la fisión del ^{235}U en 1.0 kg de UO_2 (enriquecido de modo que el ^{235}U sea el 3.0% del uranio total), podría mantener encendido un foco de 100 W durante 680 años.
6. Las propiedades de fisión del isótopo del plutonio ^{239}Pu son muy parecidas a las del ^{235}U. La energía promedio liberada por fisión es de 180 MeV. ¿Cuánta energía, en joules, se libera cuando todos los átomos en 1.00 kg de ^{239}Pu puro experimentan la fisión?
7. Muy ocasionalmente un núcleo de ^{233}U, que haya absorbido un neutrón, se divide en *tres* fragmentos. Si dos de estos fragmentos se identifican químicamente como isótopos de cromio y de galio y si no participan neutrones rápidos, ¿cuál es al menos una posibilidad para la identidad de los fragmentos? Consulte una gráfica o tabla de nuclídidos.
8. Demuestre que, en el problema muestra 1, no hay necesidad de tomar en cuenta explícitamente las masas de los electrones emitidos durante la desintegración beta de los fragmentos de la fisión primaria.
9. El ^{235}U se desintegra mediante emisión alfa con una vida media de 7.04×10^8 años. También se desintegra (raramente) por fisión espontánea y, si no ocurriera la desintegración alfa, su vida media debido a este solo proceso sería de 3.50×10^{17} años. (*a*) ¿Con que velocidad ocurren las desintegraciones por fisión espontánea en 1.00 g de ^{235}U? (*b*) ¿Cuántos sucesos de desintegración alfa existen allí por cada suceso de fisión espontánea?

Sección 55-3 Teoría de la fisión nuclear

10. Llene la tabla siguiente, que se refiere a la reacción de fisión generalizada

$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow X + Y + b\text{n}.$$

X	Y	b
^{140}Xe	-	1
^{139}I	-	2
-	^{100}Zr	2
^{141}Cs	^{92}Rb	—

11. Calcule la energía de desintegración Q de la fisión espontánea del ^{52}Cr en dos fragmentos iguales. Las masas nece-

sarias son ^{52}Cr, 51.940509 u; y ^{26}Mg, 25.982593 u. Analice su resultado.

12. Calcule la energía de desintegración Q de la fisión del ^{98}Mo en dos partes iguales. Las masas necesarias son ^{98}Mo, 97.905406 u; y ^{49}Sc, 48.950022 u. Si resulta que Q es positiva, diga por qué no se presenta este proceso espontáneamente.

13. Calcule la energía liberada en la reacción de fisión

$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{141}\text{Cs} + {}^{92}\text{Rb} + 3\text{n}.$$

Las masas atómicas necesarias son

^{235}U	235.043924 u	^{92}Rb	91.919661 u
^{141}Cs	140.920006 u	n	1.008665 u.

14. El ^{238}Np tiene una energía de la barrera para la fisión de 4.2 MeV. Para retirar un neutrón de este núclido se necesita un gasto de energía de 5.0 MeV. ¿Es fisionable el ^{237}Np mediante neutrones térmicos?

15. Considérese la fisión del ^{238}U por medio de neutrones rápidos. En un suceso de fisión no se emiten neutrones y los productos finales estables, después de la desintegración beta de los fragmentos de la fisión primaria, fueron el ^{140}Ce y el ^{99}Ru. (*a*) ¿Cuántos sucesos de desintegración beta existieron en las dos cadenas de desintegración beta, consideradas simultáneamente? (*b*) Calcule Q. Las masas atómicas correspondiente son

^{238}U	238.050784 u	^{140}Ce	139.905433 u
n	1.008665 u	^{99}Ru	98.905939 u.

16. Sucede que, en un suceso de fisión en particular del ^{235}U mediante neutrones lentos, no se emitió ningún neutrón y uno de los fragmentos de la fisión primaria es ^{83}Ge. (*a*) ¿Cuál es el otro fragmento? (*b*) ¿Cómo se divide la energía de desintegración Q = 170 MeV entre los dos fragmentos? (*c*) Calcule la velocidad inicial de cada fragmento.

17. Supóngase que justo después de la fisión del ^{236}U* de acuerdo con la ecuación 2, los núcleos de ^{140}Xe y ^{94}Sr resultantes se están tocando apenas en sus superficies. (*a*) Suponiendo que el núcleo sea esférico, calcule la energía potencial de Coulomb (en MeV) de repulsión entre los dos fragmentos. (***Sugerencia***: Use la ecuación 1 del capítulo 54 para calcular los radios de los fragmentos.) (*b*) Compare esta energía con la energía liberada en un proceso de fisión típico. ¿En qué forma aparecerá finalmente esta energía en el laboratorio?

18. Un núcleo de ^{236}U* experimenta la fisión y se divide en dos fragmentos de masa media, ^{140}Xe y ^{96}Sr. (*a*) ¿En qué porcentaje cambia el área superficial del núcleo de ^{236}U durante este proceso? (*b*) ¿En qué porcentaje cambia su volumen? (*c*) ¿En qué porcentaje cambia su energía potencial electrostática? La energía potencial de una esfera de radio r y carga Q cargada uniformemente está dada por

$$U = \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right).$$

Sección 55-4 Reactores nucleares: principios básicos

19. Muchos temen que ayudar a otras naciones a desarrollar la tecnología del reactor de energía nuclear aumente la probabilidad de una guerra nuclear porque los reactores pueden usarse no solamente para producir energía sino, como derivado, mediante de la captura de un neutrón con el ^{238}U, de bajo costo, para fabricar ^{239}Pu, un "combustible" para las bombas nucleares (reactor *criador*). ¿Qué serie sencilla de reacciones que tengan que ver con la captura del neutrón y la desintegración beta darían por resultado este isótopo del plutonio?

20. Un reactor de fisión de 190 MW consume la mitad de su combustible en 3 años. ¿Cúanto ^{235}U contenía inicialmente? Supóngase que toda la energía generada proviene de la fisión del ^{235}U y que este núclido se consume únicamente por el proceso de fisión. Véase el problema muestra 3.

21. Repita el problema 20 teniendo en cuenta la captura de neutrones sin fisión por medio del ^{235}U. Véase el problema muestra 3.

22. (*a*) Un neutrón con energía cinética inicial K tiene una colisión de frente con un átomo en reposo de masa m. Demuestre que la pérdida fraccionaria de energía del neutrón está dada por

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{4m_n m}{(m + m_n)^2},$$

donde m_n es la masa del neutrón. (*b*) Halle $\Delta K/K$ si el átomo en reposo es hidrógeno, deuterio, carbono o plomo. (*c*) Si K = 1.00 MeV inicialmente, ¿cuántas de tales colisiones harían falta para reducir la energía neutrónica a valores térmicos (0.025 eV) si el material es deuterio, un moderador que se usa comúnmente? (*Nota*: En los moderadores reales, la mayoría de las colisiones no son "de frente".)

23. El tiempo de generación neutrónica t_{gen} en un reactor es el tiempo promedio entre una fisión y las fisiones inducidas por medio de los neutrones emitidos en esa fisión. Supóngase que la producción de potencia de un reactor en el tiempo t = 0 sea P_0. Demuestre que la generación de potencia en un tiempo t después es de $P(t)$, donde

$$P(t) = P_0 k^{t/t_{gen}},$$

donde k es el factor de multiplicación. Nótese que k = 1 para una generación de potencia constante.

24. El tiempo de generación neutrónica (véase el problema 23) de un reactor de energía en particular es de 1.3 ms. Está generando potencia a razón de 1200 MW. Para realizar ciertas pruebas de mantenimiento, el nivel de potencia debe reducirse temporalmente a 350 MW. Se desea que la transición al nivel de potencia reducido tome 2.6 s. ¿A qué valor (constante) debe ponerse el factor de multiplicación para efectuar la transición en el tiempo deseado?

25. El tiempo de generación neutrónica t_{gen} (véase el problema 23) de un reactor en particular es de 1.0 ms. Si el reactor está operando a un nivel de potencia de 500 MW, ¿aproximadamente cuántos neutrones libres (neutrones que subsecuentemente inducirán una fisión) están presentes en el reactor en cualquier momento?

26. Un reactor opera a 400 MW con un tiempo de generación neutrónica de 30 ms. Si su potencia aumenta durante 5.0 min con un factor de multiplicación de 1.0003, encuentre la generación de potencia al final de los 5.0 min. Véase el problema 23.

27. La energía térmica que se genera cuando las radiaciones que parten de los radionúclidos se absorben en la materia pueden emplearse como base de una pequeña fuente de energía para usar en satélites, estaciones climáticas remotas, etc. Tales radionúclidos se fabrican en abundancia en los reactores de energía nuclear y pueden separarse químicamente del combustible consumido. Un radionúclido apropiado es el ^{238}Pu ($t_{1/2}$ = 87.7 años) que es un emisor alfa con Q = 5.59 MeV. ¿A qué tasa se genera la energía térmica en 1.00 kg de este material?

28. Entre los muchos productos de la fisión que pueden extraerse químicamente del combustible gastado en un reactor de energía nuclear está el ^{90}Sr ($t_{1/2}$ = 29 años). En los reactores grandes típicos se produce a razón de unos 18 kg/años. Genera energía térmica a razón de 2.3 W/g por medio de su radiactividad. (*a*) Calcule la energía de desintegración efectiva Q_{ef} asociada con la desintegración de un núcleo de ^{90}Sr. (Q_{ef} incluye las contribuciones de la desintegración de los productos derivados del ^{90}Sr en esta cadena de desintegración pero no de neutrinos, los cuales escapan totalmente de la muestra.) (*b*) Se desea construir una fuente de potencia que genere 150 W (eléctricos) para usarse en la operación de equipos electrónicos en una boya acústica submarina. Si la fuente se basa en la energía térmica generada por medio del ^{90}Sr y si la eficiencia del proceso de conversión térmico-eléctrico es del 5%, ¿cuánto ^{90}Sr se necesita? La masa atómica del ^{90}Sr es 89.9 u.

29. En una bomba atómica (la bomba A), la liberación de energía se debe a la fisión sin control del ^{239}Pu (o del ^{235}U). La magnitud de la energía liberada se especifica en términos de la masa de TNT necesaria para producir la misma liberación de energía ("especificación" de la bomba). Un megatón (10^6 toneladas) de TNT produce 2.6×10^{28} MeV de energía. (*a*) Calcule la especificación, en toneladas de TNT, de una bomba atómica que contenga 95 kg de ^{239}Pu, del cual 2.5 kg van realmente a experimentar fisión. En el plutonio, la Q promedio es de 180 MeV. (*b*) ¿Por qué se necesitan los otros 92.5 kg de ^{239}Pu si no se fisiona?

30. Una bomba A de 66 kilotones (véase el problema 29) está abastecida con ^{235}U puro, 4.0% del cual va a experimentar realmente una fisión. (*a*) ¿Cuánto uranio hay en la bomba? (*b*) ¿Cuántos fragmentos de fisión primaria se producen? (*c*) ¿Cuántos neutrones generados en las fisiones se liberan al entorno? (En promedio, cada fisión produce 2.47 neutrones.)

31. Un método posible para revelar la presencia de armas nucleares ocultas es detectar los neutrones emitidos en la fisión espontánea del ^{240}Pu en la cabeza explosiva. En un intento real, un detector de neutrones de 2.5 m^2 de área, transportado en un helicóptero, midió un flujo de neutrones de 4.0 s^{-1} a una distancia de 35 m de una cabeza explosiva de proyectil. Calcule la masa de ^{240}Pu en la cabeza explosiva. La vida media de la fisión espontánea del ^{240}Pu es 1.34×10^{11} años y en cada fisión se emiten, en promedio, 2.5 neutrones.

Sección 55-5 Un reactor natural

32. Se estima que el reactor de fisión natural considerado en la sección 55-5 ha generado 15 gigawatts-año de energía durante su tiempo de vida. (*a*) Si el reactor duró 200,000 años, ¿a qué nivel de potencia promedio operó? (*b*) ¿Cuánto ^{235}U consumió durante su tiempo de vida?

33. Se ha hallado que ciertas muestras de uranio en el lugar del reactor natural descrito en la sección 55-5 estaban ligeramente *enriquecidas* en ^{235}U, más bien que agotadas. Explique esto en términos de la absorción neutrónica mediante el isótopo abundante ^{238}U y las desintegraciones alfa y beta subsiguientes de sus productos.

34. ¿Desde hace cuánto tiempo el uranio natural hubiera sido un combustible de reactor práctico, con una razón ^{235}U/^{238}U del 3.00%? Véase el problema muestra 4.

Sección 55-6 Fusión termonuclear: proceso básico

35. Calcule la altura de la barrera de Coulomb en la colisión de frente de dos protones. Puede considerarse que el radio efectivo de un protón es de 0.80 fm. Véase el problema muestra 5.

36. La ecuación de la curva $n(K)$ de la figura 9 es

$$n(K) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{K^{1/2}}{(kT)^{3/2}} e^{-K/kT},$$

donde N es la densidad total de las partículas. En el centro del Sol la temperatura es de 1.5×10^7 K y la energía protónica media $\bar{K}$ es de 1.9 keV. Halle la razón de la densidad de los protones, a 5.0 keV, a la de la energía protónica media.

37. Se han sugerido otros métodos diferentes al de calentamiento del material para vencer la barrera de Coulomb que surge en la fusión. Por ejemplo, podríamos considerar el uso de aceleradores de partículas. Si fuésemos a usar dos de ellos para acelerar a dos haces de deuterones uno directamente contra el otro de modo que choquen "de frente", (*a*) ¿qué voltaje requeriría cada uno para vencer la barrera de Coulomb? (*b*) ¿Sería difícil lograr este voltaje? (*c*) ¿Por qué supone usted que no se emplea actualmente este método?

38. Calcule la altura de la barrera de Coulomb para dos núcleos de ^{7}Li, disparados uno contra otro con la misma energía cinética inicial K. Véase el problema muestra 5. (*Sugerencia*: Use la ecuación 1 del capítulo 54 para calcular los radios de los núcleos.)

39. ¿Durante cuánto tiempo mantendría encendido a un foco eléctrico de 100 W la fusión de 1.00 kg de deuterio? mediante la reacción

$$^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \text{n} \qquad (Q = +3.27 \text{ MeV})$$

La masa atómica del deuterio es 2.014 u.

Sección 55-7 Fusión termonuclear en las estrellas

40. Hemos visto que Q en todo el ciclo protón-protón es de 26.7 MeV. ¿Cómo puede usted relacionar este número con los valores de Q para las tres reacciones que constituyen este ciclo, como se mostró en la figura 10?

41. Demuestre que la energía liberada cuando se funden tres partículas alfa para formar ^{12}C es de 7.27 MeV. La masa atómica del ^4He es 4.002603 u y la del ^{12}C es 12.000000 u.

42. En el núcleo central del Sol la densidad es de 1.5×10^5 kg/m^3 y la composición es esencialmente del 35% de hidrógeno por masa y del 65% de helio. (*a*) ¿Cuál es la densidad de los protones en el núcleo del Sol? (*b*) ¿Cuál es la razón de ésta a la densidad de las partículas en un gas ideal en condiciones normales de temperatura y presión?

43. Calcule y compare la energía en MeV liberada por (*a*) la fusión de 1.0 kg de hidrógeno en las profundidades del Sol y (*b*) la fisión de 1.0 kg de ^{235}U en un reactor de fisión.

44. El Sol tiene una masa de 2.0×10^{30} kg e irradia energía a razón de 3.9×10^{26} W. (*a*) ¿Con que velocidad disminuye la masa del Sol? (*b*) ¿Qué fracción de su masa original ha perdido el Sol de esta manera desde que empezó a quemar hidrógeno hace 4.5×10^9 años?

45. Supongamos que el núcleo del Sol tiene un octavo de la masa del Sol y está comprimido dentro de una esfera cuyo radio es un cuarto del radio solar. Supongamos además que la composición del núcleo sea de 35% hidrógeno por masa y que esencialmente se genera allí toda la energía del Sol. Si el Sol continúa quemando hidrógeno con la velocidad calculada en el problema muestra 6, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que se consuma por completo el hidrógeno? La masa del Sol es de 2.0×10^{30} kg.

46. Verifique los valores de Q reportados de las reacciones en la figura 10. Las masas atómicas necesarias son

^1H	1.007825 u	^3He	3.016029 u
^2H	2.014102 u	^4He	4.002603 u
$e^{\pm}$	0.0005486 u.		

(*Sugerencia*: Distinga cuidadosamente entre las masas atómica y nuclear, y tome apropiadamente en cuenta los positrones.)

47. El carbón se quema de acuerdo con

$$C + O_2 \rightarrow CO_2.$$

El calor de combustión es de 3.3×10^7 J/kg de carbono atómico consumido. (*a*) Exprese esto en términos de la energía por átomo de carbono. (*b*) Expréselo en términos de energía por kilogramo de los reactantes iniciales, carbono y oxígeno. (*c*) Suponga que el Sol (masa = 2.0×10^{30} kg) estuviera hecho de carbono y oxígeno en proporciones combustibles y que continuara irradiando energía con su potencia presente de 3.9×10^{26} W. ¿Cuánto tiempo duraría?

48. Después de convertir todo su hidrógeno en helio, una estrella en particular se compone del 100% de helio. Ahora procede a convertir el helio en carbono por medio del proceso triple alfa

$$^4He + {}^4He + {}^4He \rightarrow {}^{12}C + \gamma;$$

Q = 7.27 MeV. La masa de la estrella es de 4.6×10^{32} kg, y genera energía a razón de 5.3×10^{30} W. ¿Cuánto tiempo le tomará convertir todo el helio en carbono?

49. En ciertas estrellas el *ciclo del carbono* es más probable que el ciclo protón-protón en cuanto a la efectividad de generar energía. Este ciclo es

$$^{12}C + {}^1H \rightarrow {}^{13}N + \gamma, \qquad Q_1 = 1.95 \text{ MeV},$$
$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu, \qquad Q_2 = 1.19 \text{ MeV},$$
$$^{13}C + {}^1H \rightarrow {}^{14}N + \gamma, \qquad Q_3 = 7.55 \text{ MeV},$$
$$^{14}N + {}^1H \rightarrow {}^{15}O + \gamma, \qquad Q_4 = 7.30 \text{ MeV},$$
$$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu, \qquad Q_5 = 1.73 \text{ MeV},$$
$$^{15}N + {}^1H \rightarrow {}^{12}C + {}^4He, \qquad Q_6 = 4.97 \text{ MeV}.$$

(*a*) Demuestre que este ciclo de reacciones equivale exactamente, en cuanto a sus efectos globales, al ciclo protón-protón de la figura 10. (*b*) Verifique que ambos ciclos, como se espera, tienen la misma Q.

50. (*a*) Calcule la velocidad a la que el Sol está generando neutrinos. Suponga que la generación de energía se lleva a cabo por completo por el ciclo protón-protón. (*b*) ¿A qué razón inciden sobre la Tierra los neutrinos solares?

51. La energía potencial gravitatoria de un objeto esférico uniforme de masa M y radio R es

$$U = -3GM^2/5R,$$

donde G es la constante gravitatoria. (*a*) Demuestre la consistencia de esta expresión con la del problema 22 del capítulo 54. (*b*) Use esta expresión para hallar la energía máxima que podría ser liberada por un objeto esférico, inicialmente de radio infinito, al contraerse al tamaño actual del Sol. (*c*) Suponga que durante esta contracción el Sol irradia energía con su velocidad actual y calcule la edad del Sol basándose en la hipótesis de que el Sol obtiene su energía de la contracción gravitatoria.

Sección 55-8 Fusión termonuclear controlada

52. Verifique los valores de Q reportados en las ecuaciones 6, 7, y 8. Las masas necesarias son

^1H	1.007825 u	^3He	3.016029 u
^2H	2.014102 u	^4He	4.002603 u
^3H	3.016049 u	n	1.008665 u.

53. Supóngase que tuviéramos una cantidad de N deuterones (núcleos de ^2H). (*a*) ¿Cuál de los siguientes procedimientos para fundir estos N núcleos libera más energía, y cuánta más? (A) $N/2$ reacciones de fusión del tipo $^2H + {}^2H \rightarrow {}^3H + {}^1H$, o (B) $N/3$ reacciones de fusión del tipo $^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He + n$, usando los $N/3$ núcleos de ^3H que se forman primero en las $N/3$ reacciones del tipo A. (*b*) Haga una lista de los núcleos producto finales que resultan de los dos procedimientos y de la cantidad de cada uno.

54. El agua ordinaria consta aproximadamente de 0.015% por masa de "agua pesada", donde uno de los dos hidrógenos es reemplazado por deuterio, ^{2}H. ¿Cuánta potencia de fusión promedio puede obtenerse al "quemar" todo el ^{2}H que hay en 1 litro de agua durante 1 día por la reacción $^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \text{n} + 3.27$ MeV?

55. En la reacción de fusión deuterón-tritón de la ecuación 8, ¿cómo se comparte la energía de reacción Q entre la partícula α y el neutrón (esto es, calcule las energías cinéticas K_α y K_n)? Haga caso omiso de las relativamente pequeñas energías cinéticas de las dos partículas al combinarse.

56. La figura 16 muestra una representación idealizada de una bomba de hidrógeno. El combustible de fusión es el deutérido de litio (LiD). La elevada temperatura, la densidad de las partículas y los neutrones para inducir la fusión son proporcionados por una bomba "gatillo" atómica (de fisión). Las reacciones de la fusión son

$$^6\text{Li} + \text{n} \rightarrow {}^3\text{H} + {}^4\text{He} + Q$$

y

$$^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{n} + 17.59 \text{ MeV},$$

fundiéndose el tritio (^{3}H) producido en la primera reacción con el deuterio (D) del combustible; véase la ecuación 8. Mediante el cálculo de Q para la primera reacción, halle la masa del LiD que se necesita para producir un rendimiento de la fusión de 1 megatón de TNT ($= 2.6 \times 10^{28}$ MeV). Las masas atómicas necesarias son

^{6}Li	6.015121 u	^{4}He	4.002603 u
^{3}H	3.016049 u	n	1.008665 u.

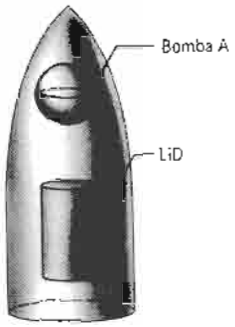


Figura 16 Problema 56.

Sección 55-10 Confinamiento inercial

57. Suponga que en un dispositivo de fusión por láser se alcanza una temperatura del plasma de 1.3×10^8 K. (*a*) ¿Cuál es la velocidad más probable de un deuterón a esta temperatura? (*b*) ¿Cuán lejos se moverá tal deuterón en el tiempo de confinamiento calculado en el problema muestra 8?

58. El radio sin comprimir de la bolita de combustible del problema muestra 8 es de 20 μm. Supóngase que la bolita de combustible comprimida "se quema" con una eficiencia del 10%. Esto es, solamente el 10% de los deuterones y el 10% de los tritones participan en la reacción de fusión de la ecuación 8. (*a*) ¿Cuánta energía se libera en cada una de las microexplosiones de una bolita? (*b*) ¿A cuánto TNT equivale cada una de las bolitas? El calor de combustión del TNT es de 4.6 MJ/kg. (*c*) Si se construye un reactor de fusión con base en 100 microexplosiones por segundo, ¿qué potencia se generaría? (Nótese que parte de esta potencia debe usarse para operar los láseres.)

CAPÍTULO 56

FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA

La investigación en la física de partículas suele llevarse a cabo en aceleradores en los que un haz de partículas que se mueve a velocidades cercanas a la velocidad de la luz (y, por tanto, con energías cinéticas muchísimo mayores que sus energías de reposo) incide sobre un blanco, que consiste, por lo general, en protones. En otros aceleradores es posible juntar dos haces de partículas de alta energía moviéndose en direcciones opuestas. Las colisiones de las partículas individuales provocan reacciones en las que se producen docenas o quizá cientos de nuevas partículas. Algunas de estas partículas viven durante tiempos inimaginablemente cortos, con frecuencia menos de 10^{-20} s. Sin embargo, los físicos pueden rastrearlas y estudiar sus propiedades. Éste constituye nuestro medio primario para aprender acerca de los constituyentes fundamentales de la materia.

Los astrofísicos emplean un método muy diferente para develar los secretos del Universo. De observaciones con telescopios y detectores sensibles a las radiaciones procedentes de todas partes del espectro electromagnético, tratan de retroceder en el tiempo para aprender acerca del Universo cuando éste era muy joven, y proyectar también sus conclusiones hacia el futuro para tratar de entender la posterior evolución del Universo. Estas investigaciones forman parte de la cosmología, *ciencia que estudia el origen y evolución del Universo.*

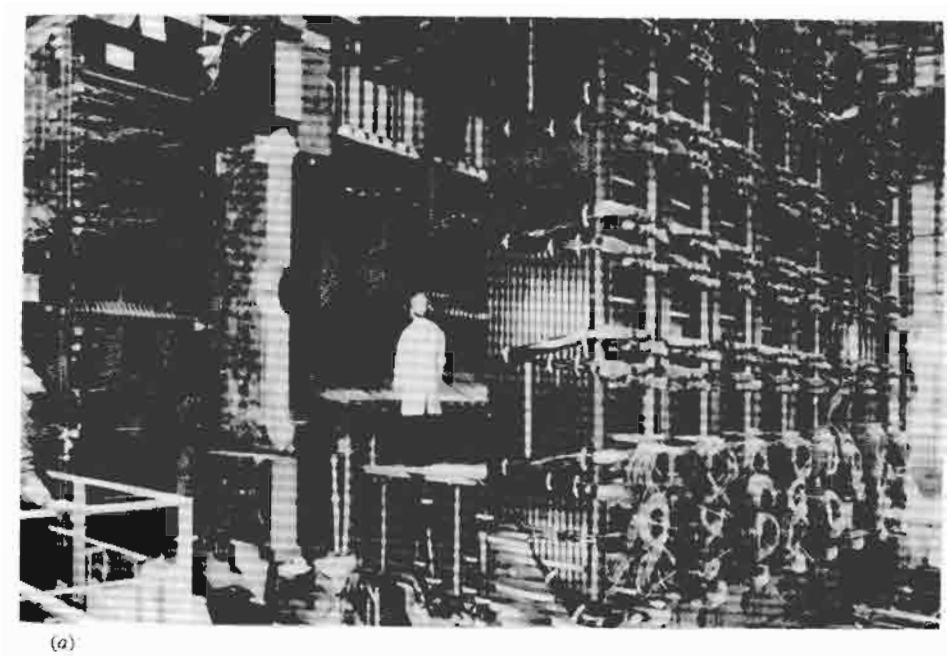
Puede parecer sorprendente que hayamos agrupado estos dos estudios tan diferentes en un solo capítulo. Como veremos, las mediciones de los físicos dedicados a las partículas pueden informarnos de la estructura del Universo en el instante inmediato a su nacimiento, y las conclusiones de los cosmólogos pueden establecer límites sobre la variedad de las partículas fundamentales y las interacciones entre ellas. Si bien se encuentran en los extremos opuestos de la escala de las observaciones, la física de partículas y la cosmología van de la mano para proporcionarnos un entendimiento de la estructura del Universo.

56-1 INTERACCIONES DE LA PARTÍCULA

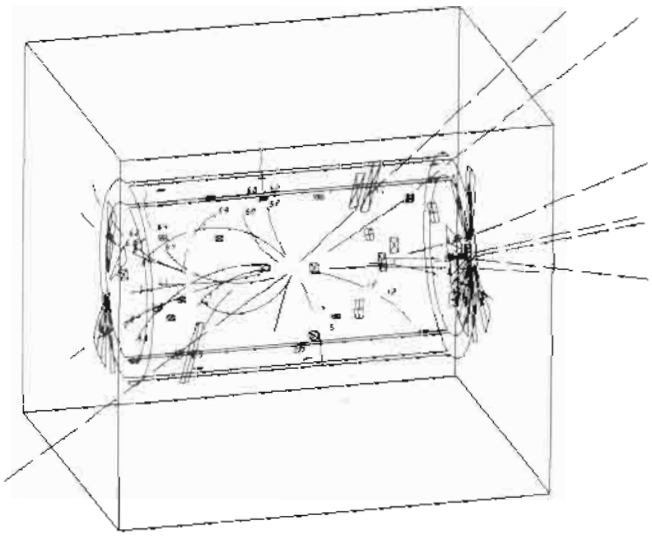
Existen decenas de miles de compuestos químicos de diversos grados de complejidad. El entendimiento de este enorme número de sistemas sería una tarea sin esperanza si no fuese por la simplicidad que subyace en las 109 unidades (elementos) fundamentales de que se integran estos compuestos y el número relativamente pequeño de tipos de enlaces a través de los cuales pueden interactuar. Con objeto de entender la química, no necesitamos estudiar las propiedades de las decenas de miles de compuestos, sino solamente las de alrededor de 100 elementos junto con unos cuantos tipos básicos de enlaces entre ellos.

De hecho, la tarea es aún más sencilla. Los 109 elementos conocidos pueden clasificarse en grupos con propiedades similares: gases inertes, halógenos, metales alcalinos, metales de transición, tierras raras, y así sucesivamente. Si entendemos las propiedades de un miembro de un grupo, podemos deducir las propiedades de los demás miembros de ese grupo.

El mundo subatómico puede entenderse de manera similar. Sabemos que las 109 diferentes clases de átomos no son unidades fundamentales, sino que más bien se componen de tres partículas diferentes: los protones, los neutrones y los electrones. Cuando tratamos de ir más allá, haciendo pedazos las partículas con una energía elevada y estudiando los desechos de las colisiones (véase la Fig. 1), nos encontramos con lo que a primera vista



(*a*)



(*b*)

Figura 1 (*a*) El detector UA1 en el colisionador protón-antiprotón del acelerador de la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN), cerca de Ginebra, Suiza. Haces de protones y antiprotones que se mueven en dirección opuesta colisionan en la región central de este detector, que está diseñado para registrar las trayectorias de todas las partículas que interactúan electromagnéticamente o por la fuerza fuerte y que salen de la región de la reacción. (*b*) Reconstrucción por computadora de las trayectorias que salen de la región central después de una colisión. Un campo magnético causa la curvatura de las trayectorias, la cual permite determinar el ímpetu o cantidad de movimiento de las partículas y ayuda a identificarlas. Ciertos sucesos de este tipo fueron los responsables del descubrimiento de las partículas W y Z en la CERN, en 1983.

parece ser una complejidad que tiende a la de la química: se producen cientos de partículas diferentes. Sin embargo, cuando buscamos cuidadosamente hallamos que esas partículas pueden clasificarse en unos cuantos grupos cuyos miembros tienen propiedades similares. Finalmente, hallamos que esta clasificación conduce a la clave acerca de

la subestructura subyacente que de nuevo se basa en un pequeño número de partículas realmente fundamentales y un pequeño número de interacciones posibles entre ellas.

Las cuatro fuerzas básicas

Todas las fuerzas conocidas en el Universo pueden agruparse en cuatro tipos básicos. Éstos son, en orden de intensidad creciente: la gravitación, la fuerza débil, el electromagnetismo y la fuerza fuerte. Estas fuerzas desempeñan papeles importantes no sólo en las interacciones entre partículas, sino también en la desintegración de una partícula para formar otras partículas.

1. *La fuerza gravitatoria.* La gravedad es, por supuesto, extraordinariamente importante en nuestra vida diaria, pero no tiene importancia alguna en la escala de las interacciones fundamentales entre las partículas del reino subatómico. Para dar una cifra al respecto, la interacción gravitatoria entre dos protones que apenas se toquen en su superficie es de unos 10^{-38} de la fuerza fuerte entre ellos. La diferencia principal entre la gravitación y las demás fuerzas es que, en la escala práctica, la gravedad es acumulativa y de un alcance infinito. Por ejemplo, nuestro peso es el efecto acumulativo de la fuerza gravitatoria ejercida por cada átomo de la Tierra sobre cada átomo de nuestro cuerpo.

2. *La fuerza débil.* La fuerza débil es la responsable de la desintegración nuclear beta (véase la Sec. 54-5) y de otros procesos de desintegración semejantes que involucran a las partículas fundamentales. No juega un papel principal en el enlace de los núcleos. La fuerza débil entre dos protones vecinos es de alrededor de 10^{-7} de la fuerza fuerte entre ellos, y el alcance de la fuerza débil es de menos de 1 fm. Es decir, en separaciones mayores de más o menos 1 fm, la fuerza débil entre las partículas es despreciable. Sin embargo, la fuerza débil es importante para entender el comportamiento de las partículas fundamentales, y es determinante para entender la evolución del Universo.

3. *La fuerza electromagnética.* El electromagnetismo es importante en la estructura y las interacciones de las partículas elementales. Por ejemplo, ciertas partículas interactúan o se desintegran primordialmente a través de este mecanismo. Las fuerzas electromagnéticas son de un alcance infinito, pero en los objetos ordinarios el blindaje disminuye generalmente su efecto. Las propiedades de los átomos y de las moléculas se determinan mediante las fuerzas electromagnéticas, y muchas de las fuerzas macroscópicas comunes (como la fricción, la resistencia del aire, el arrastre y la tensión) se deben finalmente a la fuerza electromagnética. La fuerza electromagnética entre protones vecinos es de unos 10^{-2} de la fuerza fuerte, pero dentro del núcleo las fuerzas electromagnéticas pueden actuar acumulativamente, ya que no existe el blindaje. Como resultado, la fuerza electromagnética puede competir con la fuerza fuerte en la determinación de la estabilidad y la estructura de los núcleos.

4. *La fuerza fuerte.* La fuerza fuerte, que es la responsable del enlace de los núcleos, es la dominante entre las reacciones y desintegraciones de la mayoría de las partículas fundamentales. Sin embargo, como veremos, ciertas partículas (como el electrón) no perciben esta fuerza en absoluto. Su alcance es relativamente corto, del orden de 1 fm.

La intensidad relativa de una fuerza determina la escala de tiempo dentro de la que actúa. Si aproximamos a dos partículas lo suficiente como para que cualquiera de estas fuerzas actúe, entonces es necesario más tiempo para que la fuerza débil provoque la desintegración o una reacción que el necesario para que la fuerza fuerte las provoque. Como veremos, el tiempo de vida medio de un proceso de desintegración es a menudo una señal del tipo de fuerza responsable del proceso, estando las fuerzas fuertes en el extremo más corto de la escala de tiempo (a menudo menos de 10^{-23} s). La tabla 1 resume las cuatro fuerzas y algunas de sus propiedades. El tiempo característico para cada fuerza da una escala típica de los intervalos de tiempo que se observan en los sistemas en que actúa cada una de las fuerzas. Usualmente éste es el tiempo de vida típico de una partícula que se desintegra a causa de esa fuerza.

Unificación de las fuerzas

Uno de los logros culminantes en la historia de la física fue la teoría surgida en el siglo XIX sobre el electromagnetismo, con base en los experimentos de Faraday y

TABLA 1 LAS CUATRO INTERACCIONES BÁSICAS

Tipo	*Alcance*	*Intensidad relativa*	*Tiempo característico*
Fuerte	1 fm	1	10^{-23} s
Electromagnética	∞	10^{-2}	10^{-14} a 10^{-20} s
Débil	$\ll$ 1 fm	10^{-7}	10^{-8} a 10^{-13} s
Gravitatoria	∞	10^{-38}	Años

Oersted que demostraron que los efectos magnéticos podían producir campos eléctricos y los efectos eléctricos producir campos magnéticos. Las ciencias anteriormente separadas de la electricidad y del magnetismo se unieron bajo la designación común de electromagnetismo. Más tarde se demostró que este enlace era una parte fundamental de la teoría especial de la relatividad, según la cual los campos eléctricos y los campos magnéticos pueden transformarse uno en el otro debido enteramente al movimiento relativo del observador.

En el siglo XX se ha intentado llevar este enlace más lejos para incluir a otras fuerzas. Primero se demostró que el electromagnetismo y la fuerza débil pueden entenderse como dos aspectos diferentes de la misma fuerza, y para ello se adoptó el término de fuerza *electrodébil*. Si estudiamos las fuerzas de la partícula a una energía suficientemente elevada, estas dos fuerzas se comportan similarmente. Es conveniente que las veamos como fuerzas distintas en muchos de los efectos que comentaremos, tal y como a menudo hallamos conveniente hablar por separado de las fuerzas eléctrica y magnética al estudiar los fenómenos electromagnéticos. La teoría de la fuerza electrodébil, propuesta independientemente en 1967 por Stephen Weinberg y Abdus Salam (y por la que ambos, junto con Sheldon Glashow, otro creador de la teoría, recibieron el premio Nobel de física en 1979), sugiere que, así como el fotón es el portador de la fuerza electromagnética, debe haber partículas pesadas portadoras de la fuerza débil, y estas nuevas partículas se comportarían, dentro de una escala de energía de 100 GeV (unas 100 veces la energía de reposo del protón), en forma semejante a un fotón de alta energía. En 1983, un grupo de investigación del Centro Europeo de Física Nuclear (el CERN), dirigido por Carlo Rubbia y usando técnicas experimentales desarrolladas por Simon van der Meer, descubrió las partículas pronosticadas, por lo cual recibieron el premio Nobel de física en 1984. El descubrimiento de estas partículas proporcionó la evidencia de la unificación de las fuerzas electromagnética y débil dentro de la fuerza electrodébil.

Seguidamente, se intentó combinar las fuerzas electrodébil y fuerte en un nuevo nivel de unificación más elevado. Estas teorías se llaman *teorías de la gran unificación* (GUT, *grand unified theories*) y en la actualidad, aunque son muchas las que se han propuesto, ninguna de ellas ha podido demostrarse que sea la correcta. Puesto que la energía a la que se unen las fuerzas es inmensa, quizá de 10^{15} GeV (10^{11} veces la energía del acelerador de partículas más grande jamás construido o incluso mentalmente concebido), no podemos llevar a cabo experimentos para probar las GUT directamente. Por lo tanto, debemos confiar en las pruebas a energías obtenibles, donde los efectos son excesivamente pequeños. Un pronóstico de estas teorías es que el protón no debe ser una partícula estable sino que debe desintegrarse en una escala de tiempo mayor de 10^{31} años. (Compárese este número con la edad del Universo, unos 10^{10} años.) Hasta ahora las investigaciones de la desintegración del protón no han tenido éxito, por lo que se han descartado ya algunas de las GUT; sin embargo, todavía no existe ninguna verificación de ninguna de ellas.

El paso final en la unificación sería incluir a la gravedad en el esquema para crear una *teoría del todo* (TOE, *theory of everything*). No existe todavía una teoría cuántica de la gravedad, de modo que es difícil anticipar la forma que pueden adoptar estas teorías que, sin embargo, constituyen un reto para la especulación teórica.

Problema muestra 1 Supóngase que la vida media del protón fuese de 10^{31} años, como lo pronostican ciertas GUT. (*a*) En promedio, ¿durante cuánto tiempo debemos observar un litro de agua antes de ver desintegrarse a uno de sus protones? (*b*) ¿Qué volumen de agua se requeriría para tener una velocidad de desintegración del protón de uno por día?

Solución (*a*) Un litro de agua (aproximadamente 1000 g) contiene un número de moléculas dado por

$$\frac{(1000\text{ g})(6.02\times10^{23}\text{ moléculas/mol})}{18\text{ g/mol}} = 3.3\times10^{25}\text{ moléculas.}$$

Cada molécula contiene 10 protones (2 de los hidrógenos y 8 del oxígeno), así que el número de protones en un litro de agua es de $N = 3.3\times10^{26}$. La velocidad de desintegración R está dada por la ecuación 5 del capítulo 54 como

$$R = \lambda N = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}N = \frac{0.693}{10^{31}\text{ años}}3.3\times10^{26}$$
$$= 2.3\times10^{-5}\text{ años}^{-1}$$
$$= \frac{1}{43{,}000\text{ años}}.$$

Esto es, en promedio debemos esperar 43,000 años antes de que tenga lugar la desintegración de un protón en un litro de agua.

(*b*) Si $R = 1\text{ d}^{-1}$, obtenemos

$$N = \frac{R}{\lambda} = \frac{1\text{ d}^{-1}}{0.693/(10^{31}\text{ años})} = 5.3\times10^{33}\text{ protones}$$

o sea, 5.3×10^{32} moléculas de agua. El resultado de esto sería de 1.6×10^{7} L, ¡lo que equivale a un cubo de agua que midiera 25 m de lado! (Véase la figura 2.)

56-2 FAMILIAS DE PARTÍCULAS

Podemos aprender mucho acerca de las cosas al clasificarlas. Ésta es una técnica empleada comúnmente por los biólogos; clasificando por grupos a las plantas o a los animales en categorías basadas en ciertos aspectos obvios de su estructura, puede hallarse una base para el estudio de su comportamiento. Por ejemplo, desde el punto de vista científico puede ser más esclarecedor comparar a una

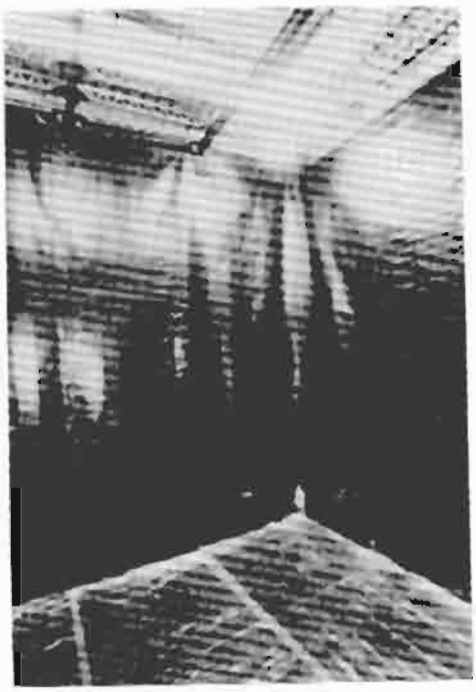


Figura 2 Cámara subterránea, forrada con plástico, en la mina de sal Morton cerca de Cleveland, EUA. Puede inferirse su tamaño comparándolo con el de la persona que está de pie en una esquina. Esta cámara se llenó después con 10,000 toneladas de agua, donde se suspendieron 2048 detectores que reaccionan a los minúsculos destellos de luz que se emitirían en la desintegración de uno de los protones del agua.

araña con otra araña que con una mosca o con una polilla. Parte del entrenamiento de un científico tiene que ver con el aprendizaje de cómo llevar a cabo y emplear estas clasificaciones.

El primer esquema de clasificación de las partículas se basaba en sus masas. Las partículas más ligeras, que incluyen al electrón ($m_e c^2$ = 0.511 MeV), se llamaron *leptones* (del vocablo griego que significa "pequeño"). Las partículas más pesadas, que incluyen al protón ($m_p c^2$ = 938 MeV), se llamaron *bariones* (de la palabra griega que significa "pesado"). En medio de ellas había partículas, que incluyen al pión ($m_\pi c^2$ = 140 MeV), llamadas *mesones* (término que en griego significa "intermedio"). Hoy día ya no son válidas estas clasificaciones basadas en la masa; por ejemplo, son mucho más masivos un leptón y muchos de los mesones que el protón. Sin embargo, retenemos estos tres nombres como descriptivos de las partículas con propiedades similares, si bien la clasificación basada únicamente en la masa ya no es válida. La tabla 2 resume estas tres familias de partículas y algunas de sus propiedades.

Leptones

Los leptones son partículas fundamentales que interactúan únicamente a través de las fuerzas débil y electromagnética; aunque la fuerza fuerte puede exceder a la fuerza débil o a la electromagnética en cuanto a intensidad en muchos órdenes de magnitud, los leptones no perciben esta fuerza en absoluto. Los leptones son partículas fundamentales reales, carecen de estructura interna y no se componen de otras partículas más pequeñas. Podemos considerar que los leptones son partículas puntuales sin dimensiones finitas. Todos los leptones conocidos tienen un espín de $\frac{1}{2}$.

La tabla 3 muestra a los seis leptones, que aparecen como tres pares de partículas. Cada par incluye a una partícula cargada (e^-, μ^-, τ^-) y a un neutrino sin carga (ν_e, ν_μ, ν_τ). Anteriormente nos hemos referido al neutrino del electrón en relación con la desintegración beta (Sec. 54-5). Tanto los leptones cargados como los neutrinos tienen antipartículas.

De acuerdo con ciertas teorías de la estructura de las partículas fundamentales, los neutrinos carecen de masa (en consecuencia, viajan a la velocidad de la luz) y son estables. Otras teorías pronostican que los neutrinos tendrían una masa pequeña pero definitivamente distinta de cero y se transformarían entre sí. Hasta ahora, ningún experimento ha revelado una masa distinta de cero, sino únicamente que el neutrino electrónico es el límite superior de lo muy pequeño (energía de reposo < 20 eV). Los neutrinos y sus posibles masas tienen implicaciones importantes en la cosmología, como lo discutiremos más adelante en este capítulo.

El electrón es una partícula estable, pero el muón y el tau se desintegran en otros leptones, de acuerdo con

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \text{ (vida media} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s)},$$

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \text{ (vida media} = 3.0 \times 10^{-13} \text{ s)}.$$

TABLA 2 TRES FAMILIAS DE PARTÍCULAS

Familia	*Estructura*	*Interacciones*	*Espín*	*Ejemplos*
Leptones	Fundamental	Débil, electromagnética	Semientero	e,ν
Mesones	Compuesta	Débil, eletromagnética, fuerte	Entero	π,K
Bariones	Compuesta	Débil, electromagnética, fuerte	Semientero	p,n

TABLA 3 LA FAMILIA DE LOS LEPTONES

Partícula	*Antipartícula*	*Carga de la partícula* (*e*)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Energía de reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Productos típicos de la desintegración*
e^-	e^+	-1	$\frac{1}{2}$	0.511	∞	—
ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	$\frac{1}{2}$	<20 eV	∞	—
μ^-	μ^+	-1	$\frac{1}{2}$	105.7	2.2×10^{-6}	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	$\frac{1}{2}$	<0.3	∞	—
τ^-	τ^+	-1	$\frac{1}{2}$	1784	3.0×10^{-13}	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$
ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	$\frac{1}{2}$	<40	∞	—

Estas desintegraciones son causadas por la fuerza débil, como lo podemos concluir a partir de la presencia de los neutrinos (que *siempre* indican un proceso de fuerza débil) entre los productos de la desintegración y como lo inferimos a partir de los tiempos de vida media típicos listados en la tabla 1. La forma de estas desintegraciones puede entenderse con base en la ley de la conservación de los leptones estudiada en la seccion 56-3.

Mesones

Los mesones son partículas que interactúan fuertemente y tienen un espín integral. La tabla 4 proporciona una lista parcial de algunos mesones. Generalmente, los mesones se producen en las reacciones de la fuerza fuerte; se desintegran, usualmente en otros mesones o leptones, por medio de las fuerzas fuerte, electromagnética o débil. Por ejemplo, los piones pueden producirse en las reacciones de los nucleones, tales como

$$p + n \rightarrow p + p + \pi^- \quad \text{o} \quad p + n \rightarrow p + n + \pi^0,$$

y los piones pueden desintegrarse de acuerdo con

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \text{ (vida media} = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s)},$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad \text{(vida media} = 8.4 \times 10^{-17} \text{ s)},$$

donde la primera desintegración sucede debido a la fuerza débil (indicada por los neutrinos y sugerida por la vida media) y la segunda debido a la fuerza electromagnética (indicada por los fotones y sugerida por la vida media).*

Bariones

Los bariones son partículas que interactúan fuertemente y tienen espines semienteros ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$,...). En la tabla 5 se ofrece una lista parcial de algunos bariones. Los miembros familiares de la familia del barión son el protón y el neutrón. Los bariones tienen antipartículas distintivas, por ejemplo, el antiprotón ($\bar{p}$) y el antineutrón ($\bar{n}$).

* Mientras que los neutrinos indican siempre una desintegración por interacción débil, no todas las desintegraciones por interacción débil producen neutrinos. Lo mismo sucede con los fotones en las desintegraciones electromagnéticas.

TABLA 4 ALGUNOS MESONES SELECCIONADOS

Partícula	*Antipartícula*	*Carga*[a] (*e*)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Extrañeza*[a]	*Energía de reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Productos típicos de la desintegración*
π^+	π^-	+1	0	0	140	2.4×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
π^0	π^0	0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
K^+	K^-	+1	0	+1	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
K^0	$\bar{K}^0$	0	0	+1	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
η	η	0	0	0	549	8.0×10^{-19}	$\gamma + \gamma$
ρ^+	ρ^-	+1	1	0	769	4.5×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^0$
η'	η'	0	0	0	958	2.2×10^{-21}	$\eta + \pi^+ + \pi^-$
D^+	D^-	+1	0	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
ψ	ψ	0	1	0	3097	1.0×10^{-20}	$e^+ + e^-$
B^+	B^-	+1	0	0	5278	1.2×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Υ	Υ	0	1	0	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

[a] La carga y la extrañeza son las de la partícula. Los valores para la antipartícula tienen el signo opuesto. El espín, la energía en reposo y la vida media son los mismos para una partícula y su antipartícula.

TABLA 5 ALGUNOS BARIONES SELECTOS

Partícula	*Antipartícula*	*Carga*[a] (*e*)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Extrañeza*[a]	*Energía de reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Productos típicos de la desintegración*
p	$\bar{p}$	$+1$	$\frac{1}{2}$	0	938	∞	
n	$\bar{n}$	0	$\frac{1}{2}$	0	940	889	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
Λ^0	$\bar{\Lambda}^0$	0	$\frac{1}{2}$	-1	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
Σ^+	$\bar{\Sigma}^+$	$+1$	$\frac{1}{2}$	-1	1189	0.8×10^{-10}	$p + \pi^0$
Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	0	$\frac{1}{2}$	-1	1192	5.8×10^{-20}	$\Lambda^0 + \gamma$
Σ^-	$\bar{\Sigma}^-$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	1197	1.5×10^{-10}	$n + \pi^-$
Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	0	$\frac{1}{2}$	-2	1315	2.9×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^0$
Ξ^-	$\bar{\Xi}^-$	-1	$\frac{1}{2}$	-2	1321	1.6×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^-$
Δ^*	$\bar{\Delta}^*$	$+2, +1, 0, -1$	$\frac{3}{2}$	0	1232	6×10^{-24}	$p + \pi$
Σ^*	$\bar{\Sigma}^*$	$+1, 0, -1$	$\frac{3}{2}$	-1	1385	2×10^{-23}	$\Lambda^0 + \pi$
Ξ^*	$\bar{\Xi}^*$	$-1, 0$	$\frac{3}{2}$	-2	1530	6×10^{-23}	$\Xi + \pi$
Ω^-	$\bar{\Omega}^-$	-1	$\frac{3}{2}$	-3	1672	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$

[a] La carga y la extrañeza son las de la partícula. Los valores para la antipartícula tienen el signo opuesto. El espín, la energía de reposo y la vida media son los mismos para una partícula y su antipartícula.

Podemos producir los bariones más pesados en las reacciones entre nucleones, tal como

$$p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + K^+,$$

la cual produce el barión Λ^0 y el mesón K^+. El Λ^0 se desintegra de acuerdo con

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \text{ (vida media} = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s)}.$$

Si bien no existen neutrinos producidos en la desintegración, la vida media indica que la desintegración está regida por la fuerza débil. En la sección 56-3 estudiaremos la razón de esta desintegración "lenta".

Partículas del campo y fuerzas de intercambio

Existe una pequeña familia adicional de partículas que no pueden clasificarse entre los leptones, los mesones o los bariones. Éstas son las *partículas del campo*, responsables de transportar las fuerzas con que interactúan las partículas.

La ley de la gravitación de Newton y la ley de la electrostática de Coulomb se originaron con base en el concepto de acción a distancia. Más adelante, en el siglo XIX, este concepto se reemplazó por la noción de un campo. Dos partículas interactúan a través de los campos que establecen: una partícula establece un campo y la otra interactúa con ese campo, en lugar de directamente con la primera partícula. La teoría cuántica del campo lleva esta noción un paso más allá, al suponer que los campos son transportados por cuantos. Bajo este aspecto, en lugar de que la primera partícula establezca al campo, decimos que emite cuantos del campo. La segunda partícula absorbe entonces a estos cuantos. Por ejemplo, la fuerza electromagnética entre dos partículas puede considerarse en términos de la emisión y la absorción de fotones, los cuales son cuantos del campo electromagnético. Cada tipo de campo tiene sus partículas de campo características. En la tabla 6 puede hallarse una lista de las partículas asociadas con las cuatro fuerzas básicas.

Una fuerza llevada a cabo por medio del intercambio de partículas se llama *fuerza de intercambio*. Por ejemplo, la fuerza entre dos nucleones de un núcleo ocurre por medio del intercambio de piones. En este caso los piones, junto con otros mesones, pueden actuar como partículas de campo asociadas con la fuerza fuerte entre los nucleones.

¿Cómo es posible que una partícula, como el protón, emita otra partícula con masa distinta de cero y siga permaneciendo como protón? Este proceso parece violar

TABLA 6 LAS PARTÍCULAS DEL CAMPO

Partícula	*Símbolo*	*Interacción*	*Carga* (*e*)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Energía de reposo* (GeV)
Gravitón		Gravitación	0	2	0
Bosón débil	W^+, W^-	Débil	± 1	1	80.6
Bosón débil	Z^0	Débil	0	1	91.2
Fotón	γ	Electromagnética	0	1	0
Gluón	g	Fuerte (color)	0	1	0

la conservación de la energía. La solución a este dilema se basa en la forma energía-tiempo de las relaciones de incertidumbre. El principio de incertidumbre es una limitación fundamental a nuestra capacidad de medir un sistema. Esto es, si observamos un sistema durante un intervalo de tiempo Δt, existe una incertidumbre ΔE correspondiente en su energía, de acuerdo con la ecuación 7 del capítulo 50, dada en el mínimo por

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi\,\Delta t}. \qquad (1)$$

No podemos conocer la energía de un sistema con mayor precisión que esta ΔE, a no ser que lo midamos durante un tiempo más largo que Δt. Si únicamente observamos durante un tiempo corto, la incertidumbre en la energía de reposo de un protón puede ser cuando menos tan grande como la energía de reposo de un pión, como queda demostrado en el siguiente problema muestra.

Problema muestra 2 (*a*) ¿Cuál es el intervalo de tiempo más largo durante el cual podemos observar a un protón para que su energía de reposo sea incierta por la energía de reposo del pión? (*b*) ¿Cuál es la distancia más grande que puede recorrer el pión en ese tiempo?

Solución (*a*) Para que la energía de reposo del protón sea incierta en una cantidad $\Delta E = m_\pi c^2$, el intervalo de tiempo de observación puede ser, de acuerdo con la ecuación 1, cuando mucho

$$\Delta t = \frac{h}{2\pi\,\Delta E} = \frac{h}{2\pi m_\pi c^2} = \frac{4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}}{(2\pi)(140\ \text{MeV})} = 4.7 \times 10^{-24}\ \text{s}.$$

En un intervalo de tiempo más corto que 4.7×10^{-24} s, un protón puede emitir y absorber a un pión sin que observemos una violación de la conservación de la energía.

(*b*) Si el pión viaja casi a la velocidad de la luz, la distancia máxima d que puede recorrer en este intervalo de tiempo es

$$d = c\,\Delta t = (3.00 \times 10^8\ \text{m/s})(4.7 \times 10^{-24}\ \text{s}) = 1.4 \times 10^{-15}\ \text{m} = 1.4\ \text{fm}.$$

Esta distancia define el *alcance* de la fuerza nuclear. Dos nucleones más cerca de unos 1.4 fm pueden interactuar mediante el intercambio de piones. Si los nucleones están separados por una distancia mayor, no puede haber intercambio de piones, por lo que no existe una fuerza nuclear.

56-3 LEYES DE LA CONSERVACIÓN

Nos costaría un gran trabajo analizar los procesos físicos sin las leyes de la conservación de la energía y las cantidades de movimiento o ímpetus lineal y angular. Estas leyes de la conservación nos ayudan a entender por qué ocurren ciertos sucesos (tal como en el caso de las colisiones que consideramos en el capítulo 10). También nos ayudan a entender por qué ciertos procesos (aquellos que violan las leyes de la conservación) no se observan jamás. En cierto sentido constituyen leyes empíricas, deducidas de la observación de procesos físicos y probadas cuidadosamente en el laboratorio. En otro sentido nos revelan aspectos fundamentales de las leyes de la Naturaleza.

Un ejemplo de una ley de conservación es la conservación de la carga eléctrica. Al observar el resultado de muchos procesos, nos vemos inclinados a proponer esta ley: en cualquier proceso no debe cambiar la cantidad neta de carga eléctrica. De modo equivalente, debemos decir que la carga neta antes de una reacción o una desintegración en particular debe ser igual a la carga neta después de la reacción o la desintegración. Nunca se ha observado una violación a esta ley, si bien ha sido ensayada cuidadosamente (véase la Sec. 27-6).

Conservación del número leptónico

En las reacciones y desintegraciones de las partículas fundamentales solemos encontrar cierto grupo de sucesos, pero no podemos observar otro grupo de sucesos relacionados que, por otra parte, cabría esperar que ocurran. Cuando esto sucede, sospechamos que alguna ley de conservación desconocida actúa permitiendo el primer grupo y prohibiendo el segundo. Por ejemplo, podemos producir un neutrino electrónico cuando un protón captura a un electrón:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e.$$

Siempre encontramos neutrinos en este proceso, pero nunca observamos antineutrinos. Además, la reacción siempre produce neutrinos electrónicos y nunca neutrinos muónicos o tau.

Explicamos la falla en observar ciertos procesos proponiendo una ley de la conservación para el *número leptónico* que es similar a la ley de la conservación para la carga eléctrica. A cada leptón le asignamos un número leptónico +1 y a cada antileptón le asignamos un número leptónico -1. Todas las demás partículas tienen números leptónicos de 0. La ley de la conservación del número leptónico enuncia, entonces lo siguiente:

> *En cualquier proceso, el número leptónico para leptones del tipo electrón, leptones del tipo muón, y leptones del tipo tau debe, en cada uno de los casos, permanecer constante.*

Hasta donde sabemos, la ley de la conservación leptónica es estrictamente válida; no obstante las investigaciones

experimentales precisas en busca de violaciones, hasta ahora no se ha hallado ninguna.

En el proceso de captura del electrón, asignamos un número leptónico del electrón L_e de +1 al electrón y al neutrino del electrón, mientras que $L_e = 0$ para el protón y el neutrón. Así, este proceso tiene $L_e = +1$ en ambos lados y sustenta a la ley de conservación del número leptónico. Si se produjese un *anti*neutrino electrónico, el lado derecho tendría $L_e = -1$, y la ley se violaría. Esto explica nuestra falla en observar este proceso. Si se produjese otro tipo de neutrino, por ejemplo, un neutrino muónico, el proceso tendría $L_e = +1$ en la izquierda y $L_e = 0$ en la derecha. Además, tendría $L_\mu = 0$ en la izquierda y $L_\mu = +1$ en la derecha. Por lo tanto, el proceso violaría la conservación de los números leptónicos tanto electrónicos como muónicos, y esto nunca se ha observado.

Por medio de la ley de la conservación del número leptónico, podemos explicar muchas de las observaciones experimentales. Al igual que otras leyes de conservación, esta ley demuestra ser de gran valor al analizar las desintegraciones y las reacciones.

Problema muestra 3 Analice la desintegración del muón desde el punto de vista de la conservación del número leptónico.

Solución Asignemos números leptónicos a cada partícula de la desintegración como sigue:

$$\begin{array}{lcccc} & \mu^- \rightarrow & e^- + & \bar{\nu}_e + & \nu_\mu \\ L_e: & 0 & +1 & -1 & 0 \\ L_\mu: & +1 & 0 & 0 & +1 \end{array}$$

Nótese que a los leptones del tipo electrónico se les asigna $L_\mu = 0$ y a los leptones del tipo muónico se les asigna $L_e = 0$. Vemos que $L_e = 0$ y $L_\mu = +1$ tanto antes como después de la desintegración, de modo que el proceso es permitido por la ley de conservación del número leptónico. En virtud de esta ley de conservación, podemos entender por qué debe haber un antineutrino electrónico y un neutrino muónico entre los productos de la desintegración, en lugar de, por ejemplo, un neutrino electrónico y un antineutrino muónico.

Conservación del número bariónico

En el caso de los bariones tiene lugar una ley de conservación similar. A cada barión, lo mismo que al protón o al neutrón, le asignamos un número bariónico B de +1, y a los antibariones tales como el antiprotón les asignamos $B = -1$. La ley de conservación del número bariónico enuncia entonces lo siguiente:

En todo proceso, el número bariónico total debe permanecer constante.

No se ha observado todavía ninguna violación a esta ley. (Sin embargo, ciertas teorías especulativas, como las GUT comentadas en la sección 56-1, sugieren que el protón puede desintegrarse en no-bariones, lo cual violaría la ley de la conservación del número bariónico. Esta desintegración no se ha observado jamás; de haberse observado, necesitaría cambiarse la ley de conservación del número bariónico de acuerdo con ello.)

Consideremos, por ejemplo, la reacción en la que se producen antiprotones cuando un haz de protones incide sobre un blanco de protones:

$$\begin{array}{lcc} & p + p \rightarrow & p + p + p + \bar{p} \\ B: & +1 + 1 & +1 + 1 + 1 - 1 \end{array}$$

En esta reacción el número bariónico neto es de +2 tanto en el lado izquierdo como en el lado derecho.

Al contrario del caso del número leptónico, existe únicamente un tipo de número bariónico. La ley de conservación del número bariónico es una versión más general de la regla que empleamos para analizar los procesos nucleares en los capítulos 54 y 55; allí mantuvimos constante el total de neutrones más protones en todas las desintegraciones y reacciones, lo cual, puesto que los neutrones y los protones son bariones, equivale a conservar el número total de bariones.

Si bien existen leyes de conservación para los dos tipos de partículas (los leptones y los bariones), no existe una ley de conservación para los mesones. Por ejemplo, en una reacción de protones sobre protones, puede producirse cualquier número de mesones (siempre que las partículas incidentes tengan la energía cinética suficiente):

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+,$$

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-,$$

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+ + \pi^0 + \pi^0.$$

Nótese la conservación de la carga eléctrica en estos procesos.

Extrañeza

Existen todavía otros procesos que son difíciles de entender con base únicamente en las leyes de conservación que hemos estudiado hasta ahora. Por ejemplo, consideremos al grupo de los kaones (mesones K), que son similares a los piones en muchos aspectos. A causa de que no hay una ley de conservación para los mesones, cabría esperar que en las reacciones pueda producirse cualquier número de kaones. Lo que encontramos en cambio es que los kaones se producen ya sea en pares, por ejemplo,

$$p + p \rightarrow p + p + K^+ + K^-,$$

$$p + p \rightarrow p + n + K^+ + \overline{K^0},$$

o, si se produce un solo kaón, siempre está acompañado por otra partícula "extraña", por ejemplo, de Λ^0,

$$p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + K^+.$$

Nos explicamos estos procesos (y la falla en observar otros que muestran estar permitidos por las leyes de conservación previamente comentadas) asignando a las partículas un nuevo número cuántico llamado *extrañeza*, que se encuentra que sigue una nueva ley de conservación, llamada *conservación de la extrañeza*. A dos kaones (K^+ y K^0) se les asigna una extrañeza de $S = +1$, y a los otros dos (K^- y $\overline{K^0}$) se les asigna $S = -1$. Todas las partículas no extrañas (tales como p, n y e) tienen $S = 0$. Las reacciones en que se producen dos kaones tienen entonces $S = 0$ a la izquierda (únicamente partículas no extrañas) y también $S = 0$ a la derecha. Al barión Λ^0 se le asigna $S = -1$, de modo que la reacción en que se produce $\Lambda^0 + K^+$ tiene también $S = 0$ en ambos lados.

La conservación de la extrañeza parece perderse cuando analizamos las desintegraciones de las partículas extrañas. Los kaones pueden desintegrarse en dos piones (no extraños), por ejemplo,

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0.$$

Aquí tenemos $S = +1$ a la izquierda, una clara violación de la conservación de la extrañeza. Al medir el tiempo de vida de esta desintegración, que resulta de unos 10^{-8} s, obtenemos una clave acerca de cómo resolver esta dificultad. Los kaones y los piones son partículas que interactúan fuertemente, y cabría esperar que esta desintegración ocurra con un tiempo de vida típico de la interacción fuerte dentro de la escala de 10^{-23} s (véase la tabla 1). En cambio, ¡se retrasa en 15 órdenes de magnitud! ¿Cuál podría ser la causa del retraso de esta desintegración?

Otra clave proviene del modo de desintegración más probable del K^+:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

un proceso de interacción débil, en el que una vida media de 10^{-8} s no estaría fuera de lo común. Existe evidencia de que *la interacción débil puede cambiar la extrañeza* en una unidad. En cualquiera de estos modos de desintegración del kaón, tenemos que S cambia en una unidad. La desintegración $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$, aun cuando no produce los neutrinos que por lo general caracterizan a un proceso de interacción débil, está regida por esta interacción. En este caso, la violación de la extrañeza es una clave de que no puede tratarse de un proceso de interacción fuerte (la extrañeza se conserva en todas las interacciones fuertes) y, por lo tanto, debe tratarse de una desintegración con interacción débil.

¿Conserva la extrañeza la interacción electromagnética? Para responder a esta pregunta, veamos las desintegraciones electromagnéticas violadoras de la extrañeza, tales como $\Lambda^0 \rightarrow n + \gamma$. Esta desintegración no demuestra que ocurre, por lo que llegamos a la conclusión de que *la interacción electromagnética conserva la extrañeza.*

Podemos resumir estos resultados en la ley de conservación de la extrañeza:

En los procesos regidos por las interacciones fuerte o electromagnética, la extrañeza total debe permanecer constante. En los procesos regidos por la interacción débil, la extrañeza total permanece constante o bien cambia en una unidad.

Problema muestra 4 El barión Ω^- tiene $S = -3$. (*a*) Se desea producir al Ω^- usando un haz de K^- incidiente sobre protones. ¿Qué otras partículas se producen en esta reacción? (*b*) ¿Cómo podría desintegrarse el Ω^-?

Solución (*a*) Las reacciones ocurren, por lo general, únicamente por medio de la interacción fuerte, la cual conserva la extrañeza. Consideremos la reacción

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + ?$$

En el lado izquierdo tenemos $S = -1$, $B = +1$ y $Q = 0$. En el lado derecho tenemos $S = -3$, $B = +1$ y $Q = -1$. Por lo tanto debemos sumar al lado derecho partículas con $S = +2$, $B = 0$ y $Q = +1$. Rastreando en las tablas de los mesones y los bariones, hallamos que podemos satisfacer estos criterios con K^+ y K^0, así que la reacción es

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0.$$

(*b*) El Ω^- no puede desintegrarse mediante la interacción fuerte, porque no se dispone de estados finales $S = -3$. Por lo tanto, debe desintegrarse en partículas que tengan $S = -2$ por medio de la interacción débil, que puede cambiar a S en una unidad. Con objeto de que se conserve el número bariónico, una de las partículas producto debe ser un barión. Dos posibilidades son

$$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^- \quad \text{y} \quad \Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-.$$

56-4 EL MODELO DEL QUARK

Las desintegraciones y reacciones en las que intervienen mesones y bariones están sujetas a leyes de conservación que implican dos cantidades: la carga eléctrica Q y la extrañeza S. Entonces, resulta lógico preguntar si existe alguna relación entre la carga eléctrica y la extrañeza de una partícula. En un grupo determinado de partículas semejantes (por ejemplo, los mesones con espín 0 o los bariones con espín $\frac{1}{2}$), ¿hallamos todas las combinaciones posibles de Q y S, o solamente a algunas de ellas? El hallar únicamente a un grupo restringido de combinaciones sugiere que las partículas se forman siguiendo un conjunto de reglas que quedan fuera de las unidades más fundamentales, cuya carga eléctrica y extrañeza tienen determinados valores.

Para responder a esta pregunta, construimos una gráfica que muestre a la carga eléctrica en un eje y a la extrañeza

en el otro. En esta gráfica ubicamos a las partículas de acuerdo con sus valores de carga eléctrica y extrañeza. La figura 3 muestra esta clase de gráfica para los mesones con espín 0, los bariones con espín $\frac{1}{2}$, y los bariones con espín $\frac{3}{2}$. La regularidad de estos patrones sugiere que estas partículas se componen de unidades más básicas.

En 1964, Murray Gell-Mann y George Zweig advirtieron, de manera independiente, que estos patrones regulares podían explicarse si se supusiera que los bariones y los mesones se componen de tres unidades fundamentales, las cuales pronto se conocieron como *quarks*. La tabla 7 muestra las propiedades de los tres quarks, que se llaman arriba (u), abajo (d) y extraño (s).

De acuerdo con este modelo, los mesones se componen de un quark y un antiquark, mientras que los bariones se componen de tres quarks. Consideremos la combinación $u\bar{d}$ de un quark arriba y un quark antiabajo, de modo que sus dos espines sumen 0. La carga del quark arriba (en unidades de e) es de $+\frac{2}{3}$, mientras que la carga del quark antiabajo es de $+\frac{1}{3}$ (la carga de una antipartícula se opone a la de la partícula). La combinación $u\bar{d}$ tiene $Q = +1$, $S = 0$ (porque ambos quarks tienen $S = 0$), y $B = 0$ (porque el quark tiene $B = +\frac{1}{3}$ y el antiquark tiene $B = -\frac{1}{3}$). Esta combinación tiene los mismos números cuánticos que el mesón π^+. Continuando de esta manera, encontramos nueve combinaciones posibles de un quark y un antiquark, que se listan en la tabla 8. Estas nueve combinaciones reproducen exactamente las combinaciones de carga eléctrica y extrañeza de los mesones con espín 0, como se indica en la figura 4*a*.

Los bariones se componen de tres quarks, la combinación más sencilla que da $B = +1$. Existen diez combinaciones diferentes que pueden formarse a partir de tres quarks, como se lista en la tabla 9. Graficando las combinaciones con espín $\frac{1}{2}$ y espín $\frac{3}{2}$ permitidas, obtenemos las figuras 4*b* y 4*c*.

Las similitudes entre las figuras 3 y 4 son notables. Basados en tres quarks únicamente, estamos en posibilidad de tener en cuenta los números cuánticos Q, S y B de todas estas partículas. Sin embargo, el modelo del quark produce más que estos sencillos patrones geométricos. Recomendamos al lector que considere estos patrones como modos de organizar a las partículas con propiedades similares, tal y como la tabla periódica nos permite organizar a los átomos con propiedades similares. Subyacente en la tabla periódica se halla la teoría atómica, que puede emplearse para calcular las propiedades de los átomos más allá de su configuración geométrica. De manera parecida, el modelo del quark nos permite calcular las propiedades de las partículas, incluyendo sus masas, momentos dipolares magnéticos, modos de desintegración, tiempos de vida y productos de la reacción. La concordancia entre las propiedades medidas y las calculadas ha resultado en un éxito espectacular del modelo. De hecho, todas las partículas conocidas (¡cientos de ellas!) han

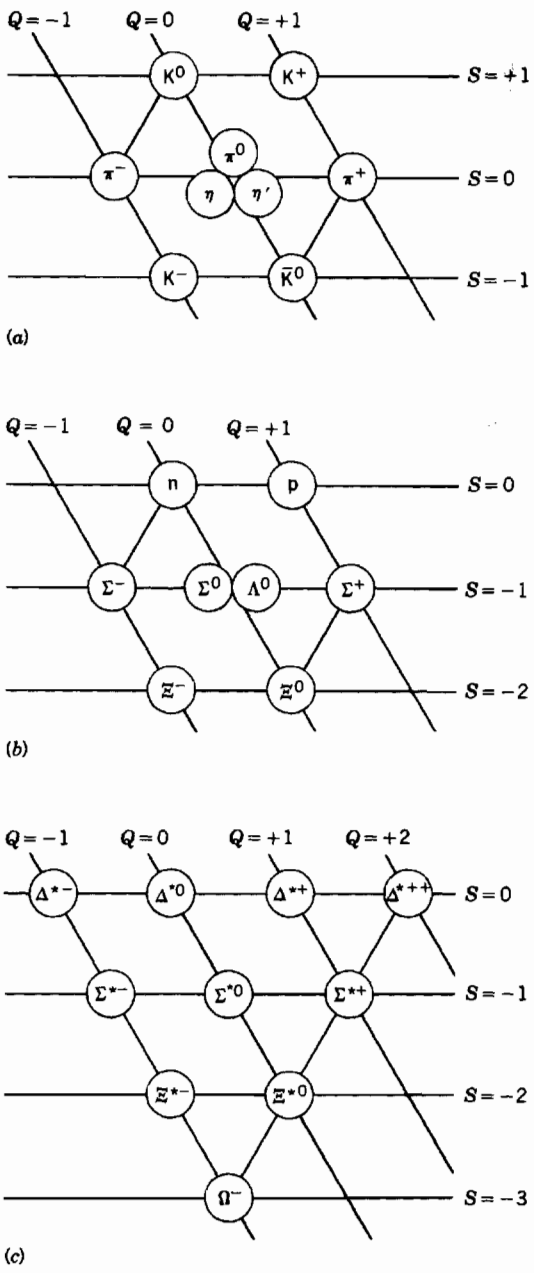


Figura 3 Gráfica que muestra (*a*) los mesones con espín 0, (*b*) los bariones con espín $\frac{1}{2}$ y (*c*) los bariones con espín $\frac{3}{2}$. Cada partícula se ubica en una rejilla de acuerdo con su extrañeza S y su carga eléctrica Q. Las líneas de la rejilla para la carga eléctrica se trazaron oblicuamente con el fin de que los patrones se vean más simétricos.

podido explicarse con base en este modelo, con unos cuantos quarks adicionales que describiremos más adelante.

El aspecto más extraordinario del modelo del quark son sus cargas eléctricas fraccionarias. Todas las partículas descubiertas hasta la fecha tienen cargas eléctricas que

TABLA 7 LAS PROPIEDADES DE TRES QUARKS

Quark	*Símbolo*	*Antiquark*	*Carga*[a] *(e)*	*Espín* *(h/2π)*	*Número bariónico*[a]	*Extrañeza*[a]
Arriba	u	$\bar{u}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0
Abajo	d	$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0
Extraño	s	$\bar{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	-1

[a] Los valores de la carga, el número bariónico y la extrañeza se refieren a los quarks. Los valores de los antiquarks tienen signos opuestos.

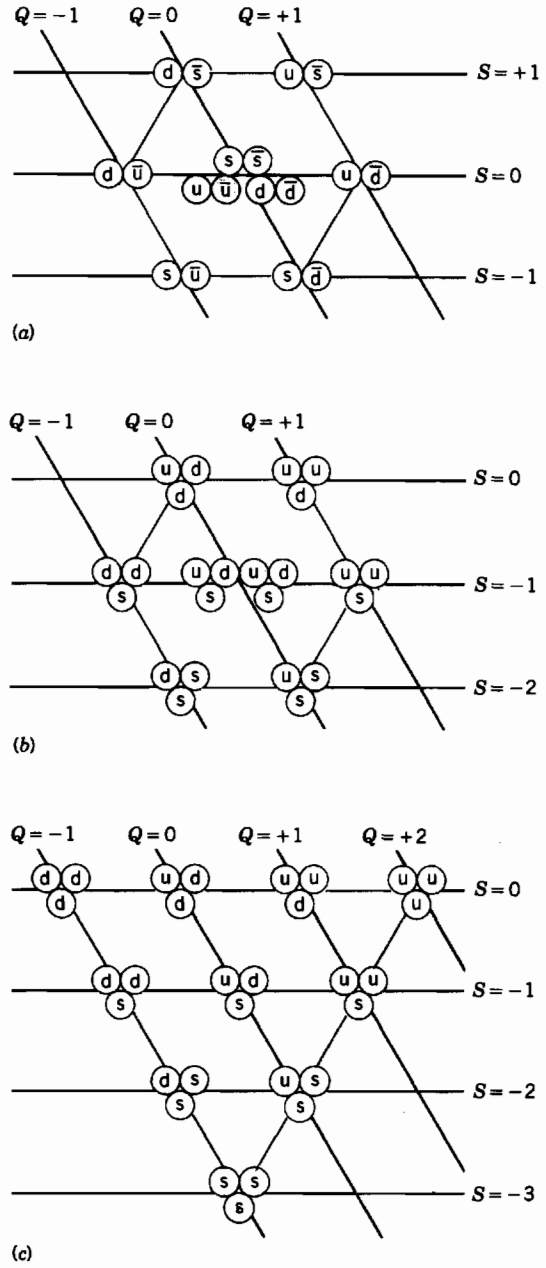


Figura 4 Gráfica que muestra (*a*) las combinaciones con espín 0 de un quark y un antiquark, (*b*) las combinaciones con espín $\frac{1}{2}$ de tres quarks y (*c*) las combinaciones con espín $\frac{3}{2}$ de tres quarks. Compárese con la figura 3.

pueden expresarse como múltiplos enteros de la unidad básica de carga *e*. Nunca se ha visto una partícula con una carga eléctrica fraccionaria. De hecho, nadie ha visto jamás un quark libre, a pesar de los heroicos esfuerzos experimentales por encontrar uno. Es posible que nuestros aceleradores de partículas no tengan todavía la energía suficiente para producir un quark libre. También se ha propuesto la posibilidad de que no puedan existir quarks libres, de modo que únicamente podemos observar a los quarks enlazados a los mesones y los bariones.

Si bien nunca ha sido posible ver quarks libres, se han observado quarks individuales *enlazados*. Los experimentos de dispersión que sondean en lo profundo del nucleón han revelado tres objetos como puntos que parecen tener un espín de $\frac{1}{2}$ y una carga de $+\frac{2}{3}$ o de $-\frac{1}{3}$. Estos experimentos proporcionan una prueba directa de la existencia de partículas como los quarks dentro del nucleón.

La fuerza entre quarks

¿Qué mantiene unidos a los quarks dentro de un mesón o de un nucleón? Esta fuerza es la versión más fundamental de la fuerza fuerte, causada por el intercambio de las partículas llamadas *gluones*. Tal y como la fuerza electromagnética entre partículas cargadas puede considerarse un intercambio de fotones, la fuerza fuerte entre

TABLA 8 LAS COMBINACIONES QUARK-ANTIQUARK

Combinación	*Carga (e)*	*Espín (h/2π)*	*Número bariónico*	*Extrañeza*
$u\bar{u}$	0	0,1	0	0
$u\bar{d}$	+1	0,1	0	0
$u\bar{s}$	+1	0,1	0	+1
$d\bar{u}$	-1	0,1	0	0
$d\bar{d}$	0	0,1	0	0
$d\bar{s}$	0	0,1	0	+1
$s\bar{u}$	-1	0,1	0	-1
$s\bar{d}$	0	0,1	0	-1
$s\bar{s}$	0	0,1	0	0

TABLA 9 COMBINACIONES DE TRES QUARKS

Combinación	*Carga* (e)	*Espín* ($h/2\pi$)	*Número bariónico*	*Extrañeza*
uuu	+2	$\frac{3}{2}$	+1	0
uud	+1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	0
udd	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	0
uus	+1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	-1
uss	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	-2
uds	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	-1
ddd	-1	$\frac{3}{2}$	+1	0
dds	-1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	-1
dss	-1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	-2
sss	-1	$\frac{3}{2}$	+1	-3

quarks se lleva a cabo mediante el intercambio de gluones. Por lo tanto, nos imaginamos al nucleón compuesto por tres quarks intercambiándose gluones mutuamente. Es posible, a través de medios indirectos, medir la fracción del ímpetu o cantidad de movimiento de la estructura interna de un nucleón que se deba a los quarks. Esta fracción resulta de alrededor de un 50% tan sólo. El resto tiene que deberse a los gluones intercambiados. El panorama resultante del nucleón es el de tres quarks que "nadan en un mar" de gluones intercambiados.

La fuerza entre quarks tiene dos propiedades extraordinarias. (1) Se necesita una gran energía (quizás infinita) para separar a dos quarks a una distancia mayor del tamaño de un nucleón o de un mesón (alrededor de 1 fm). Ésta puede ser la razón de por qué no se ha visto todavía ningún quark libre. Cuando tratamos de bombear energía en un nucleón para separar a uno de sus quarks, en realidad la energía crea un par quark-antiquark. El antiquark se combina con uno de los quarks para formar un mesón, lo cual concuerda con nuestras observaciones: cuando aplastamos a dos nucleones entre sí a energías elevadas, obtenemos a nuestros nucleones (u otros bariones) de regreso, más algunos mesones adicionales. Cuanta más energía introducimos, más mesones obtenemos, pero no surge ningún quark libre. (2) Paradójicamente, los quarks se mueven libremente dentro del nucleón o del mesón. A distancias muy cortas (menores del tamaño de un nucleón), la fuerza entre los quarks tiende a cero.

Puede entenderse este extraordinario comportamiento de los quarks y de los gluones estableciendo comparación con el electromagnetismo. Dos partículas cargadas interactúan entre sí mediante el intercambio de fotones. Sin embargo, el fotón no porta en sí mismo una carga eléctrica, y así la fuerza entre la partícula cargada y el fotón intercambiado no da por resultado un intercambio de fotones adicionales. Por otra parte, un quark puede emitir un gluón e interactuar con él. Esta fuerza entre el quark y el gluón puede crear gluones adicionales. Cuando interactúa con otro electrón, el electrón puede emitir un fotón y seguir siendo todavía un electrón. No sacrifica su cualidad de "eléctrico" (esto es, su carga eléctrica) para emitir el fotón. Sin embargo, un quark entrega a su gluón emitido una parte de su "fortaleza", a la que los físicos llaman "color". En la fuerza de los quarks, el color juega el mismo papel que la carga eléctrica en la fuerza de partículas cargadas. El fotón no porta carga eléctrica, pero el gluón porta color, y al hacerlo cambia el color residual dejado atrás en el quark que emitió al gluón. En efecto, el quark está dispersando su color sobre una esfera del tamaño de un nucleón (la gama de los gluones), y como resultado se debilita considerablemente la fuerza entre los quarks a estas distancias.

Los físicos de partículas han elegido nombres divertidos y caprichosos para describir las partículas fundamentales y sus propiedades. Los nombres tales como quark, extrañeza, gluón o color tienen significado únicamente como etiquetas. Los gluones proporcionan el "pegamento"* que enlaza a los quarks entre sí, pero no tiene similitud alguna con cualquier otro "pegamento" conocido. El "color" que portan los quarks y los gluones no tiene nada que ver con nuestro uso ordinario del color. Es simplemente más sencillo recordar y comentar estas propiedades cuando les damos nombres familiares.

Más quarks

En 1974, en experimentos simultáneos llevados a cabo en el Brookhaven National Laboratory de Nueva York y en el Stanford Linear Accelerator Center, de California, Estados Unidos, los investigadores descubrieron un mesón poco común con una energía de reposo de unas tres

* De glue (pegamento), en inglés. De aquí que se les llame gluones. (N. del E.)

veces la del protón. Se esperaba que este nuevo mesón, llamado ψ (psi), se desintegrase en mesones más ligeros en un tiempo de interacción fuerte de quizás 10^{-23} s. En cambio, se observó que se desintegra en un tiempo de unos 10^{-20} s, que es más característico de la interacción electromagnética (véase la tabla 1). Además, los productos de su desintegración no eran mesones sino un electrón y un positrón, otra señal de un proceso electromagnético.

¿Por qué se bloquea la trayectoria de la desintegración rápida, con fuerza fuerte, de esta partícula, retardando su desintegración por tres órdenes de magnitud? En el caso de la extrañeza explicábamos un efecto similar, un nuevo número cuántico que se introdujo en parte para explicar ciertas desintegraciones lentas. Explicábamos tales desintegraciones mediante una violación de la conservación de la extrañeza.

De manera similar, suponemos que la desintegración del ψ se retarda por la violación de otra ley de conservación, llamada *encanto*. De acuerdo con esta interpretación, el mesón ψ se compone de un nuevo quark c (del inglés *charm*) y su antiquark $\bar{c}$. El quark c tiene una carga eléctrica de $+\frac{2}{3}$. Tal y como al quark extraño se le asigna un número cuántico de extrañeza $S = -1$, al quark encantado se le asigna un encanto de $C = +1$. La desintegración del mesón ψ se retarda, porque el quark c debe desintegrarse en otros quarks (u, d, o s), todos los cuales tienen $C = 0$. Así, la desintegración implica una violación de la conservación del encanto y, por lo tanto, no puede ocurrir mediante la fuerza fuerte, la cual conserva al encanto.

En 1977 se llevó a cabo un descubrimiento parecido en el Fermi National Accelerator Laboratory cerca de Chicago, Estados Unidos. De nuevo, se descubrió un mesón pesado (en este caso, de diez veces la energía de reposo del protón), el cual se esperaba se desintegraría a otros mesones en un tiempo característico de la interacción fuerte; sin embargo, se desintegró en $e^- + e^+$ en unos 10^{-20} s. En este caso, la desintegración se retardó nuevamente según la violación de otra regla más de conservación, que implica otro nuevo quark más, llamado b (de *bottom*, fondo), que tenía una carga eléctrica de $-\frac{1}{3}$. Se supone que este nuevo mesón, llamado Υ (ípsilon), se compone de la combinación $b\bar{b}$. Si asignamos al quark b un nuevo número cuántico que represente la "profundidad", entonces la desintegración se retarda porque el quark b debe cambiar a quarks más ligeros que carezcan de esta propiedad; esta violación de la conservación de la profundidad es la responsable del retardo de la desintegración.

Una nueva simetría

La materia ordinaria está compuesta de protones y neutrones, que a su vez están constituidos únicamente de quarks u y d. La materia ordinaria está compuesta también de electrones, y en la conversión de protones a neutrones o de neutrones a protones en la desintegración beta de la materia ordinaria, hallamos neutrinos del tipo electrón emitidos junto con el positrón o el electrón.

Por lo tanto, podemos construir todo nuestro mundo y todos los fenómenos comúnmente observados con base en dos pares de partículas fundamentales: quarks u y d, y leptones e^- y ν_e. Dentro de cada par, las cargas difieren en una unidad ($+\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$; -1 y 0).

Si llevamos a cabo experimentos con una energía un poco más elevada, hallamos nuevos tipos de partículas: un nuevo par de leptones (μ^- y su neutrino ν_μ) y un nuevo par de quarks (c y s). Una vez más, las cargas eléctricas dentro de cada par difieren en una unidad.

A una energía aún más elevada, hallamos un nuevo par de leptones (τ y ν_τ) y un nuevo quark (b). Se supone que el quark b tiene un compañero, llamado t (de *top*, cima), y si el quark t tiene una carga de $+\frac{2}{3}$, este último par de quarks será similar a los otros pares. Los hallazgos del quark t se llevaron a cabo mientras se buscaba nuevos mesones con unas 30 veces la energía de reposo del protón, pero hasta la fecha no se ha encontrado evidencia alguna este quark. Sin embargo, los físicos están seguros de su existencia y confían en que lo encontrarán cuando se disponga de la energía suficiente.

Por lo tanto, parece que las partículas verdaderamente fundamentales, los quarks y los leptones, se presentan en pares, y que un par de quarks y un par de leptones pueden combinarse en una "generación", como sigue:

$$\text{1a. generación: } \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\text{2a. generación: } \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$\text{3a. generación: } \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

En el apéndice F se resumen las propiedades de estos seis quarks y leptones.

Es posible que usted se pregunte ahora si no estamos recorriendo el mismo camino de nuevo. Es, decir, ¿podríamos algún día tener cientos de quarks y leptones "fundamentales", de modo que, en lugar de simplicidad, tengamos una nueva capa de complejidad? Es posible suponer que aceleradores cada vez más grandes revelarán nuevas generaciones de leptones y quarks aún más masivos, y el único límite a su número puede parecer estar impuesto por la cantidad de energía de que disponemos. Para responder esta pregunta, nos remitimos a descubrimientos en el extremo opuesto de la escala en los laboratorios de los aceleradores: volvamos la vista a los primeros momentos después del nacimiento del Universo, y veremos que la lista anterior de quarks y leptones podría estar completa.

Problema muestra 5 Analice estos procesos en términos de su contenido de quarks:

$$(a)\quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e,$$
$$(b)\quad \Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-,$$
$$(c)\quad K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0.$$

Solución (*a*) Usando las figuras 3 y 4 para hallar el contenido de quarks de cada una de las partículas, podemos reescribir la desintegración como

$$uud \rightarrow udd + e^+ + \nu_e.$$

Cancelando el par común de quarks ud de cada lado, hallamos

$$u \rightarrow d + e^+ + \nu_e.$$

El quark u cambia a un quark d mediante la desintegración beta.

(*b*) El contenido de quarks es

$$sss \rightarrow uds + s\bar{u}.$$

Cancelando el par común de quarks s en cada lado, hallamos que el proceso neto es

$$s \rightarrow u + d + \bar{u}.$$

Esto es, el quark s se transforma en un quark d, y se crea un par $u\bar{u}$ a partir de la energía de la desintegración.

(*c*) Reemplazando de nuevo a las partículas por su contenido de quarks, podemos expresar la reacción como

$$s\bar{u} + uud \rightarrow sss + u\bar{s} + d\bar{s},$$

y removiendo los quarks comunes de u, d y s de cada lado nos quedamos con

$$u\bar{u} \rightarrow s\bar{s} + s\bar{s}.$$

El proceso neto consiste en la aniquilación del par $u\bar{u}$ y en la producción de dos pares $s\bar{s}$ a partir de la energía de la reacción.

Estos ejemplos son típicos de los procesos de los quarks: la fuerza débil puede cambiar a un tipo de quark en otro. La fuerza fuerte puede crear o destruir a los pares quark-antiquark, pero no puede cambiar a un tipo de quark por otro.

56-5 LA COSMOLOGÍA DEL BIG BANG

Desde los principios de la historia registrada, el ser humano ha especulado acerca del origen y futuro del Universo, una rama de la ciencia que ahora se llama *cosmología*. Hasta el siglo XX, estas especulaciones se llevaron a cabo en su mayoría por los filósofos y los teólogos, porque no había una evidencia experimental de ninguna clase que conformara la base de cualquier teoría científica. En este siglo, dos descubrimientos experimentales principales han señalado el camino hacia una teoría coherente que ahora es aceptada por casi todos los físicos.

La expansión del Universo

El primero de los dos grandes descubrimientos fue hecho por el astrónomo Edwin Hubble (véase la Fig. 5) en la década de 1920. Hubble estaba estudiando los objetos en racimo que se conocían entonces como *nebulosas*. Al resolver finalmente las estrellas individuales en las nebulosas, Hubble fue capaz de demostrar que éstas son galaxias iguales a nuestra Vía Láctea, compuestas de cientos de miles de millones de estrellas. Algo más sorprendente fue que Hubble dedujo que las galaxias se alejan entre sí y de nosotros, y que cuanto mayor era su distancia de nosotros, mayor es su velocidad de recesión. Es decir, si d es la distancia de la galaxia desde la Tierra (o desde cualquier otro punto de referencia en el Universo) y v es la velocidad a la que la galaxia se aleja de nosotros, la ley de Hubble da

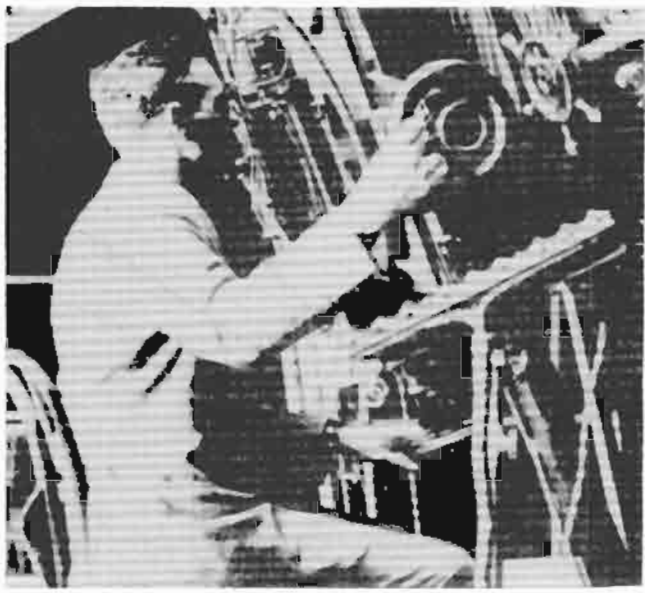


Figura 5 Edwin Hubble (1889-1953) en los controles del telescopio de 100 in. en el Monte Wilson, donde llevó a cabo la mayor parte de la investigación que le condujo a proponer que el Universo está en expansión.

$$v = Hd, \qquad (2)$$

donde H es una constante de proporcionalidad conocida como el *parámetro de Hubble*.

El parámetro de Hubble tiene las dimensiones del inverso del tiempo. Su valor puede conocerse únicamente mediante el experimento: debemos deducir independientemente la distancia de una galaxia desde la Tierra y su velocidad con relación a la Tierra. Las velocidades de la recesión pueden medirse de manera directa usando la desviación Doppler de la luz que parte de la galaxia (véase la Fig. 6 del capítulo 42), pero la escala de distancia es difícil de determinar (de hecho, las primeras estimaciones de Hubble estaban equivocadas por un factor de 10). Sin embargo, hoy día tenemos un grupo de datos consistente (Fig. 6) que confirma la ley de Hubble y da un valor del parámetro de Hubble de

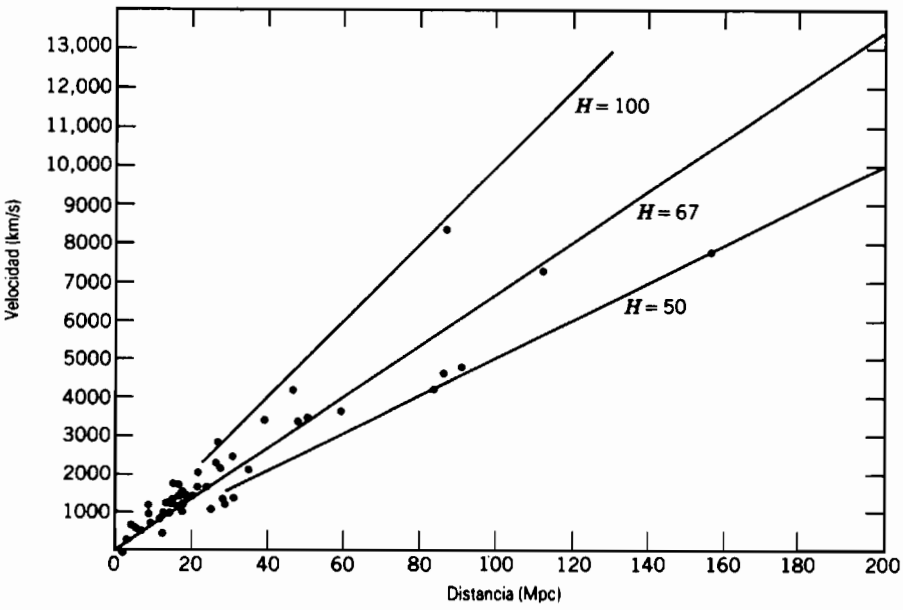


Figura 6 Relación entre la velocidad y la distancia en los grupos y racimos de galaxias. Las líneas rectas muestran las relaciones de Hubble para varios valores del parámetro H de Hubble.

$$H = 67 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}},$$

aproximadamente, donde el Mpc (megaparsec) es una unidad de distancia usada comúnmente en la escala cósmica:

$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} = 3.26 \times 10^6 \text{ años luz} = 3.084 \times 10^{19} \text{ km}.$$

A causa de las incertidumbres en las estimaciones de la escala cósmica de distancia, el parámetro de Hubble es incierto, con valores posibles en la escala de 50 a 100 (km/s)/Mpc.

Si el Universo se ha estado expandiendo desde siempre a la misma velocidad, entonces H^{-1} es la edad del Universo. Usando el valor aceptado del parámetro de Hubble, estimaríamos la edad del Universo como de 15×10^9 años, donde el margen de incertidumbre de H permite valores en una escala de 10 a 19×10^9 años. Sin embargo, como veremos más adelante, la expansión del Universo no ha sido constante, de modo que la edad verdadera es menor que el valor de H^{-1} actualmente deducido.

La radiación cósmica de fondo de microondas

Si bien hubo otras explicaciones de la expansión del Universo, aquella que ha captado más adeptos se basó en la hipótesis de que, si las galaxias están actualmente apartándose precipitadamente, deben haber estado agrupadas y juntas en algún tiempo en el pasado distante. Si hacemos retroceder al reloj cósmico lo suficiente, hallamos que, en su estado primigenio, el Universo consistía en densidades de materia y de radiación inimaginablemente elevadas. Al expandirse el Universo, tanto la materia como la radiación se enfriaron; puede uno imaginar que las longitudes de onda de los fotones radiantes se estiraron en la expansión. La radiación llenó todo el Universo en su estado compacto, y continúa llenándolo por completo durante la expansión. Todavía hoy día debe estar presente esa radiación, enfriada hasta el extremo de que su componente más intensa se halla en la región de las microondas del espectro electromagnético. Esto se conoce como la *radiación cósmica de fondo de microondas.*

Esta radiación fue descubierta en 1965 por Arno Penzias y Robert Wilson de los Laboratorios Bell de New Jersey, Estados Unidos, quienes estaban probando una antena de microondas usada en las comunicaciones por satélite (véase la Fig. 7). Sin importar a dónde apuntaran su antena, se encontraban siempre el mismo silbido inquietante de fondo. Finalmente, se dieron cuenta de que en realidad estaban presenciando los vestigios del Universo primigenio, y por su descubrimiento fueron galardonados con el premio Nobel de 1978.

La radiación de fondo de microondas tiene un verdadero espectro térmico del tipo que estudiamos en las secciones 49-1 y 49-2. La figura 8 muestra las mediciones de la intensidad de la radiación de fondo a diversas longitudes de onda, y puede verse lo bien que encaja por la ley de la radiación de Planck con una temperatura de 2.735 K. Los puntos de los datos incluyen las mediciones recientes llevadas a cabo desde un satélite en órbita a la Tierra, eliminándose por tanto la absorción atmosférica.

Las mediciones de la intensidad de la radiación de fondo de microondas en diversas direcciones muestran que la radiación tiene una intensidad uniforme en todas direcciones; no parece venir de alguna fuente en particular en el cielo, sino que, en cambio, llena a todo el Universo

Figura 7 Arno Penzias (derecha) y Robert Wilson, de pie junto a la gran antena de cuerno con la que detectaron por vez primera la radiación de fondo de microondas.

uniformemente, como cabría esperar de la radiación que llenó de igual manera el Universo temprano. Sin embargo, observaciones recientes demuestran que existen fluctuaciones de temperatura de unos 10^{-5} K entre las diferentes regiones del cielo. Estos resultados se han interpretado como evidencia de la distribución no uniforme de la materia en el Universo primigenio que condujo finalmente a la condensación de las estrellas y las galaxias.

La densidad de la energía de la radiación puede hallarse de la ley de la radiación de Planck (Ec. 6 del capítulo 49). La densidad del número de estos fotones de fondo es de unos 400 por cm^3, y la densidad de la energía es de unos 0.25 eV/cm^3 (lo que corresponde aproximadamente a la mitad de la energía en reposo de un electrón por m^3). La energía media por fotón es de unos 0.00063 eV, lo cual nos indica por qué no nos percatamos ordinariamente de la presencia de estos fotones.

La cosmología del Big Bang

La teoría cosmológica que concuerda mejor con estos dos hallazgos experimentales (la ley de Hubble y la radiación de fondo) es la *cosmología del Big Bang*. De acuerdo con esta teoría, el Universo comenzó hace unos 10 a 20 mil millones de años en un estado de densidad y temperatura extremas. No existían las galaxias ni tampoco materia acumulada en racimos tal como la conocemos hoy; en los primeros tiempos, la "materia prima" del Universo consistía en una gran variedad de partículas y antipartículas, además de la radiación. La densidad de radiación y la materia se relacionan con la temperatura del Universo. A medida que el Universo se expande, se enfría también (tal y como se enfría un sistema termodinámico en expansión). Si llevamos a cabo algunas hipótesis razonables acerca de la velocidad de expansión, podemos hallar una relación entre la temperatura y el tiempo después de la formación del Universo:

$$T = \frac{1.5 \times 10^{10}\ \mathrm{s^{1/2} \cdot K}}{t^{1/2}}, \tag{3}$$

donde la temperatura T está en K y el tiempo t está en segundos.

En el Universo primigenio, la radiación consistía en fotones de energía elevada, cuya energía típica puede estimarse en forma aproximada como kT, donde k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura en un tiempo t en particular, determinado de la ecuación 3. Los procesos dominantes en el Universo temprano pueden representarse así:

$$\text{fotones} \leftrightarrows \text{partícula} + \text{antipartícula}.$$

Esto es, los fotones pueden emprender la *producción de pares* y producir un par partícula-antipartícula, por ejemplo, un electrón y un positrón o un protón y un antiprotón. Viceversa, una partícula y su antipartícula pueden anularse a fotones. En cada caso, la energía total de los fotones debe ser cuando menos tan grande como la energía de reposo de la partícula y de la antipartícula.

Nuestra meta en la descripción del Universo primigenio es entender la formación de la materia ordinaria a partir de las partículas y la radiación producidas en el Big Bang. Puesto que la materia ordinaria se compone de nucleones, consideremos la formación y la aniquilación de los protones y los neutrones:

$$\gamma + \gamma \leftrightarrows \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \quad \text{y} \quad \gamma + \gamma \rightleftarrows \mathrm{n} + \bar{\mathrm{n}},$$

donde representamos a los fotones como rayos gamma. Para que los fotones produzcan pares nucleón-antinucleón, la energía kT del fotón debe ser cuando menos tan grande como la energía de reposo mc^2 de un nucleón (940 MeV). La temperatura mínima del Universo que permitirá la producción de nucleones y antinucleones es

$$T = \frac{mc^2}{k} = \frac{940\ \mathrm{MeV}}{8.62 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}} = 1.1 \times 10^{13}\ \mathrm{K}.$$

De acuerdo con la ecuación 3, el Universo se enfrió a menos de esta temperatura en el tiempo

$$t = \left(\frac{1.5 \times 10^{10}\ \mathrm{s^{1/2} \cdot K}}{T}\right)^2 = \left(\frac{1.5 \times 10^{10}\ \mathrm{s^{1/2} \cdot K}}{1.1 \times 10^{13}\ \mathrm{K}}\right)^2$$
$$= 2 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}.$$

Esto es, en tiempos anteriores a 2 μs, el Universo estaba lo suficientemente caliente como para que los fotones

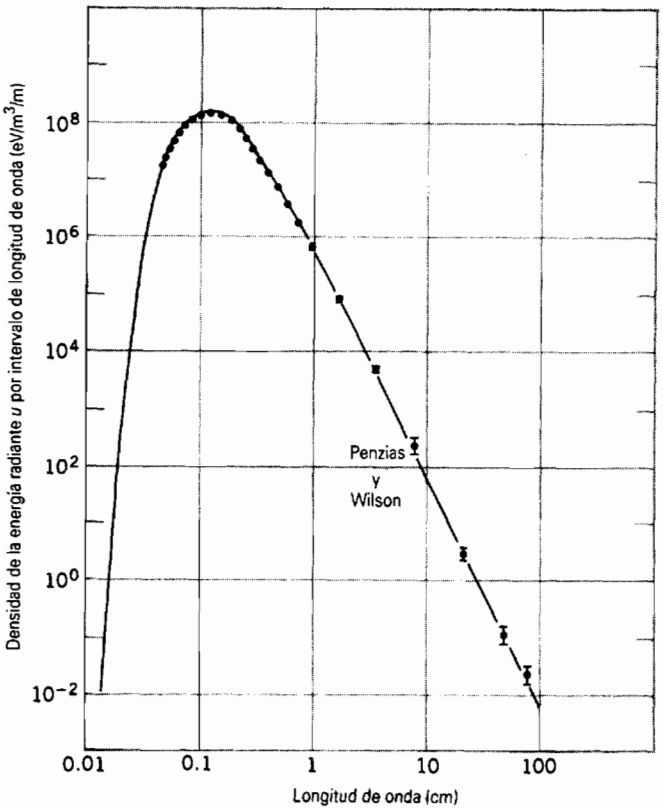


Figura 8 El espectro de la radiación cósmica de fondo de microondas. Los puntos representan observaciones, y la línea continua representa al espectro Planck de la energía radiante que corresponde a una temperatura de 2.735 K. Nótese la excelente concordancia entre los puntos dato y la curva teórica. Los datos entre 0.05 cm y 1.0 cm proceden de las observaciones llevadas a cabo por el satélite COBE (COsmic Background Explorer) lanzado en 1989.

produjeran pares nucleón-antinucleón, pero después de 2 μs los fotones no eran (en promedio) lo suficientemente energéticos como para producir pares nucleón-antinucleón.

En los primeros tiempos (correspondientes a las temperaturas elevadas), la radiación debe haber sido capaz de crear pares quark-antiquark. Podemos considerar al Universo en estos primeros tiempos como consistente únicamente en partículas fundamentales (quarks y leptones) y radiación. Los quarks y los antiquarks se combinaron para formar mesones y bariones, que se disociaron por la radiación tan rápidamente como pudieron formarse. A medida que el Universo se expandió y enfrió, la radiación se volvió finalmente demasiado débil como para arrojar mesones y bariones. Puesto que los detalles del modelo del quark (y la existencia de quarks libres) todavía no se confirman, comenzaremos la historia en un tiempo de unos 10^{-6} s, cuando podemos ver un Universo compuesto de protones, neutrones, antiprotones, antineutrones, mesones, leptones, antileptones y fotones. Los ritmos de producción y disociación son aproximadamente iguales, de manera que los números de partículas y sus antipartículas correspondientes son casi iguales. Además, el número de fotones es aproximadamente igual al número de protones, el que a su vez es igual al número de electrones. Antes de este tiempo, la interacción fuerte jugaba un papel prominente en la determinación de la estructura y composición del Universo, a través de procesos tales como las combinaciones de quarks y antiquarks en bariones o mesones o colisiones de bariones para formar mesones o nuevos bariones. Después de unos 10^{-6} s (correspondientes a $T = 1.5 \times 10^{13}$ K o $kT = 1300$ MeV), las partículas y la radiación tienen muy poca energía como para inducir estas reacciones, y la era de la interacción fuerte termina aproximadamente en este tiempo.

Los procesos de las interacciones débil y electromagnética continúan ocurriendo. Los procesos electromagnéticos se representan por la producción de partículas y antipartículas (por ejemplo, electrones y positrones) mediante fotones, mientras que las interacciones débiles tienen lugar a través de tales procesos como

$$n + \nu_e \leftrightarrows p + e^- \quad \text{y} \quad p + \bar{\nu}_e \leftrightarrows n + e^+$$

y procesos similares, donde se están creando y destruyendo neutrinos al mismo ritmo. Mientras que los leptones y los neutrinos tienen suficiente energía, los ritmos de la reacción en ambos sentidos son iguales, lo cual mantiene el equilibrio entre el número de leptones cargados (e^+ y e^-) y neutrinos. Puesto que estas reacciones convierten a los neutrones en protones y a los protones en neutrones con igual facilidad, el Universo primigenio contenía aproximadamente números iguales de protones y neutrones.

La diferencia en la energía de reposo entre los protones y los neutrones es de $\Delta E = 1.3$ MeV aproximadamente

(siendo los neutrones ligeramente más masivos). A cualquier temperatura T, la diferencia entre los números relativos de protones y neutrones se determina en parte mediante el factor $e^{-\Delta E/kT}$ de Boltzmann (véase la Sec. 24-4). Cuando $t < 10^{-6}$ s (correspondiente a $T > 1.5 \times 10^{13}$ K o $kT > 1300$ MeV), el factor de Boltzmann es muy cercanamente igual a 1 y tiene una influencia despreciable sobre el número relativo de protones y neutrones.

En los tiempos después de unos 10^{-6} s, la radiación tiene, en promedio, muy poca energía para crear pares nucleón-antinucleón (esto es, ya no tenemos $\gamma + \gamma \rightarrow n + \bar{n}$ o $p + \bar{p}$), pero la aniquilación nucleón-antinucleón continúa ocurriendo ($n + \bar{n} \rightarrow \gamma + \gamma$ y $p + \bar{p} \rightarrow \gamma + \gamma$). Desde los 10^{-6} s hasta unos 10^{-2} s ($T = 1.5 \times 10^{11}$ K o $kT = 13$ MeV), los procesos de interacción débil mantienen un equilibrio aproximado entre los números de protones y neutrones.

Entre 10^{-2} s y 1 s ($T = 1.5 \times 10^{10}$ K o $kT = 1.3$ MeV), el factor de Boltzmann comienza a alterar el equilibrio entre protones y neutrones, y en $t = 1$ s la razón entre el número de neutrones y el número de protones es de e^{-1} aproximadamente, de modo que los nucleones constan de alrededor del 73% de protones y 27% de neutrones. Durante este periodo, la influencia de los neutrinos ha estado decreciendo, y más o menos en $t = 1$ s los neutrinos (que se están enfriando junto con el resto del Universo mientras éste se expande) tienen muy poca energía como para causar transformaciones protón-neutrón, lo cual disminuye el papel de las interacciones débiles en la evolución del Universo. Esto se conoce como el tiempo del "desacoplamiento del neutrino", cuando ya no ocurren interacciones entre la materia y los neutrinos. A partir de este tiempo, los neutrinos continúan llenando el Universo, enfriándose al unísono con la expansión del Universo. Estos neutrinos primigenios tienen hoy día más o menos la misma densidad que los fotones de fondo de microondas, pero una temperatura ligeramente menor (de unos 2 K). Puesto que los neutrinos interactúan tan sólo débilmente con la materia, la detección de los neutrinos energéticos ($E > 1$ MeV) requiere de equipos de gran tamaño y complejidad. La detección de estos neutrinos primigenios ($E < 10^{-3}$ eV) parece una tarea sin esperanza, pero su observación, la medición de su distribución de energía y la deducción de su temperatura proporcionaría otra fehaciente confirmación de la cosmología del Big Bang.

En un tiempo de unos 6 s ($T = 6 \times 10^9$ K o $kT = 0.5$ MeV), la radiación se ha enfriado a una temperatura a la cual ya no tiene la energía suficiente para producir ni siquiera los pares partícula-antipartícula (electrones y positrones) más ligeros, de modo que no se forman nuevas partículas por la producción de pares. La aniquilación partícula-antipartícula continúa y los fotones resultantes retardan un poco el ritmo de enfriamiento. Además, los electrones tienen muy poca energía para causar que los protones se transformen en neutrones (ya no ocurre la reacción $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$). El único proceso de interacción débil que continúa ocurriendo es la desintegración del neutrón ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$). En este momento los nucleones constan de alrededor del 83% de protones y 17% de neutrones.

Durante este periodo, la aniquilación partícula-antipartícula ha continuado ocurriendo, de modo que ya no quedan positrones o antinucleones en el Universo. El Universo consta ahora de un número N de protones, un número N igual de electrones (para hacerlo eléctricamente neutro), y aproximadamente $0.2N$ neutrones. Puesto que la aniquilación partícula-antipartícula ha disminuido sustancialmente el número de partículas mientras que la cantidad de radiación se mantiene, existen muchos más fotones (quizá 10^8 a 10^9 N) que nucleones o electrones. Existen casi tantos neutrinos como fotones.

Hasta donde sabemos, el Universo presente no contiene estrellas o galaxias hechas de antimateria. ¿Qué le pasó a toda la antimateria, que representaba el 50% de las partículas en el Universo primigenio? De acuerdo con la cosmología del Big Bang, en una temprana época de la evolución del Universo una de las fuerzas que actuaron entre las partículas causó un desequilibrio muy ligero de la materia sobre la antimateria, quizás 1 parte en 10^8 o 10^9. La naturaleza exacta de esta fuerza no ha sido entendida bien todavía, aunque los experimentos que prueban a esta fuerza y distinguen a la materia de la antimateria se han duplicado en el laboratorio. Durante las etapas subsiguientes en la evolución del Universo, toda la antimateria se aniquiló con toda la materia excepto aproximadamente 1 parte en 10^8 o 10^9 de ella. Esto es, por cada 1,000,000,000 positrones puede haber habido originalmente 1,000,000,001 electrones, pero después de la aniquilación de las 2,000,000,000 partículas el resto es de sólo 1 electrón.

Esta descripción de la evolución del Universo, ilustrada en la figura 9, nos ha llevado de la formación del Universo en el Big Bang, pasando por eras cálidas y turbulentas dominadas por las reacciones nucleares, a un tiempo de unos cuantos segundos cuando la composición se volvió idéntica a las partículas que conforman ahora nuestro Universo. En la sección siguiente estudiaremos cómo se combinaron estas partículas para formar los núcleos y átomos que observamos hoy día.

Problema muestra 6 ¿Cuándo se volvió el Universo demasiado frío para permitir la radiación y crear pares $\mu^+ \mu^-$?

Solución La energía de reposo del muón es de 105.7 MeV. Los fotones tienen esta energía media a una temperatura determinada por

$$T = \frac{E}{k} = \frac{105.7 \text{ MeV}}{8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} = 1.23 \times 10^{12} \text{ K}.$$

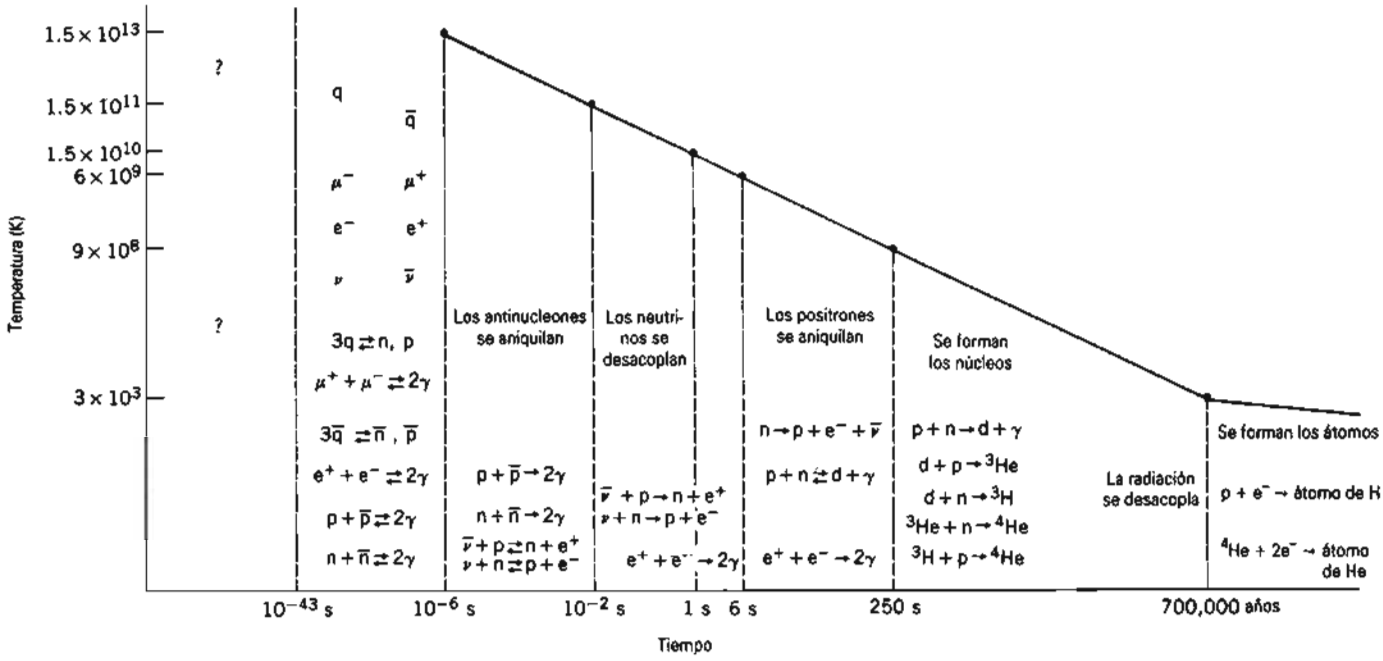


Figura 9 La evolución del Universo de acuerdo con la cosmología del Big Bang. La línea gruesa muestra la relación entre la temperatura y el tiempo de acuerdo con la ecuación 3. Se muestran las reacciones importantes en cada era. (Aquí, q y $\bar{q}$ denotan al quark y al antiquark, respectivamente.)

El tiempo correspondiente se halla a partir de la ecuación 3:

$$t = \left(\frac{1.5 \times 10^{10}\ \text{s}^{1/2} \cdot \text{K}}{1.23 \times 10^{12}\ \text{K}}\right)^2 = 1.5 \times 10^{-4}\ \text{s}.$$

56-6 NUCLEOSÍNTESIS

A la edad de unos cuantos segundos, el Universo consistía en protones, neutrones y electrones. Hoy día, el Universo se compone en su mayor parte de hidrógeno y helio, con una pequeña parte de elementos más pesados. ¿Cómo se produjeron los núcleos y átomos actuales a partir del Big Bang? La formación de los elementos del Universo actual se conoce como *nucleosíntesis*. Como veremos, la observación de las abundancias actuales de los elementos puede proporcionarnos claves acerca de los procesos que ocurrieron durante el Big Bang.

Nucleosíntesis del Big Bang

El primer paso en la constitución de los complejos átomos es la formación de los núcleos de deuterio (los deuterones) a partir de la combinación de un protón y un neutrón, de acuerdo con

$$\text{n} + \text{p} \rightarrow \text{d} + \gamma.$$

La energía de amarre del deuterón (véase la Sec. 54-2) es de 2.2 MeV, que es la energía del rayo γ que se desprende durante la formación. La reacción inversa,

$$\text{d} + \gamma \rightarrow \text{n} + \text{p},$$

puede disociar a los núcleos de deuterio en sus protones y neutrones constituyentes, si cuando menos la energía del rayo γ es de 2.2 MeV.

Si el Universo está lleno de fotones energéticos, las dos reacciones ocurrirán al mismo ritmo, y el deuterio se disociará tan rápidamente como se formó. Sin embargo, si el Universo es lo suficientemente viejo, los fotones no tendrán la energía suficiente para que se lleve a cabo la reacción de disociación, y el deuterio puede empezar a formarse.

Al final de nuestro relato, en la sección anterior, el Universo tenía unos 6 s de edad, y la energía media de la radiación era de unos 0.5 MeV, menos de la que se necesita para evitar que se forme el deuterio. Sin embargo, debemos recordar que la radiación tiene una distribución de energías de Planck (véase la Fig. 10, la cual se discutió en la Sec. 49-2) y que existen de 10^8 a 10^9 fotones para cada protón o neutrón. Existe una cola de alta energía en la distribución de Planck, que sugiere que, no importa cuál sea la temperatura de la radiación, siempre habrá

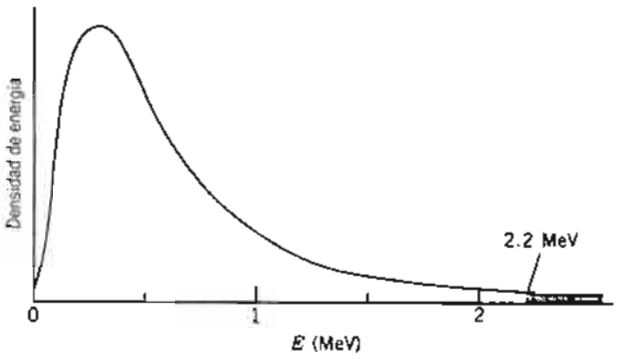


Figura 10 El espectro de la energía de los fotones en un tiempo en particular en la evolución del Universo. Los fotones con energía mayor de 2.2 MeV, que constituyen una diminuta fracción del número total de fotones, pueden disociar deuterones.

algunos fotones de energía mayor de 2.2 MeV que pueden separar a los núcleos de deuterio. Si, en promedio, el número de estos fotones energéticos es menor que el número de protones y neutrones, el deuterio puede comenzar a constituirse.

La razón neutrón a protón es de unos 0.2 en este punto de la evolución del Universo, y existen aproximadamente 10^9 fotones por nucleón, de modo que la razón entre neutrones y fotones es de unos 0.2×10^{-9}. Si la fracción de fotones con energías mayores de 2.2 MeV es de menos de 0.2×10^{-9} del número total de fotones, existirá menos de un fotón energético por neutrón, y puede proseguir la formación del deuterio. Partiendo de la expresión de la distribución de Planck (obtenida de la Ec. 6 del capítulo 49), hallamos que la fracción de fotones con energía mayor de 2.2 MeV será menor de 0.2×10^{-10} cuando la temperatura haya caído a 9×10^8 K. La ecuación 3 muestra que esta temperatura tiene lugar en un tiempo de 250 s.

En un tiempo de 250 s, comienza la formación de los núcleos de deuterio. Puesto que los deuterones son menos abundantes que los protones o los neutrones, los deuterones reaccionarán rápidamente con los protones y los neutrones, de acuerdo con las reacciones

$$d + n \rightarrow {}^3H + \gamma \quad \text{y} \quad d + p \rightarrow {}^3He + \gamma.$$

Finalmente, el ^{3}H y el ^{3}He reaccionarán también con los protones y los neutrones, según

$${}^3H + p \rightarrow {}^4He + \gamma \quad \text{y} \quad {}^3He + n \rightarrow {}^4He + \gamma.$$

En estas cuatro reacciones, la energía de amarre de la partícula final es mayor que la del deuterón. Así, si la radiación es demasiado débil para impedir la formación de los deuterones, ciertamente será demasiado débil para impedir las reacciones subsiguientes. Por lo tanto, podemos suponer que casi todos los deuterones se convierten finalmente en ^{4}He, de modo que los productos finales de esta etapa de la evolución del Universo son protones y partículas α. Puesto que no existen núcleos estables con un número másico de 5, estas reacciones no pueden continuar más allá del ^{4}He.

Para hallar el número relativo de partículas α, debemos hallar el número de neutrones disponibles en t = 250 s, cuando los deuterones comienzan a formarse. En t = 6 s, alrededor del 17% de los nucleones son neutrones, pero como resultado de la desintegración radiactiva del neutrón, algunos neutrones se convertirán en protones entre t = 6 s y t = 250 s. Usando la vida media del neutrón (alrededor de 11 min), hallamos que en t = 250 s los nucleones constarán de alrededor de 12.5% de neutrones y 87.5% de protones. Esto es, por cada 10,000 nucleones habrá 1250 neutrones y 8750 protones. Estos neutrones se combinarán con los 1250 protones para formar 625 partículas α, quedando 8750 - 1250 = 7500 protones. Del número total de núcleos en el Universo en este momento, 7.7% son partículas α y 92.3% son protones. En términos de masa, las partículas α constituyen una fracción de la masa total del Universo dada por

$$\frac{4 \times 625}{7500 + 4 \times 625} = 0.25 \text{ o sea } 25\%.$$

La abundancia de ^{4}He en el Universo actual sería igual a este valor, si despreciamos la combustión del hidrógeno a helio que ocurre en las estrellas. Sucede que la abundancia de helio medida en una variedad de sistemas, que incluyen a las estrellas, las nebulosas gaseosas y las nebulosas planetarias, es de 24 ± 1%, lo cual concuerda con nuestra estimación e indica que nuestra descripción es ciertamente razonable.

El paso final en la producción de la materia durante el Big Bang es la formación de los átomos neutros de hidrógeno y helio cuando se combinan los protones y las partículas α con los electrones. Como en el caso de la formación de los deuterones, esto no puede ocurrir cuando existen los fotones suficientes en la cola de alta energía de la distribución de Planck para separar los átomos neutros que pudieran formarse. En este caso, deseamos que la fracción relativa de fotones con energía de más de 13.6 eV (la energía de amarre del hidrógeno atómico) sea menos de unos 10^{-9}. Esto ocurre a una temperatura de unos 6000 K, que corresponde a una edad del Universo de alrededor de 200,000 años. (Cuando la radiación se enfría, la densidad de energía del Universo se vuelve menos dominada por la radiación y más por la materia. En este caso, la ecuación 3, que supone un Universo dominado por la radiación, no es lo suficientemente correcta. Tomando en cuenta este efecto, la temperatura del Universo cuando comienzan a formarse los átomos de hidrógeno está cerca de los 3000 K, que corresponde a una edad de alrededor de 700,000 años.)

Una vez que se han formado los átomos neutros, no quedan esencialmente partículas cargadas libres en el

Universo. Éste es el momento del desacoplamiento de la materia y el campo de radiación. El Universo se vuelve transparente a la radiación, la cual puede viajar a largas distancias sin interactuar con la materia. Esta radiación, que ha estado viajando desde el momento del desacoplamiento, se observa hoy día como fondo de microondas. La expansión del Universo ha reducido la temperatura de radiación en un factor de 1000 desde el momento del desacoplamiento.

La historia de la evolución del Universo según la descripción de la cosmología del Big Bang es notable. Integra a los experimentos modernos de la física nuclear y de las partículas con la física cuántica y la termodinámica clásica. Da resultados que pueden probarse en el Universo presente, incluyendo la abundancia del helio, la radiación de fondo de microondas, y una pequeña abundancia del deuterio sobrante que no se "coció" en núcleos de masa 3. Es una historia que depende en modos críticos de las intensidades de las fuerzas nucleares o subnucleares y de la variedad de partículas que intervinieron en el Universo primigenio. Por ejemplo, si hubiese una cuarta generación de leptones, los ritmos de reacción de los procesos de interacción débil serían mayores, y se formarían más neutrones, aumentando por tanto la abundancia del ^{4}He. Si bien esta conclusión es susceptible de interpretación, la abundancia actual de ^{4}He observada se cree, por parte de muchos cosmólogos, que limita a tres el número de generaciones de leptones.

Nucleosíntesis en las reacciones de fusión

Después del desacoplamiento de la materia y la radiación, la materia (que consiste en hidrógeno y helio) estuvo sujeta únicamente a la fuerza gravitatoria. Observaciones recientes precisas del fondo de microondas han demostrado que la distribución de la materia en el momento del desacoplamiento fue ligeramente no uniforme. Las regiones con densidades ligeramente más elevadas comenzaron a condensarse en nubes de densidad siempre creciente. Al contraerse cada nube bajo su propia gravedad, su temperatura se elevó hasta volverse lo suficientemente caliente como para que se iniciaran las reacciones de fusión. Así se formaron las estrellas de la primera generación.

Hemos visto en el capítulo 55 que las estrellas convierten hidrógeno a helio por medio de reacciones de fusión. Después de que una estrella ha agotado su provisión de hidrógeno y se ha convertido en helio en su mayoría, puede empezar de nuevo a contraerse, lo cual aumenta su temperatura. (Este aumento en la temperatura causa una presión de radiación incrementada, lo que origina que aumente el radio de la estrella. El área superficial aumenta más rápidamente que la temperatura, de modo que la energía por unidad de área de superficie en efecto disminuye, y el color de la estrella pasa del amarillo brillante al rojo. Ésta es la fase de *gigante roja* en la evolución de la estrella.) Finalmente, la temperatura es lo suficientemente elevada como para que la barrera de Coulomb entre dos núcleos de ^{4}He pueda ser traspasada exitosamente por razón de su movimiento térmico, y pueda suceder la fusión del helio. La sencilla reacción de fusión del helio

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$$

no contribuye a la fusión en una estrella, porque el ^{8}Be es inestable y se disocia tan rápidamente como se forma. La fusión del helio requiere la participación de una tercera partícula α, de modo que la reacción neta es

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma.$$

Una vez que se ha formado el ^{12}C, podemos tener reacciones adicionales de partículas α, tales como

$$^{12}\text{C} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma,$$

$$^{16}\text{O} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + \gamma,$$

$$^{20}\text{Ne} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma,$$

y así sucesivamente. Estas reacciones tienen barreras de Coulomb crecientemente altas y, por lo tanto, requieren temperaturas crecientes.

Cuando el combustible helio se haya agotado, la contracción se las arregla de nuevo para aumentar la temperatura, así que pueden tener lugar otras reacciones, tal como la combustión del carbono:

$$^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma.$$

Al final, estas reacciones alcanzan el pico de la curva de energía de amarre (Fig. 6 del capítulo 54) en la masa 56. Más allá de este punto, ya no se libera energía en las reacciones de fusión.

La figura 11 muestra la abundancia de núcleos en esta escala de masas. Las abundancias relativas apoyan este escenario de la producción de los elementos en reacciones de fusión. Nótese que el C es más de cinco órdenes de magnitud más abundante que el Li, el Be y el B, que no se producen en estos procesos. Nótese también que los núcleos de Z par son, en promedio, de más de un orden de magnitud más abundantes que sus vecinos de Z impar. Estas reacciones de fusión con partículas α producen únicamente productos Z par, de modo que las abundancias más elevadas de estos productos que se observan son consistentes con esta explicación de su formación.

Nótese también el último punto en la figura 11, el cual indica que la abundancia *total* de los 50 elementos más allá de los núcleos en la escala de masa 56 es menor que la abundancia de todos excepto uno de los elementos individuales en la región entre C y Zn. Ciertamente se ve que la mayor parte de la materia de que tenemos conocimiento se produjo en los procesos de fusión.

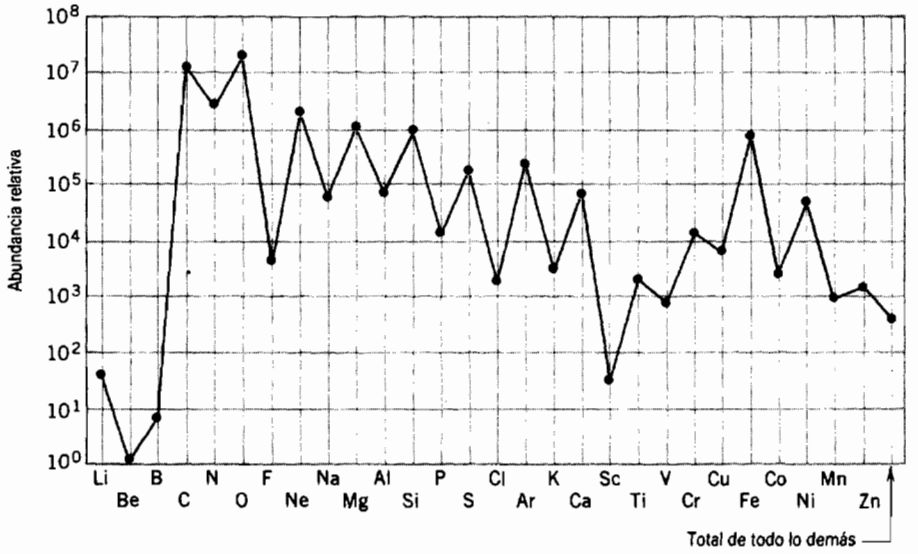


Figura 11 Abundancias relativas (por masa) de los elementos fuera del helio en el sistema solar.

Nucleosíntesis por captura de neutrones

Los elementos más allá de la masa 56 se produjeron ya sea lentamente en las estrellas o súbitamente en las supernovas mediante reacciones de captura de neutrones. Habrá una pequeña densidad de neutrones en las estrellas, producidos a través de secuencias tales como

$$^{12}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{13}N + \gamma$$

$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu_e$$

$$^{13}C + {}^{4}He \rightarrow {}^{16}O + n.$$

Supongamos que tenemos el ^{56}Fe, que se ha producido a través de procesos de fusión. Entonces, puede ocurrir una secuencia de reacciones de captura de neutrones:

$$^{56}Fe + n \rightarrow {}^{57}Fe + \gamma$$

$$^{57}Fe + n \rightarrow {}^{58}Fe + \gamma$$

$$^{58}Fe + n \rightarrow {}^{59}Fe + \gamma.$$

Tanto el ^{57}Fe como el ^{58}Fe son estables, pero el ^{59}Fe es radiactivo y se desintegra a ^{59}Co mediante la desintegración beta negativa con una vida media de 45 días. El que el ^{59}Fe capture a otro neutrón, formando por tanto ^{60}Fe, o se desintegre a ^{59}Co depende de la densidad de los neutrones. Si la densidad de los neutrones es tan baja que es poco probable que el ^{59}Fe encuentre un neutrón dentro de un tiempo del orden de 45 días, entonces se desintegrará a ^{59}Co. Si la oportunidad de encontrar un neutrón es alta, el ^{59}Fe se convertirá en ^{60}Fe y entonces posiblemente a ^{61}Fe, ^{62}Fe, y así sucesivamente. Estos núcleos son muy ricos en neutrones y, por lo tanto, van más allá de los dominios de los núcleos estables que se mostraron en la figura 4 del capítulo 54. En correspondencia, tienen vidas medias siempre más cortas. Por ejemplo, el ^{64}Fe tiene una vida media de apenas 2 s. Al final, la vida media se vuelve tan corta que ya no se encuentra ningún neutrón antes de que ocurra la desintegración, y finalmente hay una desintegración beta al núclido de Co correspondiente, como se indica en la figura 12.

La rama que continúa a través del ^{59}Co, que permite que el tiempo para que incluso las desintegraciones beta de vida larga ocurran antes de ser capturado el neutrón siguiente, se llama *proceso l* (l de lento). El proceso en el que la densidad de los neutrones es tan grande que pueden ocurrir muchas capturas antes de la desintegración beta se llama *proceso r* (r de rápido). Estos dos procesos se indican en la figura 12.

Por supuesto, los núcleos altamente inestables que se producen en el proceso r se desintegrarán finalmente en la modalidad beta hacia los núcleos estables, pero como puede verse de la figura 12, las desintegraciones siguen un trayecto diferente al trayecto del proceso l. Consideremos, por ejemplo, a los núclidos de Sn que se ilustran en la figura 13. El proceso l se efectúa a través de ^{120}Sn, ^{121}Sn y ^{121}Sb. Debido a la desintegración beta del ^{121}Sn, éste no puede capturar a un neutrón a través del proceso l. Por lo tanto el ^{122}Sn, que tiene una abundancia natural de 4.6%, no puede producirse en el proceso l; debe de producirse en el proceso r. El núclido ^{120}Sn puede producirse a través del proceso l y del proceso r, pero el núclido de ^{124}Te puede producirse *únicamente* a través del proceso l, porque las desintegraciones beta del proceso r a lo largo de la línea de masa 124 se detienen en el ^{124}Sn estable.

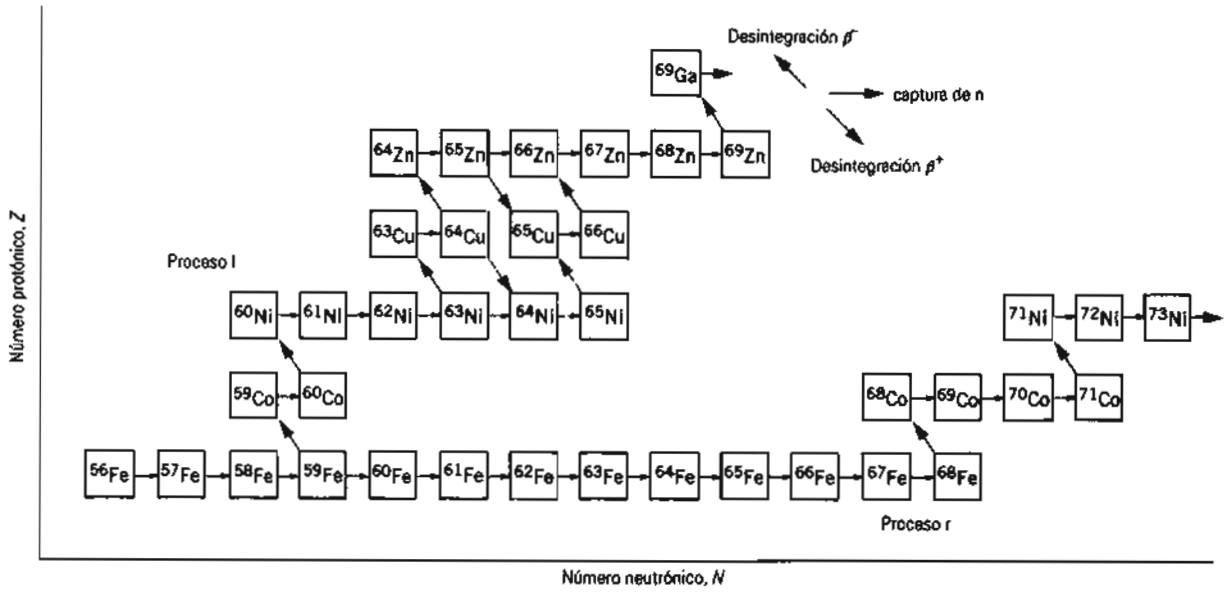


Figura 12 Una sección de la tabla de los núclidos (Fig. 4 del capítulo 54), que muestra los trayectos de los procesos l y r del ^{56}F. Son posibles muchos trayectos con proceso r, como la desintegración beta de los núcleos de vida corta; únicamente se muestra uno de estos trayectos. Todos los núcleos del trayecto del proceso r son inestables y pueden desintegrarse en la modalidad beta hacia los núcleos estables.

En una estrella gigante roja, la densidad de los neutrones puede ser del orden de 10^{14} por m^3, la cual es suficiente para mantener el proceso l. En la explosión de una supernova la densidad neutrónica puede ser entre 10 y 20 órdenes de magnitud mayor, pero la densidad alta permanece solamente durante unos cuantos segundos. En ese tiempo, las cadenas del proceso r ocurren en todo momento hasta llegar a los núcleos más pesados, que son entonces lanzados al espacio y se desintegran gradualmente hasta formar los núcleos estables del proceso r. Los elementos que se encuentran en la Tierra más allá de la masa 56 se produjeron en las estrellas de la primera generación, quizás a través del proceso l o del proceso r, y los planetas de nuestro sistema solar (y de hecho nosotros mismos) estamos hechos de las cenizas recicladas de las estrellas apagadas.

56-7 LA EDAD DEL UNIVERSO

En la sección 54-7 estudiamos el uso de los métodos de datación radiactiva para determinar la edad de la Tierra. Por medio del examen de las correspondientes cantidades de isótopos padre e hija en ciertos procesos de desintegración radiactiva que tienen vidas medias entre los 10^8 y los 10^9 años (por ejemplo, ^{238}U → ^{206}Pb, ^{87}Rb → ^{87}Sr y ^{40}K → ^{40}Ar), se ha determinado que la edad de las rocas más viejas en la Tierra es de unos 4.5×10^9 años. Se ha obtenido un valor idéntico de los meteoritos y de las rocas de la Luna. Por tanto, podemos estar bastante seguros de que este valor representa el tiempo transcurrido desde la condensación del sistema solar.

Sabemos que el Universo debe ser mucho más viejo que lo que corresponde a este valor, porque el sistema solar se formó a partir de los elementos que se crearon en el interior de las estrellas o en las supernovas. La composición química actual del sistema solar se determinó durante una era de nucleosíntesis previa, que ocurrió en una generación de estrellas anterior. Para hallar la edad verdadera del Universo debemos determinar el intervalo de tiempo necesario para que se produzcan los elementos.

El tiempo total a partir del Big Bang hasta el momento presente puede dividirse en cuatro periodos: (1) desde el Big Bang hasta la formación de los átomos neutros de H y He (t_1); (2) la condensación de las galaxias y la formación de las estrellas de la primera generación (t_2); (3) la nucleosíntesis en las estrellas y supernovas, que condujo a los elementos químicos actuales (t_3); y (4) la formación y evolución del sistema solar a partir de los desechos de las primeras estrellas (t_4). La edad actual del Universo es precisamente la suma de estos cuatro términos:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4. \qquad (4)$$

Sabemos por nuestra exposición de la cosmología del Big Bang que el tiempo t_1 desde el Big Bang hasta que se

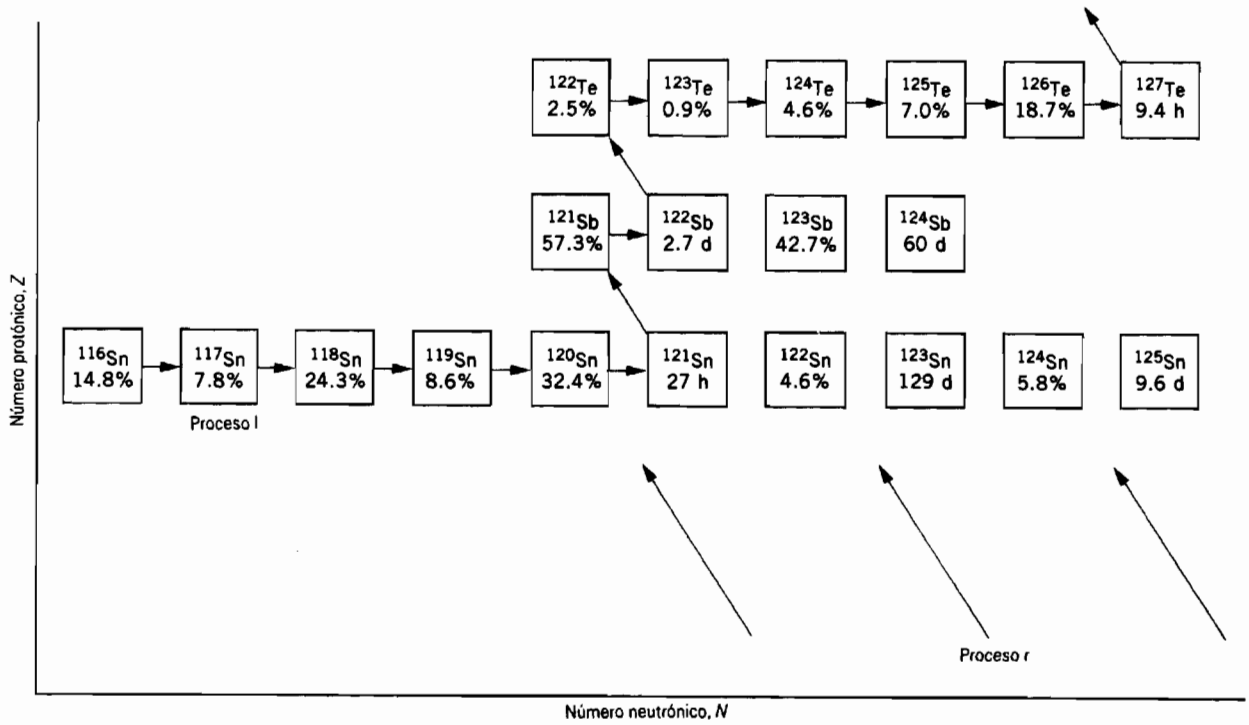


Figura 13 Los trayectos de los procesos l y r que conducen a los isótopos del Sn, el Sb y el Te.

formaron los átomos neutros no es más de 10^6 años. El tiempo t_2 para que las galaxias se condensaran del hidrógeno y el helio producidos en el Big Bang no se conoce con precisión, pero se ha estimado que está dentro de una escala de 1 a 2 × 10^9 años. Puesto que se sabe que t_4 es de 4.5 × 10^9 años, la edad del Universo puede determinarse siempre y cuando podamos encontrar el tiempo t_3 asociado con la nucleosíntesis.

Este tiempo debe estimarse a partir de las abundancias relativas de los productos que quedaron al final de la nucleosíntesis. Por ejemplo, consideremos a los isótopos ^{235}U y ^{238}U, los que actualmente tienen una abundancia relativa de 0.72% (véase el comentario en relación con el reactor natural de fisión en la Sec. 55-5). Tanto el ^{235}U como el ^{238}U han estado desintegrándose durante el intervalo transcurrido desde la formación del sistema solar. Su razón de 4.5 × 10^9 años atrás es (véase el problema muestra 4 del capítulo 55)

$$R(0) = R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t}$$
$$= (0.0072)e^{(0.984 - 0.155)(10^{-9}\text{ años}^{-1})(4.5 \times 10^9\text{ años})} = 0.30.$$

Durante el intervalo t_3, ambos isótopos se estuvieron formando más o menos continuamente por el proceso r, mientras que también ocurría, por supuesto, la correspondiente desintegración. Debido a la producción de ambos isótopos durante este tiempo, la razón de sus abundancias en este periodo no cambió tan rápidamente como lo hizo durante la desintegración libre en el intervalo t_4; véase la figura 14. La evidencia de la abundancia de uranio sugiere que t_3 está en una escala de 4 a 9 × 10^9 años; valores similares resultan del análisis de las abundancias de otros núcleos en el proceso r.

Una estimación independiente de t_3 proviene de la producción del isótopo ^{187}Os del proceso r y el proceso l, que se ilustra en la figura 15. El isótopo ^{187}Re se formó únicamente en el proceso r, y se desintegra a ^{187}Os con una vida media de 40 × 10^9 años, que está en la escala apropiada para servir como medida de la edad del Universo. La comparación de las cantidades relativas del ^{187}Re padre y del ^{187}Os hija nos daría una medida de la duración del proceso r de nucleosíntesis. Sin embargo, el ^{187}Os puede formarse también a través del proceso l, como se muestra en la figura 15. Corrigiendo su abundancia observada para la fracción producida en el proceso *l* (que puede determinarse a partir de la abundancia de ^{186}Os), hallamos a partir de las cantidades relativas de ^{187}Re y ^{187}Os que t_3 está en una escala entre 9 y 12 × 10^9 años. El extremo inferior de esta escala, 9 × 10^9 años, es consistente con el extremo superior de la gama de t_3 determinada a partir de las abundancias de uranio, así que elegimos este valor como nuestro cálculo de t_3.

Combinando estos resultados, tenemos como cálculo de la edad del Universo

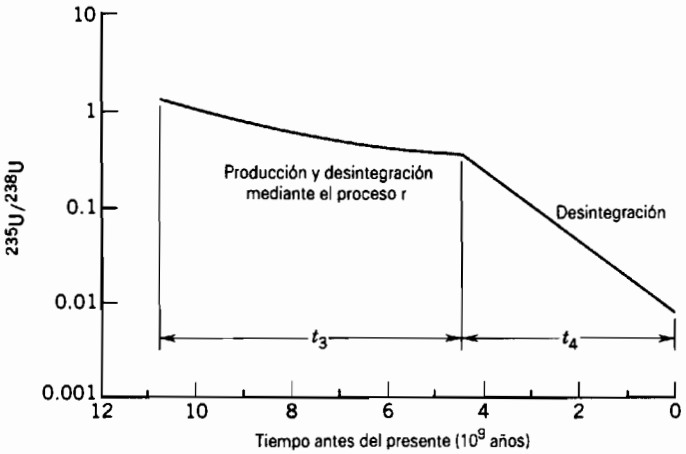


Figura 14 El cambio con el tiempo en la razón $^{235}U/^{238}U$. Durante la vida del sistema solar (tiempo t_4), la razón cambia debido únicamente a las correspondientes desintegraciones, llegando por último al valor actual de 0.0072. Durante el intervalo t_3, ocurre la producción según el proceso r junto con la desintegración. La duración deducida para el intervalo t_3 depende del valor que consideremos para la razón inicial, que debe determinarse por medio del cálculo.

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$
$$= 10^6 \text{ años} + 1 - 2 \times 10^9 \text{ años} + 9 \times 10^9 \text{ años} + 4.5 \times 10^9 \text{ años}$$
$$= 15 \times 10^9 \text{ años}.$$

Este número es un poco incierto como resultado de la escala de valores en la estimación de t_3. Tomando en cuenta esta incertidumbre, obtenemos

$$t = 10\text{–}18 \times 10^9 \text{ años}.$$

Consideremos la enorme cantidad de física contenida en este resultado. Para determinar t_1, usamos el conocimiento acumulativo de la física de partículas, el electromagnetismo, la física térmica, y la física atómica y nuclear con el fin de seguirle la pista a la formación de la materia tal y como la conocemos. El intervalo t_2 se determinó a partir de los cálculos que hacen uso de la termodinámica y la teoría gravitatoria para analizar la condensación de la materia fría en las estrellas calientes. Nuestro cálculo de t_3 se basó en nuestro conocimiento de los procesos de nucleosíntesis r y l, que se basan en los estudios de la física nuclear en los laboratorios de la Tierra, y el intervalo t_4 se basó en posteriores experimentos de física nuclear y en la investigación en geoquímica.

Determinación cosmológica de la edad

Si asumimos la hipótesis, aproximada pero no suficientemente correcta, de que el Universo se ha estado expandiendo a la misma velocidad desde su formación, entonces la separación d entre las galaxias típicas se relacionaría con la edad del Universo más o menos de acuerdo con

$$d = vt,$$

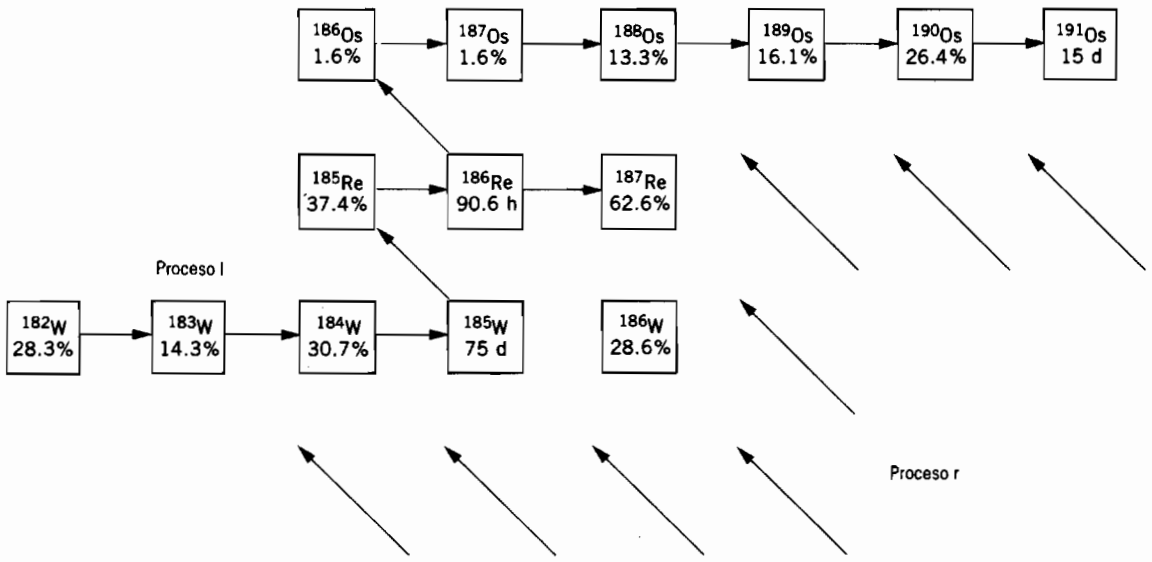


Figura 15 Los procesos r y l de formación de los isótopos de Re y Os.

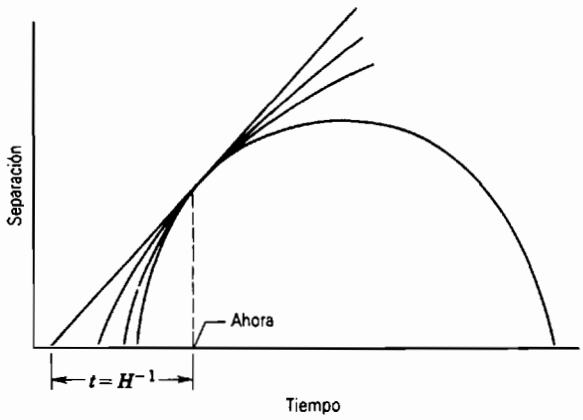


Figura 16 La dependencia de una distancia típica de separación galáctica en el tiempo durante la evolución del Universo de acuerdo con diferentes modelos. Si el Universo se ha estado expandiendo a una velocidad constante (línea recta), podemos extrapolar en retroceso hasta la separación cero (el Big Bang) en un tiempo de H^{-1} antes del presente. Si la expansión se ha estado retardando debido a la interacción gravitatoria (un escenario más razonable), el Big Bang ocurrió en un tiempo de menos de H^{-1} antes del presente. Si la interacción gravitatoria es lo suficientemente intensa, la expansión puede convertirse finalmente en una contracción.

donde v es la velocidad (suponiéndola constante) de separación. Comparando este resultado con la ecuación 2 se demuestra que la edad t del Universo es precisamente el inverso del parámetro de Hubble:

$$t = H^{-1}. \tag{5}$$

La estimación más actual del parámetro de Hubble, H = 67 (km/s)/Mpc, da un valor de

$$t = 15 \times 10^9 \text{ años},$$

para la edad del Universo, en extraordinaria concordancia con el valor obtenido del cálculo de la nucleosíntesis. Sin embargo, la escala de incertidumbre del parámetro de Hubble, de 50 a 100 (km/s)/Mpc, es muy grande y da una gama correspondiente de edades de

$$t = 10 - 19 \times 10^9 \text{ años},$$

que corresponde a la escala determinada por nucleosíntesis.

Nuestra hipótesis acerca de la velocidad de separación constante de las galaxias es casi seguro incorrecta. La atracción gravitatoria mutua de las galaxias ha estado retardando su separación desde el Big Bang, de modo que en los primeros tiempos la velocidad de separación era mayor de lo que es actualmente. La figura 16 muestra una representación de una distancia de separación intergaláctica típica en función del tiempo. Si el modelo de la "velocidad constante" fuese válido, la edad del universo sería de $t = H^{-1}$. Si la velocidad ha estado disminuyendo desde el Big Bang, la edad deducida depende de la velocidad de desaceleración. Puesto que el ser humano no ha estado observando el tiempo suficiente para detectar cualquier cambio en la velocidad de separación, debemos confiar en dos métodos indirectos para determinar la desaceleración: (1) podemos medir las desviaciones rojas y deducir de allí las velocidades de los objetos más distantes (y por ende los más viejos) que pueden observarse con los telescopios, o (2) podemos calcular la desaceleración basados en los efectos gravitatorios de la cantidad total de materia en el Universo.

Si las galaxias se están desacelerando, se observaría que los objetos más distantes tienen velocidades de recesión más grandes de lo que deduciríamos de la relación Hubble. Desafortunadamente, nuestras observaciones de estos objetos distantes no son todavía lo suficientemente precisas como para indicar cualquier desaceleración definida. El segundo método tampoco tiene éxito: la cantidad de materia que se observa con los telescopios (esto es, la materia que emite algún tipo de radiación electromagnética) no es ni siquiera suficiente para explicar la atracción gravitatoria dentro de las galaxias y de los racimos de galaxias. Es posible que hasta un 90% de la materia del Universo se encuentre en una forma desconocida para nosotros, posiblemente de neutrinos (si tienen masa distinta de cero) u otras partículas elementales desprendidas del Big Bang o quizá de estrellas apagadas. A causa de esta "materia negra" desconocida, no podemos llevar a cabo un cálculo confiable de la desaceleración del Universo.

Se han propuesto varios modelos cosmológicos que dan curvas en la figura 16 de curvaturas diferentes y, por lo tanto, edades del Universo diferentes. Por ejemplo, algunos de ellos dan una edad que es una mitad o dos tercios de H^{-1}, o sea entre 5 y 12 $\times$ 10^9 años. Si bien no sabemos cuál (si alguno) de estos métodos es correcto, parece claro que tanto la nucleosíntesis como las estimaciones cosmológicas de la edad del Universo son consistentes con los valores en la gama de 10 a 15 $\times$ 10^9 años.

Es una fuente de gran frustración para los físicos no poder ver la historia del Universo con más certidumbre, porque nuestra capacidad de ver más allá está similarmente limitada. ¿Continuará por siempre la expansión, o existe actualmente la materia suficiente para revertir la expansión? La figura 16 muestra varios resultados posibles. Quizá los cosmólogos del porvenir presencien las galaxias embistiéndose unas a otras mientras el Universo "se sobrecalienta" y las galaxias se juntan, llegando al final a un solo punto de gran contracción (*Big Crunch*) que podría estar seguido por otro Big Bang. O quizá la expansión continúe por siempre, hasta que el Universo se enfríe y oscurezca. La solución a este problema fundamental requerirá investigaciones vigorosas y de primera línea en astrofísica, física nuclear y física de partículas.

PREGUNTAS

1. En el átomo de hidrógeno, la razón de fuerza gravitatoria entre el electrón y el protón a magnitud de la fuerza electromagnética de atracción entre ellos es de unos 10^{-40}. Si la fuerza gravitatoria es mucho más débil que la fuerza electromagnética, ¿cómo es que se descubrió la fuerza gravitatoria primero y es mucho más evidente para nosotros?
2. ¿A qué nos referimos, en realidad, con el término de partícula elemental? Para la respuesta, considere propiedades tales como el tiempo de vida, la masa, el tamaño, las desintegraciones en otras partículas, la fusión para formar a otras partículas y las reacciones.
3. ¿Por qué los físicos de partículas buscan acelerar partículas a energías cada vez más elevadas?
4. Nombre dos partículas que no tengan ni masa ni carga. ¿Qué propiedades tienen estas partículas?
5. ¿Por qué los neutrinos no dejan rastro en las cámaras detectoras?
6. Los neutrinos carecen (presumiblemente) de masa y viajan a la velocidad de la luz. ¿Cómo pueden, entonces, portar diversas cantidades de energía?
7. ¿Todas las partículas tienen antipartículas? ¿Qué sucede en el caso del fotón?
8. En la desintegración beta de un antineutrón a un antiprotón, ¿se emite un neutrino o un antineutrino?
9. Los fotones y los neutrinos se parecen en que tienen cero carga, cero masa, y viajan a la velocidad de la luz. ¿Cuáles son las diferencias entre estas partículas? ¿Cómo las produciría usted? ¿Cómo las detectaría?
10. Explique por qué decimos que el mesón π^0 es su propia antipartícula.
11. ¿Por qué no puede desintegrarse un electrón, desintegrándose en dos neutrinos?
12. ¿Por qué es estable el electrón? Es decir, ¿por qué no se desintegra espontáneamente en otras partículas?
13. ¿Por qué un electrón en reposo no puede emitir un solo fotón de rayos gamma y desaparecer? ¿Podría hacerlo un electrón en movimiento?
14. Un neutrón es lo suficientemente masivo como para desintegrarse mediante la emisión de un protón y dos neutrinos. ¿Por qué no lo hace?
15. Un positrón encuentra invariablemente a un electrón y se aniquilan entre sí. ¿Cómo podemos decir entonces que un positrón es una partícula estable?
16. ¿Cuál es el mecanismo mediante el cual dos electrones ejercen fuerzas entre sí?
17. ¿Por qué las partículas no se agrupan en familias con base en sus masas?
18. Una partícula que reacciona a la fuerza fuerte puede ser un mesón o un barión. Puede saberse cuál es de las dos permitiendo que la partícula se desintegre hasta que sólo queden productos finales estables. Si hay un protón entre estos productos, la partícula original era un barión. Si no hay un protón, la partícula original era un mesón. Explique esta regla de clasificación.
19. ¿Cuántas clases de leptones estables existen? ¿De mesones estables? ¿De bariones estables? Nómbrelos en cada caso.
20. La mayoría de las reacciones de la física de partículas son endotérmicas, en lugar de exotérmicas. ¿Por qué?
21. ¿Cuál es la partícula más ligera que interactúa fuertemente? ¿Cuál es la partícula más pesada que no resulta afectada por la interacción fuerte?
22. Establezca, para cada una de las partículas siguientes, cuál de las cuatro interacciones básicas influyen sobre ellas: (*a*) el electrón; (*b*) los neutrinos; (*c*) el neutrón; (*d*) el pión.
23. Al igual que los rayos X se emplean para descubrir en una pieza fundida metálica imperfecciones internas causadas por burbujas de gas, se han empleado también los muones de los rayos cósmicos en un intento por descubrir cámaras mortuorias ocultas en las pirámides egipcias. ¿Por qué se usan los muones?
24. Las partículas con fuerza fuerte ¿se ven afectadas por la fuerza débil?
25. ¿Producen neutrinos todas las desintegraciones con fuerza débil?
26. Los mesones y los bariones son cada uno de ellos sensibles a la fuerza fuerte. ¿De qué modos son diferentes?
27. Por medio de la comparación de las tablas 3 y 7, señale tantas semejanzas entre los leptones y los quarks como le sea posible, así como las diferencias.
28. ¿Cuál es la evidencia experimental de la existencia de los quarks?
29. Podemos explicar el mundo "ordinario" que nos rodea con dos leptones y dos quarks. Nómbrelos.
30. El pión neutro tiene la estructura quark $u\bar{u}$ y desintegraciones con una vida media de sólo 8.3×10^{-17} s. Por otra parte, el pión cargado tiene una estructura quark de $u\bar{d}$ y se desintegra con una vida media de 2.6×10^{-8} s. Explique, en términos de su estructura quark, por qué la vida media del pión neutro sería mucho más corta que la del pión cargado. (*Sugerencia*: Piense en la aniquilación.)
31. ¿Los leptones contienen quarks? ¿Y los mesones? ¿Y los fotones? ¿Y los bariones?
32. El barión Δ^* puede tener una carga eléctrica de $+2e$ (véase la tabla 5). Basado en el modelo del quark, ¿cabe esperar que se encuentren mesones con carga $+2e$? ¿Y bariones con carga $-2e$?
33. El barión Σ^+ se desintegra con una vida media característica de la interacción débil (véase la tabla 5). Debería de poder desintegrarse al barión Λ^0 mediante la interacción fuerte sin cambiar su extrañeza. ¿Por qué no lo hace así?
34. ¿Por qué no podemos encontrar el centro de expansión del Universo? ¿Estamos en su búsqueda?
35. Debido al efecto de la gravedad, la velocidad de expansión del Universo debe estar disminuyendo en tiempo después del Big Bang. Demuestre que esto implica que la edad del Universo es menor de $1/H$.
36. No es posible, usando telescopios que sean sensibles en cualquier parte del espectro electromagnético, "retroce-

der" más allá de unos 500,000 años desde el Big Bang. ¿Por qué?

37. ¿Cómo se llega a la conclusión de que la materia visible puede representar alrededor del 10% únicamente de la materia del Universo?

38. ¿Estamos siempre retrocediendo en el tiempo al observar una galaxia distante? ¿Constituye alguna diferencia la dirección en que la veamos?

39. ¿Puede usted pensar en cualquier explicación posible de la expansión del Universo que no sea el Big Bang?

PROBLEMAS

Sección 56-1 Interacciones de la partícula

1. (*a*) Un electrón y un positrón están separados por una distancia r. Halle la razón entre la fuerza gravitatoria y la fuerza electrostática entre ambos. ¿Cuáles son sus conclusiones a partir del resultado concerniente a las fuerzas que actúan entre las partículas que se detecta en una cámara de burbujas o un detector similar? (*b*) Repita para un par protón-antiprotón.

2. Algunas de las GUT predicen los siguientes esquemas de desintegración posibles para el protón:

$$p \rightarrow e^+ + \gamma,$$
$$p \rightarrow e^+ + \pi^0.$$

(*a*) Calcule los valores de Q para estas desintegraciones. (*b*) Demuestre que las desintegraciones no violan las leyes de conservación de la carga, la energía relativista, o el ímpetu lineal. La energía de reposo de un protón es de 938.27 MeV, de un electrón es de 0.511 MeV y de un pión neutro es de 135 MeV.

3. Un electrón y un protón están situados a una distancia entre ellos igual a un radio de Bohr a_0. Halle el radio R de una esfera de plomo que debe colocarse directamente detrás del electrón, de modo que la fuerza gravitatoria sobre el electrón venza apenas la atracción electrostática entre el protón y el electrón; véase la figura 17. Suponga que se mantiene la ley de la gravitación de Newton y que la densidad de la esfera sea igual a la densidad del plomo en la Tierra.

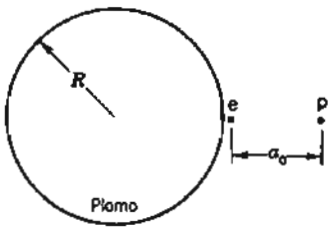


Figura 17 Problema 3.

Sección 56-2 Familias de partículas

4. Un pión neutro se desintegra en dos rayos gamma: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Calcule las longitudes de onda de los rayos gamma producidos mediante la desintegración de un pión neutro en reposo.

5. La energía de reposo de muchas partículas de vida corta no puede medirse directamente, sino que debe inferirse de los ímpetus medidos y de las energías de reposo conocidas de los productos de desintegración. Considérese el mesón ρ^0, el cual se desintegra mediante $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Calcule la energía de reposo del mesón ρ^0, dado que cada uno de los ímpetus directamente opuestos de los piones creados tiene una magnitud de 358.3 MeV/c. Véase la tabla 4 para las energías de reposo de los piones.

6. Las observaciones de los neutrinos emitidos por la supernova SN1987a en la Gran Nube Magallánica, véase la figura 18, sitúan un límite superior en la energía de reposo del neutrino electrónico de 20 eV. Suponga que la energía de reposo del neutrino, en lugar de ser cero, sea de hecho igual a 20 eV. ¿A qué velocidad menor que la luz se está moviendo un neutrino de 1.5 MeV, emitido en una desintegración β?

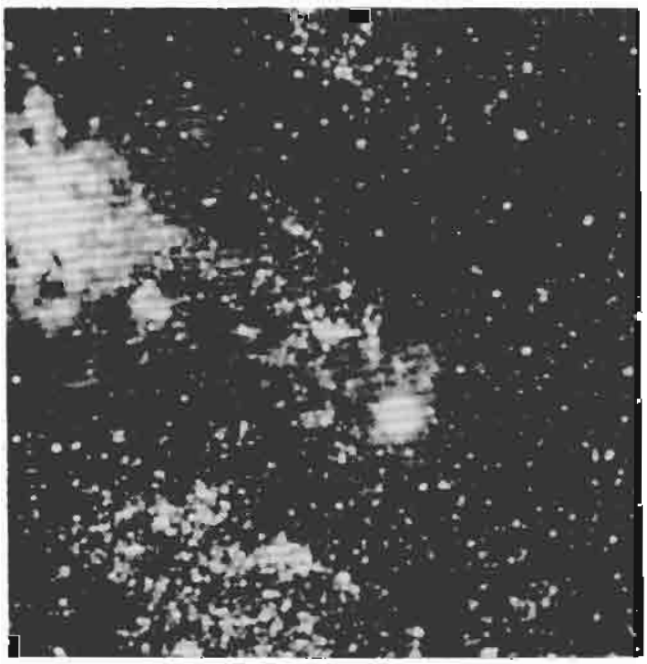


Figura 18 Problema 6.

7. Un pión neutro tiene una energía de reposo de 135 MeV y una vida media de 8.4×10^{-17} s. Si se produce con una energía cinética inicial de 80 MeV y se desintegra después

de un tiempo medio de vida, ¿cuál es la estela más larga posible que pudiera dejar esta partícula en una cámara de burbujas? Tome en cuenta la dilatación relativista del tiempo.

8. Un tau positivo (τ^+, energía de reposo = 1784 MeV) se mueve con una energía cinética de 2200 MeV en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético uniforme de 1.2 T. (*a*) Calcule el ímpetu del tau en kg · m/s. Deben tomarse en cuenta los efectos relativistas. (*b*) Halle el radio de la trayectoria circular. (*Sugerencia*: Véase la Sec. 34-3.)
9. Calcule el alcance de la interacción débil entre dos protones vecinos. Suponga que el bosón Z^0 sea la partícula del campo; véase la tabla 6.
10. Identifique la interacción responsable de cada una de las desintegraciones siguientes: (*a*) $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$; (*b*) $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; (*c*) $\eta' \rightarrow \eta + \pi^+ + \pi^-$; (*d*) $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

Sección 56-3 Leyes de la conservación

11. ¿Qué ley de conservación se viola en cada una de estas desintegraciones propuestas? (*a*) $\mu^- \rightarrow e^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$; (*b*) $\mu^+ \rightarrow \pi^+ + \bar{\nu}_\mu$.
12. La reacción $\pi^+ + p \rightarrow p + p + \bar{n}$ sigue su curso mediante la interacción fuerte. Deduzca, aplicando las leyes de la conservación, la carga, el número bariónico y la extrañeza del antineutrón.
13. Determine, mediante el examen de la extrañeza, cuál de las siguientes desintegraciones o reacciones ocurren mediante la interacción fuerte: (*a*) $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; (*b*) $\Lambda^0 + p \rightarrow \Sigma^+ + n$; (*c*) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$; (*d*) $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. Véanse las tablas 4 y 5 para los valores de *S*.
14. ¿Qué ley de conservación se viola en estas reacciones y desintegraciones propuestas? (*a*) $\Lambda^0 \rightarrow p + K^-$; (*b*) $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$.
15. Emplee las leyes de conservación para identificar la partícula denominada *x* en las siguientes reacciones, que proceden mediante la interacción fuerte. (*a*) $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + x$; (*b*) $p + \bar{p} \rightarrow n + x$; (*c*) $\pi^- + p \rightarrow \Xi^0 + K^0 + x$.

Sección 56-4 El modelo del quark

16. Demuestre que, si en lugar de trazar a *S* contra *Q* para los bariones con espín $\frac{1}{2}$ en la figura 3*b* y para los mesones con espín 0 en la figura 3*a*, se traza la cantidad $Y = B + S$ contra la cantidad $T_z = Q - \frac{1}{2}B$, entonces emergen los patrones hexagonales con el uso de los ejes sin pendiente (perpendiculares). (La cantidad *Y* se llama *hipercarga* y T_z se relaciona con una cantidad llamada *isoespín*.)
17. Las composiciones quark del protón y el neutrón son uud y udd, respectivamente. ¿Cuáles son las composiciones quark de (*a*) el antiprotón y (*b*) el antineutrón?
18. A partir de las tablas 5 y 7, determine la identidad de los bariones que se forman mediante las siguientes combinaciones de quarks. Compruebe sus respuestas con el octeto de bariones que se muestra en la figura 3*b*. (*a*) ddu; (*b*) uus; (*c*) ssd.
19. ¿Qué combinaciones de quarks forman (*a*) Λ^0; (*b*) Ξ^0?
20. Usando únicamente los quarks arriba, abajo y extraño, construya, si es posible, un barión (*a*) con $Q = +1$ y $S = -2$. (*b*) Con $Q = +2$ y $S = 0$.
21. No existen mesones conocidos con $Q = +1$ y $S = -1$ o con $Q = -1$ y $S = +1$. Explique por qué, en términos del modelo del quark.
22. Analice las siguientes desintegraciones o reacciones en términos del contenido de quarks de las partículas: (*a*) $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$; (*b*) $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; (*c*) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$; (*d*) $\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$.

Sección 56-5 La cosmología del Big Bang

23. Verifique, mediante la elección de dos puntos en cada línea de la figura 6 y el cálculo de las pendientes, los valores numéricos dados del parámetro de Hubble.
24. Si la ley de Hubble puede extrapolarse hasta distancias muy grandes, ¿a qué distancia sería la velocidad de recesión igual a la velocidad de la luz?
25. ¿Cuál es la longitud de onda observada de la línea H_α de 656.3 nm del hidrógeno emitido por una galaxia a una distancia de 2.4×10^8 pc?
26. En el laboratorio, una de las líneas del sodio se emite con una longitud de onda de 590.0 nm. Sin embargo, cuando se observa la luz que parte de determinada galaxia, esta línea se ve en una longitud de onda de 602.0 nm. Calcule la distancia a la galaxia, suponiendo que la ley de Hubble sea aplicable.
27. La longitud de onda de los fotones a la que un campo de radiación de temperatura *T* irradia más intensamente está dada por $\lambda_{máx} = (2898\ \mu m \cdot K)/T$ (véase la Ec. 4 del capítulo 49). (*a*) Demuestre que la energía *E* en MeV de tal fotón puede calcularse a partir de

$$E = (4.28 \times 10^{-10}\ \text{MeV/K})T.$$

(*b*) ¿A qué temperatura mínima puede crear este fotón un par electrón-positrón?

28. Las velocidades de recesión de las galaxias y los cuásares a grandes distancias están cerca de la velocidad de la luz, de modo que debe emplearse la fórmula de la desviación de Doppler (véase la Ec. 10 del capítulo 42). Se reporta la desviación roja como *z*, donde $z = \Delta\lambda/\lambda_0$ es la desviación roja (fraccionaria). (*a*) Demuestre que, en términos de *z*, el parámetro $\beta = v/c$ de la velocidad de recesión está dado por

$$\beta = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

(*b*) El cuásar más distante detectado (hasta 1990) tiene $z = 4.43$. Calcule su parámetro de velocidad. (*c*) Halle la distancia al cuásar, suponiendo que sea válida la ley de Hubble para estas distancias.

29. Debido a la presencia en todas partes de la radiación de fondo de microondas, la temperatura mínima posible de un gas en el espacio interestelar o intergaláctico no es 0 K sino 2.7 K. Esto implica que una fracción significativa de las moléculas en el espacio que poseen estados excitados de energía de excitación baja puedan estar, de hecho, en esos estados excitados. La desexcitación subsi-

guiente conduce a la emisión de radiación que pudiera detectarse. Considere una molécula (hipotética) con apenas un estado excitado. (*a*) ¿Cuál tendría que ser la energía de excitación con el fin de que el 23% de las moléculas se encuentre en el estado excitado? (*Sugerencia*: véase la Sec. 52-6.) (*b*) Halle la longitud de onda del fotón emitido en la transición al estado fundamental.

30. ¿Continuará el Universo expandiéndose por siempre? Para responder esta pregunta, asuma la hipótesis (¿razonable?) de que la velocidad v de recesión de una galaxia a la distancia r de nosotros está determinada únicamente por la materia que se encuentra adentro de una esfera de radio r con su centro en nosotros; véase la figura 19. Si la masa total adentro de esta esfera es de M, la velocidad de escape v_e está dada por $v_e = \sqrt{2GM/r}$ (véase el problema muestra 6 del capítulo 16). (*a*) Demuestre que la densidad promedio ρ adentro de la esfera debe ser cuando menos igual al valor dado por

$$\rho = 3H^2/8\pi G$$

para impedir la expansión ilimitada. (*b*) Evalúe numéricamente esta "densidad crítica"; exprese su respuesta en términos de átomos de H/m³. Las mediciones de la densidad real son difíciles y complicadas debido a la presencia de materia negra.

31. (*a*) ¿Cuál es la temperatura mínima del Universo necesaria para que los fotones produzcan pares $\pi^+ - \pi^-$? (*b*) ¿A qué edad tuvo el Universo esta temperatura?

Sección 56-7 La edad del Universo

32. La existencia de materia negra (es decir, no luminosa) en una galaxia (tal como la nuestra) puede inferirse determinando, mediante observación, la variación con la distancia en el periodo orbital de revolución de las estrellas en torno al centro galáctico. Esto se compara entonces con la variación derivada con base en la distribución de la materia según se indica mediante el material luminoso (estrellas en su mayor parte). Cualquier desviación significativa implica la existencia de la materia negra. Por ejemplo, supongamos que la materia (estrellas, gas, polvo) de una galaxia en particular, de masa total M, se distribuye uniformemente a través de una esfera de radio R. Una estrella, de masa m, está girando con respecto al centro de la galaxia en una órbita circular de radio $r < R$. (*a*) Demuestre que la velocidad orbital v de la estrella está dada por

$$v = rv\sqrt{GM/R^3},$$

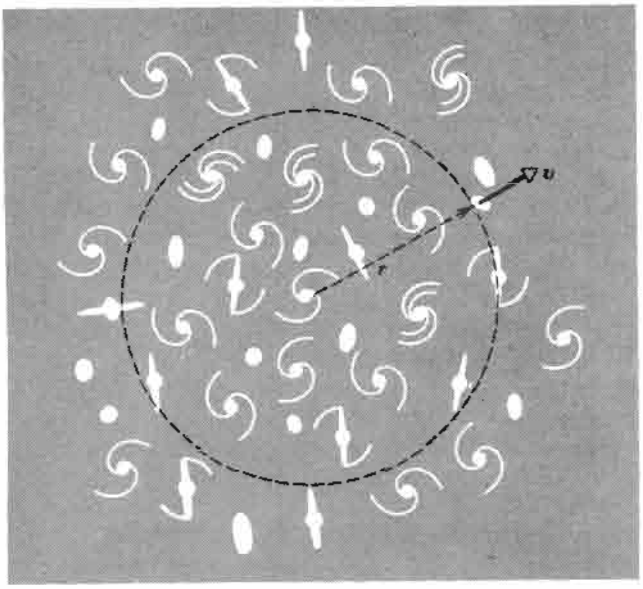


Figura 19 Problema 30.

y por lo tanto que el periodo T de revolución es

$$T = 2\pi\sqrt{R^3/GM},$$

independientemente de r. (*b*) ¿Cuál es la fórmula correspondiente para el periodo orbital suponiendo que la masa de la galaxia se concentre fuertemente hacia el centro de la galaxia, de modo que esencialmente toda la masa esté a distancias del centro menores de r? Estas consideraciones aplicadas a nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, indican que están presentes cantidades sustanciales de materia negra.

33. (*a*) Demuestre que el número N de fotones irradiados, por unidad de área y por unidad de tiempo, por un radiador de cavidad a la temperatura T está dado por

$$N = \int_0^\infty \frac{R(\lambda)}{hc/\lambda}d\lambda \approx \frac{30\sigma}{\pi^4 k}T^3.$$

(*Sugerencia*: Al evaluar la integral, haga caso omiso del "1" en el denominador de $R(\lambda)$; véase la ecuación 6 del capítulo 49. Utilice el cambio de variables dado en el problema 17(*a*) del capítulo 49.) (*b*) Con la misma aproximación, demuestre que la fracción de fotones, por número, con energías mayores de 2.2 MeV a una temperatura de 9×10^8 K es de 2.1×10^{-10}.

APÉNDICE A

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)†

LAS UNIDADES SI BÁSICAS

Cantidad	*Nombre*	*Símbolo*	*Definición*
longitud	metro	m	"...la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío en 1/299,792,458 de segundo."(1983)
masa	kilogramo	kg	"...este prototipo [un cilindro de platino-iridio] se considerará en lo sucesivo como la unidad de masa." (1889)
tiempo	segundo	s	"...la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado base del átomo cesio-133." (1967)
corriente eléctrica	ampere	A	"...aquélla corriente constante que, si se mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita, de sección transversal circular despreciable, y situados a 1 metro de separación en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud." (1946)
temperatura termodinámica	kelvin	K	"...la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua." (1967)
cantidad de sustancia	mol	mol	"...la cantidad de sustancia de un sistema que contenga tantas entidades elementales como átomos existen en 0.012 kilogramos de carbono 12." (1971)
intensidad luminosa	candela	cd	"...la intensidad luminosa en la dirección perpendicular, de un área de 1/600,000 metros cuadrados de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino a una presión de 101.325 newton por metro cuadrado." (1967)

† Adaptada de "The International System of Units (SI)", National Bureau of Standards Special Publication 330, edición de 1972 de Estados Unidos. Las definiciones fueron adoptadas por la Conferencia General de Pesas y Medidas, organismo internacional, en las fechas mostradas. En este libro no se usa la candela.

ALGUNAS UNIDADES SI DERIVADAS

Cantidad	*Nombre de la unidad*	*Símbolo*	*Equivalente*
área	metro cuadrado	m^2	
volumen	metro cúbico	m^3	
frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
velocidad	metro por segundo	m/s	
velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
aceleración	metro por segundo al cuadrado	m/s^2	
aceleración angular	radián por segundo al cuadrado	rad/s^2	
fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
presión	pascal	Pa	N/m^2
trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
potencia	watt	W	J/s
cantidad de electricidad	coulomb	C	$A \cdot s$
diferencia de potencial, fuerza electromotriz	volt	V	$N \cdot m/C$
campo eléctrico	volt/metro	V/m	N/C
resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
capacitancia	farad	F	$A \cdot s/V$
flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
campo magnético	tesla	T	Wb/m^2, $N/A \cdot m$
entropía	joule por kelvin	J/K	
capacidad calorífica específica	joule por kilogramo kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
conductividad térmica	watt por metro kelvin	$W/(m \cdot K)$	
intensidad radiante	watt por esterradián	W/sr	

LAS UNIDADES SI SUPLEMENTARIAS

Cantidad	*Nombre de la unidad*	*Símbolo*
ángulo plano	radián	rad
ángulo sólido	esterradián	sr

APÉNDICE B

ALGUNAS CONSTANTES FUNDAMENTALES DE LA FÍSICA

Constante	*Símbolo*	*Valor de cálculo*	*Mejor valor(1986)*	
			Valor†	*Incertidumbre*‡
Velocidad de la luz en el vacío	c	3.00×10^{8} m/s	2.99792458	exacto
Carga elemental	e	1.60×10^{-19} C	1.60217733	0.30
Masa del electrón en reposo	m_e	9.11×10^{-31} kg	9.1093897	0.59
Constante dieléctrica	ϵ_0	8.85×10^{-12} F/m	8.85418781762	exacto
Constante de permeabilidad	μ_0	1.26×10^{-6} H/m	1.25663706143	exacto
Masa en reposo del electrón§	m_e	5.49×10^{-4} u	5.48579902	0.023
Masa en reposo del neutrón§	m_n	1.0087 u	1.008664904	0.014
Masa en reposo del átomo de hidrógeno§	$m(^1\mathrm{H})$	1.0078 u	1.007825035	0.011
Masa en reposo del átomo de deuterio§	$m(^2\mathrm{H})$	2.0141 u	2.014101779	0.012
Masa en reposo del átomo de helio§	$m(^4\mathrm{He})$	4.0026 u	4.00260324	0.012
Razón carga a masa del electrón	e/m_e	1.76×10^{11} C/kg	1.75881962	0.30
Masa en reposo del protón	m_p	1.67×10^{-27} kg	1.6726231	0.59
Razón de la masa protón a electrón	m_p/m_e	1840	1836.152701	0.020
Masa en reposo del neutrón	m_n	1.67×10^{-27} kg	1.6749286	0.59
Masa en reposo del muón	m_μ	1.88×10^{-28} kg	1.8835327	0.61
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J·s	6.6260755	0.60
Longitud de onda Compton del electrón	λ_c	2.43×10^{-12} m	2.42631058	0.089
Constante universal de los gases	R	8.31 J/mol·K	8.314510	8.4
Constante de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}	6.0221367	0.59
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J/K	1.3806513	1.8
Volumen molar del gas ideal a STP¶	V_m	2.24×10^{-2} m^3/mol	2.2413997	1.7
Constante de Faraday	F	9.65×10^{4} C/mol	9.6485309	0.30
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.67×10^{-8} W/m^2·K^4	5.670399	6.8
Constante de Rydberg	R	1.10×10^{7} m^{-1}	1.0973731571	0.00036
Constante gravitatoria	G	6.67×10^{-11} m^3/s^2·kg	6.67259	128
Radio de Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m	5.29177249	0.045
Momento magnético del electrón	μ_e	9.28×10^{-24} J/T	9.2847700	0.34
Momento magnético del protón	μ_p	1.41×10^{-26} J/T	1.41060761	0.34
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T	9.2740154	0.34
Magnetón nuclear	μ_N	5.05×10^{-27} J/T	5.0507865	0.34
Constante de la estructura fina	α	1/137	1/137.0359895	0.045
Cuanto de flujo magnético	Φ_0	2.07×10^{-15} Wb	2.06783461	0.30
Resistencia Hall cuantizada	R_H	25800 Ω	25812.8056	0.045

† Misma unidad y potencia de diez que el valor de cálculo.

‡ Partes por millón.

§ Masa dada en unidades unificadas de masa atómica, donde 1 u = $1.6605402 \times 10^{-27}$ kg.

¶ STP —temperatura y presión estándar = 0°C y 1.0 bar. (Las siglas corresponden a *standard temperature and pressure.)*

APÉNDICE C

ALGUNOS DATOS ASTRONÓMICOS

EL SOL, LA TIERRA, Y LA LUNA

Propiedad	*Sol*[†]	*Tierra*	*Luna*
Masa (kg)	1.99×10^{30}	5.98×10^{24}	7.36×10^{22}
Radio medio (m)	6.96×10^{8}	6.37×10^{6}	1.74×10^{6}
Densidad media (kg/m³)	1410	5520	3340
Gravedad en la superficie (m/s²)	274	9.81	1.67
Velocidad de escape (km/s)	618	11.2	2.38
Periodo de rotación[§] (d)	26–37[‡]	0.997	27.3
Radio orbital medio (km)	2.6×10^{17} [¶]	1.50×10^{8} *	3.82×10^{5} [‖]
Periodo orbital	2.4×10^{8} años[¶]	1.00 años *	27.3 d[‖]

[†] El Sol irradia energía a razón de 3.90×10^{26} W; la energía solar se recibe a razón de 1380 W/m² justo afuera de la atmósfera de la Tierra, suponiendo una incidencia normal.
[‡] El Sol, una bola de gas, no gira como un cuerpo rígido. Su periodo rotatorio varía entre 26 d en el ecuador y 37 d en los polos.
[§] Medido respecto a las estrellas distantes.
[¶] Con respecto al centro de la galaxia.
* Con respecto al Sol.
[‖] Con respecto a la Tierra.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS PLANETAS

	Mercurio	*Venus*	*Tierra*	*Marte*	*Júpiter*	*Saturno*	*Urano*	*Neptuno*	*Plutón*
Distancia media desde el Sol (10^6 km)	57.9	108	150	228	778	1,430	2,870	4,500	5,900
Periodo de revolución (años)	0.241	0.615	1.00	1.88	11.9	29.5	84.0	165	248
Periodo de rotación[†] (días)	58.7	243[‡]	0.997	1.03	0.409	0.426	0.451[‡]	0.658	6.39
Velocidad orbital (km/s)	47.9	35.0	29.8	24.1	13.1	9.64	6.81	5.43	4.74
Inclinación del eje respecto a la órbita	0.0°	2.6°	23.5°	24.0°	3.08°	26.7°	82.1°	28.8°	65°
Inclinación de la órbita respecto a la órbita de la Tierra	7.00°	3.39°	—	1.85°	1.30°	2.49°	0.77°	1.77°	17.2°
Excentricidad de la órbita	0.206	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.0556	0.0472	0.0086	0.250
Diámetro ecuatorial (km)	4,880	12,100	12,800	6,790	143,000	120,000	51,800	49,500	3,400
Masa (Tierra = 1)	0.0558	0.815	1.000	0.107	318	95.1	14.5	17.2	0.002
Densidad promedio (g/cm³)	5.60	5.20	5.52	3.95	1.31	0.704	1.21	1.67	0.5(?)
Gravedad en la superficie[§] (m/s²)	3.78	8.60	9.78	3.72	22.9	9.05	7.77	11.0	0.03
Velocidad de escape (km/s)	4.3	10.3	11.2	5.0	59.5	35.6	21.2	23.6	1.3
Satélites conocidos	0	0	1	2	16 + anillos	19 + anillos	15 + anillos	8 + anillos	1

[†] Medido con respecto a las estrellas distantes.
[‡] El sentido de rotación es opuesto al del movimiento orbital.
[§] Medida en el ecuador del planeta.

APÉNDICE D

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

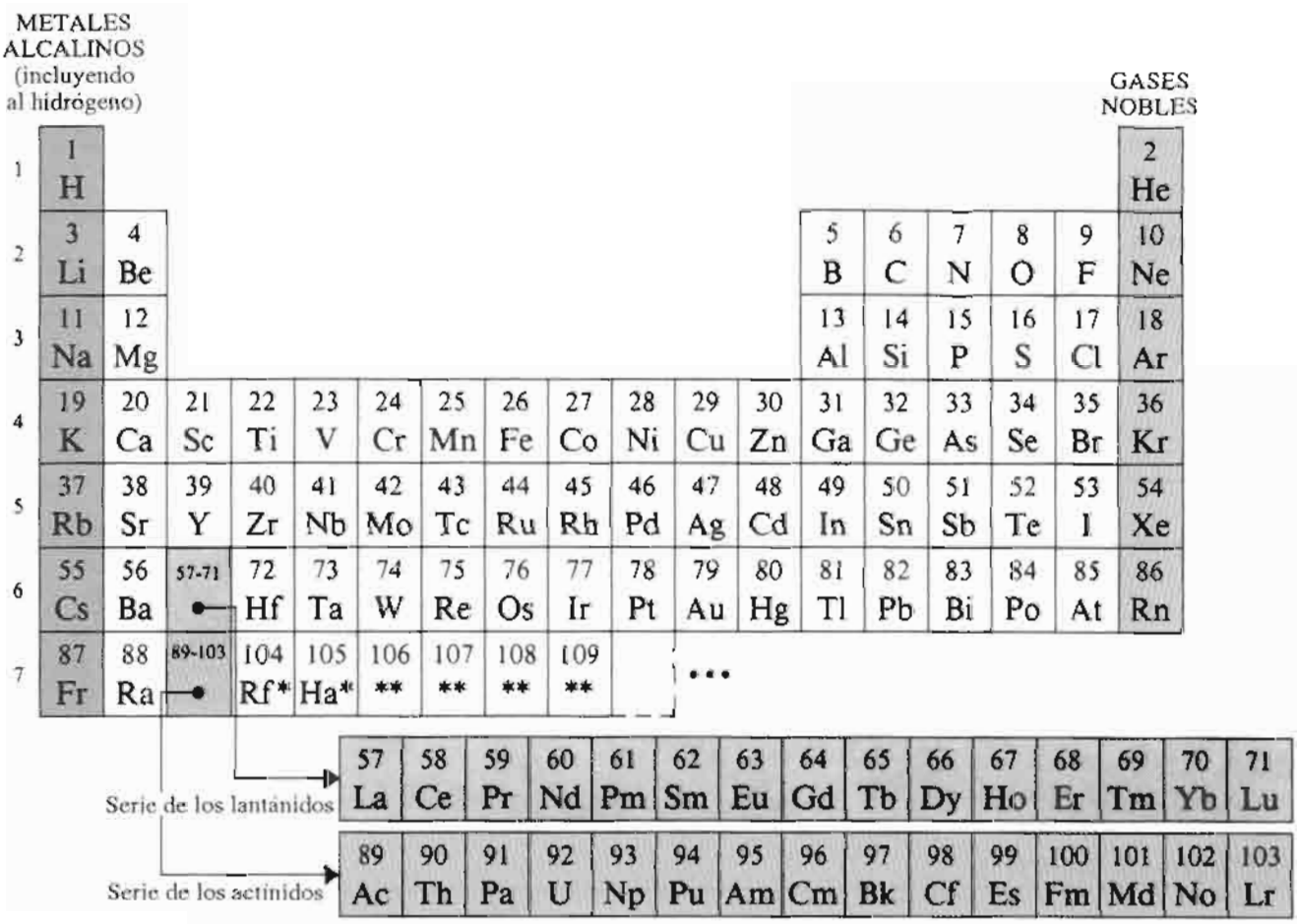
Elemento	*Símbolo*	*Número atómico Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm³) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Actinio	Ac	89	(227)	-	1050	3200	0.092
Aluminio	Al	13	26.9815	2.699	660	2467	0.900
Americio	Am	95	(243)	13.7	994	2607	-
Antimonio	Sb	51	121.75	6.69	630.5	1750	0.205
Argón	Ar	18	39.948	1.6626×10^{-3}	-189.2	-185.7	0.523
Arsénico	As	33	74.9216	5.72	817 (28 at.)	613	0.331
Astato	At	85	(210)	-	302	337	-
Azufre	S	16	32.066	2.07	112.8	444.6	0.707
Bario	Ba	56	137.33	3.5	725	1640	0.205
Berilio	Be	4	9.0122	1.848	12.78	2970	1.83
Berkelio	Bk	97	(247)	-	-	-	-
Bismuto	Bi	83	208.980	9.75	271.3	1560	0.122
Boro	B	5	10.811	2.34	20.79	2550	1.11
Bromo	Br	35	79.909	3.12(líquido)	-7.2	58	0.293
Cadmio	Cd	48	112.41	8.65	320.9	765	0.226
Calcio	Ca	20	40.08	1.55	839	1484	0.624
Californio	Cf	98	(251)	-	-	-	-
Carbono	C	6	12.011	2.25	3550	-	0.691
Cerio	Ce	58	140.12	6.768	798	3443	0.188
Cesio	Cs	55	132.905	1.873	28.40	6.69	0.243
Cinc	Zn	30	65.37	7.133	419.58	907	0.389
Cloro	Cl	17	35.453	3.214×10^{-3} (0°C)	-101	-34.6	0.486
Cobalto	Co	27	58.9332	8.85	1495	2870	0.423
Cobre	Cu	29	63.54	8.96	1083.4	2567	0.385
Criptón	Kr	36	83.80	3.488×10^{-3}	-156.6	-152.3	0.247
Cromo	Cr	24	51.996	7.19	1857	2672	0.448
Curio	Cm	96	(247)	-	1340	-	-
Disprosio	Dy	66	162.50	8.55	1412	2567	0.172
Einstenio	Es	99	(252)	-	-	-	-
Erbio	Er	68	167.26	9.07	1529	2868	0.167
Escandio	Sc	21	44.956	2.99	1541	2836	0.569
Estaño	Sn	50	118.71	7.31	231.97	2270	0.226
Estroncio	Sr	38	87.62	2.54	769	1384	0.737
Europio	Eu	63	151.96	5.245	822	1527	0.163
Fermio	Fm	100	(257)	-	-	-	-
Flúor	F	9	18.9984	1.696×10^{-3} (0°C)	-219.6	-188.2	0.753
Fósforo	P	15	30.9738	1.83	44.25	280	0.741
Francio	Fr	87	(223)	-	(27)	(677)	-
Gadolinio	Gd	64	157.25	7.90	1313	3273	0.234
Galio	Ga	31	69.72	5.907	29.78	2403	0.377
Germanio	Ge	32	72.61	5.323	937.4	2830	0.322
Hafnio	Hf	72	178.49	13.31	2227	4602	0.144
Helio	He	2	4.0026	0.1664×10^{-3}	-272.2	-268.9	5.23
Hidrógeno	H	1	1.00797	0.08375×10^{-3}	-259.34	-252.87	14.4
Hierro	Fe	26	55.847	7.87	1535	2750	0.447
Holmio	Ho	67	164.930	8.79	1474	2700	0.165

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico Z*	*Masa molar* (g/mol)	*Densidad* (g/cm^3) a 20°C	*Punto de fusión* (°C)	*Punto de ebullición* (°C)	*Calor específico* (J/g · C°) a 25°C
Indio	In	49	114.82	7.31	156.6	2080	0.233
Iridio	Ir	77	192.2	22.5	2410	4130	0.130
Iterbio	Yb	70	173.04	6.966	819	1196	0.155
Itrio	Y	39	88.905	4.469	1552	5338	0.297
Lantano	La	57	138.91	6.145	918	3464	0.195
Laurencio	Lr	103	(260)	-	-	-	-
Litio	Li	3	6.939	0.534	180.54	1342	3.58
Lutecio	Lu	71	174.97	9.84	1663	3402	0.155
Magnesio	Mg	12	24.305	1.74	649	1090	1.03
Manganeso	Mn	25	54.9380	7.43	1244	1962	0.481
Mendelevio	Md	101	(258)	-	-	-	-
Mercurio	Hg	80	200.59	13.55	-38.87	357	0.138
Molibdeno	Mo	42	95.94	10.22	2617	4612	0.251
Neodimio	Nd	60	144.24	7.00	1021	3074	0.188
Neón	Ne	10	20.180	0.8387×10^{-3}	-248.67	-246.0	1.03
Neptunio	Np	93	(237)	20.25	640	3902	1.26
Niobio	Nb	41	92.906	8.57	2468	4742	0.264
Níquel	Ni	28	58.69	8.902	1453	2732	0.444
Nitrógeno	N	7	14.0067	1.1649×10^{-3}	-210	-195.8	1.03
Nobelio	No	102	(259)	-	-	-	-
Oro	Au	79	196.967	19.32	1064.43	2808	0.131
Osmio	Os	76	190.2	22.57	3045	5027	0.130
Oxígeno	O	8	15.9994	1.3318×10^{-3}	-218.4	-183.0	0.913
Paladio	Pd	46	106.4	12.02	1554	3140	0.243
Plata	Ag	47	107.68	10.49	961.9	2212	0.234
Platino	Pt	78	195.09	21.45	1772	3827	0.134
Plomo	Pb	82	207.19	11.36	327.50	1740	0.129
Plutonio	Pu	94	(244)	19.84	641	3232	0.130
Polonio	Po	84	(209)	9.24	254	962	-
Potasio	K	19	39.098	0.86	63.25	760	0.758
Praseodimio	Pr	59	140.907	6.773	931	3520	0.197
Promecio	Pm	61	(145)	7.264	1042	(3000)	-
Protactinio	Pa	91	(231)	-	1600	-	-
Radio	Ra	88	(226)	5.0	700	1140	-
Radón	Rn	86	(222)	9.96×10^{-3} (0°C)	-71	-61.8	0.092
Renio	Re	75	186.2	21.04	3180	5627	0.134
Rodio	Rh	45	102.905	12.44	1965	3727	0.243
Rubidio	Rb	37	85.47	1.53	38.89	686	0.364
Rutenio	Ru	44	101.107	12.2	2310	3900	0.239
Samario	Sm	62	150.35	7.49	1074	1794	0.197
Selenio	Se	34	78.96	4.79	217	685	0.318
Silicio	Si	14	28.086	2.33	1410	2355	0.712
Sodio	Na	11	22.9898	0.9712	97.81	882.9	1.23
Talio	Tl	81	204.38	11.85	304	1457	0.130
Tantalio	Ta	73	180.948	16.6	2996	5425	0.138
Tecnecio	Tc	43	(98)	11.46	2172	4877	0.209
Telurio	Te	52	127.60	6.24	449.5	990	0.201
Terbio	Tb	65	158.924	8.25	1357	3230	0.180
Titanio	Ti	22	4788	4.54	1660	3287	0.523
Torio	Th	90	(232)	11.72	1750	(3850)	0.117
Tulio	Tm	69	168.934	9.31	1545	1950	0.159
Tungsteno	W	74	183.85	19.3	3410	5660	0.134
Uranio	U	92	(238)	19.07	1132	3818	0.117
Vanadio	V	23	50.942	6.1	1890	3380	0.490
Xenón	Xe	54	131.30	5.495×10^{-3}	-111.79	-108	0.159
Yodo	I	53	126.9044	4.94	113.5	184.35	0.218
Zirconio	Zr	40	91.22	6.506	1852	4377	0.276

Los valores entre paréntesis en la columna de masas atómicas son los números de masa de los isótopos más estables de los elementos que son radiactivos. Los puntos de fusión y de ebullición entre paréntesis son inciertos. Todas las propiedades físicas están dadas para una presión de una atmósfera a menos que se indique lo contrario. Los datos para los gases son válidos únicamente cuando están en su estado molecular usual, tal como H_2, He, O_2, Ne, etc. Los calores específicos de los gases son los valores a presión constante. *Fuente: Handbook of Chemistry and Physics*, edición núm. 71 (CRC Press, 1990).

APÉNDICE E

TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS



* Los nombres de estos elementos (Ruterfordio y Hahnio) no han sido aceptados debido a la controversia por el crédito a sus descubridores. Un grupo de la antes Unión Soviética ha propuesto los nombres de Kurchatovio y Neilsbohrio.

** Se ha reportado el descubrimiento de estos elementos, pero no tienen un nombre universalmente adoptado todavía.

APÉNDICE F

PARTÍCULAS ELEMENTALES

1. LAS PARTÍCULAS FUNDAMENTALES

LEPTONES

Partícula	*Símbolo*	*Anti-partícula*	*Carga (e)*	*Espín ($h/2\pi$)*	*Energía de reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Productos típicos de la desintegración*
Electrón	e^-	e^+	−1	1/2	0.511	∞	
Neutrino del electrón	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	1/2	<0.00002	∞	
Muón	μ^-	μ^+	−1	1/2	105.7	2.2×10^{-6}	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
Neutrino del muón	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	1/2	<0.3	∞	
Tau	τ^-	τ^+	−1	1/2	1784	3.0×10^{-13}	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$
Neutrino tau	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	1/2	<40	∞	

QUARKS

*Sabor**	*Símbolo*	*Antipartícula*	*Carga (e)*	*Espín ($h/2\pi$)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Otra propiedad*
Arriba	u	$\bar{u}$	+2/3	1/2	300	$C = S = T = B = 0$
Abajo	d	$\bar{d}$	−1/3	1/2	300	$C = S = T = B = 0$
Encanto	c	$\bar{c}$	+2/3	1/2	1500	Encantamiento (C) = +1
Extraño	s	$\bar{s}$	−1/3	1/2	500	Extrañeza (S) = −1
Cima[‡]	t	$\bar{t}$	+2/3	1/2	>40,000	Encumbramiento (T) = +1
Fondo	b	$\bar{b}$	−1/3	1/2	4700	Profundidad (B) = −1

PARTÍCULAS DE CAMPO

Partícula	*Símbolo*	*Interacción*	*Carga (e)*	*Espín ($h/2\pi$)*	*Energía de reposo*[†] (GeV)
Gravitón[‡]		Gravedad	0	2	0
Bosón débil	W^+, W^-	Débil	±1	1	80.6
Bosón débil	Z^0	Débil	0	1	91.2
Fotón	γ	Electromagnética	0	1	0
Gluón	g	Fuerte (color)	0	1	0

2. ALGUNAS PARTÍCULAS COMPUESTAS

BARIONES

Partícula	*Símbolo*	*Contenido de quarks*	*Anti-partícula*	*Carga (e)*	*Espín (h/2π)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Desintegración típica*
Protón	p	uud	$\bar{p}$	$+1$	1/2	938	$>10^{40}$	$\pi^0 + e^+$ (?)
Neutrón	n	udd	$\bar{n}$	0	1/2	940	889	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
Lambda	Λ^0	uds	$\overline{\Lambda^0}$	0	1/2	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
Omega	Ω^-	sss	$\overline{\Omega^-}$	-1	3/2	1673	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$
Delta	Δ^{++}	uuu	$\overline{\Delta^{++}}$	$+2$	3/2	1232	5.7×10^{-24}	$p + \pi^+$
Lambda encantada	Λ_c^+	udc	$\overline{\Lambda_c^+}$	$+1$	1/2	2285	1.9×10^{-13}	$\Lambda^0 + \pi^+$

MESONES

Partícula	*Símbolo*	*Contenido de quarks*	*Anti-partícula*	*Carga (e)*	*Espín (h/2π)*	*Energía en reposo* (MeV)	*Vida media* (s)	*Desintegración típica*
Pión	π^+	$u\bar{d}$	π^-	$+1$	0	140	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Pión	π^0	$u\bar{u} + d\bar{d}$	π^0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
Kaón	K^+	$u\bar{s}$	K^-	$+1$	0	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Kaón	K^0	$d\bar{s}$	$\overline{K^0}$	0	0	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
Rho	ρ^+	$u\bar{d}$	ρ^-	$+1$	1	768	4.5×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^-$
Mesón-D	D^+	$c\bar{d}$	D^-	$+1$	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
Psi	ψ	$c\bar{c}$	ψ	0	1	3097	1.0×10^{-20}	$e^+ + e^-$
Mesón-B	B^+	$u\bar{b}$	B^-	$+1$	0	5278	1.2×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Ípsilon	Υ	$b\bar{b}$	Υ	0	1	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

† Las energías en reposo listadas para los quarks no son las asociadas con los quarks libres; puesto que todavía no ha sido observado ningún quark libre, no ha sido posible la medición de sus energías en reposo en el estado libre. Los valores tabulados son energías en reposo efectivas correspondientes a quarks *constituyentes*, aquellos ligados en partículas compuestas.

‡ Se cree que existen las partículas pero todavía no han sido observadas.

Fuente: "Review of Particle Properties", *Physics Letters B*, vol. 239 (abril de 1990).

APÉNDICE G

FACTORES DE CONVERSIÓN

Los factores de conversión pueden leerse directamente de las tablas. Por ejemplo, 1 grado = 2.778×10^{-3} revoluciones, de modo que $16.7° = 16.7 \times 2.778 \times 10^{-3}$ rev.

Las cantidades SI están en letras mayúsculas. Parcialmente adaptado de G. Shortley y D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

ÁNGULO PLANO

	°	′	″	RADIÁN	rev
1 grado =	1	60	3600	1.745×10^{-2}	2.778×10^{-3}
1 minuto =	1.667×10^{-2}	1	60	2.909×10^{-4}	4.630×10^{-5}
1 segundo =	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	4.848×10^{-6}	7.716×10^{-7}
1 RADIÁN =	57.30	3438	2.063×10^{5}	1	0.1592
1 revolución =	360	2.16×10^{4}	1.296×10^{6}	6.283	1

ÁNGULO SÓLIDO

1 esfera = 4π esterradianes = 12.57 esterradianes

LONGITUD

	cm	METRO	km	in.	ft	mi
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 kilómetro =	10^{5}	1000	1	3.937×10^{4}	3281	0.6214
1 pulgada =	2.540	2.540×10^{-2}	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie =	30.48	0.3048	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla =	1.609×10^{5}	1609	1.609	6.336×10^{4}	5280	1

1 angström = 10^{-10} m
1 milla náutica = 1852 m
= 1.151 millas = 6076 ft
1 fermi = 10^{-15} m

1 año-luz = 9.460×10^{12} km
1 parsec = 3.084×10^{13} km
1 fathom = 6 ft
1 radio de Bohr = 5.292×10^{-11} m

1 yarda = 3 ft
1 rod = 16.5 ft
1 mil = 10^{-3} in
1 nm = 10^{-9} m

ÁREA

	METRO^2	cm^2	ft^2	in.^{2}
1 METRO CUADRADO =	1	10^{4}	10.76	1550
1 centímetro cuadrado =	10^{-4}	1	1.076×10^{-3}	0.1550
1 pie cuadrado =	9.290×10^{-2}	929.0	1	144
1 pulgada cuadrada =	6.452×10^{-4}	6.452	6.944×10^{-3}	1

1 milla cuadrada = 2.788×10^{7} ft^2 = 640 acres
1 barnio = 10^{-28} m

1 acre = 43,560 ft^2
1 hectárea = 10^{4} m^2 = 2.471 acres

VOLUMEN

	METRO^3	cm^3	L	ft^3	in.^{3}
1 METRO CÚBICO =	1	10^6	1000	35.31	6.102×10^4
1 centímetro cúbico =	10^{-6}	1	1.000×10^{-3}	3.531×10^{-5}	6.102×10^{-2}
1 litro =	1.000×10^{-3}	1000	1	3.531×10^{-2}	61.02
1 pie cúbico =	2.832×10^{-2}	2.832×10^4	28.32	1	1728
1 pulgada cúbica =	1.639×10^{-5}	16.39	1.639×10^{-2}	5.787×10^{-4}	1

1 galón fluido U.S. = 4 cuartos fluidos U.S. = 8 pintas U.S. = 128 onzas fluidas U.S. = 231 in^3
1 galón imperial británico = 277.4 in^3 = 1.201 galones fluidos U.S.

MASA

	g	KILOGRAMO	slug	u	oz	lb	ton
1 gramo =	1	0.001	6.852×10^{-5}	6.022×10^{23}	3.527×10^{-2}	2.205×10^{-3}	1.102×10^{-6}
1 KILOGRAMO =	1000	1	6.852×10^{-2}	6.022×10^{26}	35.27	2.205	1.102×10^{-3}
1 slug =	1.459×10^4	14.59	1	8.786×10^{27}	514.8	32.17	1.609×10^{-2}
1 u =	1.661×10^{-24}	1.661×10^{-27}	1.138×10^{-28}	1	5.857×10^{-26}	3.662×10^{-27}	1.830×10^{-30}
1 onza =	28.35	2.835×10^{-2}	1.943×10^{-3}	1.718×10^{25}	1	6.250×10^{-2}	3.125×10^{-5}
1 libra =	453.6	0.4536	3.108×10^{-2}	2.732×10^{26}	16	1	0.0005
1 ton =	9.072×10^5	907.2	62.16	5.463×10^{29}	3.2×10^4	2000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg
Las cantidades en las zonas sombreadas no son unidades de masa pero se usan a menudo como tales. Por ejemplo, cuando escribimos 1 kg "=" 2.205 lb significa que un kilogramo es una masa que pesa 2.205 libras en condiciones de gravedad estándar (g = 9.80665 m/s^2).

DENSIDAD

	slug/ft^3	KILOGRAMO/METRO^3	g/cm^3	lb/ft^3	lb/in.^{3}
1 slug por ft^3 =	1	515.4	0.5154	32.17	1.862×10^{-2}
1 KILOGRAMO por METRO^3 =	1.940×10^{-3}	1	0.001	6.243×10^{-2}	3.613×10^{-5}
1 gramo por cm^3 =	1.940	1000	1	62.43	3.613×10^{-2}
1 libra por ft^3 =	3.108×10^{-2}	16.02	1.602×10^{-2}	1	5.787×10^{-4}
1 libra por in^3 =	53.71	2.768×10^4	27.68	1728	1

Las cantidades en las zonas sombreadas son densidades de peso y, como tales, son dimensionalmente diferentes a las densidades de masa. Véase la nota en la tabla de masas.

TIEMPO

	y	d	h	min	SEGUNDO
1 año =	1	365.25	8.766×10^3	5.259×10^5	3.156×10^7
1 día =	2.738×10^{-3}	1	24	1440	8.640×10^4
1 hora =	1.141×10^{-4}	4.167×10^{-2}	1	60	3600
1 minuto =	1.901×10^{-6}	6.944×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	60
1 SEGUNDO =	3.169×10^{-8}	1.157×10^{-5}	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1

VELOCIDAD

	ft/s	km/h	METROS/SEG	mi/h	cm/s
1 pie por segundo =	1	1.097	0.3048	0.6818	30.48
1 kilómetro por hora =	0.9113	1	0.2778	0.6214	27.78
1 METRO por SEG =	3.281	3.6	1	2.237	100
1 milla por hora =	1.467	1.609	0.4470	1	44.70
1 centímetro por segundo =	3.281×10^{-2}	3.6×10^{-2}	0.01	2.237×10^{-2}	1

1 nudo = 1 milla náutica por hora 1.688 ft/s 1 mi/min = 88.00 ft/s = 60.00 mi/h

FUERZA

	dyne	NEWTON	lb	pdl	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	2.248×10^{-6}	7.233×10^{-5}	1.020×10^{-3}	1.020×10^{-6}
1 NEWTON =	10^5	1	0.2248	7.233	102.0	0.1020
1 libra =	4.448×10^5	4.448	1	32.17	453.6	0.4536
1 poundal* =	1.383×10^4	0.1383	3.108×10^{-2}	1	14.10	1.410×10^{-2}
1 gramo-fuerza =	980.7	9.807×10^{-3}	2.205×10^{-3}	7.093×10^{-2}	1	0.001
1 kilogramo-fuerza =	9.807×10^5	9.807	2.205	70.93	1000	1

*(Unidad absoluta de fuerza)

Las cantidades en la zonas sombreadas no son unidades de fuerza pero a menudo se usan como tales. Por ejemplo, si escribimos 1 gramo-fuerza "=" 980.7 dinas, queremos decir que un gramo-masa experimenta una fuerza de 980.7 dinas en condiciones de gravedad estándar (g = 9.80665 m/s^2).

ENERGÍA, TRABAJO, CALOR

	Btu	erg	ft·lb	hp·h	JOULE	cal	kW·h	eV	MeV	kg	u
1 unidad térmica británica =	1	1.055×10^{10}	777.9	3.929×10^{-4}	1055	252.0	2.930×10^{-4}	6.585×10^{21}	6.585×10^{15}	1.174×10^{-14}	7.070×10^{12}
1 erg =	9.481×10^{-11}	1	7.376×10^{-8}	3.725×10^{-14}	10^{-7}	2.389×10^{-8}	2.778×10^{-14}	6.242×10^{11}	6.242×10^{5}	1.113×10^{-24}	670.2
1 libra-pie =	1.285×10^{-3}	1.356×10^{7}	1	5.051×10^{-7}	1.356	0.3238	3.766×10^{-7}	8.464×10^{18}	8.464×10^{12}	1.509×10^{-17}	9.037×10^{9}
1 caballo de fuerza-hora =	2545	2.685×10^{13}	1.980×10^{6}	1	2.685×10^{6}	6.413×10^{5}	0.7457	1.676×10^{25}	1.676×10^{19}	2.988×10^{-11}	1.799×10^{16}
1 JOULE =	9.481×10^{-4}	10^7	0.7376	3.725×10^{-7}	1	0.2389	2.778×10^{-7}	6.242×10^{18}	6.242×10^{12}	1.113×10^{-17}	6.702×10^{9}
1 caloría =	3.969×10^{-3}	4.186×10^{7}	3.088	1.560×10^{-6}	4.186	1	1.163×10^{-6}	2.613×10^{19}	2.613×10^{13}	4.660×10^{-17}	2.806×10^{10}
1 kilowatt-hora =	3413	3.6×10^{13}	2.655×10^{6}	1.341	3.6×10^{6}	8.600×10^{5}	1	2.247×10^{25}	2.247×10^{19}	4.007×10^{-11}	2.413×10^{16}
1 electrónvolt =	1.519×10^{-22}	1.602×10^{-12}	1.182×10^{-19}	5.967×10^{-26}	1.602×10^{-19}	3.827×10^{-20}	4.450×10^{-26}	1	10^{-6}	1.783×10^{-36}	1.074×10^{-9}
1 millón de electronvolts =	1.519×10^{-16}	1.602×10^{-6}	1.182×10^{-13}	5.967×10^{-20}	1.602×10^{-13}	3.827×10^{14}	4.450×10^{-20}	10^6	1	1.783×10^{-30}	1.074×10^{-3}
1 kilogramo =	8.521×10^{13}	8.987×10^{23}	6.629×10^{16}	3.348×10^{10}	8.987×10^{16}	2.146×10^{16}	2.497×10^{10}	5.610×10^{35}	5.610×10^{29}	1	6.022×10^{26}
1 unidad unificada de masa atómica =	1.415×10^{-13}	1.492×10^{-3}	1.101×10^{-10}	5.559×10^{-17}	1.492×10^{-10}	3.564×10^{-11}	4.146×10^{-17}	9.32 $\times 10^{8}$	932.0	1.661×10^{-27}	1

Las cantidades en las zonas sombreadas no son unidades de energía propiamente pero se incluyen por conveniencia. Provienen de la fórmula de equivalencia masa-energía relativista $E = mc^2$ y representan la energía equivalente de una masa de un kilogramo o una unidad unificada de masa atómica (u).

PRESIÓN

	atm	dina/cm²	in de agua	cm Hg	PASCAL	lb/in.²	lb/ft²
1 atmósfera =	1	1.013×10^{6}	406.8	76	1.013×10^{5}	14.70	2116
1 dina por cm² =	9.869×10^{-7}	1	4.015×10^{-4}	7.501×10^{-5}	0.1	1.405×10^{-5}	2.089×10^{-3}
1 in de agua† a 4°C =	2.458×10^{-3}	2491	1	0.1868	249.1	3.613×10^{-2}	5.202
1 centímetro de mercurio† a 0°C =	1.316×10^{-2}	1.333×10^{4}	5.353	1	1333	0.1934	27.85
1 PASCAL =	9.869×10^{-6}	10	4.015×10^{-3}	7.501×10^{-4}	1	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 libra por in² =	6.805×10^{-2}	6.895×10^{4}	27.68	5.171	6.895×10^{3}	1	144
1 libra por ft² =	4.725×10^{-4}	478.8	0.1922	3.591×10^{-2}	47.88	6.944×10^{-3}	1

† En donde la aceleración de la gravedad tiene el valor estándar 9.80665 m/s².
1 bar = 10^{6} dinas/cm² = 0.1 MPa 1 milibar = 10^{3} dinas/cm² = 10^{2} Pa 1 torr = 1 milímetro de mercurio

POTENCIA

	Btu/h	ft·lb/s	hp	cal/s	kW	WATT
1 unidad térmica británica por hora =	1	0.2161	3.929×10^{-4}	6.998×10^{-2}	2.930×10^{-4}	0.2930
1 libra-pie por segundo =	4.628	1	1.818×10^{-3}	0.3239	1.356×10^{-3}	1.356
1 caballo de fuerza =	2545	550	1	178.1	0.7457	745.7
1 caloría por segundo =	14.29	3.088	5.615×10^{-3}	1	4.186×10^{-3}	4.186
1 kilowatt =	3413	737.6	1.341	238.9	1	1000
1 WATT =	3.413	0.7376	1.341×10^{-3}	0.2389	0.001	1

FLUJO MAGNÉTICO

	maxwell	WEBER
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

CAMPO MAGNÉTICO

	gauss	TESLA	milligauss
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 milligauss =	0.001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber / metro²

APÉNDICE H

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

GEOMETRÍA

Círculo de radio r: circunferencia $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$.
Esfera de radio r: área $= 4\pi r^2$; volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
Cilindro circular recto de radio r y altura h: área $=$ $2\pi r^2 + 2\pi rh$; volumen $= \pi r^2 h$.
Triángulo de base a y altura h: área $= \frac{1}{2}ah$.

FÓRMULA CUADRÁTICA

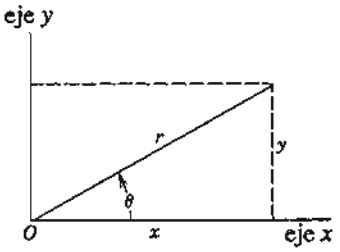
Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x =$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO θ

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

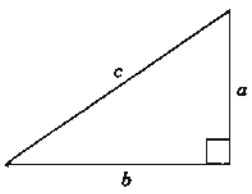
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$



TEOREMA DE PITÁGORAS

$a^2 + b^2 = c^2$



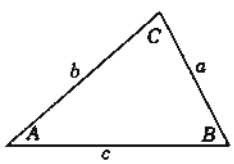
TRIÁNGULOS

Ángulos A, B, C
Lados opuestos a, b, c

$A + B + C = 180°$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



SIGNOS Y SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$=$ igual a
$\approx$ aproximadamente igual a
$\sim$ es del orden de magnitud de
$\neq$ no es igual a
$\equiv$ es idéntico a, se define como
$>$ es mayor que ($\gg$ es mucho mayor que)
$<$ es menor que ($\ll$ es mucho menor que)
$\geq$ es mayor que o igual a (o, no es menor que)
$\leq$ es menor que o igual a (o, no es mayor que)
$\pm$ más o menos
$\propto$ es proporcional a
Σ la suma de
$\bar{x}$ el valor promedio de x

PRODUCTOS DE VECTORES

Sean $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vectores unitarios en las direcciones x, y, z. Entonces

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Cualquier vector $\mathbf{a}$ con componentes a_x, a_y, a_z a lo largo de los ejes x, y, z puede escribirse

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores arbitrarios con magnitudes a, b, c. Entonces

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

$$(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (s = \text{un escalar}).$$

Sea θ el más pequeño de los dos ángulos entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\mathbf{i} + (a_zb_x - b_za_x)\mathbf{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\operatorname{sen}\theta$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$
$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \qquad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$
$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \quad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \cdots \quad (x^2 < 1)$$

DESARROLLO EXPONENCIAL

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

DESARROLLO LOGARÍTMICO

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \quad (|x| < 1)$$

DESARROLLOS TRIGONOMÉTRICOS (θ en radianes)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

DERIVADAS E INTEGRALES

En lo que sigue, las letras u y v son válidas para cualquier función de x, y a y m son constantes. A cada una de las integrales indefinidas deberá añadírsele una constante de integración arbitraria. El *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) proporciona una tabulación más extensa.

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$	1. $\displaystyle\int dx = x$
2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$	2. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	3. $\displaystyle\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$	4. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$	5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$
6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	6. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$	7. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$
8. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert$
11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x\sec x$	12. $\displaystyle\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x\csc x$	13. $\displaystyle\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$	14. $\displaystyle\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$	15. $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

APÉNDICE I

PROGRAMAS DE COMPUTADORA

A continuación ofrecemos ejemplos de programas que pueden emplearse para calcular las trayectorias de partículas cargadas que se mueven en campos eléctricos y magnéticos. Se basan en los programas de cálculos cinemáticos en los que intervienen fuerzas no constantes que aparecieron en el apéndice I del Volumen 1. Los programas están escritos en el lenguaje BASIC y pueden adaptarse fácilmente a la mayoría de las computadoras personales. Estos programas pueden emplearse, con las modificaciones apropiadas, para cualquier configuración del campo eléctrico o magnético. Todas las cantidades están en unidades del SI en ambos programas.

Al usar ambos programas deberá tenerse especial cuidado en determinar que el intervalo de tiempo DT (especificado en la línea 130 en el programa del campo eléctrico y en la línea 120 en el programa del campo magnético) es lo suficientemente pequeño como para que las aproximaciones empleadas en las integraciones no introduzcan errores significativos en el cálculo. Conforme el intervalo se va haciendo más pequeño, el número de intervalos se vuelve más grande, aumentando, por lo tanto, la longitud del tiempo que le toma correr al programa y la cantidad de datos que produce. Para reducir la cantidad de salida, cada programa tiene una provisión para limitar la salida a un cierto número de puntos. Esto limita únicamente a los datos de salida y no afecta al cálculo. La longitud total de tiempo para la que el programa sigue el movimiento es igual al producto del número de intervalos (NT) y el tamaño de cada intervalo (DT).

1. CAMPOS ELÉCTRICOS

Este programa se empleó en la sección 28-6 para hallar el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo del eje de un anillo de carga. El programa calcula el movimiento en el plano xz únicamente. Las componentes x y z del campo eléctrico se especifican en las líneas 180 y 190. Tal como se dan aquí, las componentes del campo eléctrico son $E_x = 0$, $E_z = zR\lambda/2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}$ (véase la Ec. 22 del capítulo 28), con $R = 0.02$ m y $\lambda = +2 \times 10^7$ C/m. La salida del programa se grafica en la figura 16*a* del capítulo 28.

LISTADO DEL PROGRAMA

```
10 'CALCULOS DEL MOVIMIENTO DE LA PARTICULA CARGADA
20 ' EN EL CAMPO ELECTRICO EN EL PLANO XZ
30 EO = 8.85-12
40 'ESPECIFICAR MASA, CARGA, POSICION INICIAL Y VELOCIDAD INICIAL
50 M = 1.67E-27
60 Q = 1.6e-19
70 X = 0
80 Z = .5
90 VX = 0
100 VZ = -700000!
110 'ESPECIFICAR TIEMPO DE ARRANQUE, INTERVALO DE TIEMPO, NUMERO DE INTERVALOS
```

(Continúa)

```
120 T = 0
130 DT = 5E-10
140 NT = 3000
150 'ESPECIFICAR NUMERO DE INTERVALOS A IMPRIMIR
160 N=15
170 'ESPECIFICAR LAS COMPONENTES DEL CAMPO ELECTRICO
180 DEF FNEX(X,Z) = 0
190 DEF FNEX(X,Z) = Z*.03*.0000002/2/E0/(Z^2+(.03)^2)^1.5
200 PRINT " TIEMPO          X         Z         VX         VZ"
210 LPRINT " TIEMPO          X         Z         VX         VZ"
220 PRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Z,VX,VZ
230 LPRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Z,VX,VZ
240 FOR I = 1 TO NT
250 T = T+DT
260 AX = Q*FNEX(X,Z)/M
270 AZ = Q*FNEX(X,Z)/M
280 X = X +  VX*DT = .5*AX*DT*DT
290 Z = Z + VZ*DT = .5*AZ*DT*DT
300 VX = VX + AX*DT
310 VZ = VZ + AZ*DT
320 IF (NT/N)*INT(I/NT*N) < > I THEN 350
330 PRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Z,VX,VZ
340 LPRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Z,VX,VZ
350 NEXT I
400 END
```

SALIDA DE MUESTRA

TIEMPO	X	Z	VX	VZ
0.00E+00	0.00E+00	5.00E-01	0.00E+00	-7.00E+05
1.00E-07	0.00E+00	4.31E-01	0.00E+00	-6.85E+05
2.00E-07	0.00E+00	3.63E-01	0.00E+00	-6.64E+05
3.00E-07	0.00E+00	2.98E-01	0.00E+00	-6.35E+05
4.00E-07	0.00E+00	2.37E-01	0.00E+00	-5.90E+05
5.00E-07	0.00E+00	1.81E-01	0.00E+00	-5.16E+05
6.00E-07	0.00E+00	1.35E-01	0.00E+00	-3.89E+05
7.00E-07	0.00E+00	1.06E-01	0.00E+00	-1.78E+05
8.00E-07	0.00E+00	1.02E-01	0.00E+00	9.89E+05
9.00E-07	0.00E+00	1.25E-01	0.00E+00	3.37E+05
1.00E-06	0.00E+00	1.66E-01	0.00E+00	4.86E+05
1.10E-06	0.00E+00	2.20E-01	0.00E+00	5.72E+05
1.20E-06	0.00E+00	2.80E-01	0.00E+00	6.24E+05
1.30E-06	0.00E+00	3.44E-01	0.00E+00	6.58E+05
1.40E-06	0.00E+00	4.11E-01	0.00E+00	6.81E+05
1.50E-06	0.00E+00	4.80E-01	0.00E+00	6.97E+05

2. CAMPOS MAGNÉTICOS

Este programa, que se empleó en la sección 34-3, calcula el movimiento de una partícula confinada al plano *xy* y sometida a un campo magnético en la dirección *z*. La componente *z* del campo magnético (en unidades tesla) se especifica en la línea 170. Tal como se da aquí, el campo es uniforme. La salida del programa se grafica en la figura 17*a* del capítulo 34.

LISTADO DEL PROGRAMA

```
10 'CALCULO DEL MOVIMIENTO DE LA PARTICULA CARGADA EN EL PLANO XY
20 ' CON EL CAMPO MAGNETICO EN LA DIRECCION Z
30 'ESPECIFICAR MASA, CARGA, POSICION INICIAL, VELOCIDAD INICIAL
40 M = 6.645E-27
50 Q = 3.2E-19
60 X = 0
80 VX = 3000000!
90 VY = 0
100 'ESPECIFICAR TIEMPO DE ARRANQUE, INTERVALO DE TIEMPO, NUMERO DE INTERVALOS
110 T = 0
120 DT = 1E-10
130 NT = 10000
140 'ESPECIFICAR NUMERO DE INTERVALOS POR IMPRIMIR
150 N = 20
160 'ESPECIFICAR LA COMPONENTE Z DEL CAMPO MAGNETICO
170 DEF FNBZ(X,Z) = .15
180 PRINT" TIEMPO       X          Y          VX          VY"
190 LPRINT" TIEMPO       X          Y          VX          VY"
200 PRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
210 LPRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
220 FOR I = 1 TO NT
230 T = T + DT
240 AX = Q*VY*FNBZ(X,Y)/M
250 AY = -Q*VX*FNBZ(X,Y)/M
260 X = X + VX*DT + .5*AX*DT*DT
270 Y = Y + VY*DT + .5*AY*DT*DT
280 VX = VX + AX*DT
290 VY = VY + AY*DT
300 IF (NT/N)*INT(I/NT*N) < > I THEN 330
310 PRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
320 LPRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
330 NEXT I
400 END
```

SALIDA DE MUESTRA

TIEMPO	X	Y	VX	VZ
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.00E+06	0.00E+00
5.00E-08	1.47E-01	-2.68E-02	2.81E+06	-1.06E+06
1.00E-07	2.75E-01	-1.04E-01	2.25E+06	-1.98E+06
1.50E-07	3.67E-01	-2.21E-01	1.41E+06	-2.65E+06
2.00E-07	4.12E-01	-3.63E-01	3.77E+05	-2.98E+06
2.50E-07	4.04E-01	-5.12E-01	-6.99E+05	-2.92E+06
3.00E-07	3.44E-01	-6.49E-01	-1.69E+06	-2.48E+06
3.50E-07	2.39E-01	-7.55E-01	-2.46E+06	-1.73E+06
4.00E-07	1.03E-01	-8.18E-01	-2.91E+06	-7.49E+05
4.50E-07	-4.55E-02	-8.29E-01	-2.99E+06	3.27E+05
5.00E-07	-1.89E-01	-7.86E-01	-2.68E+06	1.36E+06
5.50E-07	-3.08E-01	-6.95E-01	-2.02E+06	2.22E+06
6.00E-07	-3.87E-01	-5.69E-01	-1.11E+06	2.79E+06
6.50E-07	-4.16E-01	-4.22E-01	-5.14E+04	3.00E+06

(Continúa)

7.00E-07	-3.92E-01	-2.75E-01	1.01E+06	2.83E+06
7.50E-07	-3.17E-01	-1.45E-01	1.95E+06	2.29E+06
8.00E-07	-2.01E-01	-5.08E-02	2.63E+06	1.45E+06
8.50E-07	-5.94E-02	-3.27E-03	2.68E+06	4.29E+05
9.00E-07	9.00E-02	-8.86E-03	2.94E+06	-6.50E+06
9.50E-07	2.28E-01	-6.69E-02	2.52E+06	-1.65E+06
1.00E-06	3.36E-01	-1.70E-01	1.77E+06	-2.43E+06

APÉNDICE J

PREMIOS NOBEL DE FÍSICA*

1901	Wilhelm Konrad Röentgen	1845-1923	por el descubrimiento de los rayos X
1902	Hendrik Antoon Lorentz	1853-1928	por sus investigaciones sobre la influencia
	Pieter Zeeman	1865-1943	del magnetismo en los fenómenos de radiación
1903	Antoine Henri Becquerel	1852-1908	por su descubrimiento de la radiactividad espontánea
	Pierre Curie	1859-1906	por sus investigaciones conjuntas sobre los fenómenos de radiación
	Marie Sklowdowska-Curie	1867-1934	descubiertos por el profesor Henri Becquerel
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842-1919	por sus investigaciones de las densidades de los gases más importantes y por su descubrimiento del argón
1905	Philipp Eduard Anton v. Lenard	1862-1947	por su trabajo sobre los rayos catódicos
1906	Joseph John Thomson	1856-1940	por sus investigaciones teóricas y experimentales sobre la conducción de la electricidad en los gases
1907	Albert Abraham Michelson	1852-1931	por sus instrumentos ópticos de precisión y las investigaciones metrológicas llevadas a cabo con su ayuda
1908	Gabriel Lippmann	1845-1921	por su método para reproducir los colores fotográficamente basado en los fenómenos de interferencia
1909	Guglielmo Marconi	1874-1937	por sus contribuciones al desarrollo de la telegrafía
	Carl Ferdinand Braun	1850-1918	inalámbrica
1910	Johannes Diderik van der Waals	1837-1932	por su trabajo sobre la ecuacion de estado para los gases y los líquidos
1911	Wilhelm Wien	1864-1928	por sus descubrimientos con respecto a las leyes que gobiernan la radiación del calor
1912	Nils Gustaf Dalén	1869-1937	por su invento de los reguladores automáticos para usarse junto con los acumuladores de gas para iluminar los faros y las boyas
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853-1926	por sus investigaciones de las propiedades de la materia a bajas temperaturas que condujeron, entre otras cosas, a la producción del helio líquido
1914	Max von Laue	1879-1960	por su descubrimiento de la difracción de los rayos Röntgen en los cristales
1915	William Henry Bragg	1862-1942	por sus servicios en el analisis de la estructura cristalina por
	William Lawrence Bragg	1890-1971	medio de los rayos X
1917	Charles Glover Barkla	1877-1944	por su descubrimiento de los rayos X característicos de los elementos
1918	Max Planck	1858-1947	por su descubrimiento de los cuantos de energía
1919	Johannes Stark	1874-1957	por su descubrimiento del efecto Doppler en los rayos canal y la separación de las líneas espectrales en los campos eléctricos
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861-1938	por el servicio rendido a las mediciones de precisión en física a través de su descubrimiento de las anomalías en las aleaciones de acero-níquel
1921	Albert Einstein	1879-1955	por sus servicios a la física teórica, y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico
1922	Neils Bohr	1885-1962	por la investigación de la estructura de los átomos y de la radiación que emana de ellos
1923	Robert Andrews Millikan	1868-1953	por su trabajo sobre la carga elemental de electricidad y sobre el efecto fotoeléctrico
1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1888-1979	por sus descubrimientos e investigación en el campo de la espectroscopia de rayos X
1925	James Franck	1882-1964	por su descubrimiento de las leyes que gobiernan el
	Gustav Hertz	1887-1975	impacto de un electrón sobre un átomo

1926	Jean Baptiste Perrin	1870-1942	por su trabajo sobre la estructura discontinua de la materia, y especialmente por su descubrimiento del equilibrio de la sedimentación
1927	Arthur Holly Compton	1892-1962	por su descubrimiento del efecto que lleva su nombre
	Charles Thomson Rees Wilson	1869-1959	por su método para hacer visibles las trayectorias de las partículas cargadas eléctricamente por la condensación del vapor
1928	Owen Willans Richardson	1879-1959	por su trabajo sobre los fenómenos termoiónicos y especialmente por el descubrimiento de la ley que lleva su nombre
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892-1987	por su descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de los electrones
1930	Sir Chandrasekhara Ventaca Raman	1888-1970	por su trabajo sobre la dispersión de la luz y por el descubrimiento del efecto que lleva su nombre
1932	Werner Heisenberg	1901-1976	por la creación de la mecánica cuántica cuya aplicación ha conducido, entre otras cosas, al descubrimiento de las formas alotrópicas del hidrógeno
1933	Erwin Schrödinger	1887-1961	por el descubrimiento de nuevas formas productivas de la teoría atómica
	Paul Adrien Maurice Dirac	1902-1984	
1935	James Chadwick	1891-1974	por su descubrimiento del neutrón
1936	Victor Franz Hess	1883-1964	por el descubrimiento de la radiación cósmica
	Carl David Anderson	1905-1991	por su descubrimiento del positrón
1937	Clinton Joseph Davisson	1881-1958	por sus descubrimientos experimentales de la difracción de los
	George Paget Thomson	1892-1975	electrones por cristales
1938	Enrico Fermi	1901-1954	por sus demostraciones de la existencia de nuevos elementos radiactivos producidos por la irradiación con neutrones, y por su descubrimiento relacionado con las reacciones nucleares causadas por neutrones lentos
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901-1958	por el invento y desarrollo del ciclotrón y por los resultados obtenidos con él, especialmente en elementos radiactivos artificiales
1943	Otto Stern	1888-1969	por su contribución al desarrollo del método de rayos moleculares y su descubrimiento del momento magnético del protón
1944	Isidor Isaac Rabi	1898-1988	por su método de la resonancia para registrar las propiedades magnéticas de los núcleos (de los átomos)
1945	Wolfgang Pauli	1900-1958	por el descubrimiento del Principio de exclusión (principio Pauli)
1946	Percy Williams Bridgman	1882-1961	por el invento de un aparato para producir presiones extremadamente altas, y por los descubrimientos que hizo por ello en el campo de la física de altas presiones
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892-1965	por sus investigaciones de la física de la alta atmósfera, especialmente por el descubrimiento de la capa llamada Appleton
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897-1974	por su desarrollo del método de la cámara Wilson, y con ello sus descubrimientos en física nuclear y radiación cósmica
1949	Hideki Yukawa	1907-1981	por su predicción de la existencia de los mesones con base en el trabajo teórico sobre las fuerzas nucleares
1950	Cecil Frank Powell	1903-1969	por su desarrollo del método fotográfico para estudiar los procesos nucleares y sus descubrimientos, hechos con este método, con respecto a los mesones
1951	Sir John Douglas Cockcroft	1897-1967	por su trabajo pionero sobre la transmutación de los núcleos
	Ernest Thomas Sinton Walton	1903-	atómicos por partículas atómicas aceleradas artificialmente
1952	Felix Bloch	1905-1983	por su desarrollo de nuevos métodos de precisión para la resonancia
	Edward Mills Purcell	1912-	magnética nuclear y sus descubrimientos en conexión con ellos
1953	Frits Zernike	1888-1966	por su demostración del método de contraste de fase, especialmente por su invento del microscopio de contraste de fase
1954	Max Born	1882-1970	por su investigación fundamental en la mecánica cuántica, especialmente por su interpretación estadística de la función de onda
	Walther Bothe	1891-1957	por el método de coincidencia y sus descubrimientos a partir de ello
1955	Willis Eugene Lamb	1913-	por sus descubrimientos concernientes a la estructura fina del espectro del hidrógeno
	Polykarp Kusch	1911-	por su determinación de precisión del momento magnético del electrón
1956	William Shockley	1910-1989	por sus investigaciones sobre los semiconductores y su
	John Bardeen	1908-1991	descubrimiento del efecto transistor
	Walter Houser Brattain	1902-1987	
1957	Chen Ning Yang	1922-	por su penetrante investigación de las leyes de la paridad que
	Tsung Dao Lee	1926-	condujeron a importantes descubrimientos sobre las partículas elementales
1958	Pavel Alecksejecic Čerenkov	1904-	por el descubrimiento e interpretación del efecto Cerenkov
	Il'ja Michajlovic Frank	1908-1990	

	Igor' Evgen' evic Tamm	1895-1971	
1959	Emilio Gino Segrè	1905-1989	por su descubrimiento del antiprotón
	Owen Chamberlain	1920-	
1960	Donald Arthur Glaser	1926-	por el invento de la cámara de burbujas
1961	Robert Hofstadter	1915-1990	por sus estudios pioneros sobre la dispersión de los electrones por núcleos atómicos y por sus descubrimientos realizados concernientes a la estructura de los nucleones
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929-	por sus investigaciones concernientes a absorción de los rayos γ en resonancia y su descubrimiento a este respecto del efecto que lleva su nombre
1962	Lev Davidovic Landau	1908-1968	por sus teorías pioneras de la materia condensada, especialmente del helio líquido
1963	Eugene P. Wigner	1902-	por su contribución a la teoría del núcleo atómico y las partículas elementales, particularmente a través del descubrimiento y la aplicación de los principios fundamentales de la simetría
	Maria Goeppert Mayer	1906-1972	por sus descubrimientos concernientes a la estructura de capas del núcleo
	J. Hans D. Jensen	1907-1973	
1964	Charles H. Townes	1915-	por el trabajo fundamental en el campo de la electrónica cuántica que
	Nikolai G. Basov	1922-	condujo a la construcción de los osciladores y los amplificadores
	Alexander M. Prochorov	1916-	basada en el principio maser-láser
1965	Sin-itiro Tomonaga	1906-1979	por el trabajo fundamental en el campo de la electrodinámica
	Julian Schwinger	1918-	cuántica, con consecuencias de profunda penetración en la física
	Richard P. Feynman	1918-1988	de las partículas elementales
1966	Alfred Kastler	1902-1984	por el descubrimiento y desarrollo de métodos ópticos para el estudio de la resonancia Hertziana en los átomos
1967	Hans Albrecht Bethe	1906-	por sus contribuciones a la teoría de las reacciones nucleares, especialmente sus decubrimientos concernientes a la producción de energía en las estrellas
1968	Luis W. Alvarez	1911-1988	por su contribución decisiva a la física de las partículas elementales, en particular el descubrimiento de un gran número de estados de resonancia, hecho posible a través de su desarrollo de la técnica de emplear la cámara de burbujas de hidrógeno y el análisis de datos
1969	Murray Gell-Mann	1929-	por su contribución y descubrimientos concernientes a la clasificación de las partículas elementales y sus interacciones
1970	Hannes Alvén	1908-	por el trabajo fundamental y los descubrimientos en magneto-hidrodinámica con aplicaciones fructíferas en diferentes partes de la física del plasma
	Louis Néel	1904-	por el trabajo fundamental y los descubrimientos concernientes al antiferromagnetismo y el ferromagnetismo que condujeron a aplicaciones importantes en la física del estado sólido
1971	Dennis Gabor	1900-1979	por su descubrimiento de los principios de la holografía
1972	John Bardeen	1908-1991	por su desarrollo de una teoría de la superconductividad
	Leon N. Cooper	1930-	
	J. Robert Schrieffer	1931-	
1973	Leo Esaki	1925-	por su descubrimiento del efecto túnel en los semiconductores
	Ivar Giaever	1929-	por su descubrimiento del efecto túnel en los superconductores
	Brian D. Josephson	1940-	por su predicción teórica de las propiedades de una supercorriente a través de una barrera túnel
1974	Antony Hewish	1924-	por su descubrimiento de los púlsares
	Sir Martin Ryle	1918-1984	por su trabajo pionero en radioastronomía
1975	Aage Bohr	1922-	por el descubrimiento de la conexión entre el movimiento colectivo
	Ben Mottelson	1926-	y el movimiento de partícula y el desarrollo de la teoría de la
	James Rainwater	1917-1986	estructura del núcleo atómico basada en esta conexión
1976	Burton Richter	1931-	por su descubrimiento (independiente) de una partícula fundamental
	Samuel Chao Chung Ting	1936-	importante
1977	Philip Warren Anderson	1923-	por sus investigaciones teóricas fundamentales de la estructura
	Nevill Francis Mott	1905-	electrónica de los sistemas magnéticos y desordenados
	John Hasbrouck Van Vleck	1899-1980	
1978	Peter L. Kapitza	1894-1984	por sus inventos y descubrimientos básicos en física de bajas temperaturas
	Arno A. Penzias	1926-	por su descubrimiento de la radiación fósil (radiación cósmica de fondo en la región de las microondas)
	Robert Woodrow Wilson	1936-	

1979	Sheldon Lee Glashow	1932-	por sus modelos unificados de la acción de las fuerzas débiles y
	Abdus Salam	1926-	electromagnéticas y por su predicción de la existencia de
	Steven Weinberg	1933-	corrientes neutras
1980	James W. Cronin	1931-	por el descubrimiento de las violaciones de los principios
	Val L. Fitch	1923-	fundamentales de la simetría en la desintegración de los mesones K neutros
1981	Nicolaas Bloembergen	1920-	por su contribución al desarrollo de la espectroscopia láser
	Arthur Leonard Schawlow	1921-	
	Kai M. Siegbahn	1918-	por su contribución de la espectroscopia electrónica de alta resolución
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936-	por su método para analizar los fenómenos críticos inherentes en los cambios de la materia bajo la influencia de la presión y la temperatura
1983	Subrehmanyan Chandrasekhar	1910-	por sus estudios teóricos de la estructura y evolución de las estrellas
	William A. Fowler	1911-	por sus estudios de la formación de los elementos químicos en el Universo
1984	Carlo Rubbia	1934-	por sus contribuciones decisivas al gran proyecto que condujo al
	Simon van der Meer	1925-	descubrimiento de las partículas de campo W y Z, portadoras de la interacción débil
1985	Klaus von Klitzing	1943-	por su descubrimiento de la resistencia Hall cuantizada
1986	Ernst Ruska	1906-	por su invento del microscopio electrónico
	Gerd Binnig	1947-	por su invento del microscopico electrónico de barrido por efecto túnel
	Heinrich Rohrer	1933-	
1987	Karl Alex Müller	1927-	por su descubrimiento de una nueva clase de superconductores
	J. Georg Bednorz	1950-	
1988	Leon M. Lederman	1922-	por experimentos con haces de neutrinos y el descubrimiento del
	Melvin Schwartz	1932-	neutrino del muón
	Jack Steinberger	1921-	
1989	Hans G. Dehmelt	1922-	por su desarrollo de las técnicas para atrapar átomos individuales
	Wolfgang Paul	1913-	
	Norman F. Ramsey	1915-	por sus descubrimientos en la espectroscopia por resonancia atómica, que condujeron a los masers de hidrógeno y a los relojes atómicos
1990	Richard E. Taylor	1929-	por sus experimentos sobre la dispersión de los electrones por
	Jerome I. Friedman	1930-	núcleos, lo que revela la presencia de los quarks dentro de los nucleones
	Henry W. Kendall	1926-	
1991	Pierre-Gilles de Gennes	1932-	por descubrimientos respecto al ordenamiento de las moléculas en sustancias tales como los cristales líquidos, los superconductores y los polímeros

* Véase *Nobel Lectures, Physics*, Elsevier Publishing Company para las biografías de los premiados y las disertaciones dadas por ellos al recibir el premio.

APÉNDICE K

TABLAS

ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

=	igual a	~	es del orden de la magnitud de
≈	aproximadamente igual a	∝	es proporcional a
≠	no es igual a	lím	el límite de
≡	es idéntico a, se define como	Σ	la suma de
>	es mayor que	$\int$	la integral de
≫	es mucho mayor que	Δx	el cambio o diferencia en x
≥	es mayor que o igual a	$\lvert x \rvert$	el valor absoluto o la magnitud absoluta de x
<	es menor que	$\bar{x}$	el valor promedio de x
≪	es mucho menor que	df/dx	la derivada de f con respecto a x
≤	es menor que o igual a	$\partial f/\partial x$	la derivada parcial de f con respecto a x

LOS PREFIJOS DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Factor	*Prefijo*	*Símbolo*	*Factor*	*Prefijo*	*Símbolo*
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deca	d	10^{-18}	atto	a

ALFABETO GRIEGO

alfa	A	α	iota	I	ι	rho	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ	sigma	Σ	σ
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	my	M	μ	ípsilon	Y	υ
épsilon	E	ε	ny	N	ν	fi	Φ	ϕ
zeta	Z	ζ	xi	Ξ	ξ	ji	X	χ
eta	H	η	ómicron	O	o	psi	Ψ	ψ
theta	Θ	θ	pi	Π	π	omega	Ω	ω

ALGUNAS PROPIEDADES FÍSICAS

Aire (seco, a 20°C y 1 atm)	
Densidad	1.21 kg/m^3
Calor específico a presión constante	1010 J/kg · K
Razón de las capacidades caloríficas específicas	1.40
Velocidad del sonido	343 m/s
Resistencia a la disrupción eléctrica	3×10^6 V/m
Masa molar efectiva	0.0289 kg/mol
Agua	
Densidad	1000 kg/m^3
Velocidad del sonido	1460 m/s
Calor específico a presión constante	4190 J/kg · K
Calor de fusión (0°C)	333 kJ/kg
Calor de vaporización (100°C)	2260 kJ/kg
Índice de refracción (λ = 589 nm)	1.33
Masa molar	0.0180 kg/mol
Tierra	
Masa	5.98×10^{24} kg
Radio medio	6.37×10^6 m
Aceleración de la caída libre en la superficie de la Tierra	9.81 m/s^2
Atmósfera estándar	1.01×10^5 Pa
Periodo del satélite a 100 km de altitud	86.3 min
Radio de la órbita geosíncrona	42,200 km
Velocidad de escape	11.2 km/s
Momento dipolar magnético	8.0×10^{22} A · m^2
Campo eléctrico medio en la superficie	150 V/m, abajo
Distancia a:	
La Luna	3.82×10^8 m
El Sol	1.50×10^{11} m
La estrella más cercana	4.04×10^{16} m
El centro galáctico	2.2×10^{20} m
La galaxia de Andrómeda	2.1×10^{22} m
Borde del universo observable	~ 10^{26} m

ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS*

Velocidad de la luz	c	3.00×10^{8} m/s
Constante gravitatoria	G	6.67×10^{11} N · m²/kg²
Constante de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante universal de los gases	R	8.31 × J/mol · K
Relación masa-energía	c^2	8.99×10^{16} J/kg
		931.5 × MeV/u
Constante dieléctrica	e_0	8.85×10^{-12} F/m
Constante de permeabilidad	μ_0	1.26×10^{-6} H/m
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J · s
		4.14×10^{-15} eV · s
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J/K
		8.62×10^{-5} eV/K
Carga elemental	e	1.60×10^{-19} C
Masa de un electrón en reposo	m_e	9.11×10^{-31} kg
Masa de un protón en reposo	m_p	1.67×10^{-27} kg
Radio de Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T
		5.79×10^{-5} eV/T

*Para una lista más completa que muestre también los valores experimentales más usados, véase el apéndice B.

ALGUNOS FACTORES DE CONVERSIÓN*

Masa
1 kg = 1000 g = 6.02×10^{26} u
1 u = 1.66×10^{-27} kg

Longitud
1 m = 100 cm = 39.4 in = 3.28 ft
1 mi = 1.61 km = 5280 ft
1 in = 2.54 cm
1 nm = 10^{-9} m = 10 A

Tiempo
1 d = 86 400 s
1 año = $365\frac{1}{4}$ d = 3.16×10^{7} s

Volumen
1 L = 1000 cm³ = 10^{-3} m³ = 1.06 cuartos de galón
1 gal (U.S.) = 231 in³ = 3.79 L

Medidas angulares
1 rad = 57.3° = 0.159 rev
π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev

Velocidad
1 m/s = 3.28 ft/s = 2.24 mi/h
1 km/h = 0.621 mi/h

Fuerza y presión
1 N = 10^{5} dinas = 0.225 lb
1 Pa = 1 N/m² = 10 dinas/cm² = 1.45×10^{-4} lb/in²
1 atm = 1.01×10^{5} Pa = 14.7 lb/in² = 76 cmHg

Energía y potencia
1 J = 10^{7} erg = 0.239 cal = 0.738 ft · lb
1 kW · h = 3.6×10^{6} J
1 cal = 4.19 J
1 eV = 1.60×10^{-19} J
1 horsepower = 746 W = 550 · lb/s

Electricidad y magnetismo
1 T = 1 Wb/m² = 10^{4} gauss

*Véase el apéndice G para una lista más completa.

ALGUNAS TABLAS EN EL TEXTO

Tabla	*Capítulo*	*Página*
Algunas propiedades de tres partículas	27	8
Algunos campos eléctricos	28	17
Comprobación de la ley del inverso de los cuadrados de Coulomb	29	56
Algunas propiedades de los dieléctricos	31	104
La resistividad de algunos materiales a temperatura ambiente (20°C)	32	122
Valores típicos de algunos campos magnéticos	34	162
Resultados del efecto Hall en materiales seleccionados	34	171
Valores seleccionados de momentos dipolares magnéticos	34	177
Algunas ecuaciones del dipolo	35	191
Espines y momentos magnéticos de algunas partículas	37	240
Permeabilidad relativa de algunos materiales paramagnéticos a la temperatura ambiente	37	245
Permeabilidad relativa de algunas sustancias diamagnéticas a la temperatura ambiente	37	246
Los campos magnéticos en el sistema solar	37	249
Relaciones entre la fase y la amplitud en corrientes y voltajes alternos	39	283
Ecuaciones básicas del electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell)	40	302
La velocidad de la radiación electromagnética en el vacío (algunas mediciones seleccionadas)	42	335
Velocidad de la luz en materiales selectos	42	335
Algunos índices de refracción	43	350
Principales índices de refracción de varios cristales birrefringentes	48	464
Los números cuánticos del átomo de hidrógeno	51	539
Los estados del átomo de hidrógeno	51	547
Algunas propiedades eléctricas del cobre y el silicio	53	590
Propiedades de algunos superconductores	53	601
Algunos isótopos radiactivos naturales	54	622
La familia de los leptones	56	666
Algunos mesones seleccionados	56	666
Algunos bariones selectos	56	667
Las partículas de campo	56	667

ALGUNAS UNIDADES Y SUS ABREVIATURAS

ampere	A	litro	L
año	y	metro	m
atmósfera	atm	milla	mi
caballo de vapor	hp	minuto	min
caloría	cal	mol	mol
coulomb	C	newton	N
día	d	ohm	Ω
electronvolt	eV	pascal	Pa
farad	F	pie	ft
gauss	G	pulgada	in.
grado Celsius	°C	radián	rad
grado Fahrenheit	°F	revolución	rev
gramo	g	segundo	s
henry	H	tesla	T
hertz	Hz	unidad de masa atómica unificada	u
hora	h	unidad térmica británica	Btu
joule	J	volt	V
kelvin	K	watt	W
libra	lb	weber	Wb

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS CON NUMERACIÓN IMPAR

CAPÍTULO 27

1. 2.74 N sobre cada carga. **3.** 0.50 C. **5.** (*a*) 1.77 N. (*b*) 3.07 N. **7.** $q_1 = -4q_2$. **9.** 24.5 N, a lo largo del ángulo bisector. **11.** 1.00 μC y 3.00 μC, de signo opuesto. **13.** (*a*) Una carga $-4q/9$ debe localizarse sobre el segmento de línea que une a dos cargas positivas, a una distancia $L/3$ de la carga $+q$. **15.** $q = Q/2$. **17.** (*b*) 2.96 cm. **19.** $a/\sqrt{2}$. **23.** $\sqrt{\pi^3 m\epsilon_0 d^3/2qQ}$. **25.** 2.89×10^{-9} N. **27.** 3.8 N. **29.** 5.08 m abajo del electrón. **31.** 13.4 MC. **33.** (*a*) 57.1 TC; no. (*b*) 598 toneladas métricas. **35.** (*a*) Boro. (*b*) Nitrógeno. (*c*) Carbono.

CAPÍTULO 28

1. 10.5 mN/C, hacia el oeste. **3.** 203 nN/C, hacia arriba. **5.** 144 pC. **7.** 19.5 kN/C. **9.** 9:30. **11.** (*b*) Paralelo a p.

15. (*a*) $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$. (*b*) $\dfrac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\dfrac{(q_1-q_2)R}{(R^2+z^2)^{3/2}}$.

19. A la derecha. **25.** $R/\sqrt{3}$. **27.** (*a*) 104 nC. (*b*) 1.31×10^{17}. (*c*) 4.96×10^{-6}. **29.** (*a*) 6.50 cm. (*b*) 4.80 μC. **35.** $q/8\pi\epsilon_0 R^2$. **37.** (*a*) 6.53 cm. (*b*) 26.9 ns. (*c*) 0.121. **39.** (*a*) 585 kN/C, hacia la carga negativa. (*b*) 93.6 fN, hacia la carga positiva. **41.** 5*e*. **43.** 1.64×10^{-19} C (~ 2.5% más arriba). **45.** 1.2 mm. **47.** La placa superior; 4.06 cm. **49.** (*a*) Cero. (*b*) 8.50×10^{-22} N · m. (*c*) Cero. **51.** $2pE\cos\theta_0$. **53.** (*a*) $8q/\pi\epsilon_0 a^3$.

CAPÍTULO 29

1. -0.0078 N · m²/C. **3.** (*a*) $-\pi R^2 E$. (*b*) $\pi R^2 E$. **5.** 208 kN · m²/C. **7.** $q/6\epsilon_0$. **9.** 4.6 μC. **13.** (*a*) 22.3 N · m²/C. (*b*) 197 pC. **15.** (*a*) 452 nC/m². (*b*) 51.1 kN/C. **17.** (*a*) $-Q$. (*b*) $-Q$. (*c*) $-(Q+q)$. (*d*) Sí. **19.** (*a*) 53 MN/C. (*b*) 60 N/C. **21.** (*a*) 322 nC. (*b*) 143 nC. **23.** (*a*) Cero. (*b*) σ/ϵ_0, a la izquierda. (*c*) Cero. **25.** 5.11 nC/m². **27.** 5.09 μC/m³. **29.** (*a*) $q/2\pi\epsilon_0 Lr$, radialmente hacia adentro. (*b*) $-q$ en las superficies tanto interna como externa. (*c*) $q/2\pi\epsilon_0 Lr$, radialmente hacia afuera. **31.** -1.13 nC. **33.** (*a*) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$. (*b*) Cero. **35.** 270 eV. **37.** (*a*) 2.19 MN/C, radialmente hacia afuera. (*b*) 436 kN/C, radialmente hacia adentro. **39.** 97.9 cm. **41.** 0.557 *R*. **45.** (*b*) $\rho R^2/2\epsilon_0 r$.

CAPÍTULO 30

1. (*a*) 484 keV. (*b*) Cero. **3.** (*a*) 27.2 fJ = 170 keV. (*b*) 3.02×10^{-31} kg, en error por un factor de aproximadamente tres. **5.** (*a*) 3.0 kN. (*b*) 240 MeV. **7.** (*a*) 30 GJ. (*b*) 7.1 km/s. (*c*) 9.0×10^4 kg. **9.** (*a*) 256 kV. (*b*) 0.745*c*. **11.** 2.6 km/s.

13. $\dfrac{qQ}{8\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right]$. **15.** 2.17 d. **17.** (*a*) 24.4 kV/m. (*b*) 2.93 kV. **19.** (*a*) 132 MV/m. (*b*) 8.43 kV/m. **21.** (*a*) 32 MeV. **23.** (*a*) -3.85 kV. (*b*) -3.85 kV. **25.** -1.1 nC. **27.** (*a*) 0.562 mm. (*b*) 813 V. **29.** 637 MV. **31.** (*a*) $qd/2\pi\epsilon_0 a(a+d)$. **33.** (*a*) -5.40 nm. (*b*) 9.00 nm. (*c*) No. **37.** 186 pJ. **41.** (*a*) 4.5 m. (*b*) No. **45.** 746 V/m. **47.** -2.3×10^{21} V/m. **49.** -39.2 V/m.

51. (*a*) $\dfrac{k}{4\pi\epsilon_0}[\sqrt{L^2+y^2}-y]$. (*b*) $\dfrac{k}{4\pi\epsilon_0}\left[1-\dfrac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}\right]$.

(*d*) $3L/4$. **53.** (*a*) $V_1 = V_2$. (*b*) $q_1 = q/3$; $q_2 = 2q/3$. **55.** 840 V. **57.** 2.0×10^{-6}. **59.** (*a*) Cero. (*b*) Cero. (*c*) Cero. (*d*) Cero. (*e*) No. **63.** (*a*) 1.75 kV. (*b*) 7.40 cm. **65.** 9.65 kW.

CAPÍTULO 31

1. 7.5 pC. **3.** 3.25 mC. **5.** 0.546 pF. **7.** (*a*) 84.5 pF. (*b*) 191 cm². **11.** 9090. **13.** 7.17 μF. **15.** (*a*) 2.4 μF. (*b*) $q_4 = q_6 = 480$ μC. (*c*) $V_4 = 120$ V; $V_6 = 80$ V. **17.** (*a*) $d/3$. (*b*) $3d$. **19.** (*a*) 942 μC. (*b*) 91.4 V. **23.** (*a*) 45.4 V. (*b*) 52.7 μC. (*c*) 146 μC. **25.** (*a*) 50 V. (*b*) Cero. **27.** (*a*) $q_1 = 9.0$ μC, $q_2 = 16$ μC, $q_3 = 9.0$ μC, $q_4 = 16$ μC. (*b*) $q_1 = 8.40$ μC, $q_2 = 16.8$ μC, $q_3 = 10.8$ μC, $q_4 = 14.4$ μC. **29.** 200 nJ. **31.** (*a*) 28.6 pF. (*b*) 17.9 nC. (*c*) 5.59 μJ. (*d*) 482 kV/m. (*e*) 1.03 J/m³. **33.** 74.1 mJ/m³. **35.** (*a*) 2.0 J. **37.** (*a*) $2V$. (*b*) $U_i = \epsilon_0 AV^2/2d$; $U_f = \epsilon_0 AV^2/d$. (*c*) $\epsilon_0 AV^2/2d$. **39.** (*a*) $e^2/32\pi^2\epsilon_0 r^4$. (*b*) $e^2/8\pi\epsilon_0 R$. (*c*) 1.40 fm. **43.** 3.89. **45.** La lámina de mica. **47.** 86.3 nF. **49.** (*a*) 730 pF. (*b*) 28 kV. **51.** (*a*) $\epsilon_0 A/(d-b)$. (*b*) $d/(d-b)$. (*c*) $q^2 b/2A\epsilon_0$; tirada hacia adentro. **53.** 1.63 kV. **57.** (*a*) 13.4 kV/m. (*b*) 6.16 nC. (*c*) 5.02 nC. **59.** (*a*) 6.53. (*b*) 754 nC. **61.** (*a*) 85.6 pF. (*b*) 119 pF. (*c*) 10.3 nC; 10.3 nC. (*d*) 9.86 kV/m. (*e*) 2.05 kV/m. (*f*) 86.6 V. (*g*) 170 nJ.

CAPÍTULO 32

1. (*a*) 1.33 kC. (*b*) 8.31×10^{21}. **3.** (*a*) 9.41 A/m² norte. **5.** 0.400 mm. **7.** 0.67 A, hacia la terminal negativa. **9.** 7.1 ms. **11.** (*a*) 654 nA/m². (*b*) 83.4 MA. **13.** 52.5 min. **15.** (*a*) 95.0 μC. (*b*) 158°C. **17.** 0.59 Ω. **19.** (*a*) 1.5 kA. (*b*) 53 MA/m². (*c*) 110 nΩ · m; platino. **23.** (*a*) 250°C.

25. (*a*) 380 μV. (*b*) Negativa. (*c*) 4.3 min. **27.** 54 Ω. **29.** 3. **31.** (*a*) 6.00 mA. (*b*) 15.9 nV. (*c*) 21.2 nΩ. **33.** 1190 $(\Omega \cdot m)^{-1}$. **35.** (*a*) Cu: 55.3 A/cm^2; Al: 34.0 A/cm^2. (*b*) Cu: 1.01 kg; Al: 0.495 kg. **37.** (*a*) Plata. (*b*) 60.8 nΩ. **39.** 0.036. **41.** (*a*) 8.52 kΩ. (*b*) 4.51 μA. **43.** 7.16 fs. **45.** 18 kC. **47.** (*a*) 1.03 kW. (*b*) 34.5 centavos. **49.** (*a*) $4.46. (*b*) 144 Ω. (*c*) 833 mA. **51.** (*a*) 2.88×10^{11}. (*b*) 24.0 μA. (*c*) 1.14 kW; 23.1 MW. **53.** (*a*) 6.1 m. (*b*) 13 m. **55.** 27.4 cm/s. **57.** 311 nJ. **59.** (*a*) 37.0 min. (*b*) 122 min. **61.** (*a*) 1.37*L*. (*b*) 0.730*A*.

CAPÍTULO 33

1. 10.6 kJ. **3.** 13 h 38 min. **5.** -10 V. **7.** (*a*) 14 Ω. (*b*) 35 mW. **9.** (*a*) 44.2 V. (*b*) 21.4 V. (*c*) Izquierda. **11.** El cable. **13.** (*a*) 1.5 kΩ. (*b*) 400 mV. (*c*) 0.26%. **15.** (*a*) 3.4 A. (*b*) 0.29 V. *Y*: (*a*) 0.59 A. (*b*) 1.7 V. **17.** 4.0 Ω; 12 Ω. **19.** 7.5 V. **21.** 262 Ω o 38.2 Ω. **23.** (*a*) En paralelo. (*b*) 72.0 Ω; 144 Ω. **25.** (*a*) $\rho_A = 16.3\ n\Omega \cdot m$; $\rho_B = 7.48\ n\Omega \cdot m$. (*b*) $j_A = j_B = 62.3$ kA/cm^2. (*c*) $E_A = 10.2$ V/m; $E_B = 4.66$ V/m. (*d*) $V_A = 435$ V; $V_B = 195$ V. **27.** (*a*) *R*/2. (*b*) 5*R*/8. **29.** (*a*) 3*R*/4. (*b*) 5*R*/6. **31.** (*a*) R_2. (*b*) R_1. **33.** $\mathscr{E}/7R$.

35. $(50\ \text{kW})\left(\dfrac{x}{2000 + 10x - x^2}\right)^2$, *x* en cm.

37. (*a*) $i_1 = 668$ mA, hacia abajo; $i_2 = 85.7$ mA, hacia arriba; $i_3 = 582$ mA, hacia arriba. (*b*) -3.60 V. **39.** (*a*) 0.45 A. **41.** 0.90%. **45.** (*a*) Figura superior: 70.9 mA; 4.91 V; figura inferior: 55.2 mA; 4.86 V. (*b*) Fig. superior: 69.3 Ω; Fig. inferior: 88.0 Ω. **49.** 4.61. **51.** (*a*) 2.20 s. (*b*) 44 mV. **53.** 2.35 MΩ. **55.** (*a*) 955 pC/s. (*b*) 1.08 μW. (*c*) 2.74 μW. (*d*) 3.82 μW.

CAPÍTULO 34

1. 1: +; 2: –; 3: 0; 4: –. **3.** (*a*) 3.4 km/s. **5.** 8.2×10^9. **7.** 0.75k, T. **9.** (*a*) Hacia el este. (*b*) 6.27×10^{14} m/s^2. (*c*) 2.98 mm. **11.** (*a*) 0.34 mm. (*b*) 2.6 keV. **13.** (*a*) 1.11×10^7 m/s. (*b*) 0.316 mm. **15.** (*a*) 2600 km/s. (*b*) 110 ns. (*c*) 140 keV. (*d*) 70 kV. **19.** (*a*) K_p. (*b*) $K_p/2$. **21.** (*a*) $r_p\sqrt{2}$. (*b*) r_p. **23.** (*a*) $B(qm/2V)^{1/2}\Delta x$. (*b*) 7.91 mm. **25.** (*a*) $-q$. (*b*) $\pi m/qB$. **27.** (*a*) 0.999928*c*. **29.** Una partícula alfa. **31.** (*a*) 78.6 ns. (*b*) 9.16 cm. (*c*) 3.20 cm. **33.** 240 m. **39.** 37 cm/s. **41.** 467 mA; de izquierda a derecha. **43.** (*a*) 330 MA. (*b*) 1.1×10^{17} W. **45.** 4.2 C. **47.** -0.414k, N. **49.** (*a*) 0; 138 mN; 138 mN. **53.** $2\pi aiB$ sen θ, normal al plano del anillo, hacia arriba. **55.** 1.63 A. **57.** 2.1 GA. **59.** (*a*) -2.86k, A · m^2. (*b*) 1.10k, A · m^2.

CAPÍTULO 35

1. 7.7 mT. **3.** 12 nT. **5.** (*a*) 0.324 fN, paralela a la corriente. (*b*) 0.324 fN, radialmente hacia afuera. (*c*) Cero. **7.** 30.0 A, antiparalela. **9.** (*a*) 4. (*b*) $\frac{1}{2}$. **11.** (*a*) 2.43 A · m^2. (*b*) 46 cm. **13.** 2 rad. **15.** $\dfrac{\mu_0 i\theta}{4\pi}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)$, fuera de la figura.

19. (*b*) ia^2. **21.** $\left(\dfrac{\mu_0 i}{2\pi w}\right)\ln\left(1 + \dfrac{w}{d}\right)$; arriba. **25.** $\frac{1}{2}\pi i(a^2 + b^2)$.

29. (*c*) $\frac{1}{2}nia^2\,\text{sen}(2\pi/n)$. **31.** (*a*) $(2\mu_0 i/3\pi L)(2\sqrt{2} + \sqrt{10})$. (*b*) Mayor. **35.** 606 μN, hacia el centro del cuadrado.

37. (*b*) 2.3 km/s. **39.** (*a*) -2.5 μT · m. (*b*) Cero.

41. 6.0 μ T · m. **45.** (*a*) $\dfrac{\mu_0 ir}{2\pi c^2}$. (*b*) $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$. (*c*) $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\dfrac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}$. (*d*) Cero. **47.** $\mu_0 ir^2/2\pi a^3$. **49.** $3i_0/8$, hacia la página. **51.** 109 m. **53.** 272 mA. **55.** (*a*) Negativo. (*b*) 9.7 cm.

CAPÍTULO 36

1. 57 μWb. **3.** (*a*) 31 mV. (*b*) De derecha a izquierda. **5.** (*a*) 1.12 mΩ. (*b*) 1.27 T/s. **7.** (*b*) 58 mA. **9.** 4.97 μW. **11.** (*b*) No. **15.** (*a*) 28.2 μV. (*b*) De *c* a *b*. **17.** 80 μV; en sentido manecillas. **19.** Cero. **21.** $iLBt/m$, lejos de G. **23.** 455 mV. **27.** (*b*) Diseñarlo para que $Nab = (5/2\pi)$ m^2. **29.** 6.3 rev/s. **31.** 25 μC. **33.** (*a*) 253 μV. (*b*) 610 μA. (*c*) 154 nW. (*d*) 31.7 nN. (*e*) 154 nW **35.** (*a*) $\dfrac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\left(1 + \dfrac{b}{D}\right)$.

(*b*) $\dfrac{\mu_0 iabv}{2\pi RD(D + b)}$. **39.** $(Bar)^2\omega\sigma t$. **41.** (*a*) -1.20 mV. (*b*) -2.79 mV. (*c*) 1.59 mV. **47.** (*a*) 34 V/m. (*b*) 6.0×10^{12} m/s^2. **49.** (*a*) 0.15°.

CAPÍTULO 37

1. +3 Wb. **3.** (*a*) Estable. (*b*) Inestable. (*c*) Estable. (*d*) Inestable. **5.** $\left(\dfrac{\mu_0 iL}{\pi}\right)\ln 3$. **7.** (*a*) 514 GV/m. (*b*) 19.0 mT. **11.** 24 mJ/T. **13.** (*a*) 0.86 μT. (*b*) 0.68 A/m. **15.** 0.58 K. **17.** (*a*) 150 T. (*b*) 600 T. **19.** Sí. **23.** (*a*) 3.0 μT. (*b*) 9.0×10^{-29} J. **27.** (*a*) 630 MA. **31.** 1660 km. **33.** 61 μT; 84°.

CAPÍTULO 38

1. 100 nWb. **3.** 261 μH/m. **5.** (*a*) 600 μH. (*b*) 120. **7.** 7.87 H. **15.** $\left(\dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\right)\ln\dfrac{b}{a}$. **17.** 29.8 Ω. **19.** (*a*) 4.78 mH. (*b*) 2.42 ms. **21.** $42 + 20t$, V. **23.** 12 A/s. **25.** (*a*) $i_1 = i_2 = 3.33$ A. (*b*) $i_1 = 4.55$ A; $i_2 = 2.73$ A. (*c*) $i_1 = 0$; $i_2 = 1.82$ A, (*d*) $i_1 = i_2 = 0$. **29.** (*a*) 13.2 H. (*b*) 124 mA. **31.** 63.2 MJ/m^3. **33.** 150 MV/m. **35.** (*a*) 78 kJ. (*b*) 3.7 kg. **37.** (*a*) 117 H. (*b*) 225 μJ.

39. (*a*) $\mu_0 i^2 N^2/8\pi^2 r^2$. (*b*) $(\mu_0 N^2 hi^2/4\pi)\ln\dfrac{b}{a}$. **41.** 12 PJ. **45.** 123 mA. **47.** 38 μH. **51.** (*a*) 6.08 μs. (*b*) 164 kHz. (*c*) 3.04 μs. **53.** (*a*) No. (*b*) 6.1 kHz. (*c*) 16 nF. **55.** (*a*) 5800 rad/s. (*b*) 1.1 ms. **57.** (*a*) $q_m/\sqrt{3}$. (*b*) $t/T = 0.152$. **59.** (*a*) 6.0:1. (*b*) 36 pF; 220 μH. **61.** (*a*) 180 μC. (*b*) $T/8$. (*c*) 67 W. **63.** (*a*) Cero. (*b*) $2i$. **65.** $(L/R)\ln 2$. **67.** 8.7 mΩ. **69.** 2.96 Ω.

CAPÍTULO 39

1. 377 rad/s. **3.** (*a*) 3.75 krad/s. (*b*) 23.4 Ω. **5.** (*a*) 39.1 mA. (*b*) Cero. (*c*) 32.6 mA. (*d*) Tomando energía. **7.** (*a*) 6.73 ms. (*b*) 2.24 ms. (*c*) Capacitor. (*d*) 56.6 μF. **13.** 1.0 kV > $\mathscr{E}_m$. **15.** (*a*) 36.0 V. (*b*) 27.4 V. (*c*) 17.0 V. (*d*) 8.4 V. **17.** (*a*) 39.1 Ω. (*b*) 21.7 Ω. (*c*) Capacitivo. **19.** (*a*) 45°. (*b*) 76.0 Ω. **23.** 177 Ω. **25.** (*a*) 1.82 W. (*b*) 3.13 W. **27.** 100 V. **31.** (*a*) 0.74. (*b*) Se adelanta. (*c*) Capacitivo. (*d*) No. (*e*) Sí; no; sí. (*f*) 33 W. **33.** (*a*) 2.49 A. (*b*) 37.4 V; 153 V; 218 V; 65.0 V; 75.0 V.

(*c*) $P_C = P_L = 0$; $P_R = 93.0$ W.
37. 166 Ω; 315 mH; 14.8 μF. **39.** (*a*) 2.4 V.
(*b*) 3.2 mA; 160 mA. **43.** 10.

CAPÍTULO 40

3. $r = 2.5$ m; 10 m.
5. Cambiaría el potencial entre las placas a 1.0 kV/s.
7. (*a*) 1.84 A. (*b*) 140 GV/m · s. (*c*) 460 mA. (*d*) 578 nT · m.
9. (*a*) 840 mA. (*b*) Cero. (*c*) 1.3 A. **11.** (*a*) 623 nT.
(*b*) 2.11 TV/m · s. **13.** 2.27 pT.
19. 1900 km de radio, independientemente de su longitud.

CAPÍTULO 41

3. (*a*) 4.5×10^{24} Hz. (*b*) 10,000 km. **5.** 5.0×10^{-21} H.
7. 1.07 pT. **11.** 100 kJ. **13.** 4.62×10^{-29} W/m².
15. 78 cm. **17.** (*a*) 883 m. (*b*) No. **19.** (*a*) 6.53 nT.
(*b*) 5.10 mW/m². (*c*) 8.04 W.
21. (*a*) $\pm EBa^2/\mu_0$ en las caras paralelas al plano *xy*; cero a través de cada una de las otras cuatro caras. (*b*) Cero.
23. (*a*) 9.14 mW/cm². (*b*) 1.68 MW. **25.** (*a*) 76.8 mV/m.

(*b*) 256 pT. (*c*) 12.6 kW. **29.** (*a*) $\frac{\omega}{k} = c$; $E_m = cB_m$.

(*b*) $S = \text{sen}\, 2\omega t \,\text{sen}\, 2kx$.

31. (*a*) $E = \mathcal{E}/r \ln(b/a)$; $B = \mu_0\mathcal{E}/2\pi Rr$.
(*b*) $S = \mathcal{E}^2/2\pi Rr^2 \ln(b/a)$. **33.** 0.043 kg · m/s. **35.** 7.7 MPa.
37. (*a*) 586 MN. (*b*) 1.66×10^{-14}. **39.** (*a*) 94.3 MHz.
(*b*) +*z*; 960 nT. (*c*) 1.98 m⁻¹; 593 Mrad/s. (*d*) 110 W/m².
(*e*) 678 nN; 367 nPa. **41.** $I(2 - f)/c$. **45.** (*a*) 3.60 GW/m².
(*b*) 12.0 Pa. (*c*) 16.7 pN. (*d*) 2.78 km/s². **47.** 1.06 km².
49. (*b*) 585 nm.

CAPÍTULO 42

1. (*a*) 515 nm; 610 nm. (*b*) 555 nm; 541 THz; 1.85 fs.
3. (*a*) 8.68 años. (*b*) 4.4×10^6 Maños. **5.** 67 ps. **11.** Amarillo-naranja.
13. (*b*) 0.80*c*. **15.** ±0.0036 nm. **17.** (*a*) 1.66×10^{-5}.
(*b*) 0.83×10^{-5}. **19.** (*a*) 6 min. (*b*) 12 min. (*c*) 6 min.
23. (*a*) 0.067. (*b*) 10°; 7.0°; 2.2°. **25.** 4.43 nm. **27.** 78.9°.

CAPÍTULO 43

1. (*a*) 38.0°. (*b*) 52.9°. **3.** 1.56. **5.** 1.95×10^8 m/s.
7. 1.25. **9.** 1.5. **13.** 74 m. **15.** (*b*) 0.60 mm.
19. 43 mm. **21.** 750 m. **23.** $1.24 < n < 1.37$. **27.** (*a*) $2v$.
(*b*) v. **33.** 390 cm debajo de la superficie del espejo.
35. $I_{\text{nueva}} = (10/9)I_{\text{anterior}}$. **37.** Seis. **39.** (*a*) 405 nm. (*b*) 2.37 μm.
(*c*) 112°. **41.** (*a*) 72.07°. (*b*) De *A* a *B*.
43. (*a*) $n_{\text{líquido}} < n_{\text{vidrio}}$. **45.** 187 cm. **47.** (*b*) 0.170.
49. (*b*) 60.2 μs. **51.** (*a*) Sí. (*b*) No. (*c*) 43°.

CAPÍTULO 44

1. 11.0 cm. **3.** (*a*) +, +40, -20, +2, no, sí.
(*b*) Plano, ∞, ∞, -10, sí.
(*c*) Cóncavo, +40, +60, -2, sí, no.
(*d*) Cóncavo, +20, +40, +30, sí, no.
(*e*) Convexo, -20, +20, +0.50, no, sí.
(*f*) Convexo, -, -40, -18, +180, no, sí.
(*g*) -20, -, -, +5.0, +0.80, no, sí.
(*h*) Cóncavo, +8.0, +16. +12, -, sí. **9.** (*b*) 2.0. (*c*) Ninguno.
11. 12 cm a la izquierda de la lente. **13.** 2.5 mm.
17. (*a*) 40 cm. (*b*) 80 cm. (*c*) 240 cm. (*d*) -40 cm.
(*e*) -80 cm. (*f*) -240 cm. **23.** 22 cm. **27.** 30 cm a la izquierda de la lente divergente; virtual; derecha; $m = 0.75$. **29.** (*b*) No.
(*c*) La luz pasa sin desviarse.
31. (*a*) 73.6 cm del lado de la lente lejos del espejo.
(*b*) Real. (*c*) Derecha. (*d*) 0.289. **35.** 2.0 mm.
37. (*a*) 2.34 cm. (*b*) Más pequeños. **39.** (*a*) 5.3 cm. (*b*) 3.0 mm.
41. 103. **43.** 25 ms.

CAPÍTULO 45

1. (*a*) 0.22 rad. (*b*) 12°. **3.** 2.3 mm. **5.** 650 nm.
7. 0.103 mm. **9.** 600 nm. **13.** (*a*) 0.253 mm.
(*b*) Se intercambian los máximos y los mínimos. **17.** 3.2×10^{-4}.
19. 0°. **23.** (*a*) 1.21 m; 3.22 m; 8.13 m. **27.** 124 nm.
29. (*a*) 552 nm. (*b*) 442 nm. **31.** 215 nm. **33.** 643 nm.
35. 2.4 μm. **37.** 840 nm. **39.** 141. **41.** 1.89 μm.
43. (*a*) 34. (*b*) 45. **45.** 1.00 m. **47.** (*a*) 88%. (*b*) 95%.
49. 588 nm. **51.** 1.0003.

CAPÍTULO 46

1. 690 nm. **3.** (*a*) 0.430°. (*b*) 118 μm. **5.** (*a*) $= \lambda_a = 2\lambda_b$.
(*b*) Los mínimos coinciden cuando $m_b = 2m_a$. **7.** 173 μm.
9. 1.49 mm. **11.** (*a*) 0.186°. (*b*) 0.478 rad. (*c*) 0.926.
13. 5.07°. **15.** (*b*) 0; 4.493 rad; 7.725 rad; . . .
(*c*) -0.50; 0.93; 1.96; . . . **17.** (*a*) 137 μrad. (*b*) 10.4 km.
19. 51.8 m. **21.** 1400 km. **23.** 15 m. **25.** (*a*) 6.8°.
(*b*) Sin respuesta. **27.** (*a*) 0.35°. (*b*) 0.94°. **29.** (*b*) 70 μm.
(*c*) Tres veces el diámetro lunar.
31. $\lambda D/d$. **33.** (*a*) 3. **35.** (*a*) 5.0 μm. (*b*) 20 μm.

CAPÍTULO 47

1. (*a*) 3.50 μm. (*b*) 9.69°; 19.7°; 30.3°; 42.3°; 57.3°.
3. 523 nm. **5.** (*a*) 6.0 μm. (*b*) 1.5 μm.
(*c*) $m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$.
9. (*b*) A la mitad entre los máximos principales. (*c*) $I_m/9$.
13. 400 nm < λ < 635 nm. **15.** 3. **21.** 491. **23.** 3650.
25. (*a*) 9.98 μm. (*b*) 3.27 mm.
27. (*a*) 0.032 °/nm; 0.077 °/nm; 0.23 °/nm.
(*b*) 40,000; 80,000; 120,000. **31.** 2.68°. **33.** 26 pm; 39 pm.
35. 49.8 pm. **39.** 0.206 nm.
41. (*a*) $a_0/\sqrt{2}$; $a_0/\sqrt{5}$; $a_0/\sqrt{10}$; $a_0/\sqrt{13}$; $a_0/\sqrt{17}$.

CAPÍTULO 48

1. (*a*) -*y*. (*b*) $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = -cB \,\text{sen}\,(ky + \omega t)$.
(*c*) Polarizada linealmente; dirección *z*. **3.** (*a*) 2.14 V/m.
(*b*) 20.3 pPa. **5.** $\frac{1}{8}$. **7.** 27/128. **9.** 15.8 W/m².
11. (*a*) 0.16. (*b*) 0.84. **13.** (*a*) 53.1°. (*b*) Sí, ligeramente.
15. 55° 31′ a 55°46′. **17.** 12 μm. **21.** (*a*) Gira al plano de polarización en 90°. (*b*) Invierte el sentido de la polarización circular. (*c*) La luz permanece sin polarización.
23. (*a*) 2.90×10^{-14} kg · m²/s². (*b*) 2.88 h.

CAPÍTULO 49

1. 91 K. **3.** (*a*) 1.06 mm; microondas. (*b*) 9.4 μm; infrarrojos.
(*c*) 1.6 μm; infrarrojos. (*d*) 500 nm; visible. (*e*) 0.29 nm; rayos X.
(*f*) 2.9×10^{-41} m; rayos gamma duros. **5.** 580 mW.
9. (*a*) 138 K. (*b*) 21.0 μm. **11.** 1.44 W. **13.** 780 K.
15. (*b*) 6°C. **19.** $0.796T_E$. **21.** (*a*) 92.1%. (*b*) 58.2%.
23. (*a*) 1.4×10^{12}, 6.0×10^{12}, 1.4×10^{13}, Hz.
(*b*) 5.9, 25, 60, meV. (*c*) 27, 64, 120, N/m. **25.** (*a*) 1110 J.
(*b*) 713 J. **27.** (*a*) 2.11 eV. **29.** 1.17 eV. **31.** Ultravioleta.
33. Cesio, litio, bario. **35.** (*a*) No.
(*b*) 544 nm; verde. **37.** 172 nm. **39.** (*a*) 1.17 V. (*b*) 641 km/s.
43. 2.63 m². **45.** (*a*) La lámpara de infrarrojo.
(*b*) 1.97×10^{20}. **47.** (*a*) 3.10 keV. (*b*) 14.4 keV.

49. (*a*) 2.97×10^{20} s^{-1}. (*b*) 48,600 km. (*c*) 281 m. (*d*) 5.91×10^{18}/m$^2 \cdot$ s; 1.97×10^{10} m^{-3}. **51.** (*a*) 29.8 keV. (*b*) 7.19×10^{18} Hz. (*c*) 1.59×10^{-23} kg $\cdot$ m/s = 29.8 keV/*c*. **53.** 2.95 cm/s. **55.** (*a*) 2.87 pm. (*b*) 5.89 pm. **59.** 2.64 fm. **61.** (*a*) 4.86 pm. (*b*) -42.1 keV. (*c*) 42.1 keV. **63.** 42.6°. **65.** (*b*) 1.12 keV.

CAPÍTULO 50

1. (*a*) 1.7×10^{35} m. **3.** (*a*) 38.8 pm. (*b*) 1.24 nm. (*c*) 907 fm. **5.** (*a*) 3.51×10^6 m/s. (*b*) 64.4 kV. **7.** (*a*) 5.3 fm. **9.** 3.9×10^{-17} m. **11.** Un neutrón. **13.** (*a*) 7.77 pm. (*b*) 7.68 pm. **15.** 5.5°. **17.** (*a*) Los haces no están presentes. (*b*) 47°. **21.** 690 mHz. **23.** 76 μeV. **25.** 8.8×10^{-24} kg $\cdot$ m/s. **27.** $\lambda/2\pi$. **29.** (*a*) 1900 MeV. (*b*) 1.0 MeV. **31.** 88.3 eV. **33.** (*a*) 6.2×10^{-41} J. (*b*) 1.0×10^{-20}. (*c*) 3.0×10^{-18} K. **35.** (*a*) 8.74 keV. (*b*) 1.01×10^{-22} kg $\cdot$ m/s. (*c*) 98.5 pm. **37.** (*a*) $x = NL/2n$, $N = 1,3,5, \ldots, (n-1)$. (*b*) $x = NL/n$, $N = 0,1,2, \ldots, n$. **39.** (*b*) 0.0006. (*c*) 0.0003. **41.** (*a*) 9.2×10^{-6}. (*b*) 7.5×10^{-8}. **43.** 1.1×10^{104} años.

CAPÍTULO 51

3. 656.3, 486.1, 434.1, 410.2, 397.0 nm. **7.** 3.40 eV. **9.** (*a*) $n = 5 \rightarrow 3$. (*b*) Paschen. **11.** 66 neV; $E_2 = -3.4$ eV. **21.** (*a*) 54.4 eV. (*b*) 13.6 eV. **25.** (*b*) n^2. (*c*) n. (*d*) $1/n$. (*e*) $1/n^3$. (*f*) $1/n$. (*g*) $1/n^4$. (*h*) $1/n^4$. (*i*) $1/n^2$. (*j*) $1/n^2$. (*k*) $1/n^2$. **31.** (*a*) 3, 2, 1, 0, -1, -2, $-3\hbar$. (*b*) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, μ_B. (*c*) 30.0°, 54.7°, 73.2°, 90°, 107°, 125°, 150°. (*d*) $\sqrt{12}\hbar$. (*e*) $\sqrt{12}\mu_B$. **33.** (*b*) 0.358 meV; 1.07 meV; 2.15 meV. **37.** 72 km/s^2. **39.** $n = 4$; $l = 3$; $m_l = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$. **41.** $n \geq 5$; $l = 4$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$. **43.** $1, 0, 0, \frac{1}{2}$; $1, 0, 0, -\frac{1}{2}$. **45.** Todas las afirmaciones son verdaderas. **47.** 51 mT. **49.** (*a*) 2150 nm^{-3}; cero. (*b*) 291 nm^{-3}; 10.2 nm^{-1}. **51.** 1.85. **53.** 5.41×10^{-3}. **55.** 1.5×10^{-15}. **57.** 0.439. **59.** (*a*) $0.764a_0$; $5.236a_0$. (*b*) 0.981 nm^{-1} ; 3.61 nm^{-1}. **61.** 1.90×10^{-3}. **63.** (*a*) 11.4 meV. (*b*) 1.62 eV. **65.** (*a*) 0.284 pm. (*b*) 2.53 keV. (*c*) 490 pm.

CAPÍTULO 52

3. 9.84 kV. **5.** (*a*) 24.8 pm. (*b*) Sin cambio. (*c*) Sin cambio. **7.** -2.1 keV. **9.** 49.6 pm; 99.2 pm; 99.2 pm. **11.** (*a*) 19.7 keV; 17.5 keV. (*b*) Zr o Nb. **13.** (*a*) 5.72 keV. (*b*) 86.8 pm, 14.3 keV; 217 pm, 5.72 keV. **19.** (*a*) $2, 0, 0, \pm\frac{1}{2}$. (*b*) $n = 2$; $l = 1$; $m_l = 1, 0, -1$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$ **21.** Sólo el argón permanecería como gas inerte. **23.** (*a*) 1.84; 2.26. (*b*) 0.167; 0.119. **25.** 2.0×10^{16} s^{-1}. **27.** 3.2×10^7. **29.** 10,000 K. **31.** (*a*) Ninguno. (*b*) 51.1 J. **33.** 4.74 km. **35.** (*a*) No. (*b*) 0.11 μm. (*c*) 110 km.

CAPÍTULO 53

3. 5.90×10^{28} m^{-3}. **5.** (*a*) 0.90. (*b*) 0.69. (*c*) Sodio. **7.** (*a*) 1.00; 0.986; 0.500; 0.014; cero. (*b*) 700 K. **9.** 5.53 eV. **11.** 65.4 keV. **19.** 234 keV. **23.** 201°C. **27.** (*a*) 5.86×10^{28} m^{-3}. (*b*) 5.51 eV. (*c*) 1390 km/s. (*d*) 524 pm. **29.** (*a*) 52.1 nm. (*b*) 202. **31.** (*a*) 1.5×10^{-6}. (*b*) 1.5×10^{-6}. **35.** (*a*) 5.0×10^{21} m^{-3}. (*b*) 1.7×10^5.

37. 46 nm.

39.

aislante	ninguna	—
semi. ext.	donador	*n*
semi. int.	ninguna	—
conductor	ninguna	—
conductor	ninguna	—
semi. ext.	aceptor	*p*

41. (*a*) 0.74 eV por arriba de ella. (*b*) 5.6×10^{-7}. **43.** 20 GΩ; 90Ω. **45.** 1.1 eV; no. **47.** (*a*) 230 nm. (*b*) Ultravioleta. **49.** Opaco.

CAPÍTULO 54

1. 15.7 fm. **3.** 26 MeV. **11.** (*a*) 1.000000 u; 11.906830 u; 236.202500 u. **13.** ^{25}Mg: 10.01%; ^{26}Mg: 11.00%. **15.** (*a*) 19.81 MeV; 6.258 MeV; 2.224 MeV. (*b*) 28.30 MeV. (*c*) 7.075 MeV. **17.** (*b*) 7.92 MeV. **19.** (*a*) 2.59 fm. (*b*) Sí. **21.** (*a*) 4. (*b*) 148 neV. (*c*) 8.38 m. (*d*) Región de la radio. **23.** 280 d. **25.** (*a*) 64.2 h. (*b*) 0.125. (*c*) 0.0749. **27.** (*a*) 7.57×10^{16} s^{-1}. (*b*) 4.95×10^{16} s^{-1}. **29.** 3.84×10^{21}. **31.** (*a*) 59.5 d. (*b*) 1.18. **33.** 87.8 mg. **39.** (*a*) 3.65×10^7 s^{-1}. (*b*) 3.65×10^7 s^{-1}. (*c*) 6.41 ng. **43.** $Q_3 = -9.460$ MeV; $Q_4 = 4.679$ MeV; $Q_5 = -1.326$ MeV. **45.** (*a*) 31.85 MeV; 5.979 MeV. (*b*) 73 MeV. **47.** 1.17 MeV. **49.** (*a*) 874 fm. (*b*) 6.4 fm. (*c*) No. **51.** (*b*) 960.2 keV. **53.** 596 keV. **55.** 13 mJ. **57.** 39.4 μCi. **59.** 5.33×10^{22}. **61.** (*a*) 2.03×10^{20}. (*b*) 2.78×10^9 Bq. (*c*) 75.1 mCi. **63.** 730 cm^2. **65.** (*a*) 6.3×10^{18}. (*b*) 2.5×10^{11}. (*c*) 200 mJ. (*d*) 230 mrad. (*e*) 3.0 rem. **67.** (*b*) 27 TW. **69.** 1.78 mg. **71.** -1.855 MeV. **77.** (*c*) 3.9×10^7 m/s; 8.8×10^5 m/s; 15.6 MeV. **81.** (*a*) 5.5 MeV. **83.** (*a*) 5.10×10^{18} Hz. (*b*) 20.5 keV. **85.** (*a*) 3.55 MeV. (*b*) 7.72 MeV. (*c*) 3.26 MeV. **87.** (*a*) 7.19 MeV. (*b*) 12.0 MeV. (*c*) 8.69 MeV.

CAPÍTULO 55

1. (*a*) 34 kg. (*b*) 12 mg. **3.** (*a*) 2.56×10^{24}. (*b*) 81.9 TJ. (*c*) 25,900 años. **9.** (*a*) 13.9 d^{-1}. (*b*) 4.97×10^8. **11.** -23.0 MeV. **13.** 174 MeV. **15.** 231 MeV. **17.** (*a*) 253 MeV. **19.** $^{238}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{239}\text{U} \rightarrow {}^{239}\text{Np} + \text{e}$; $^{239}\text{Np} \rightarrow {}^{239}\text{Pu} + \text{e}$. **21.** 548 kg. **25.** 1.6×10^{16}. **27.** 566 W. **29.** (*a*) 44 kton. **31.** 24 g. **35.** 450 keV. **37.** (*a*) 170 kV. **39.** 24,800 años. **43.** (*a*) 4.0×10^{27} MeV. (*b*) 5.1×10^{26} MeV. **45.** 4.5 Gaños. **47.** (*a*) 4.1 eV/átomo. (*b*) 9.0 MJ/kg. (*c*) 1500 años. **51.** (*b*) 2.28×10^{42} J. (*c*) 1.85×10^8 años. **53.** (*a*) B: 5.19*N*, MeV. (*b*) A: $\frac{1}{2}N$ ^{3}H, $\frac{1}{2}N$ n; B: $\frac{1}{3}N$ ^{1}H, ^{4}He, n. **55.** $K_\alpha = 3.52$ MeV; $K_n = 14.07$ MeV. **57.** (*a*) 1000 km/s. (*b*) 2.0 μm.

CAPÍTULO 56

1. (*a*) 2.4×10^{-43}. (*b*) 8.1×10^{-37}. **3.** 2.84×10^{28} m. **5.** 769 MeV. **7.** 31 nm. **9.** 2.2×10^{-18} m. **11.** (*a*) Carga; número electrónico de leptones. (*b*) Energía relativista. **13.** *b*, *d*. **15.** (*a*) K$^+$. (*b*) $\bar{n}$. (*c*) π^0. **17.** (*a*) $\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$. (*b*) $\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$. **19.** (*a*) sud. (*b*) uss. **25.** 690 nm. **27.** (*b*) 2.39 GK. **29.** (*a*) 280 μeV. (*b*) 4.4 mm. **31.** (*a*) 1.6×10^{12} K. (*b*) 88 μs.

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

CAPÍTULO 27
Figura 2; Cortesía de Xerox Corporation. Figura 9: *Seattle Times*

CAPÍTULO 28
Figura 9: Cortesía de Educational Services, Inc.

CAPÍTULO 30
Figura 23: Cortesía de High Voltage Engineering Company. Figura 30: Cortesía de NASA.

CAPÍTULO 31
Figura 2: Cortesía de Spague Electric Company. Figura 8: Cortesía de Lawrence Livermore Laboratory. Figura 19: Cortesía de Pasco Scientific.

CAPÍTULO 34
Figures 1 y 2; D. C. Heath and Company with Education Development Center. Figura 3: Cortesía de Varian Associates. Figura 10: Cortesía de Professor J. le P. Webb, University of Sussex, Brighton, England. Figura 11: Cortesía de Argonne National Laboratory. Figura 13: Cortesía de Fermi National Accelerator Laboratory.

CAPÍTULO 37
Figura 5: Cortesía de GE Medical Systems. Figura 10: Cortesía de R. W. De Blois. Figura 12: Dr. Syun Akasofu/Geophysical Institute, University of Alaska, Copyright © 1977.

CAPÍTULO 40
Figura 6: Cortesía de Stanford Linear Accelerator Laboratory.

CAPÍTULO 41
Figura 2*a*: Cortesía de NASA. Figura 2*b*: Astronomical Society of the Pacific. Figura 3: Cortesía de AT&T Bell Labs. Figura 4: Cortesía de NASA. Figura 5: Astronomical Society of the Pacific. Figura 17: Cortesía de NASA.

CAPÍTULO 42
Figura 2: Oregon State University. Figura 3: Copyright © Fotocentre Ltd. Oamuaru, New Zealand. Figura 6: Cortesía de Mount Wilson and Mount Palomar Observatories.

CAPÍTULO 43
Figura 2: Education Development Center, Inc. Figura 3*a*: PSSC, *Physics, 2nd Ed.*, D. C. Heath and Co. with Education Development Center, 1965, Newton, Mass. Figura 20: Science Photo Library/Photo Researchers. Figura 21: Bell System.

CAPÍTULO 44
Figura 27: Cortesía de NASA.

CAPÍTULO 45
Figura 2: de *Atlas of Optical Phenomena* by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Figura 3: Education Development Center, Newton, Mass. Figura 16: Cortesía de Bausch & Lomb Optical, Co. Figura 18*b*: Cortesía de Robert Guenther.

CAPÍTULO 46
Figuras 1 y 2: de *Atlas of Optical Phenomena* by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Figura 3: de Sears, Zemansky, and Young, *University Physics*, 5th ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976. Figura 13: de *Atlas of Optical Phenomena*, by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Figura 15: Cortesía de Dr. G. D Shockman from D. C. Shingo, J. B. Cortnett, G. D. Shockman, *J. Bacteriology*, 138: 598-608, 1979. Figura 16: de *Atlas of Optical Phenomena*, by Cagnet et al., Springer-Verlang, Prentice-Hall, 1962.

CAPÍTULO 47
Figura 2: de *Atlas of Optical Phenomena*, by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Figura 14: W. Arrington and J. L. Katz, X-Ray Laboratory, Rensselaer Polytechnic Institute. Figuras 21 y 22: Ronald R. Erickson and Museum of Holography. Figura 23: de Rigden, "Physics and the Sound of Music", *Scientific American*, John Wiley & Sons, Inc., 1985.

CAPÍTULO 48
Figura 8: Copyright © R. Mark, *Experiments in Gothic Structure*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1982. Figura 9: Cortesía de Apple Computer, Inc. and Paul Matsuda. Figura 12: de Robert Guenther, *Modern Optics*, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

CAPÍTULO 49
Figura 1: Cortesía de Alice Halliday.

CAPÍTULO 50
Figura 1: Professor C. Jonsson, University Tübingen, Germany. Figura 2: Cortesía de G. Matteucci. Figura 24: Philippe Plailly/SPL/Photo Researchers.

CAPÍTULO 51
Figura 1: W. Finkelnburg, *Structure of Matter*, Springer-Verlan, 1964. Figura 14: American Institute of Physics, Neils Bohr Library, Margaret Bohr Collection.

CAPÍTULO 52 Figura 8: Dave Roback/AP/Wide World Photos. Figura 9: Roger Ressmeyer/Starlight Pictures. Figura 10: National Bureau of Standards.

CAPÍTULO 53
Figura 18: Cortesía de AT&T.

CAPÍTULO 55
Figura 12: Princeton University Plasma Physics Lab. Figura 14: Cortesía de Lawrence Livermore Laboratory. Figura 15: Los Alamos National Laboratory.

CAPÍTULO 56
Figura 1a: Cortesía de CERN. Figura 5: American Institute of Physics, Neils Bohr Library, Margaret Bohr Collection. Figura 7: Cortesía de AT&T.

ÍNDICE

A
Aberración, 339, 344
  cromática, 351, 386
  esférica, 386
Abertura circular, difracción, 426-428
Absorción, 571
Acción a distancia, 16
Acelerador, 165-166
  electrostático, 84-85
Agotamiento, zona de, 595
Agua, momento dipolar eléctrico, 31-32
Aislante, 3-4
  bandas de energía, 128-129
Alambre recto largo:
  ley de Ampère, 196
  ley de Biot-Savart, 189
Alfabeto griego, A-26
Ampere, 5, 118
Ampère, André-Marie, 188
Ampère, ley de, 195-201, 264, 297-299, 302
  cavidad resonante, 305
  integral de línea, 195
  solenoide de campo externo, 199, 200
  solenoides, 197-199
  toroides, 199
Amperímetro, 147
Amplificación:
  angular, 384-385
  lateral, espejos esféricos, 370, 374
Amplificación lateral:
  espejos esféricos, 371, 374
  lente delgada, 377
Analizador, 460
Ángulo:
  de desviación mínima, 352
  de incidencia, 349, 353
  de inclinación, 250
  de oblicuidad, 448
  de polarización, 462
  de reflexión, 349, 353
  de refracción, 349, 357
  plano, factores de conversión, A-10
  sólido, factores de conversión, A-10
Anillo(s):
  amperiano, 195-196
  de carga, 23-24
  de Newton, 406-407
Aniquilación partícula-antipartícula, 679
Anisotrópico, ópticamente, 463
Antena, transmisión de ondas electromagnéticas en una, 315
Antimateria, 679
Antineutrino, 618
Antinodos, 567
Área, factores de conversión, A-10
Arrastre:
  corriente de, 595
  velocidad de, 119
Átomo:
  aceptor, 592
  construcción del, 563-565
  donador, 591
  energía del, 637
  modelo nuclear del, 56-58
Átomo de hidrógeno, 531-553
  capa, 547
  densidad de probabilidad promedio ponderada, 550
  ecuación de Schrödinger, 536-538
  efecto Einstein-de Haas, 542
  efecto Zeeman, 552
  espectro, 533
  espín del electrón, 545-546
  estado base del, 548-549
  estados, 547
  estados excitados, 549-551
  estructura atómica, 551-553
  estructura fina, 551-552
  experimento de Stern-Gerlach, 542-545
  función de energía potencial, 537, 538
  ímpetu angular, 538-542
  masa reducida, 553
  número cuántico, 539
  principio de correspondencia, 536
  serie de Balmer, 531-533
  series de Lyman y Paschen, 532, 533
  subcapa, 547
  subcapa $n = 2$, $l = 1$, 551-552
  teoría de Bohr, 531-536

B
Balanza de torsión, 4
Balmer-Rydberg, fórmula de, 532
Balmer, serie de, átomo de hidrógeno, 531-532
Banda(s):
  apareamiento, 602
  de conducción, 590
  de conducción eléctrica, 587-588
  prohibida, conducción eléctrica, 587-588
  de valencia, 590
Bardeen-Cooper y Schrieffer, teoría de, 601
Barión, 665, 666, 671, A-9
  (número), conservación, 669
Barras de control, 642
Base, 599
BCS, teoría, 601
Benceno, estructura atómica del, 507
Bioluminiscencia, 332
Biot y Savart, ley de, 187-189
  aplicaciones, 189-193
    alambre recto largo, 189-190
    anillo circular de corriente, 190-193
Birrefringencia. *Véase* Doble refracción
Blindaje electromagnético, 227
Bohr, Niels, 531-533
  principio de complementariedad, 522-523
  principio de correspondencia, 521-522
Bohr, radio de, 535, 612
Bohr, teoría de, 531-536
  deducción de la, 534-536
  gráfica de Moseley, 562-563
  postulado de la frecuencia, 532-533
  postulado de los estados estacionarios, 532
Boltzmann, constante de, 481
Bombeo láser, 572
Botella magnética, 167
Bradley, James, 333
Bragg, ley de, 448-449
Bragg, W. L., 449
Bremsstrahlung, 560
Brewster:
  ángulo de, 462, 573
  ley de, 463
Brújula solar, 470

C
Caja negra, 126-127
Calibre de alambre, 131
Calor:
  corriente y flujo de, 124
  factores de conversión, A-12
Campo(s), 15-16
  escalares, 15
  estáticos, 15
  gravitatorio, 15-16
  de presión, 15
  de temperaturas, 15
  uniforme, 15-16
  de visión, 386
Campo eléctrico, 16-17
  cálculo del, 97
    a partir del potencial eléctrico, 80-82
  cálculo del potencial eléctrico, 72-73
  carga puntual, 17-20, 26-29
  de las cargas superficiales inducidas, 106-107
  conductor aislado, 48-49
  conservativo, 220
  dentro de un conductor, 117
  dipolo eléctrico, 19-20, 29-32
  distribución de carga continua, 22-26
  exterior, conductor en el, 83
  flujo, 43-45, 238
  fuerza de Lorentz, 163-164
  inducido, 218-221
  ley de Gauss, 49
  líneas de fuerza, 20-22, 79
  modelos de la onda electromagnética estacionaria, 513
  no conservativo, 220
  no uniforme, 29
  principio de superposición, 6, 18
Campo magnético, 159-177
  betatrón, 221
  cálculo numérico de la trayectoria, 168-169
  carga en movimiento en un, 160-164
  cargas circulantes, 164-169
  ciclotrón, 165-166
    frecuencia, 165
  definición, 161
  dipolo no uniforme, experimento de Stern-Gerlach, 543-545
  efecto Hall, 169-171
  energía
    almacenamiento, 261-264
    densidad, 263-264
  espejo magnético, 167-168
  factores de conversión, A-13
  flujo, 238
  frenado magnético, 215
  fuerza de Lorentz, 163-164
  imán de barra, 160, 162
  inducido, 298-301
  ley de Ampère, 196
  líneas del, 193
  momento de torsión en una espira de corriente, 174-176
  poloidal, 651
  regla de la mano derecha, 191, 193
  sincrotrón, 166-167
  sistema solar, 247-250
  Tierra, 168, 247-249
  toroidal, 651
  valores del, 162
Campo vectorial, 15
  flujo, 41-43
Cantidades:
  macroscópicas, 123
  microscópicas, 123
Capacidad calorífica:
  molar en sólidos, 483-486
  de los sólidos, 483-486
  teoría cuántica, 484-485

Capacidad de captación de la luz, 386
Capacitancia, 96
  analogía con el flujo de los fluidos, 96
  cálculo de la, 96-99
  capacitor de láminas paralelas con dieléctrico, 104, 105
  definición de la, 255
  equivalente, 99
Capacitor, 95-105
  cálculo de la diferencia de potencial, 97
  cargado, 95
  cilíndrico, 98
    capacitancia de un, 98
  circuitos de CA, 281-282
  con dieléctrico, 104
  esférico, 98
    capacitancia de un, 98
  en paralelo, 99-100
  de placas paralelas, 97-98, 102, 104
  en serie, 100
Capas, 547
  cascarón, teorema del, 51-52
Carga:
  en exceso, conductor aislado, 82-84
  en movimiento, fuerza magnética, 160-164
  negativa, 2-3
Carga eléctrica, 2-3
  conservación de la, 9-10
  cuantizada, 7-9
Carga elemental, 8
  medición, 28-29
Carga positiva, 2
  líneas de fuerza, 21
Carga puntual, 5
  campo eléctrico, 17-20, 26-29
  líneas de fuerza, 20-21
  potencial eléctrico debido a la, 73-75
  recolección de la, potencial eléctrico debido a la, 75-77
  sistema, energía potencial, 69-70
Carga superficial:
  densidad, 23
  inducida, 106
Cascarón esférico cargado, ley de Gauss, 51-52
Celda estándar, 148
Centro de curvatura, espejo, 370
Ciclo protón-protón en el Sol, 648
Ciclotrón, 165-166
Circuito(s):
  LR, 258-261
  de mallas múltiples, 144-147
  RC, 148-151
  véase también Circuito *LC*; circuito *RLC*; Circuitos de CA; circuitos de CC
Circuito cerrado simple, cálculo de la corriente, 139-140
Circuito eléctrico:
  LR, 258-261
  RC, 148-151
  transferencias de energía, 126-127
  véase también circuitos de CA; circuitos de CC; circuito *LC*; circuito *RLC*
Circuito *LC*, oscilación de un, 265
  amortiguado, 268-270
  analogía con el movimiento armónico simple, 266
  forzado, 269-270
Circuito *RLC*, 279-280
  análisis diferencial, 286
  análisis gráfico, 284-286
  análisis trigonométrico, 283-284
  diagrama de fasores, 284
  impedancia, 284
  de una sola malla, 283-286
  teorema del circuito cerrado, 283
Circuitos de CA, 279-289
  amplitud en, 280
  elemento capacitivo, 282
  elemento inductivo, 281
  elemento resistivo, 280-281
  potencia en, 286-287
  relaciones de fase y amplitud en, 283
  transformador, 288-289
  transitorios, 280
Circuitos de CC, 137-151
  cálculos de la corriente, 139-140
  circuitos de mallas múltiples, 144-147
  circuitos *RC*, 148-151
  conexiones, 145-146
  de Broglie, longitud de onda de, 503-504, 516-517
  de Broglie, onda de, 536, 537
  de Broglie, prueba de la hipótesis de, 504-507
  descarga de un capacitor, 150-151
  diferencias de potencial, 140-142
  fuerza electromotriz, 137-139
  intrumentos de medición, 147-148
  ramas, 144-146
  resistores en serie y en paralelo, 142-144
Cloruro de sodio, celda unitaria, 447
Cobre, propiedades eléctricas del, 590
Coeficiente de la amplitud:
  de reflexión, 407
  de transmisión, 407
Coherencia, 399-401
  longitud, tren de ondas, 413
Colector, 599
Colisión(es):
  electrón-red, 125
  fotón-electrón, 490-491
  red-electrones, 125
Complementariedad, principio de, 522
Comportamiento ondulatorio, 501-524
  coeficiente de transmisión, 519
  complementariedad, 523
  densidad de probabilidad, 512, 515
  ecuación de Schrödinger, 513-515
  experimento de Davisson-Germer, 504-505
  experimento de G. P. Thomson, 505-506
  frecuencias, 511
  funciones de onda, 512-513
  interferencia por una rendija doble, 501-502
  longitud de onda de de Broglie, 503-504, 516
  naturaleza dual onda-partícula, 522-524

nodos vibratorios, 513
ondas estacionarias electromagnéticas, 513-514
partículas, 501-503
partículas atrapadas y densidades de probabilidad, 513-518
principio de correspondencia, 521-522
principio de incertidumbre y difracción por una sola rendija, 510-511
prueba de la hipótesis de de Broglie, 504-507
relación de incertidumbre energía/tiempo, 511-512
relaciones de incertidumbre de Heisenberg, 509-511
tunelización por una barrera, 518-521
Compton:
Arthur H., 489
corrimiento de, 489-491
efecto, 489-492
Compuerta de transistor, 600
Conducción eléctrica, 581-602
aislantes, 591
bandas y bandas prohibidas, 587-588
conductores, 588, 590
electrónica óptica, 597-599
estadística de Fermi-Dirac, 584
función de probabilidad de Fermi-Dirac, 585
metales, 586-587
modelo del gas del electrón libre, 581
ocupación de los estados permitidos, 583-586
principio de exclusión de Pauli, 582
pn, 593-597
semiconductores, 590-591
semiconductores con impurezas, 591-593
superconductores, 600-602
transistor, 599-600
Conductividad, 122
Conductor aislado, 47-50
campo eléctrico externo, 48-50
capacitancia, 99
carga en exceso, 82-84
con cavidad, 48
Conductor, 3-4, 588, 590
bandas de energía en un, 128
campo eléctrico
externo, en un, 83
interno, en un, 117
cargado aislado, 47-50
corriente eléctrica por un, 118
dos conductores paralelos, 193-195
ley de Ohm, 123-124
Conexión Josephson, 148
Conexiones en paralelo de un capacitor, 99-100
Confinamiento:
inercial, reactor termonuclear, 650, 652-653
magnético, reactor nuclear, 651-652
tiempo de, reactor termonuclear, 650
Conservación:
de la carga, 9-10
de la extrañeza, 670
del número bariónico, 669
del número leptónico, 668-669
Constante(s):
de Avogadro, 484
capacitiva de tiempo, 149, 258
dieléctrica, 104
inductiva de tiempo, 259
físicas, tabla, A-3, A-24
fundamentales, A-3, A-24
de Rydberg, 531, 535
Contador Geiger, 64
Conversión, factores de, A-10-A-13, A-24
Correspondencia, principio de, 482, 516, 522
átomo de hidrógeno, 535-536
Corriente:
alterna, 279-280, *véase también* Circuitos de CA
balance de la, 194
calentamiento Joule, 217
densidad de, 119-121
de desplazamiento, 300-301
de difusión, 594
flujo de calor y, 124
fuerza magnética, 172-174
inducida, 212
inversa de saturación, 607
ley de Lenz, 214
paralela y antiparalela, 194
parásita o de Foucault, 215
Corriente, anillo de:
circular, ley de Biot y Savart, 190-193
momento de torsión o torca, 174-176
Corriente eléctrica, 117-119
conductor, 118
dirección, 118
red, 119
velocidad de arrastre, 119
Corriente inducida, 212
calentamiento de Joule, 217
ley de Lenz, 214-215
Cosmología:
Big Bang, 675-679
determinación de la edad del Universo, 686-687
edad del Universo, 684-687
nucleosíntesis, 680-684
radiación cósmica de fondo de microondas, 676
Cosmología del Big Bang, 675-679
expansión del Universo, 675-676
periodos, 674
radiación cósmica de fondo de microondas, 676
Coulomb, 5
Charles Augustin, 4
fuerza de, 612
Coulomb, ley de, 4-8
carga puntual, 17-18
constante en la, 188
forma vectorial, 6-7
de la ley de Gauss, 46
pruebas experimentales de la, 54-56
significación de la, 6
Cuadripolo, campo eléctrico de. 20
momento del, 34
Cuadripolo eléctrico, 77
Cuantización de la energía, 481-483

Cuanto, 315
física del. *Véase* Física cuántica
mecánica cuántica, polarización, 472
Cuarto de onda, placa de, 467-468
Cuerpos cargados, 2
Curie, 620

D
Datación radiactiva, 622-623
Datos astronómicos, A-4
Davisson-Germer, experimento de, 504-505
Debye, temperaturas de, 485
Debye y Scherrer, arreglo experimental de, 452-453
Densidad:
de estados ocupados, 584
factores de conversión, A-11
de probabilidad, 515, 548
Densidad de carga, 23
anillo de carga, 23-24
disco de carga, 24-25
línea de carga infinita, 25-26
lineal, 23
Densidad de estados, 582
banda de apareamiento, 602
Derivadas, A-15
Des, 165
Desarrollo:
exponencial, A-15
logarítmico, A-15
en multipolos, 77
Descarga en corona, 83-84
Desechos radiactivos, 643-644
Desintegración:
constante de, 615
energía de, 618
fisión nuclear, 640
Desintegracion alfa, 617-618
fusión termonuclear, 646
Desintegración beta, 615
energía de los electrones emitidos en la, 618
Desmagnetización adiabática, 245
Deuterio, núcleo del, 10
Deuterón, ciclo protón-protón, 648
Diamagnetismo, 241, 245-246
Dicroico, material, 464
Dieléctricos, 105-109
capacitor con, 103-105
carga superficial inducida, 106
consideración atómica, 105-107
ley de Gauss, 107-109
momento dipolar eléctrico inducido, 105
no polar, 105
polar, 105
propiedades, 104
Diferencia de potencial de contacto, 486
Diferencia de potencial eléctrico, 71
cálculo, 97
cargas puntuales, 73-74
valor absoluto, 97
Difracción, 347, 396, 417-432
por una abertura circular, 426-427
de electrones, 502
factor de, 429
de Fraunhofer, 419
de Fresnel, 419
modelo, disco, 418
y ondas en el agua, 347-348
rayos X, 446-449
rejilla de, 437, 441-443
por una rendija doble,
análisis con fasores, 431-432
combinada con la interferencia, 428-432
por una sola rendija, 419-422
intensidad, 422-426
surcada, rejilla de, 442
teoría ondulatoria de la luz, 417-419
Difracción por una rendija doble:
análisis con fasores de la, 431-432
combinada con la interferencia, 428-432
Difracción por una sola rendija, 419-422
intensidad, 422-426
principio de incertidumbre de Heisenberg, 510-511
Diodo(s):
emisores de luz, 597
de unión *pn*, gráfica corriente-voltaje, 124
Dipolo:
antena de, 315
campo no uniforme, experimento de Stern-Gerlach, 542-545
ecuaciones del, 191
eléctrico, 237-238
potencial debido a un, 75-77
momento inducido en un, 76
Dipolo eléctrico, 19-20, 76, 237-238
en el campo eléctrico, 19-20, 29-32
ecuaciones, 191
inducido, 105
líneas de fuerza, 20-22
momento del, 19
radiación, 315-316
Dipolo magnético, 176-177, 238
ecuaciones, 191
momentos, 177
Disco de carga, 24-25
Dispersión, 336
elástica, 623
inelástica, 623
poder de resolución, 443-446
Distancia focal:
espejos esféricos, 370
lente delgada, 378
Distancia del objeto, 369
Distribución de carga continua, 22-26
potencial eléctrico, 77-78
Distribución de carga, ley de Gauss, 50-54
Divergencia del haz en la amplitud del ángulo, 326
Divisor del haz, 409
Doble dispersión, 471

Doble refracción, 463-467
  analogía mecánica de la, 466-467
  definición, 463
  índices de refracción principales, 464
  ondas ordinarias y extraordinarias, 464
Dominios magnéticos, 247
Doppler, efecto. *Véase* Efecto Doppler
Dosis equivalente, 621
Drenaje, 600

E
Earnshaw, teorema de, 11
Ecuación de los fabricantes de lentes, 377
Efecto:
  de paralaje, 451
  Zeeman, átomo de hidrógeno, 552
Efecto Doppler:
  en la luz, 336-338
  paradoja de los gemelos, 340-341
  relativista, 336-337
    consecuencias, 340-341
    deducción, 338-340
  transversal, 340-341
Efecto Hall, 3, 169-171
  cuántico, 121
  cuantizado, 171
Einstein:
  Albert, emisión estimulada, 570-572
  -de Haas, efecto, 542
  postulados de, 339
  temperatura de, 485
  teoría del fotón de, 487-489
Electretos, 243
Electroimán, 160
Electromagnetismo, 1-2
  ecuaciones básicas, 297-298
  marcos de referencia, 200-201
Electrón:
  atrapamiento, 513-516
  configuración, 567
  de conducción, 3
    en los metales, 581-583
  de la coraza, 588
  densidad de probabilidad radial, 548
  difracción, 502
  distribución cuántica, 125
  distribución maxwelliana de velocidades, 125
  energía del, 55
    niveles de, 565
    de los emitidos, desintegración beta, 618
  espín, 545-546
  frecuencia de revolución en la órbita, 535
  ímpetu, 509
  masa reducida, 553
  probabilidad, 548
  propiedades, 8
  razón carga/masa, 164
  velocidad de arrastre del, 125
  -volt, 71
Electrones de conducción, 3, 125
  metales, 581-583
  velocidad de arrastre o de deriva, 587
Electrónica, 569
  óptica, 597-599
Electrostática, 2, 67-68
Elementos:
  abundancia relativa en el sistema solar, 682-683
  numeración, los rayos X y la, 561-563
  propiedades, A-5-A-6
  tabla periódica, A-7
Emisión:
  espontánea, 571
  estimulada, 570-572
Emisor, 599
Encanto, 674
Energía:
  almacenamiento
    campo eléctrico, 101-103
    campo magnético, 261-264
  apareamiento, 601
  de los átomos, 637-638
  banda prohibida, 128-129
  cinética, 486
  cuantización, 481-483
  densidad, campo magnético, 263-264
  desintegración, 617
  disociación, 575
  estado base, pozo, 516
  estados de, 128
  factores de conversión, A-12
  fisión nuclear, 638-641
  fotones, 488
  fusión termonuclear, 646-647
  ionización, 567
  niveles permitidos, 516
  del punto cero, 516
  sistemas oscilatorios, 266
  teorema clásico de la equipartición de la, 484
  -tiempo, relación de incertidumbre, 511
  transferencia
    circuito eléctrico, 126-127
    reversibilidad, 138-139
  transporte, 320-322
  de umbral, 623
Energía de amarre:
  curva, 614
  masas nucleares, 614
  neutrón, 640
Energía potencial:
  cambio en la, 71
  curva de, 588
  función de la, para el átomo de hidrógeno, 537-538
  sistema de cargas, 69-70
  variación de la, 587-588
Energía potencial eléctrica, 68-70
  almacenamiento de la energía, 101-103
Enlace:
  covalente, 575
  molecular, 575-576

Equilibrio (condición de), 651
Esfera aislada, capacitancia de una, 99
Esféricamente simétrica, distribución de la carga, ley de Gauss, 52-53
Espaciamientos interplanares, 448
Espectro(s):
  característico de rayos X, 560-561
  difracción de rayos X, 446-449
  electromagnético, 311-315
  holografía, 449-451
  ley de Bragg, 448-449
  de líneas, 492-494
Espectrógrafos, 442-443
  de prisma, 442
Espectrómetro de masas, 164
Espejo:
  cóncavo, 369
  convexo, 369
  ecuación del, 370-371
    deducción de la, 373-375
  magnético, 167-168
  plano, formación de la imagen, 354-356
  véase también Espejos esféricos
Espejo plano, formación de la imagen, 354-356
Espejos esféricos, 369-375
  amplificación lateral, 371, 374
  centro de curvatura, 370
  convenciones de signos, 371-372
  distancia focal, 370
  ecuación del espejo, 370-371
  trazado de rayos, 372
Espín:
  del electrón, 545-546
  nuclear, magnetismo, 614-615
  del neutrón, 546
Estado(s):
  base, 516
    átomo de hidrógeno, 548-549
  densidad de los, 582
  designaciones espectroscópicas, 565
  estacionarios, postulado, 532
  excitados del átomo de hidrógeno, 549-551
  metaestables, 571
  permitidos, llenados, 583-586
Estados excitados:
  átomo de hidrógeno, 549-551
  transiciones ópticas, 567-569
Estados ocupados, densidad de, 583-584
Estaño, isótopos, trayectorias de los procesos *r* y *l*, 683-685
Estrellas, fusión termonuclear en las, 648-649
Estructura:
  atómica de las capas, 626
  atómica y el átomo de hidrógeno, 553
  fina del átomo de hidrógeno, 551
  nuclear de capas, 626-627
Etanol, espectro de resonancia magnética nuclear del, 546
Éter, hipótesis del, 410
Extrañeza, 669-670

F

Factor:
  de calidad, 621
  de multiplicación, 642
Farad, 96, 211
Faraday, Michael, 1, 55, 103, 245
  experimentos de, 211-212
Fase, cambios en la reflexión, 407-408
Fasor(es):
  diagrama de, 280-281, 284
  difracción por una sola rendija, 424
  rotatorio, 402-403
Fechado radiactivo, 622-623
Femtómetro, 612
Fermat, Pierre, 353
  último teorema, 353
Fermat, principio de:
  ley de la refracción, 358
  ley de la reflexión, 353-354
Fermi, 612
  velocidad de, 586
Fermi-Dirac, función de probabilidad de, 585
  estadística, 584
Ferroeléctricos, 243
Ferromagnetismo, 241, 246-247
FET, 600
Fibras ópticas, 359-360
Física atómica, 559-576
  absorción, 571
  construyendo átomos, 564
  Einstein y el láser, 570-572
  emisión espontánea, 571
  espectro de rayos X, 559-561
  estructura molecular, 574-576
  luz láser, 569-570
  principios del láser, 572-574
  tabla periódica, 565-569
Física cuántica:
  cuantización de la energía, 481-483
  efecto Compton, 489-492
  efecto fotoeléctrico, 486-487
  espectros de líneas, 492-494
  teoría del fotón de Einstein, 487-489
Física nuclear, 609-628
  desintegración alfa, 617-618
  desintegración beta, 618-620
  desintegración radiactiva, 615-617
  espín nuclear y magnetismo, 614-615
  fechado o datación radiactiva, 622-623
  fuerza nuclear, 611-612
  masas nucleares y energías de amarre, 613-614
  medición de la radiación ionizante, 620-621
  modelo colectivo, 625-626
  modelo de la partícula independiente, 626-627
  modelos nucleares, 625-628
  radiactividad natural, 621-623
  radios nucleares, 612-613
  reacciones nucleares, 623-625
  terminología, 611

Fisión nuclear, 638-641
barrera de potencial, 640
desintegración, 639
espontánea, 654
parámetro de distorsión, 640
proceso básico, 638-639
prueba de fisionabilidad, 641
reacción en cadena, 642
reactor nuclear, 644-646
teoría, 640-641
Fizeau, Hippolyte Louis, 334
Flotadores, 418
Flujo:
campo eléctrico, 43-45
campo vectorial, 41-43
de los fluidos, analogía de la capacitancia, 96
magnitud, 41-42
Flujo magnético, 212
densidad del, 159
factores de conversión, A-13
regla de la mano derecha del, 319
Flúor, 567
Fluorescencia, 332
Fondo de microondas, radiación cósmica de, 676
Fórmula(s):
cuadrática, A-14
matemáticas, A-14-A-15
Fosforescencia, 332
Fósforo, 332
Fotocopiadora, 3
Fotodiodo, 597
Fotoeléctrico, efecto, 486-487
efecto del fotón de Einstein, 488
problema de la frecuencia, 487
problema de la intensidad, 487
problema del retraso del tiempo, 487
Fotoelectrones, 486
Fotones, 488
energía, 488
espectro de la energía, 681
producción de pares, 677
Fotónica, 569
Franklin, Benjamin, 3, 54-55
Fraunhofer, difracción de, 419
Frecuencia:
de corte, 487
natural, 269
postulado de la, 532-533
Frenado magnético, 215
Fresnel, Augustin, 417-418
Ftalocianina, estructura de la, 448
Fuente de la fem, resistencia interna, 140
Fuerza(s):
básica, 663
débil, 663
electrodébil, 664
electromagnética, 663
factores de conversión, A-12
fuerte, 612, 663
gravitatorias, 67-68, 663
de intercambio, 667
nuclear, 611-612
unificación de las, 663-664
Fuerza electromotriz, 137-139
inducida, 212
de movimiento, 215-218
resistencia interna, 140
Fuerza magnética:
carga en movimiento, 160-164
corriente, 172-174
deflectora, propiedades de la, 164
Función de probabilidad, 583
Fusión nuclear, 646
véase también Fusión termonuclear
Fusión por láser, 651-653
Fusión termonuclear, 646-653
ciclo protón-protón, 648
controlada, 649-651
confinamiento inercial, 652-653
confinamiento magnético, 651-652
energía cinética, 647
estrellas, 648-649
fusión por láser, 652-653
Sol y, 520

G

Galileo, velocidad de la luz, 333
Galvanómetro, 175
Gas:
de electrones, 125
inerte, 567
Gauss, 162
Carl Friedrich, 45
Gemelos, paradoja de los, 340-341
Generador:
de CA, 279
homopolar, 232
Gigante roja, 649, 682
Glashow-Weinberg-Salam, teoría de, 2
Gluones, 672-673

H

Hall, diferencia de potencial de, 170
voltaje, 170
Hall, Edwin H., 169
Halógenos, 567
Heisenberg, principio de incertidumbre de, 509
difracción por una sola rendija, 510-511
relaciones de incertidumbre, 509-511
vector del ímpetu angular, 539
Helio:
abundancia en el Universo, 681
átomos, patrón de la intensidad, 503
reacción de fusión, 682
Helio-neón, láser de gas, 572
Helmholtz, bobina de, 204
Henry, 211, 255
Joseph, 211

Hidrógeno:
atómico. *Véase* Átomo de hidrógeno
estructura molecular, 574-575
Histéresis, curva de, 247
Holografía, 449-451
Horno de inducción, 215
Hubble, Edwin, 675
parámetro de, 675-676, 687
Huygens, Christiaan, 352
Huygens, principio de:
ley de la reflexión, 352-354
ley de la refracción, 356-358
ondas pequeñas de, 465
superficies de onda de, 464

I

Imagen:
distancia, 369-370
formación de la:
espejo plano, 354-356
inversión, 355-356 invertida, 378
real, 354, 371
virtual, 354, 371

Imán, 159
de barra, campo magnético de un, 159-163
polos, 162
Impedancia, circuito *RLC*, 284
Ímpetu:
del electrón, 509-510
de la presión de radiación, 322-324
Ímpetu angular:
átomo de hidrógeno y el, 539-542
dirección del, 539-541
magnitud del, 538-539
orbital, magnetismo e, 541-542
componentes del, 240-241
intrínseco, 545
Impresora por chorro de tinta, 28
Incandescencia, 332
Inclinación, 250
Índice de refracción, 349
Índices de refracción principales, doble refracción, 463-465
Inducción:
horno de, 215
ley de Faraday, 298, 299, 302
magnética, 159
movimiento relativo, 222-224
véase también ley de la inducción de Faraday
Inductancia, 255-270
cálculo, 256-258
circuito *LR*, 258-261
definición, 255
oscilaciones electromagnéticas. *Véase* Oscilaciones electromagnéticas
solenoide, 256-257
toroide, 257
Inductor, 255
circuitos de CA, 282
enlaces del flujo, 256
con materiales magnéticos, 257-258
Instrumentos ópticos, 384-387
lupa, 384-385
microscopio compuesto, 385
telescopio refringente, 386-387
Integral lineal, 73
ley de Ampère, 195
Integrales, A-15
Intensidad:
difracción por una sola rendija, 422-426
interferencia por una rendija doble, 401-404
rejillas de difracción, patrón, 438
Interacción:
débil, extrañeza, 670
electrodébil, 2
electromagnética, extrañeza, 670
Interferencia, 395-410
circular, 406-407
coherencia, 399-401
constructiva, 395
destructiva, 395
de espesor constante, 406
factor, 429
franjas de, 396, 524
interferómetro de Michelson, 408-410
partículas, 501-503
patrón de, 396
en películas delgadas, 404-407
rendijas múltiples, 437-439
sistema de rendija doble, 428-431
suma de perturbaciones ondulatorias, 402-404
véase también Interferencia por una rendija doble
Interferencia por una rendija doble, 395-399, 524
análisis con fasores, 431-432
elecciones, 502
experimento de Young, 397-398
intensidad, 401-404
Interferometría holográfica, 451
Interferómetro, 408
de Michelson, 408-409
propagación, 409-410
Inversión de la población, 572
Ionizante, medición de la radiación, 620-621
Isótopos:
radiactivos, 622
trayectos de procesos r y l que conducen a, 685
Isotrópico, ópticamente, 463
Ives, H. E., 337

J

Joule, calentamiento de, 127
corriente inducida, 216-217

K

Kaones, 669-670
Kirchhoff:
klystrones, 305
primera regla, 145
segunda regla, 139

L

Lámina:
- infinita cargada, ley de Gauss, 50-51
- polarizadora, 458-461

Lantánidos, 567

Láser, 401, 569-570
- características de la luz, 569
- de diodo, 598-599
- fusión por, 651-653
- principios del, 572-574

Latitud magnética, 254

Laue, puntos de, 446

Lawson, criterio de, 650

LED, 597

Lente:
- convergente, 377-380
- divergente, 378-379
- *véase también* Lentes delgadas

Lentes delgadas, 377-382
- aproximación, 382
- convenciones de signos, 378-380
- convergencia, 378
- distancia focal, 377-378
- divergencia, 378-380
- longitud del camino óptico, 379-380
- primer punto focal, 379
- segundo punto focal, 379
- trazado de rayos, 380

Lenz, Heinrich Friedrich, 214

Leptones, 665-666, A-8
- pares de, 674

Ley:
- de Curie, 244
- de Faraday, cavidad resonante, 303, 305
- del inverso de los cuadrados, 56, 67
- de Joule, 127
- de Lenz, 214-215, 255
- de Malus, 460
- de la radiación de Planck, 481

Ley de Gauss, 45-58
- aplicaciones, 50-54
  - cascarón esférico cargado, 51-52
  - distribución de la carga esféricamente simétrica, 52-54
  - lámina infinita cargada, 50-51
  - línea infinita de carga, 50
- campo eléctrico, 48
- conductor aislado, 47-50
- dieléctricos, 107-109
- electricidad, 298, 302
- gravitación, 61
- magnetismo, 237-239, 298, 302
- pruebas experimentales, 54-56

Ley de inducción de Faraday, 211-224, 256, 298, 299, 302
- betatrón, 221-222
- campos eléctricos inducidos, 218-221
- experimentos de Faraday, 211-212
- fuerza electromotriz de movimiento, 215-218
- ley de Lenz, 214-215
- ondas viajeras, 318-320

Ley de la reflexión, 349
- deducción, 352-354
- principio de Fermat, 358
- principio de Huygens, 356-358

Ley de Ohm, 123-126
- visión microscópica, de la, 124-126

Ley de Snell, 349
- polarización y la, 463

Línea de carga infinita, 25-26
- ley de Gauss, 50-51

Líneas espectrales, 442

Líneas de fuerza, 20-22
- superficies equipotenciales, 79-80

Lloyd, experimento del espejo de, 408

Longitud:
- del camino óptico, 358
- factores de conversión, A-10
- del tubo, 385

Lorentz:
- fuerza de, 163-164
- transformación de, 339

Luminiscencia, 332

Luminosidad, 480

Luna, propiedades de la, A-4

Lupa, 384-385

Luz, 331-341
- coherente, 399
- dispersión, 469-471
- doble dispersión , 471
- efecto Doppler, 336-338
- espectro, 312
- espectros de líneas, 492-494
- incoherente, 399
- intensidad, láminas polarizadoras, 458-461
- láser, características del, 569
- ley de la radiación de Planck, 480-481
- no polarizada, dispersión de, 469-470
- polarizada, aplicaciones, 461
- propagación
  - en la materia, 336
  - interferómetro de Michelson, 409-410
- rayo extraordinario, 464
- rayo ordinario, 464
- teoría ondulatoria de la, 417-419
- velocidad de la, 332-336, 410
  - en la materia, 334-335
- visible, 331-332
- y radiación térmica, 477-480

Lyman, serie de, átomo de hidrógeno, 532-533

M

Magnetismo:
- atómico, 239-241
- efecto Einstein-de Haas, 542
- espín nuclear, 614-615
- ímpetu angular orbital, átomo de hidrógeno, 541-542
- ley de Gauss, 237-239
- nuclear, 241-242
- planetas, 247-250

Magnetización, 242-244
corriente, 299
valor de saturación, 244
Magnetón:
de Bohr, 240, 541, 614
nuclear, 614
Malus, Etienne Louis, 460
Marcos de referencia, electromagnetismo, 200-201
Masa(s):
atómica, unidades unificadas de, 613
factores de conversión, A-11
nucleares, energía de amarre, 613-614
reducida del electrón, 553
Materia:
naturaleza dual onda-partícula, 523-524
nuclear, densidad, 615
velocidad de la luz en la, 334-336
Material(es):
diamagnéticos, 245-246
ferromagnéticos, 246-247
inductores, 257-258
magnéticos, 244-247
óhmico, 124
paramagnético, 241, 244-245
Máximos secundarios, rejillas de difracción, 440
Maxwell, ecuaciones de, 2, 297-306
ondas electromagnéticas, 302
ondas viajeras, 317-320
oscilaciones de la cavidad, 303-306
simetría, 302
Maxwell-Boltzmann, estadística de, 584
Maxwell, James Clerk, 1-2, 301, 320
unificación del electromagnetismo, 2
Mesones, 665-666, 671, A-9
K, 669
Metal:
electrones de conducción, 581-583
conducción eléctrica, 586-587
resistividad, 586
función del trabajo, 587-588
-óxido-semiconductor, FET, 600
Michelson, Albert A., 334
interferómetro, 408-409, 570
propagación de la luz, 409-410
Microfarad, 96
Microondas:
espectro, 312
radiación de fondo, 313
cósmicas, 676
transmisión de, 458
Microscopio:
de barrido por tunelización, 520-521
compuesto, 385
efectos de difracción, 428
electrónico de difracción, 427
Millikan, Robert A., 28-29
aparato de la gota de aceite, 28-29
Modelo:
colectivo, 625-626
del electrón libre, 125, 581
de la fisión de gota de líquido, 625, 640
Modelos nucleares, 625-628
átomo, 56-58
Momento(s):
magnéticos intrínsecos, 240-241
de torsión en una espira de corriente, 174-176
Momento dipolar eléctrico inducido, 76
dieléctricos, 105-106
Monopolos magnéticos, 159, 238-239
Moseley, gráfica de, 562-563
teoría de Bohr, 562-563
Moseley, Henry G. J., 561
MOSFET, 600
Movimiento:
armónico, analogía de un circuito *LC* oscilatorio, 266
campos eléctricos no uniformes, 29
circular, velocidad angular, partícula cargada, 164-165
relativo, inducción, 222-224
Multímetro, 148
Multipolos, expansión en, 77
Muones, 364-365

N
Neutrino, 618
en la desintegración beta, 618
energía del Sol, 649
Neutrón:
balance, 642
reactor nuclear, 642-643
captura de, nucleosíntesis, 682-684
energía de amarre, 640
espín, 546
patrón de intensidad, 502-503
problema de captura, 642
problema de la energía, 642
problema de fuga, 642
propiedades, 8
quarks, 8
térmico, 506, 638
Neutrón térmico, 506, 638
prueba de la fisionabilidad, 641
No polarizada:
luz, dispersión, 469-470
onda, 458
Nobel, premios, de física, A-20-A-23
Nodos, 144-146
vibratorios, 513
NOVA, proyecto de fusión por láser, 652
Núcleo:
blanco, 623
compuesto, 626
descubrimiento, 609-611
emergente, 623
energía del, 637-638
equilibrio secular, 631
fisión nuclear, 638-641
fusión termonuclear, 646-647
proyectil, 623
residual, 623

Nucleones, 611
Nucleosíntesis, 680-684
  del Big Bang, 680-682
  captura de neutrones, 683-684
  partículas alfa, 681
  reacciones de fusión, 682
Núclidos, 611-612
  diagrama, 623
  propiedades de los, 613
  prueba de fisionabilidad, 641
  trayectos de los procesos *r* y *l*, 683-684
Número:
  atómico, 563, 611
  f, 388
  leptónico, conservación, 668-669
  mágico del electrón, 626
  mágicos del nucleón, 626
  másico, 611
  neutrónico, 611
  del nucleón, mágico, 626
  de orden, 348
Número cuántico, 482, 515, 533, 537
  átomo de hidrógeno, 539
  magnético, 539
  principio del, 564

O
Objeto virtual, 372
Oersted, Hans Christian, 1, 187
Ohm, 121
Ohmímetro, 147
Ojo:
  punto próximo, 385
  la sensibilidad como función de la longitud de onda, 331
Onda viajera:
  ecuaciones de Maxwell, 317-320
  emisión, 316
Onda(s):
  coherentes, 395, 399-401
  diferencia de fase, 399, 401, 422-424
  diferencia de la trayectoria, 399, 422-424
  funciones de, 512-513
  incoherentes, 395
  localizadoras
  no polarizada, 458
  óptica de, 347-348
  paquetes de, 507-509
  planamente polarizada, 458
  polarizada linealmente, 458
  de radio, espectro, 313-314
  reflejada, polarización, 462
  suma de perturbaciones de, 402-404
    en el espacio, 507-508
    en el tiempo, 508-509
  tren de, 400
    longitud de coherencia, 413
Ondas electromagnéticas, 311-324
  el cuanto y la física clásica, 472
  ecuaciones de Maxwell, 303
  estacionarias, 513-514
  generación, 315-317
  polarizadas linealmente, 316
  presión de la radiación, 322-324
  propagación, 320
  reflexión y refracción, 349-350
  transporte de energía, 320-322
  vector de Poynting, 320-322
  vectores de onda incidente, 323
  velocidad en el vacío, 334
  viajeras, ecuaciones de Maxwell, 317-320
Onnes, Kammerlingh, 129
Óptica:
  adaptable, 387
  física, 348
  geométrica, 347-348. *Véase también* Reflexión; Refracción
  ondulatoria, 347-348
  de rayos, 348
  sistemas compuestos, 383-384
Oscilaciones:
  amortiguadas, 268-270
  cavidad, ecuaciones de Maxwell, 303-306
  energía, 266
  forzadas, resonancia, 269-270
  frecuencia, 482
  véase también Circuito *LC*; Oscilaciones electromagnéticas
Oscilaciones electromagnéticas:
  amortiguadas y forzadas, 268-270
  análisis cualitativo, 264-266
  análisis cuantitativo, 266-268
Osciladores atómicos, 482
Osmio, isótopos del, formación de los procesos *r* y *l*, 685-686

P
Pantalla de cristal líquido, 461
Par:
  nucleón-antinucleón, 677-678
  partícula-antipartícula, 677
Paramagnetismo, 244-245
Pares de Cooper, 601-602
Paridad, 356
Partícula(s):
  atómicas, espines y momentos magnéticos, 240, 241
  de campo, 667, A-8
  comportamiento ondulatoria de las, 501-503
  compuesta, A-9
  densidad, reactor termonuclear, 650
  familias de, 664-668
  fundamental, A-8
  independiente, modelo de la, 626-627
  interacciones de, 661-664
    fuerzas básicas, 663
    unificación de las fuerzas, 663-664
  localización de una onda, 507-509
Partículas alfa, 609-611, 681
  fuerza de desviación, 610
Partículas, física de las:
  bariones, 664-667
  conservación del número bariónico, 669
  conservación del número leptónico, 668-669

encanto, 674
extrañeza, 669-670
familias de partículas, 664-668
leptones, 664-666
mesones, 664-667
modelo del quark, 670-675
partículas de campo y fuerzas de intercambio, 667-668
ψ(PSI), 674
Paschen, serie de, del hidrógeno atómico, 532
Pauli, principio de exclusión, 564, 582
Películas delgadas, interferencia en, 404-407
Penetración de barrera, 361
por ondas, 519
Periódica, tabla, A-7
configuraciones electrónicas, 567
energía de ionización, 567-568
estados excitados y transiciones ópticas, 567-569
Permeabilidad:
constantes de, 188-189, 243
materiales diamagnéticos, 245-246
materiales paramagnéticos, 245
Permitividad, constante de, 6
Picofarad, 96
Piones, 364-365
Placas, 95
de media onda, 475
Placas paralelas, capacitor:
almacenamiento de energía, 102
capacitancia, 98
con dieléctrico, 104
Planck:
constante de, 481-482
Max, 481
Planetas:
magnetismo, 247-250
propiedades, A-4
Plano(s):
familia de, 448
de incidencia, 349
óptico, 412
de polarización, 458
Plasma:
confinamiento, 168
temperatura, reactor termonuclear, 650
Polarización, 457-472
circular, 467-469
dirección de, 458
dispersión de la luz, 469-471
doble refracción, 463-467
mecánica cuántica, 472
plano de, 458
por reflexión, 461-463
Polaroid, 458
Polo:
norte magnético, 248
sur magnético, 248
Portadores:
de carga, densidad, semiconductores, 591
mayoritarios y minoritarios, 591
Positrones, distribución de la energía cinética, 619
Postulado de los estados estacionarios, 532
Potencia:
circuitos de CA, 286-287
factores de conversión, A-13
Potencial:
de frenado, 486-487
diferencias de, 140-142
de contacto, 486
gradiente de, 81
independencia de la trayectoria del, 141
Potencial eléctrico, 70-85
cálculo del campo eléctrico, 72-73, 80-82
carga puntual, 73-75
conductor aislado, 82-84
conductor en un campo eléctrico externo, 83
conjunto de cargas puntuales, 75-77
definición, 70
descarga en corona, 83-84
dipolo, 76
distribución de carga continua, 77-79
principio de superposición, 75
Potencial de frenado, 486
frecuencia teórica de corte, 487
Potenciómetro, 148
Poynting, vector de, 320-322, 458
Presión, factores de conversión, A-13
Priestley, Joseph, 55
Primer punto focal, lentes delgadas y el, 379
Principio:
de complementariedad, 522-523
de la mínima energía, 564
Principio de incertidumbre, 627
electrón atrapado en un pozo infinito, 517
Principio de superposición:
campo eléctrico, 7, 18
potencial eléctrico, 75
Problema de la radiación de cavidad, 570
Proceso:
l, 683-685
r, 683-684
Productos vectoriales, A-14
fórmulas matemáticas, A-14
Programas de computadora:
fuerzas dependientes de la posición, A-18-A-19
fuerzas dependientes de la velocidad, A-17-A-18
fuerzas dependientes del tiempo, A-16-A-17
Propiedades físicas, A-25
Protón:
distribución de la energía, 624
modelo del quark, 87
núcleo del Sol, 647
propiedades, 8
quarks, 8
Ψ (PSI), 512, 674
Pulsares, 313-314
Punto:
focal, 370
próximo, 385

Q
Quark-antiquark, combinaciones, 671-675
pares, 677-678
Quark, modelo del, 670-675
cargas eléctricas fraccionarias, 672
fuerza entre quarks, 672-673
nueva simetría, 674-675
protón, 87
Quarks, A-8, 8
fuerza entre, 672-673
pares de, 674
propiedades de los, 672
Quimioluminiscencia, 332

R
Rad, 621
densidad de probabilidad radial, 548
Radiación:
campo de, 316
cósmica, de fondo de microondas, 676-677
del cuerpo negro, 478
ímpetu de la presión de la, 322-324
infrarroja, espectro de, 312
naturaleza dual onda-partícula, 522-524
problema de la, 478
Radiación de cavidad, 478-479
curvas de radiancia espectral, 479
Radiación térmica, 312, 332, 477-480
espectro, 478
ley del desplazamiento de Wien, 479-480
ley de Stefan-Boltzmann, 478
radiación de cavidad, 478-479
radiancia espectral, 479
Radiactividad natural, 621-623
Radiador ideal, 478
Radiancia espectral, 479
Radio de Bohr, 535
Radioastronomía, 313
Radiómetros, 322-323
Radionúclidos, 611
Radios nucleares, 612-613
Radón, gas, 622
Ramas, 144-147
Rayleigh, criterio de, 427
Rayo(s):
extraordinario, 464
gamma, espectro de, 314
ordinario, 464
paraxiales, 374
Rayo, trazado:
espejos esféricos, 372
lente delgada, 380
Rayos X:
astronomía de, 314
característicos, 560-561
la numeración de los elementos y los, 561-563
continuos, 559-560
difracción de, 446-449
ley de Bragg, 448-449
espectro de, 314
Razón carga/masa, electrón, 163
Reacción(es):
endotérmica, 623
energía de umbral, 623
exotérmica, 623
de fusión, nucleosíntesis, 682
nucleares, 623-625
Reactancia capacitiva, 282
Reactor(es):
de agua a presión, 643-644
de fusión. *Véase* Reactor termonuclear
reproductores, 656
Reactor(es) nuclear(es):
agua a presión, 643-644
balance neutrónico, 642
captura por resonancia, 642
desechos radiactivos, 644
factor de multiplicación, 642
naturales, 644-646
principios básicos, 641-644
problema de fuga del neutrón, 642
problema de la captura del neutrón, 642
problema de la energía del neutrón, 642
reacción en cadena, 642
supercríticos, 642
tiempo de respuesta, 643
véase también Reactores termonucleares
Reactor termonuclear:
confinamiento inercial, 650, 652-653
confinamiento magnético, 651-652
fusión por láser, 652-653
requisitos, 650
tokamak, 651-652
Rectificador de diodo, 596-597
Red, 119
Reflector diedro, 350, 364
Reflexión, 348-352
coeficiente de amplitud, 407
difusa, 349
formación de la imagen, espejo plano, 354-356
interna total, 359-361
inversión de la imagen, 355-356
ley de la, 349
deducción de la, 352-354
ondas electromagnéticas, 349-350
polarización por, 461-463
rejillas de, 441
reversibilidad óptica y cambios de fase, 407-408
véase también Espejo
Reflexión interna total, 350, 359-361
frustrada, 361, 520
Refracción, 348-352
ley de la, 349
ondas electromagnéticas, 349-350
Regla:
del circuito cerrado, 139
de los nodos, 145
de selección, 568
Regla de la mano derecha:
campo magnético, 191-193

signo del flujo, 319
vector de Poynting, 321
Rejillas:
anchura de los máximos, 439-440
de difracción. *Véase* Rejillas de difracción
dispersión y poder de resolución, 443-446
máximos secundarios, 440
de reflexión, 441
de rendijas múltiples, 437-441
surcada, 442
Relación masa/energía, 613
Relatividad, electromagnetismo y, 302-303
Rem, 621
Renio, isótopos del, formación de los procesos *r* y *l*, 685-686
Resistencia, 121-123
equivalente, 143
interna, circuito de una sola malla, 140
ley de Ohm y, 123-126
o rigidez dieléctrica, 104
en términos microscópicos, 122-123
Resistividad, 121-123
coeficientes de temperatura, 123
conductores y semiconductores, 128, 591
metal, 586
semiconductores, 591
superconductores, 129
variación de la temperatura, 123
Resistor, 121, 127
circuito de CA, 279-282
conectado en paralelo, 142-143
conectado en serie, 143-144
diferencia de potencial en un, 260
velocidad de disipación de la energía, 286
Resolución, poder de, dispersión, 443-446
Resonador acústico, 303-304
Resonancia:
captura por, 642
condición, 165, 270, 284
magnética nuclear, 241, 546
oscilaciones forzadas, 269-270
Reversibilidad óptica en la reflexión, 407-408
Ritz, principio de combinación de, 555
Roemer, Ole, 333
Roentgen, 620
Rutherford, Ernest, 57, 609

S

Sal, enlace iónico, 576
Schrödinger, ecuación de, 513
átomo de hidrógeno 536-538
Segundo punto focal, lente delgada, 380
Semiconductor, 4, 127-129, 590-591
bandas de energía, 128
con impurezas, 591-593
extrínseco, 591
propiedades, 592-593
tipo *n*, 121
Serie, conexión en, capacitores, 100-101
Signos, convenciones de:
espejos esféricos, 371-372
lentes delgadas, 378-380
Signos y símbolos matemáticos, A-14, A-26
Silicio, propiedades eléctricas del, 590
Simetría:
cilíndrica, 26
de la inversión del tiempo, 468
Sincrotrón, 166-167
Sistema(s)
binario, 314
de cargas, energía potencial en un, 69-70
internacional de unidades. *Véase* Sistema SI
ópticos compuestos, 383-384
Sistema SI, A-1-A-2
campo eléctrico, 16
campo magnético, 162
capacitancia, 96
coulomb, 5
corriente eléctrica, 118
farad, 211
flujo magnético, 213
henry, 211, 255
potencial eléctrico, 71
prefijos, A-26
Snell. *Véase* Ley de Snell
Sodio, estados excitados, 568
Sol:
distribución de la energía del protón en el centro, 647
efecto tunelización por una barrera, 520
energía del neutrino, 649
propiedades del, A-4
radiación térmica, 332
Solenoide:
inductancia, 256-257
ley de Ampère, 198
campo fuera del, 199-200
Sólidos, capacidad calorífica de los, 483-486
Spin. *Véase* Espín
Stefan-Boltzmann, constante de, 478-479
ley de, 478
Stern-Gerlach, experimento de, 542-545
Stilwell, G. R., 337
Stokes, G. G., 407
Subcapa, 547, 565
densidad de probabilidad promedio ponderada, átomo de hidrógeno, 550
$n = 2$, $l = 1$, átomo de hidrógeno, 550
Superconducting Supercollider (SSC), 167
Superconductividad, 129-130
Superconductores, 600-602
Superficie(s):
equipotenciales, 79-80
gaussiana, 45
refringente, deducción de la fórmula, 376-377
Superficies esféricas refringentes, 375-379
fórmula de las, 377
lente delgada, 377-382
Supernova, ráfaga de neutrinos, 619
Surcado (en rejillas de difracción), 442

T
Telescopio refringente, 386-387
Telurio, isótopos, trayectorias del proceso *r* y *l*, 683
Temperatura:
  crítica, superconductores, 600
  Curie, materiales magnéticos, 246
  de superconductores, 129
Temperatura, coeficiente de, de la resistividad, 123
  en conductores y semiconductores, 128-129, 591
Teorema:
  del binomio, A-15
  de Pitágoras, A-14
Teorema del circuito cerrado, 259-262
  circuito *RLC*, 283-284
Teoría:
  cuántica, capacidad calorífica, 484-486
  de la gran unificación, 664
  ondulatoria de la luz, difracción, 417-419
  del todo, 664
Teoría de la relatividad:
  efecto Doppler, 337
    consecuencias del, 340-341
    deducción del, 338-340
  postulados de Einstein, 339
Termógrafo, 496
Tesla, 162, 213
Thomson, George P., prueba de la hipótesis de de Broglie, 505
Thomson, J. J., 163
Thomson, modelo de, 56
Tiempo:
  campos variables con el, 15
  factores de conversión, A-11
  fuerzas dependientes del, programas de computadora, A-16-A17
Tierra:
  campo magnético de la, 168, 248-249
  propiedades, A-4
Tierras raras, 567
Tokamak, 199, 651-652
Toner, 3
Toroide:
  inductancia, 257
  ley de Ampère, 199
Trabajo, factores de conversión, A-12
Trabajo, función de, 488-489
  metal, 587-588
Transformador, 288-289
  elevador, 288
  reductor, 288
Transiciones ópticas, 312
  estados excitados, 567-569
Transistor, 599-600
  de efecto de campo, 600
  de unión, 599
    npn, 599-600
    pnp, 599-600
Transmisión, coeficiente de amplitud de, 407
Tren de ondas, 400
  longitud de coherencia, 413
Triángulos, fórmulas matemáticas, A-14
Triboluminiscencia, 332
Trigonometría:
  expansiones, A-15
  funciones, A-14
  identidades, A-15
Tritio, 10
Túnel del laboratorio Fermi, 167
Tunelización por una barrera, 518-521

U
^{228}U, desintegración alfa del, 618
^{235}U:
  abundancia del, 685
  fisión nuclear, 638-640
^{238}U:
  abundancia, 685
  desintegración alfa, 617-618
Ultravioleta, espectro, 314
Uniones *pn*:
  conexión en polarización inversa, 596-597
  corriente de arrastre, 595
  corriente de deriva o arrastre, 595
  diodo rectificador, 596-597
  fenómeno de difusión y recombinación, 594
  LED, 597-598
  zona de agotamiento, 595
Universo:
  edad, 684-687
  expansión del, 675-676

V
Van Allen, cinturones de radiación de, 168
Van de Graaff, acelerador, 84-85
Velocidad(es):
  angular, movimiento circular, partícula cargada, 164-165
  distribución de Fermi de, 586
  de Fermi, 586
  factores de conversión, A-12
  fuerzas dependientes de la, programa de computadora, A-17-A-18
  selector de, 163-164
Vida media, 616
Viento solar, 249
Volt, 71, 138
Voltaje, Hall, 170
Voltímetro, 147-148
Volumen:
  densidad de carga, 23
  factores de conversión, A-11
von Klitzing, Klaus, 171

W
Weber, 213
Wien, ley del desplazamiento de, 479-480

Y
Young, Thomas, experimento de la doble rendija, 397-399